

Математическая модель для частичного демографического перехода

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement, Математическое и компьютерное моделирование сложных систем, Les Cordeliers, Париж, Франция, nicolas.bacaer@ird.fr

² Токийский университет, факультет математики, Токио, Япония, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ Университет Тлемсена, математический факультет, Тлемсен, Алжир, moussaouidz@yahoo.fr

резюме

Мы изучаем математическую модель для демографического перехода. Есть два возрастных класса и два уровня рождаемости. Взрослые с высокой фертильностью имитируют взрослых с низкой фертильностью. Когда коэффициент имитации увеличивается, популяция пересекает два порога, между которыми популяция увеличивается или уменьшается экспоненциально со стабильной смесью этих двух фертильностей. Этот частичный демографический переход напоминает ситуацию в некоторых странах Африки к югу от Сахары.

Ключевые слова: математическая модель, демографический переход, экспоненциальный рост

1. Введение

Демографический переход - это явление, охватывающее десятилетия. Население впервые видит снижение смертности. Затем с определенной задержкой рождаемость также падает. Из-за этого отставания население часто значительно увеличивается, что имеет важные экономические и социальные последствия [3].

Хорошо известная гипотеза модернизации утверждает, что низкий коэффициент рождаемости является результатом индивидуальной адаптации к модернизированной среде: индустриализация, урбанизация, изменения в образовательных и семейных стандартах. Однако трудно установить прямую связь между снижением рождаемости и многими показателями уровня социального развития. Поэтому мы ищем динамический механизм, чтобы понять разницу между изменением индивидуального отношения и макроскопическими статистическими данными.

Если мы проследим разделение на «три демографии» из [9], мы можем сказать, что демографический переход можно рассматривать с трех сторон: статистический, политический или математический. Именно с этого последнего угла, иллюстрируемого, в частности, работами Верхульста или Лотки [19, 12] и обобщенного, например, в [14], мы рассмотрим проблему.

С точки зрения математического моделирования демографический переход может быть представлен как экзогенный или как эндогенный. В первом случае население считается однородным, но модернизация условий жизни означает, что демографические параметры меняются со временем. Это приводит к неавтономным моделям [1].

Эндогенный подход, напротив, состоит в использовании автономных моделей, то есть коэффициентов, не зависящих от времени, с гетерогенной популяцией. Качественные изменения в результате взаимодействия между подгруппами населения. Демографический переход отчасти аналогичен эпидемии. Инновационные культурные нормы, которые уменьшают число рождений, могут передаваться от людей с низкой рождаемостью («инфицированных») традиционным людям с высокой рождаемостью («здоровые» люди), как в теории диффузии [18, 13]. Этот процесс передачи может быть вызван социально-экономическими и экологическими изменениями.

[8] недавно разработал эту эпидемиологическую точку зрения для теории распространения фертильности. Снижение рождаемости описывается как результат распространения тенденции иметь меньше детей. Их первая модель разделила население между людьми с высокой рождаемостью и людьми с низкой рождаемостью, $P_1(t)$ а также $P_2(t)$, Их числа развивались в соответствии с однородной дифференциальной системой первой степени

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 а также r_2 темпы роста изолированного населения, с $r_1 > r_2$, b коэффициент имитации, указывающий максимальную скорость, с которой люди с высокой рождаемостью принимают низкую рождаемость. Предполагается, что этот показатель линейно зависит от доли населения с низкой рождаемостью: $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$, С экологической точки зрения, это система хищников-жертв в духе Лотки и Вольтерры [20], но с нелинейной скоростью хищничества,

которая зависит только от соотношения двух популяций, как в модели Ардити и Гинзбурга [11, § 2.3]. Математический анализ очень прост. Достаточно заметить, что $f(t)$ является решением логистического уравнения. В соответствии с $b < r_1 - r_2$ или $b > r_1 - r_2$ общая численность населения имеет тенденцию к экспоненциальному росту r_1 или r_2 и это доля населения с низкой рождаемостью или с высокой рождаемостью, которая приближается к 0. Начиная с населения с высокой рождаемостью и нескольких лиц с низкой рождаемостью, демографический переход происходит, если и только если $b > r_1 - r_2$,

Затем [8] изучает возрастную версию той же модели. Поскольку возраст x был непрерывной переменной, это привело к системе уравнений в частных производных типа МакКендрика и фон Фёрстера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

с

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

В этой модели $m(x)$ это уровень смертности, $a_1(x)$ а также $a_2(x)$ показатели рождаемости. Математический анализ модели тогда более сложен, и были получены только очень частичные результаты. Как правило, больше нет одного порога, а два. Под первым порогом и выше второго порога существует единственное локально устойчивое тривиальное экспоненциальное решение (в смысле теории однородных систем), состоящее из особей с высокой рождаемостью в первом случае и низкой рождаемостью в второй случай. Между двумя пороговыми значениями, по крайней мере для определенных значений параметров (то есть с некоторыми дополнительными условиями, которые, безусловно, не являются оптимальными), можно было доказать существование нетривиального экспоненциального решения с индивидуумами, которые имеют разная рождаемость. единственность и устойчивость этого нетривиального решения не обсуждались. Для этого решения темп роста населения является промежуточным между двумя крайними случаями. Существует частичный демографический переход. Эта качественная разница с первой моделью априори не была очевидна.

Режим между двумя порогами казался анекдотическим в [8], поскольку мотивация исходила из демографии Японии. Демографический переход там настолько развит, что темпы прироста населения стали отрицательными. Мы за вторым порогом. С другой стороны, промежуточный режим может представлять интерес для некоторых стран Африки к югу от Сахары. Средняя рождаемость фактически снизилась, но намного меньше, чем предсказывали демографы [10]. Кроме того, трудности анализа системы уравнений в частных производных побуждают нас искать более простую модель для частичного демографического перехода.

Поэтому ниже мы изучаем модель с двумя возрастными классами (молодыми и взрослыми) вместо возраста, который постоянно меняется. Преимущество состоит в том, что он сохраняет одно и то же явление перехода при двух пороговых значениях. Это позволяет для более полного изучения. В частности, мы показываем, что нетривиальное решение уникально и что его область существования точно совпадает с областью неустойчивости тривиальных решений. Нам также удается доказать локальную устойчивость нетривиального решения.

Мы представляем модель в разделе 2 с ее тривиальными и нетривиальными экспоненциальными решениями. Мы изучаем устойчивость экспоненциальных решений в разделе 3, используя, в частности, критерий Рауса-Гурвица и теорию однородных дифференциальных систем первой степени. Об этой теории см. [6, с. 638] и книги [5, гл. 5], [7, гл. 4] и [16, гл. 4]. Поскольку система имеет размерность 4, стабильность нетривиального экспоненциального решения представляет собой трудность, которая отсутствовала в примерах вышеупомянутых ссылок и которая требовала использования программного обеспечения для формальных расчетов. В разделе 4 представлен числовой пример, целью которого является представление некоторых стран Африки к югу от Сахары. Раздел 5 предлагает гипотезу для глобальной асимптотики из-за отсутствия чтобы найти подходящую функцию Ляпунова. Хотя наша система проще, чем система уравнений в частных производных, анализ нашей модели, тем не менее, еще не завершен.

2 Модель и ее экспоненциальные решения

Мы определяем

- $X_1(t)$ количество молодых людей из фертильных семей
- $Y_1(t)$ количество взрослых в фертильных семьях
- $X_2(t)$ количество молодых людей из семей с пониженной рождаемостью
- $Y_2(t)$ количество взрослых в семьях с пониженной рождаемостью.

Мы предполагаем

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ а также $a_2 > 0$ плодородие ($a_1 > a_2$), $m > 0$ это смертность, $c > 0$ показатель перехода молодежи во взрослую жизнь, и $b > 0$ максимальная скорость, с которой взрослые с высокой рождаемостью принимают низкую рождаемость. Доля менее фертильных взрослых во взрослой популяции, $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ Вмешивается в эту модель. Напротив, во второй модели [8] это была доля лиц из семей с низкой рождаемостью в общей численности населения. Мы предполагаем $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ а также $Y_2(0) > 0$,

Мы определяем $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$, Вышеуказанная дифференциальная система может быть записана в следующем виде

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

с функцией F , которая является однородной векторной функцией степени один. Глобальное существование и позитивность решений системы (3) показаны как в демографических моделях с браком. См. Например [16, гл. 4]. Позитивность вытекает из того факта, что $dX_1/dt \geq 0$ если $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ если $Y_1 = 0$, так далее. При начальном условии, все компоненты которого строго положительны, каждый компонент даже остается строго положительным при всех $t > 0$. Глобальное существование является результатом неравенства, которому подчиняется все население

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ является «положительным экспоненциальным решением» системы (3), если

- $z = (z_i)$ вектор с $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) является решением нелинейной задачи на собственные значения $\lambda z = F(z)$.

Если (λ, z) такое решение и если $\alpha > 0$, то $(\lambda, \alpha z)$ это тоже решение. Мы говорим, что положительное экспоненциальное решение нормируется, если $\sum_i z_i = 1$,

Предложение 1. *Существует единственное нормированное положительное экспоненциальное решение вида $e^{\lambda t}(x_1, y_1, 0, 0)$*

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

Аналогично существует единственное нормированное положительное экспоненциальное решение вида $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

В случае $b_1 < b < b_2 c$

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

тогда существует единственное нормированное положительное экспоненциальное решение вида $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_2^*, x_2^*, y_1^*)$ с $x_1^* > 0$, $y_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ а также $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Доказательство. Для первого решения,

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

Следовательно, квадратное уравнение для λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

Два корня

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

но только тот, с +, приводит к положительным решениям (x_1, y_1) ,

Второе решение получается таким же образом путем замены индекса 1 на индекс 2.

Для третьего решения,

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

Мы не можем иметь $c + \lambda + m = 0$ в противном случае $y_1 = 0$, Итак, мы имеем $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ а также $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$, Следовательно, путем замены в двух других уравнениях и деления на y_1 или y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Вычитая эти два уравнения, мы получаем

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

Член справа в формуле для y_1/y_2 должен быть строго положительным. У нас есть

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

а также

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

Мы определяем $b_3 = 2(a_1 - a_2)$, У нас есть

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Кроме того, небольшой расчет показывает, что $Q(b_1) = 0$ а также $Q(b_2) = 1$, У нас также есть $b_1 < b_2 < b_3$, Мы заключаем, что

- на интервале $]0, b_1[$, $1/Q - 1$ является убывающей функцией, которая уменьшается от -1 до $-\infty$,
- на интервале $]b_1, b_2[$, $1/Q - 1$ является убывающей функцией, которая уменьшается от $+\infty$ до 0 ,
- на интервале $]b_2, b_3[$, $1/Q - 1$ все еще убывающая функция и $1/Q - 1 < 0$,
- на интервале $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ это возрастающая функция, и у нас еще есть $1/Q - 1 < 0$,

Итак, мы имеем $y_1/y_2 > 0$ только на интервале $]b_1, b_2[$, Формулы для x_1, y_1, x_2 а также y_2 возникают из (6) и стандартизации $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$, Это завершает доказательство.

Обратите внимание, что $b_1 < b_2$, Темпы роста λ^* определяется выражением (6) λ_1 до тех пор λ_2 на интервале $b_1 < b < b_2$,

Когда c сходится к $+\infty$, модель с двумя возрастными группами сводится к модели во введении с одной возрастной группой. Мы можем видеть, что два порога b_1 а также b_2 затем сходятся к одному порогу, равному $a_1 - a_2$,

3 Устойчивость экспоненциальных решений

С $i \in \{1, 2\}$ мы определяем

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

У нас есть $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$, Довольно простой расчет из системы (1) - (2) дает

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Пусть - нормированное экспоненциальное решение системы (1) - (2), $e^{\lambda t} z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$, У нас есть уравнения (4) - (5). Сложив четыре уравнения, получим

$$a_1y_1 + a_2y_2 = \lambda + m.$$

Мы выводим, что z является точкой равновесия системы (7) - (10). Говорят, что решение $e^{\lambda t} z$ является «асимптотически устойчивым» (соответственно неустойчивым), если z является асимптотически устойчивой (соответственно неустойчивой) точкой равновесия системы (7) - (10). Из теоремы Эйлера для однородных векторных функций (здесь степени первой) следует, что λ всегда является собственным значением матрицы Якоби функции F , определенной в (3) в точке z : $J_F(z)$, Верно,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

Согласно [6, с. 638], точка равновесия z асимптотически устойчива, если три собственных значения этой матрицы Якоби, отличных от λ , имеют вещественную часть, строго меньшую λ . Точка равновесия неустойчива, если одно из этих трех собственных значений имеет вещественную часть, строго большую, чем λ . Это то, что мы будем использовать в следующем предложении.

Предложение 2

- Нормализованное экспоненциальное решение предложения 1, $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$, асимптотически устойчив, если $b < b_1$, нестабильно, если $b > b_1$,
- Нормализованное экспоненциальное решение предложения 1, $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$, асимптотически устойчив, если $b > b_2$, нестабильно, если $b < b_2$,
- Нормализованное экспоненциальное решение предложения 1, $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, асимптотически устойчив для $b_1 < b < b_2$,

Доказательство. Как правило, если $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ с $y_1 + y_2 > 0$ и если $p = y_2/(y_1 + y_2)$ тогда мы имеем

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В первом случае мы имеем $p = 0$, поэтому

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

Наибольшее собственное значение верхнего левого блока λ_1 , Наибольшее собственное значение нижнего правого блока

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

Это возрастающая функция b . После некоторых расчетов получаем $\mu_2 > \lambda_1$ если $b > b_1$ а также $\mu_2 < \lambda_1$ если $b < b_1$,

Во втором случае мы имеем $p = 1$, поэтому

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b-m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

Наибольшее собственное значение нижнего правого блока λ_2 , Наибольшее собственное значение верхнего левого блока

$$\mu_1 = \frac{-b-c + \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

Это убывающая функция \bar{b} , потому что

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

После некоторых расчетов получаем $\mu_1 > \lambda_2$ если $b < b_2$ а также $\mu_1 < \lambda_2$ если $b > b_2$,

В третьем случае мы имеем $0 < p < 1$, Тогда из уравнения (6) следует, что

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Мы уже знаем, что λ^* собственное значение матрицы $J_F(z)$ определяется по (11). Вопрос состоит в том, чтобы знать, имеют ли три других собственных значения действительную часть строго ниже, чем λ^* , Другими словами, матрица $M = J_F(z) - \lambda^* I$ имеет нулевое собственное значение, и вопрос в том, имеют ли другие собственные значения строго отрицательную вещественную часть. У нас есть

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

Таким образом, характеристический полином имеет вид

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

С развитием в соответствии с первым столбцом, мы находим

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Для коэффициента ξ^3 , мы нашли

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

и после упрощения

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Для коэффициента ξ^2 , мы нашли

$$\begin{aligned} k_1 = & \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ & + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c, \end{aligned}$$

и после кропотливого упрощения

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Наконец, для коэффициента ξ мы использовали формальное программное обеспечение расчета Xcas (<https://www.xcasenligne.fr>), чтобы получить

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 также может быть написано в виде

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Так что три корня полинома $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$ имеют строго отрицательную вещественную часть, это необходимо и достаточно согласно критерию Рауса-Гурвица, что $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ а также $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, с. 134]. У нас есть $k_2 > 0$, с другой стороны, $k_1 > 0$ если $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ и, следовательно, в частности, для $b_1 < b < b_2$ потому что $b_2 < a_1 - a_2$, у нас также есть $k_0 > 0$ если $b_1 < b < b_2$. Осталось только доказать, что $k_1 k_2 - k_0 > 0$ если $b_1 < b < b_2$, Разрабатывая продукт $k_1 k_2$ и ранжируя числитель как многочлен от переменной b , мы получаем

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Мы группируем некоторые части:

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Все члены в квадратных скобках строго положительны, потому что $b < b_2 < a_1 - a_2$, у нас есть таким образом $k_1 k_2 - k_0 > 0$, Следовательно, третье решение асимптотически устойчиво для $b_1 < b < b_2$.

4 Пример

Давайте принимать $a_1 = 10\%$ в год. Напомним, что этот параметр равен числу рождений в семьях с высокой рождаемостью, деленному на взрослое население с высокой рождаемостью, а не рождаемости, обычно используемой в демографии, которая делится на общую численность населения. Давайте также возьмем: $a_2 = 4\%$ в год, $c = 5\%$ в год, так $1/c = 20$ годы и $m = 2\%$ в год. Следовательно, ожидаемая продолжительность жизни при рождении $1/m = 50$ года. Напомним, что в 2017 году ожидаемая продолжительность жизни мужчин и женщин составляла, например, 52 и 55 лет в Кот-д'Ивуаре, 51 и 54 года в Чаде, 50 и 53 года в Центральной Африке [15].

С этими значениями параметров мы получаем $\lambda_1 = 3\%$ в год и $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ в год, $b_1 = 3\%$ в год и $b_2 \simeq 3,9\%$ в год. Рисунок 1 показывает разные темпы роста λ_1 , λ^* а также λ_2 как функция b . У нас есть частичный демографический переход, если $b_1 < b < b_2$ с темпом роста λ^* , Для сравнения, естественный прирост составляет 2,4% в Кот-д'Ивуаре, 3,3% в Чаде и 2,2% в Центральной Африке. Поэтому Чад скорее будет в случае, когда $b < b_1$ в то время как две другие страны находятся в промежуточном $b_1 < b < b_2$.

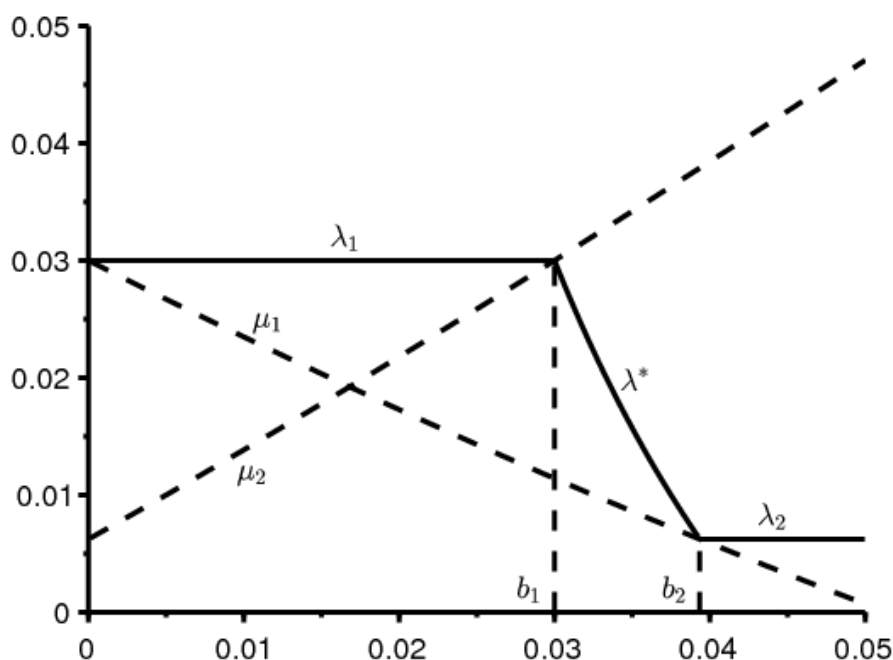


Рисунок 1. Асимптотические темпы роста населения λ_1 , λ^* а также λ_2 (сплошная линия) как функция коэффициента имитации b (по абсциссе). Собственные значения μ_1 а также μ_2 расставлены

По этой модели мы можем рассчитать долю «молодых людей» в популяции. Эта пропорция

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

если $b < b_1$, Эта пропорция

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

если $b > b_2$, Однако, учитывая структуру модели, эти «молодые люди» имели бы средний возраст $1/(c + m) \simeq 14,3$ года. Поэтому сложно сравнивать с демографической статистикой. Согласно [15], доля детей в возрасте до 15 лет составляет 43% в Кот-д'Ивуаре, 48% в Чаде и 44% в Центральной Африке.

Коэффициент рождаемости

- $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$ на 1000 жителей, если $b < b_1$,
- $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$ на 1000 жителей, если $b > b_2$,

Для трех рассмотренных стран эти цифры составляют порядка 37, 46 и 36 на 1000 жителей.

Таким образом, значения, выбранные для параметров, не являются слишком нереальными.

5 Асимптотическое поведение

Исследование стабильности было пока только локальным. Система имеет размерность 4 и лучше всего сводится к системе размерности 3. Кажется невозможным использовать теорему Пуанкаре-Бендиксона для определения глобальной асимптотики. В демографической модели с браками [16, гл. 4], система была размерностью два.

Также трудно найти подходящую функцию Ляпунова. Наша однородная система, безусловно, может превратиться в систему только с линейными или квадратичными членами, если принять за новые неизвестные $X_1/(Y_1 + Y_2)$, $Y_1/(Y_1 + Y_2)$, $X_2/(Y_1 + Y_2)$ а также $Y_2/(Y_1 + Y_2)$, Но функция Ляпунова с логарифмическими слагаемыми, используемыми, например, в [2] для определенного класса таких систем, не кажется подходящей.

Вдохновлен линейной популяционной моделью [4, с. 80], однако мы получаем следующее предложение.

Предложение 3. Функция

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

всегда положительно и уменьшается.

Доказательство. Мы определяем более широко $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ с $k > 0$, у нас тогда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = e^{-2\lambda t} X_1[-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c+m)X_1] \\ + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ а также $Y_2(t) > 0$, Таким образом, член с фактором b является отрицательным

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

При условии, что $\lambda + c + m \neq 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

Коэффициент Y_1^2 равно 0, если мы выбираем

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Мы держим руг только $c + v \pm$, так что $\lambda + c + m > 0$, Этот корень, который зависит от k , является минимальным, если $a_1^2/k + kc^2$ является минимальным, т.е. если $k = a_1/c$, С этим выбором мы имеем $\lambda = \lambda_1$ а также

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ сходится к пределу ≥ 0 . В частности, существует постоянная $K > 0$ с $\forall t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ а также $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$,

Предложение 4. *Функция*

$$W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

c

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

всегда положительно и уменьшается.

Доказательство. Мы определяем более широко $W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ с $k > 0$, у нас тогда

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = e^{-2\lambda t} X_2[-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c+m)X_2] \\ + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

С $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m)X_2^2 + (a_2 + kc)X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m)Y_2^2].$$

При условии, что $\lambda + c + m \neq 0$, у нас есть

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Коэффициент Y_2^2 равно 0, если мы выбираем

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Мы держим руг только $c + v \pm$, так что $\lambda + c + m > 0$, Этот корень, который зависит от k , является минимальным, если $a_2^2/k + kc^2$ является минимальным, т.е. если $k = a_2/c$, Тогда λ дается формулой (12) и мы имеем $dW/dt \leq 0$,

Однако эти результаты не позволяют различать различные режимы в соответствии со значением b . Мы предполагаем, что:

- если $b < b_1$, у нас есть

$$e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

с $x_1 > 0, y_1 > 0$ а также $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$, Это население с высокой рождаемостью, которое пропорционально становится доминирующим.

- если $b_1 < b < b_2$, у нас есть

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

и есть постоянная $\alpha > 0$ с $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ этот последний вектор относится к предложению 1. Существует сосуществование в пропорциях групп населения с различной рождаемостью;

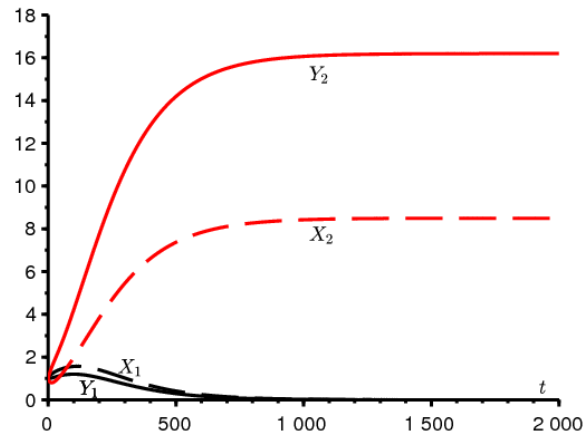
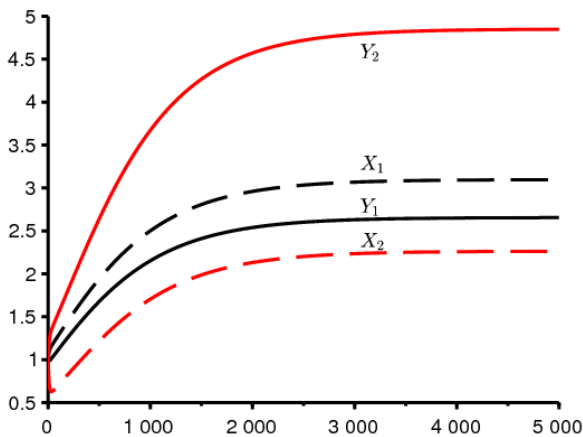
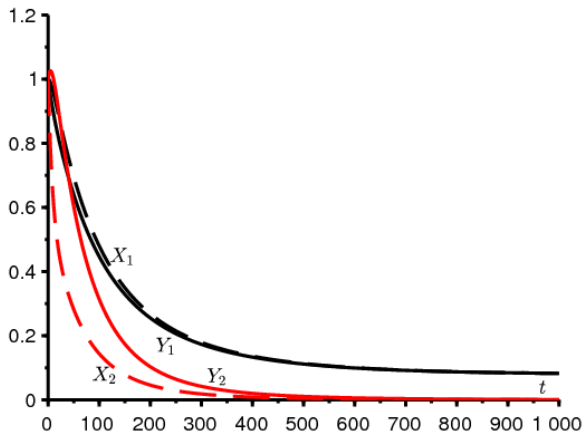
- если $b > b_2$, у нас есть

$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

с $x_2 > 0, y_2 > 0$ а также $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$, Это население с низкой рождаемостью, которое в итоге оказывается доминирующим.

Таким образом, частичный демографический переход, наблюдаемый в некоторых странах Африки к югу от Сахары, может соответствовать промежуточному случаю, когда $b_1 < b < b_2$,

Чтобы поддержать эту гипотезу, рассмотрим числовой пример в предыдущем разделе. Возьмите любое начальное условие, например $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (поскольку система однородна, мы можем думать о 1 миллионе). На рисунке 2 показано, как система ведет себя в соответствии с положением b по отношению к двум порогам. Если гипотеза кажется подтвержденной, мы отметим, однако, в случае, когда $b_1 < b < b_2$ что характерное время сходимости достаточно велико. Второе собственное значение матрицы Якоби $J_F(z)$ близко к λ^* ,



(а) Функции $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ если $b = 0,025 < b_1$, (б) Функции $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ если $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$, (в) Функции $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ если $b = 0,05 > b_2$. Чтобы упростить, мы написали (X_1, Y_1, X_2, Y_2) на разных фигурах, но это функции перенормированы экспоненциальной.

Библиографические ссылки

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderer K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderer K. P., Waldstätter R., Wörz-Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer

8. Inaba H. , Saito R. , Bacaër N. , An age-structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), La Relation ressource–consommateur, *Modélisation mathématique*, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P. , Fanti L. (2003), The demographic transition and neo-classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W. , Schnaubelt R. , Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero–Bixby L. , Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P. –F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier–Villars.