

# Um modelo matemático para uma transição demográfica parcial

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Hisashi Inaba<sup>2</sup> Ali Moussaoui<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institut de Recherche pour le Développement, Modelagem matemática e computacional de sistemas complexos, Les Cordeliers, Paris, França, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Universidade de Tóquio, Departamento de Matemática, Tóquio, Japão, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

<sup>3</sup> Universidade de Tlemcen, Departamento de Matemática, Tlemcen, Argélia, moussaouidz@yahoo.fr

## resumo

Estudamos um modelo matemático para a transição demográfica. Existem duas classes etárias e dois níveis de fertilidade. Adultos com alta fertilidade imitam adultos com baixa fertilidade. Quando o coeficiente de imitação aumenta, a população cruza dois limites entre os quais a população aumenta ou diminui exponencialmente com uma mistura estável das duas fertilidades. Essa transição demográfica parcial lembra a situação em certos países da África Subsaariana.

Palavras-chave: modelo matemático, transição demográfica, crescimento exponencial

## 1. Introdução

A transição demográfica é um fenômeno que se estende por décadas. A população vê primeiro a sua mortalidade diminuir. Então, com um certo atraso, a fertilidade também diminui. Devido a esse atraso, a população geralmente cresce consideravelmente, com importantes consequências econômicas e sociais [3].

A bem conhecida hipótese de modernização insiste em que a baixa taxa de fertilidade é o resultado da adaptação individual a ambientes modernizados: industrialização, urbanização, mudanças nos padrões educacionais e familiares. No entanto, é difícil estabelecer um vínculo direto entre o declínio da fertilidade e muitos indicadores do nível de desenvolvimento social. Portanto, buscamos um mecanismo dinâmico para entender a diferença entre a mudança de atitude individual e os dados estatísticos macroscópicos.

Se seguirmos a divisão em "três dados demográficos" de [9], podemos dizer que a transição demográfica pode ser vista de três ângulos: estatístico, político ou matemático. É deste último ângulo, ilustrado em particular pelas obras de Verhulst ou Lotka [19, 12] e resumidas, por exemplo, por [14], que consideraremos o problema.

Do ponto de vista da modelagem matemática, a transição demográfica pode ser apresentada como exógena ou endógena. No primeiro caso, supõe-se que a população seja homogênea, mas a modernização das condições de vida significa que os parâmetros demográficos variam ao longo do tempo. Isso leva a modelos não autônomos [1].

A abordagem endógena, pelo contrário, consiste em usar modelos autônomos, ou seja, cujos coeficientes não dependem do tempo, com uma população heterogênea. As mudanças qualitativas resultam da interação entre as subpopulações. A transição demográfica é um pouco análoga a uma epidemia. Normas culturais inovadoras que reduzem o número de nascimentos podem ser transmitidas de indivíduos de baixa fertilidade (os "infectados") para indivíduos tradicionais de alta fertilidade (as pessoas "saudáveis"), como na teoria da difusão [18, 13] Esse processo de transmissão pode ser desencadeado por mudanças socioeconômicas e ambientais.

[8] recentemente desenvolveram esse ponto de vista epidêmico para a teoria da difusão da transição da fertilidade. O declínio na fertilidade é descrito como o resultado da disseminação da tendência a ter menos filhos. Seu primeiro modelo dividiu a população entre indivíduos com alta fertilidade e indivíduos com baixa fertilidade,  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$ . Seus números evoluíram de acordo com um sistema diferencial homogêneo de grau um

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

$r_1$  e  $r_2$  são as taxas de crescimento de populações isoladas, com  $r_1 > r_2$ .  $b$  é um coeficiente de imitação que indica a taxa máxima na qual indivíduos com alta fertilidade adotam baixa fertilidade. Presume-se que esta taxa dependa linearmente da fração da população com baixa fertilidade:  $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$ . Em termos ecológicos, é um sistema presa-

predador, como Lotka e Volterra [20], mas com uma taxa de predação não linear que depende apenas da proporção das duas populações, como no modelo de Arditi e Ginzburg [11, § 2.3]. A análise matemática é muito simples. Basta observar que  $f(t)$  é a solução de uma equação logística. De acordo com  $b < r_1 - r_2$  ou  $b > r_1 - r_2$ , a população total tende a crescer exponencialmente com uma taxa  $r_1$  ou  $r_2$  e é a fração da população com baixa fertilidade ou aquela com alta fertilidade que converge para 0. A partir de uma população com alta fertilidade e de alguns indivíduos com baixa fertilidade, a transição demográfica ocorre, se e somente se  $b > r_1 - r_2$ .

A seguir, [8] estuda uma versão estruturada por idade do mesmo modelo. Como a idade  $x$  era uma variável contínua, isso levou a um sistema de equações diferenciais parciais do tipo de McKendrick e von Foerster:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

com

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

Nesse modelo,  $m(x)$  é a taxa de mortalidade  $a_1(x)$  e  $a_2(x)$  são as taxas de fertilidade. A análise matemática do modelo é então mais complicada e apenas resultados muito parciais foram obtidos. Geralmente, não há mais um único limite, mas dois. Sob o primeiro limiar e acima do segundo limiar, existe uma única solução exponencial trivial localmente estável (no sentido da teoria dos sistemas homogêneos) composta por indivíduos com alta fertilidade no primeiro caso, com baixa fertilidade no segundo caso. Entre os dois limiares, pelo menos para certos valores dos parâmetros (isto é, com certas condições adicionais que certamente não são ótimas), foi possível provar a existência de uma solução exponencial não trivial com indivíduos que têm fertilidade diferente. A exclusividade e a estabilidade dessa solução não trivial não foram discutidas. Para esta solução, a taxa de crescimento populacional é intermediária entre os dois casos extremos. Há uma transição demográfica parcial. Essa diferença qualitativa com o primeiro modelo não era óbvia a priori.

O regime entre os dois limiares parecia anedótico em [8], uma vez que a motivação veio da demografia do Japão. A transição demográfica é tão avançada lá que a taxa de crescimento da população se tornou negativa. Estamos além do segundo limiar. Por outro lado, o regime intermediário pode ser de interesse no caso de certos países da África Subsaariana. A fertilidade média caiu um pouco, mas muito menos do que os demógrafos previram [10]. Além disso, as dificuldades de analisar o sistema de equações diferenciais parciais nos levam a buscar um modelo mais simples para uma transição demográfica parcial.

Portanto, estudamos abaixo um modelo com apenas duas faixas etárias (jovens e adultos) em vez de uma idade que varia continuamente. A vantagem é que ele mantém o mesmo fenômeno de transição em dois limites. Isso permite um estudo mais completo. Mostramos, em particular, que a solução não trivial é única e que seu domínio de existência coincide exatamente com o domínio de instabilidade de soluções triviais. Também conseguimos provar a estabilidade local da solução não trivial.

Apresentamos o modelo na seção 2 com suas soluções exponenciais triviais e não triviais. Estudamos a estabilidade de soluções exponenciais na seção 3, usando em particular o critério de Routh-Hurwitz e a teoria de sistemas diferenciais homogêneos de grau um. Para esta teoria, veja [6, p. 638] e os livros [5, cap. 5], [7, cap. 4] e [16, cap. 4]. Como o sistema é da dimensão 4, a estabilidade da solução exponencial não trivial apresenta uma dificuldade ausente nos exemplos das referências acima e que exigia o uso de um software formal de cálculo. A Seção 4 apresenta um exemplo numérico que visa ser representativo de alguns países da África Subsaariana. A Seção 5 propõe uma conjectura para o comportamento assintótico global por falta de ter encontrado uma função Liapounov adequada. Embora mais simples que a do sistema de equações diferenciais parciais, a análise do nosso modelo ainda é incompleta.

## 2 O modelo e suas soluções exponenciais

Nós definimos

- $X_1(t)$  o número de jovens de famílias férteis
- $Y_1(t)$  o número de adultos em famílias férteis
- $X_2(t)$  o número de jovens de famílias com fertilidade reduzida

- $Y_2(t)$  o número de adultos em famílias com fertilidade reduzida.

Nós presumimos

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$  são fertilidade ( $a_1 > a_2$ ),  $m > 0$  é mortalidade,  $c > 0$  é a taxa de transição dos jovens para a idade adulta e  $b > 0$  é a taxa máxima na qual adultos com alta fertilidade adotam baixa fertilidade. A fração de adultos menos férteis na população adulta,  $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ , intervém nesse modelo. Pelo contrário, no segundo modelo de [8], foi a fração de indivíduos de famílias pobres de fertilidade na população total. Nós presumimos  $X_1(0) > 0$ ,  $Y_1(0) > 0$ ,  $X_2(0) > 0$  e  $Y_2(0) > 0$ .

Nós definimos  $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ . O sistema diferencial acima pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

com uma função  $F$  que é uma função vetorial homogênea de grau um. A existência global e a positividade das soluções do sistema (3) são mostradas como nos modelos demográficos com casamento. Veja, por exemplo, [16, cap. 4] A positividade resulta do fato de que  $dX_1/dt \geq 0$  E se  $X_1 = 0$ ,  $dY_1/dt \geq 0$  E se  $Y_1 = 0$  etc. Com uma condição inicial cujos componentes são estritamente positivos, cada componente permanece estritamente positivo para todos os  $t > 0$ . A existência global resulta da desigualdade a que a população total obedece

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$  é uma "solução exponencial positiva" do sistema (3) se

- $z = (z_i)$  é um vetor com  $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- $(\lambda, z)$  é uma solução para o problema não linear de autovalor  $\lambda z = F(z)$ .

Se  $(\lambda, z)$  é uma solução e se  $\alpha > 0$ , então  $(\lambda, \alpha z)$  também é uma solução. Dizemos que uma solução exponencial positiva é normalizada se  $\sum_i z_i = 1$ .

**Proposição 1** . Existe uma única solução exponencial positiva normalizada do formulário  $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}.$$

Da mesma forma, existe uma única solução exponencial positiva normalizada da forma  $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}.$$

Dentro do estojo  $b_1 < b < b_2$  com

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

existe uma única solução exponencial positiva normalizada da forma  $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$  com  $x_1^* > 0$ ,  $y_1^* > 0$ ,  $x_2^* > 0$  e  $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left( \frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[ 1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[ \frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

*Prova* . Para a primeira solução,

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

Portanto, a equação quadrática para  $\lambda$

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

As duas raízes são

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

mas apenas aquele com um + leva a soluções positivas  $(x_1, y_1)$ .

A segunda solução é obtida da mesma maneira, substituindo o índice 1 pelo índice 2.

Para a terceira solução,

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

Não podemos ter  $c + \lambda + m = 0$  de outra forma  $y_1 = 0$ . Então nós temos  $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$  e  $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$ . Portanto, substituindo nas outras duas equações e dividindo por  $y_1$  ou  $y_2$ ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Subtraindo essas duas equações, obtemos

$$\lambda = c \left( \frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

O membro à direita na fórmula para  $y_1/y_2$  deve ser estritamente positivo. Nós temos

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

e

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

Nós definimos  $b_3 = 2(a_1 - a_2)$ . Nós temos

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in ]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Além disso, um pequeno cálculo mostra que  $Q(b_1) = 0$  e  $Q(b_2) = 1$ . Nos também temos  $b_1 < b_2 < b_3$ . Concluimos que

- no intervalo  $]0, b_1[$ ,  $1/Q - 1$  é uma função decrescente que diminui de  $-1$  a  $-1$ ,
- no intervalo  $]b_1, b_2[$ ,  $1/Q - 1$  é uma função decrescente que diminui de  $+\infty$  a  $0$ ,
- no intervalo  $]b_2, b_3[$ ,  $1/Q - 1$  ainda é uma função decrescente e  $1/Q - 1 < 0$ ,
- no intervalo  $]b_3, +\infty[$   $1/Q - 1$  é uma função crescente e ainda temos  $1/Q - 1 < 0$ .

Então nós temos  $y_1/y_2 > 0$  somente no intervalo  $]b_1, b_2[$ . As fórmulas para  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$  surgem de (6) e padronização  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$ . Isso completa a prova.

Observe que  $b_1 < b_2$ . A taxa de crescimento  $\lambda^*$  dado por (6) diminui em  $\lambda_1$  até  $\lambda_2$  no intervalo  $b_1 < b < b_2$ .

Quando  $c$  converge para  $+\infty$ , o modelo com dois grupos etários é reduzido ao modelo na introdução com um único grupo etário. Podemos ver que os dois limiares  $b_1$  e  $b_2$  convergem para um único limite igual a  $a_1 - a_2$ .

### 3 A estabilidade das soluções exponenciais

Com  $i \in \{1, 2\}$ , definimos

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Nós temos  $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$ . Um cálculo bastante simples do sistema (1) - (2) fornece

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Seja uma solução exponencial normalizada do sistema (1) - (2),  $e^{\lambda t}z$  com  $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ . Temos as equações (4) - (5). Ao adicionar as quatro equações, obtemos

$$a_1y_1 + a_2y_2 = \lambda + m.$$

Deduzimos que  $z$  é um ponto de equilíbrio do sistema (7) - (10). Diz-se que a solução  $e^{\lambda t}z$  é "assintoticamente estável" (respectivamente instável) se  $z$  for um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (resp. instável) do sistema (7) - (10). Segue-se do teorema de Euler para funções vetoriais homogêneas (aqui do grau um) que  $\lambda$  é sempre um valor próprio da matriz jacobiana da função  $F$  definida por (3) no ponto  $z$ :  $J_F(z)$ . De fato,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

De acordo com [6, p. 638], o ponto de equilíbrio  $z$  é assintoticamente estável se os três valores próprios dessa matriz jacobiana, exceto  $\lambda$ , tiverem uma parte real estritamente menor que  $\lambda$ . O ponto de equilíbrio é instável se um desses três valores próprios tiver uma parte real estritamente maior que  $\lambda$ . É isso que usaremos na seguinte proposição.

#### Proposição 2

- A solução exponencial normalizada da proposição 1,  $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$ , é assintoticamente estável se  $b < b_1$  instável se  $b > b_1$ .
- A solução exponencial normalizada da proposição 1,  $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$ , é assintoticamente estável se  $b > b_2$  instável se  $b < b_2$ .
- A solução exponencial normalizada da proposição 1,  $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ , é assintoticamente estável para  $b_1 < b < b_2$ .

*Prova*. Geralmente, se  $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  com  $y_1 + y_2 > 0$  e se  $p = y_2/(y_1 + y_2)$ , então nós temos

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

No primeiro caso, temos  $p = 0$ , então

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

O maior autovalor do bloco superior esquerdo é  $\lambda_1$ . O maior autovalor do bloco inferior direito é

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

É uma função crescente de  $b$ . Após alguns cálculos, obtemos  $\mu_2 > \lambda_1$  E se  $b > b_1$  e  $\mu_2 < \lambda_1$  E se  $b < b_1$ .

No segundo caso, temos  $p = 1$ , então

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

O maior autovalor do bloco inferior direito é  $\lambda_2$ . O maior autovalor do bloco superior esquerdo é

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

É uma função decrescente de  $b$  porque

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b - c}{\sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Após alguns cálculos, obtemos  $\mu_1 > \lambda_2$  E se  $b < b_2$  e  $\mu_1 < \lambda_2$  E se  $b > b_2$ .

No terceiro caso, temos  $0 < p < 1$ . Segue-se da equação (6) que

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Nós já sabemos que  $\lambda^*$  é um autovalor da matriz  $J_F(z)$  definido por (11). A questão é saber se os outros três valores próprios têm uma parte real estritamente menor que  $\lambda^*$ . Em outras palavras, a matriz  $M = J_F(z) - \lambda^*I$  tem um autovalor zero e a questão é se os outros autovalores têm uma parte real estritamente negativa. Nós temos

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1 - p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é, portanto, da forma

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

Com um desenvolvimento de acordo com a primeira coluna, encontramos

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[ b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1 - p)^2 \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[ b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Para o coeficiente de  $\xi^3$ , nós achamos

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

e depois da simplificação

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Para o coeficiente de  $\xi^2$ , nós achamos

$$k_1 = \left[ -3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[ b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c,$$

e depois de uma simplificação laboriosa

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Finalmente, para o coeficiente de  $\xi$ , usamos o software formal de cálculo Xcas ( <https://www.xcasenligne.fr> ) para obter

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

$k_0$  também pode ser escrito na forma

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2), \\ k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Para que as três raízes do polinômio  $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$  possuir uma parte real estritamente negativa, é necessário e suficiente, de acordo com o critério de Routh-Hurwitz, que  $k_2 > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_0 > 0$  e  $k_1 k_2 - k_0 > 0$  [17, p. 134] Nós temos  $k_2 > 0$ . Por outro lado,  $k_1 > 0$  E se  $0 < b < 2(a_1 - a_2)$  e, portanto, em particular para  $b_1 < b < b_2$  Porque  $b_2 < a_1 - a_2$ . Nos também temos  $k_0 > 0$  E se  $b_1 < b < b_2$ . Resta apenas provar que  $k_1 k_2 - k_0 > 0$  E se  $b_1 < b < b_2$ . Desenvolvendo o produto  $k_1 k_2$  e classificando o numerador como um polinômio na variável  $b$ , obtemos

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Agrupamos algumas partes:

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Os termos entre colchetes são estritamente positivos porque  $b < b_2 < a_1 - a_2$ . Temos assim  $k_1 k_2 - k_0 > 0$ . A terceira solução é, portanto, assintoticamente estável para  $b_1 < b < b_2$ .

## 4 Exemplo

Vamos levar  $a_1 = 10\%$  por ano. Lembre-se de que esse parâmetro é igual ao número de nascimentos em famílias com alta fertilidade dividido pela população adulta com alta fertilidade, e não à taxa de natalidade normalmente usada na demografia, que é dividida pela população total. Vamos também pegar:  $a_2 = 4\%$  por ano,  $c = 5\%$  por ano, então  $1/c = 20$  anos e  $m = 2\%$  por ano. A expectativa de vida ao nascer é, portanto,  $1/m = 50$  anos. Lembremos que em 2017, a expectativa de vida de homens e mulheres era, por exemplo, igual a 52 e 55 anos na Costa do Marfim, a 51 e 54 anos no Chade, a 50 e 53 anos na África Central [15].

Com esses valores de parâmetro, obtemos  $\lambda_1 = 3\%$  por ano e  $\lambda_2 \simeq 0,62\%$  por ano,  $b_1 = 3\%$  por ano e  $b_2 \simeq 3,9\%$  por ano. A Figura 1 mostra as diferentes taxas de crescimento  $\lambda_1$ ,  $\lambda^*$  e  $\lambda_2$  em função de  $b$ . Temos uma transição demográfica parcial se  $b_1 < b < b_2$ , com uma taxa de crescimento  $\lambda^*$ . Em comparação, a taxa de crescimento natural é de 2,4% na Costa do Marfim, 3,3% no Chade e 2,2% na África Central. O Chade, portanto, preferiria estar no caso em que  $b < b_1$ , enquanto os outros dois países estão na situação intermediária com  $b_1 < b < b_2$ .

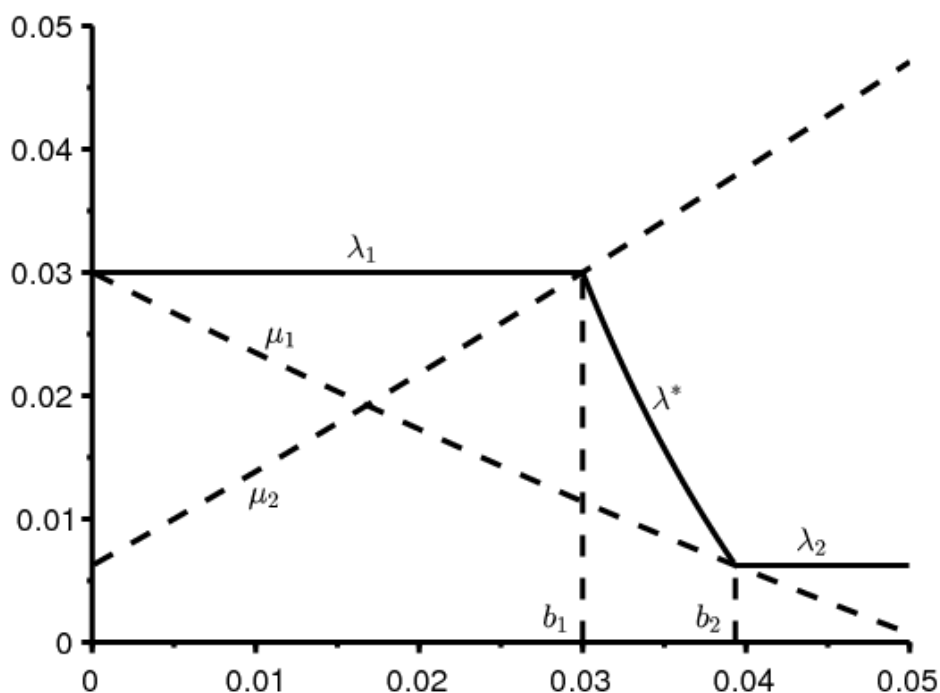


Figura 1. Taxas assintóticas de crescimento populacional  $\lambda_1$ ,  $\lambda^*$  e  $\lambda_2$  (linha sólida) em função do coeficiente de imitação  $b$  (na abcissa). Autovalores  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são pontilhados.

Para este modelo, podemos calcular a proporção de “jovens” na população. Essa proporção é

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

E se  $b < b_1$ . Essa proporção é

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

E se  $b > b_2$ . No entanto, dada a estrutura do modelo, esses "jovens" teriam uma idade média  $1/(c + m) \simeq 14,3$  anos. Portanto, é difícil comparar com as estatísticas demográficas. Segundo [15], a proporção de crianças com menos de 15 anos é de 43% na Costa do Marfim, 48% no Chade e 44% na África Central.

A taxa de natalidade é

- $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$  por 1000 habitantes se  $b < b_1$ ,
- $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$  por 1000 habitantes se  $b > b_2$ .

Para os três países já considerados, os números estão na ordem de 37, 46 e 36 por 1.000 habitantes.

Portanto, os valores escolhidos para os parâmetros não são muito irrealistas.

## 5 Comportamento assintótico

Até agora, o estudo da estabilidade era apenas local. O sistema é da dimensão 4 e é melhor reduzido a um sistema da dimensão 3. Não parece possível usar o teorema de Poincaré-Bendixson para determinar o comportamento assintótico global. No modelo demográfico com casamentos de [16, cap. 4], o sistema foi a dimensão dois.

Também é difícil encontrar uma função Liapunov adequada. Nosso sistema homogêneo certamente pode se transformar em um sistema com apenas termos lineares ou quadráticos se considerarmos como novas incógnitas  $X_1/(Y_1 + Y_2)$ ,  $Y_1/(Y_1 + Y_2)$ ,  $X_2/(Y_1 + Y_2)$  e  $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ . Mas a função de Liapunov com termos logarítmicos usados por exemplo por [2] para uma classe específica de tais sistemas não parece ser adequada.

Inspirado no modelo linear de população de [4, p. 80], no entanto, obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 3.** *A função*



$$V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$$

é sempre positivo e decrescente.

*Prova* . Definimos de maneira mais geral  $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$  com  $k > 0$ . Nós temos então

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1[-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c + m)X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[ -\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$  e  $Y_2(t) > 0$ . O termo com fator  $b$  é, portanto, negativo

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

Providenciou que  $\lambda + c + m \neq 0$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[ X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

O coeficiente de  $Y_1^2$  é igual a 0 se escolhermos

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Apenas mantemos a raiz com um + em  $\pm$ , de modo a  $\lambda + c + m > 0$ . Essa raiz, que depende de  $k$ , é mínima se  $a_1^2/k + kc^2$  é mínimo, ou seja, se  $k = a_1/c$ . Com esta escolha, temos  $\lambda = \lambda_1$  e

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[ X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$  converge para um limite  $\geq 0$ . Em particular, há uma constante  $K > 0$  com  $\forall t > 0$ ,  $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$  e  $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ .

**Proposição 4.** *A função*

$$W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

com

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

é sempre positivo e decrescente.

*Prova* . Definimos de maneira mais geral  $W(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$  com  $k > 0$ . Nós temos então

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2[-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m)X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[ -\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Com  $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m)X_2^2 + (a_2 + kc)X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m)Y_2^2].$$

Providenciou que  $\lambda + c + m \neq 0$ , temos

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[ X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 + \left[ k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}.$$

O coeficiente de  $Y_2^2$  é igual a 0 se escolhermos

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Apenas mantemos a raiz com um + em  $\pm$ , de modo a  $\lambda + c + m > 0$ . Essa raiz, que depende de  $k$ , é mínima se  $a_2^2/k + kc^2$  é mínimo, ou seja, se  $k = a_2/c$ . Então  $\lambda$  é dado pela fórmula (12) e temos  $dW/dt \leq 0$ .

No entanto, esses resultados não permitem distinguir os diferentes regimes de acordo com o valor de  $b$ . Conjecturamos que:

- E se  $b < b_1$ , temos

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

- com  $x_1 > 0, y_1 > 0$  e  $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$ . É a população com alta fertilidade que, em proporção, acaba dominando.
- E se  $b_1 < b < b_2$ , temos

$$e^{-\lambda^* t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

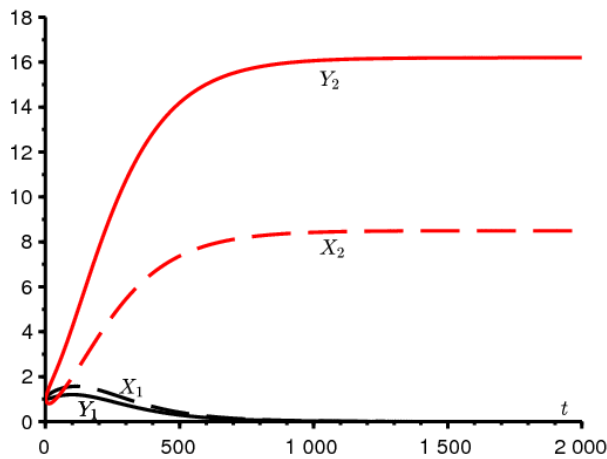
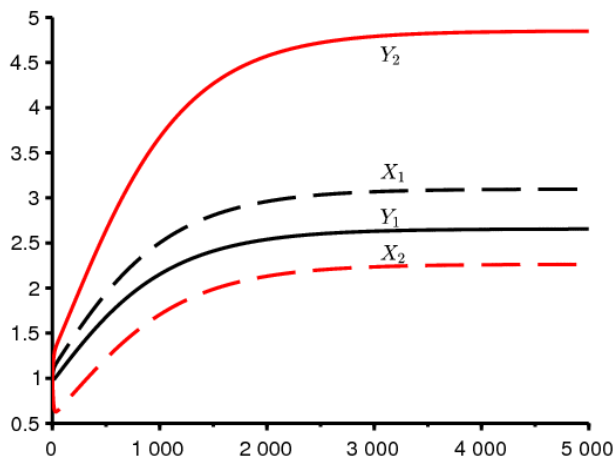
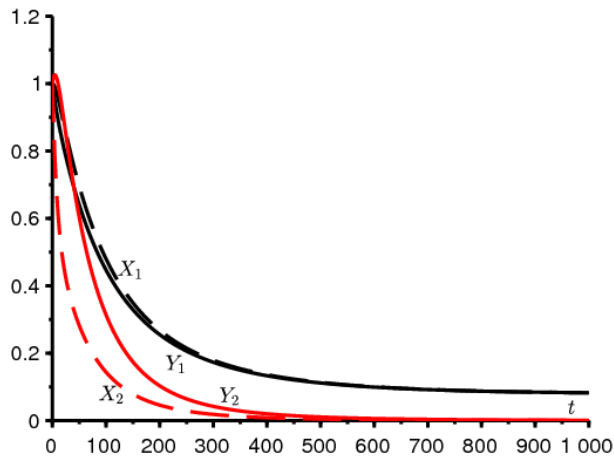
- e há uma constante  $\alpha > 0$  com  $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ , sendo este último vetor o da proposição 1. Há coexistência nas proporções de subpopulações com fertilidade diferente;
- E se  $b > b_2$ , temos

$$e^{-\lambda_2 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

com  $x_2 > 0, y_2 > 0$  e  $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$ . É a população com baixa fertilidade que, em proporção, acaba dominando.

Assim, a transição demográfica parcial observada em certos países da África Subsaariana pode corresponder ao caso intermediário em que  $b_1 < b < b_2$ .

Para apoiar essa conjectura, considere o exemplo numérico na seção anterior. Pegue qualquer condição inicial, por exemplo  $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$  (como o sistema é homogêneo, podemos pensar em 1 milhão). A Figura 2 mostra como o sistema se comporta de acordo com a posição de  $b$  em relação aos dois limites. Se a conjectura parecer confirmada, observaremos, no entanto, no caso em que  $b_1 < b < b_2$  que o tempo de convergência característico é bastante longo. O segundo autovalor da matriz jacobiana  $J_F(z)$  é perto de  $\lambda^*$ .



a) Funções  $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  E se  $b = 0,025 < b_1$ . b) Funções  $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  E se  $b = 0,035 \in ]b_1, b_2[$ . c) Funções  $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  E se  $b = 0,05 > b_2$ . Para simplificar, escrevemos  $(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  nas diferentes figuras, mas essas são funções renormalizadas por um exponencial.

## Referências bibliográficas

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderer K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer

6. Haderer K. P. , Waldstätter R. , Wörz–Busekros A. (1988),  
Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age–Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*,  
Singapore, Springer
8. Inaba H. , Saito R. , Bacaër N. , An age–structured epidemic model for the demographic transition,  
*Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive,  
*Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), La Relation ressource–consommateur, *Modélisation mathématique*, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P. , Fanti L. (2003), The demographic transition and neo–classical models of balanced growth,  
N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W. , Schnaubelt R. , Zacher R. (2008),  
*Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero–Bixby L. , Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition,  
*Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P. –F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement,  
*Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier–Villars.