

Een wiskundig model voor een gedeeltelijke demografische transitie

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement, Wiskundige en computermodellering van complexe systemen, Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk, nicolas.bacaer@ird.fr

² University of Tokyo, Department of Mathematics, Tokyo, Japan, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ University of Tlemcen, Department of Mathematics, Tlemcen, Algeria, moussaouidz@yahoo.fr

Overzicht

We bestuderen een wiskundig model voor de demografische transitie. Er zijn twee leeftijdsklassen en twee vruchtbaarheidsniveaus. Volwassenen met een hoge vruchtbaarheid bootsen volwassenen met een lage vruchtbaarheid na. Wanneer de imitatiecoëfficiënt toeneemt, overschrijdt de populatie twee drempels waartussen de populatie exponentieel toeneemt of afneemt met een stabiel mengsel van de twee vruchtbaarheden. Deze gedeeltelijke demografische transitie herinnert aan de situatie in bepaalde landen van Afrika bezuiden de Sahara.

Sleutelwoorden: wiskundig model, demografische transitie, exponentiële groei

1. Inleiding

De demografische transitie is een fenomeen dat tientallen jaren beslaat. De bevolking ziet eerst haar sterfte afnemen. Dan daalt met enige vertraging ook de vruchtbaarheid. Door deze achterstand groeit de bevolking vaak aanzienlijk, met belangrijke economische en sociale gevolgen [3].

De bekende moderniseringshypothese houdt vol dat het lage vruchtbaarheidscijfer het gevolg is van individuele aanpassing aan gemoderniseerde omgevingen: industrialisatie, verstedelijking, veranderingen in onderwijs- en gezinsstandaarden. Het is echter moeilijk om een direct verband te leggen tussen de daling van de vruchtbaarheid en veel indicatoren van het niveau van sociale ontwikkeling. We zijn daarom op zoek naar een dynamisch mechanisme om het verschil te begrijpen tussen de verandering in individuele houding en de macroscopische statistische gegevens.

Als we de opsplitsing in "drie demografische gegevens" van [9] volgen, kunnen we zeggen dat de demografische transitie vanuit drie invalshoeken kan worden bekeken: statistisch, politiek of wiskundig. Het is vanuit deze laatste invalshoek, in het bijzonder geïllustreerd door de werken van Verhulst of Lotka [19, 12] en bijvoorbeeld samengevat door [14], dat we het probleem zullen beschouwen.

Vanuit het oogpunt van wiskundige modellering kan de demografische transitie als exogeen of als endogeen worden gepresenteerd. In het eerste geval wordt aangenomen dat de bevolking homogeen is, maar door de modernisering van de levensomstandigheden variëren de demografische parameters in de tijd. Dit leidt tot niet-autonome modellen [1].

De endogene benadering bestaat daarentegen uit het gebruik van autonome modellen, dat wil zeggen waarvan de coëfficiënten niet afhankelijk zijn van tijd, met een heterogene populatie. De kwalitatieve veranderingen komen dan voort uit de interactie tussen de subpopulaties. De demografische transitie is enigszins analoog aan een epidemie. Innovatieve culturele normen die het aantal geboorten verminderen, kunnen worden overgedragen van individuen met een lage vruchtbaarheid (de "geïnfecteerde") naar traditionele individuen met een hoge vruchtbaarheid (de "gezonde" mensen), zoals in de diffusietheorie [18, 13]. Dit transmissieproces kan worden veroorzaakt door sociaaleconomische en ecologische veranderingen.

[8] heeft onlangs dit epidemische standpunt ontwikkeld voor de theorie van diffusie van de vruchtbaarheidstransitie. De afname van de vruchtbaarheid wordt beschreven als gevolg van de verspreiding van de neiging om minder kinderen te krijgen. Hun eerste model verdeelde de populatie tussen individuen met een hoge vruchtbaarheid en individuen met een lage vruchtbaarheid, $P_1(t)$ en $P_2(t)$. Hun aantallen evolueerden volgens een homogeen differentieel systeem van graad één

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 en r_2 zijn de groeisnelheden van geïsoleerde populaties, met $r_1 > r_2$. b is een imitatiecoëfficiënt die de maximale snelheid aangeeft waarmee individuen met een hoge vruchtbaarheid een lage vruchtbaarheid aannemen. Aangenomen wordt dat dit percentage lineair afhangt van het deel van de bevolking met een lage vruchtbaarheid:

$f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$. In ecologische termen is het een prooi-roofdiersysteem op de manier van Lotka en Volterra [20] maar met een niet-lineaire predatiesnelheid die alleen afhangt van de verhouding van de twee populaties, zoals in het model van Arditi en Ginzburg [11, § 2.3]. Wiskundige analyse is heel eenvoudig. Dat volstaat om op te merken $f(t)$ is oplossing van een logistische vergelijking. Volgens $b < r_1 - r_2$ of $b > r_1 - r_2$, de totale bevolking neigt exponentieel te groeien met een snelheid r_1 of r_2 en het is de fractie van de bevolking met een lage vruchtbaarheid of die met een hoge vruchtbaarheid die convergeert naar 0. Uitgaande van een populatie met een hoge vruchtbaarheid en een paar individuen met een lage vruchtbaarheid, vindt de demografische overgang daarom plaats als en alleen als $b > r_1 - r_2$.

Vervolgens bestudeert [8] een leeftijdgestructureerde versie van hetzelfde model. Omdat leeftijd x een continue variabele was, leidde dit tot een systeem van partiële differentiaalvergelijkingen van het type McKendrick en von Foerster:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx, \end{aligned}$$

met

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

In dit model, $m(x)$ is het sterftecijfer, $a_1(x)$ en $a_2(x)$ zijn de vruchtbaarheidscijfers. De wiskundige analyse van het model is dan ingewikkelder en er zijn slechts zeer gedeeltelijke resultaten behaald. Over het algemeen is er niet langer één enkele drempel, maar twee. Onder de eerste drempel en boven de tweede drempel is er een enkele lokaal stabiele triviale exponentiële oplossing (in de zin van de theorie van homogene systemen) samengesteld uit individuen met een hoge vruchtbaarheid in het eerste geval, met een lage vruchtbaarheid in de tweede geval. Tussen de twee drempels, althans voor bepaalde waarden van de parameters (dat wil zeggen met bepaalde aanvullende voorwaarden die zeker niet optimaal zijn), was het mogelijk om het bestaan van een niet-triviale exponentiële oplossing te bewijzen met individuen die verschillende vruchtbaarheid. De uniciteit en stabiliteit van deze niet-triviale oplossing zijn niet besproken. Voor deze oplossing ligt de bevolkingsgroei tussen de twee extreme gevallen. Er is een gedeeltelijke demografische transitie. Dit kwalitatieve verschil met het eerste model was a priori niet duidelijk.

Het regime tussen de twee drempels leek anekdotisch in [8], omdat de motivatie kwam van de demografie van Japan. De demografische transitie is daar zo ver gevorderd dat de bevolkingsgroei negatief is geworden. We zijn voorbij de tweede drempel. Aan de andere kant kan het zijn dat het intermediaire regime in het geval van bepaalde landen van Afrika bezuiden de Sahara van belang is. De gemiddelde vruchtbaarheid is eigenlijk iets gedaald, maar veel minder dan wat demografen hadden voorspeld [10]. Bovendien brengen de moeilijkheden bij het analyseren van het systeem van partiële differentiaalvergelijkingen ons ertoe een eenvoudiger model te zoeken voor een partiële demografische transitie.

We bestuderen daarom hieronder een model met slechts twee leeftijdsklassen (jong en volwassenen) in plaats van een leeftijd die continu varieert. Het voordeel is dat het hetzelfde overgangsfenomeen op twee drempels behoudt. Dit maakt een completere studie mogelijk. We laten met name zien dat de niet-triviale oplossing uniek is en dat het bestaansdomein precies samenvalt met het domein van de instabiliteit van triviale oplossingen. We slagen er ook in om de lokale stabiliteit van de niet-triviale oplossing te bewijzen.

We presenteren het model in sectie 2 met zijn triviale en niet-triviale exponentiële oplossingen. We bestuderen de stabiliteit van exponentiële oplossingen in sectie 3 met in het bijzonder het Routh-Hurwitz-criterium en de theorie van homogene differentieële systemen van graad één. Voor deze theorie, zie [6, p. 638] en de boeken [5, hfst. 5], [7, hfst. 4] en [16, hfst. 4]. Aangezien het systeem van dimensie 4 is, levert de stabiliteit van de niet-triviale exponentiële

oplossing een moeilijkheid op die afwezig was in de voorbeelden van de bovenstaande verwijzingen en die het gebruik van formele berekeningssoftware vereiste. Hoofdstuk 4 geeft een numeriek voorbeeld dat representatief is voor sommige landen in Afrika bezuiden de Sahara. Sectie 5 stelt een vermoeden voor globaal asymptotisch gedrag bij gebrek aan een geschikte Liapounov-functie hebben gevonden. Hoewel eenvoudiger dan die van het partiële differentiaalvergelijkingssysteem, is de analyse van ons model daarom nog steeds onvolledig.

2 Het model en zijn exponentiële oplossingen

We definiëren

- $X_1(t)$ het aantal jongeren uit vruchtbare gezinnen
- $Y_1(t)$ het aantal volwassenen in vruchtbare gezinnen
- $X_2(t)$ het aantal jongeren uit gezinnen met verminderde vruchtbaarheid
- $Y_2(t)$ het aantal volwassenen in gezinnen met verminderde vruchtbaarheid.

Wij nemen aan

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ en $a_2 > 0$ zijn vruchtbaarheid ($a_1 > a_2$), $m > 0$ is sterfelijkheid, $c > 0$ is het overgangstarief van jongeren naar volwassenheid, en $b > 0$ is de maximale snelheid waarmee volwassenen met een hoge vruchtbaarheid een lage vruchtbaarheid aannemen. Het percentage minder vruchtbare volwassenen in de volwassen bevolking, $Y_2/(Y_1 + Y_2)$, komt tussen in dit model. Integendeel, in het tweede model van [8] was het de fractie individuen uit arme vruchtbaarheidsfamilies in de totale bevolking. Wij nemen aan $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ en $Y_2(0) > 0$.

We definiëren $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. Het bovenstaande differentiaalsysteem kan in de volgende vorm worden geschreven

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

met een functie F die een homogene vectorfunctie is van graad één. Het wereldwijde bestaan en de positiviteit van de oplossingen van het systeem (3) worden getoond zoals in de demografische modellen met huwelijk. Zie bijvoorbeeld [16, hfst. 4]. Positiviteit komt voort uit het feit dat $dX_1/dt \geq 0$ als $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ als $Y_1 = 0$, enzovoort. Met een beginvoorwaarde waarvan de componenten allemaal strikt positief zijn, blijft elke component zelfs strikt positief voor alle $t > 0$. Het mondiale bestaan vloeit voort uit de ongelijkheid waaraan de totale bevolking gehoorzaamt

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ is een "positieve exponentiële oplossing" van het systeem (3) als

- $z = (z_i)$ is een vector met $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) is een oplossing voor het niet-lineaire eigenwaardeprobleem $\lambda z = F(z)$.

Als (λ, z) zo'n oplossing is en als $\alpha > 0$, dan $(\lambda, \alpha z)$ is ook een oplossing. We zeggen dat een positieve exponentiële oplossing genormaliseerd is als $\sum_i z_i = 1$.

Stelling 1. *Er is één genormaliseerde positieve exponentiële oplossing van het formulier $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$*

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}.$$

Evenzo is er een enkele genormaliseerde positieve exponentiële oplossing van het formulier $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}.$$

In het geval $b_1 < b < b_2$ met

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

dan is er een enkele genormaliseerde positieve exponentiële oplossing van het formulier $e^{\lambda t}(x_1^*, y_2^*, x_2^*, y_1^*)$ met $x_1^* > 0$, $y_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ en $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Bewijs . Voor de eerste oplossing,

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m) x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m) y_1 = c x_1.$$

Vandaar de kwadratische vergelijking voor λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

De twee wortels zijn

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

maar alleen degene met een + leidt tot positieve oplossingen (x_1, y_1) .

De tweede oplossing wordt op dezelfde manier verkregen door de index 1 te vervangen door de index 2.

Voor de derde oplossing,

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

We kunnen niet hebben $c + \lambda + m = 0$ anders- $y_1 = 0$. Dus we hebben $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ en $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. Vandaar door in de andere twee vergelijkingen te vervangen en te delen door y_1 of y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Door deze twee vergelijkingen af te trekken, krijgen we

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

Het lid rechts in de formule voor y_1/y_2 moet strikt positief zijn. Men heeft

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

en

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

We definiëren $b_3 = 2(a_1 - a_2)$. Men heeft

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Bovendien blijkt uit een kleine berekening dat $Q(b_1) = 0$ en $Q(b_2) = 1$. We hebben ook $b_1 < b_2 < b_3$. We concluderen dat

- op het interval $]0, b_1[$, $1/Q - 1$ is een afnemende functie die afneemt van -1 naar $-\infty$,
- op het interval $]b_1, b_2[$, $1/Q - 1$ is een afnemende functie die afneemt van $+\infty$ naar 0 ,
- op het interval $]b_2, b_3[$, $1/Q - 1$ is nog steeds een afnemende functie en $1/Q - 1 < 0$,
- op het interval $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ is een toenemende functie en dat hebben we nog steeds $1/Q - 1 < 0$.

Dus we hebben $y_1/y_2 > 0$ alleen op het interval $]b_1, b_2[$. De formules voor x_1, y_1, x_2 en y_2 ontstaan uit (6) en standaardisatie $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. Dit voltooit het bewijs.

Let daar op $b_1 < b_2$. Het groeipercentage λ^* gegeven door (6) afneemt met λ_1 tot λ_2 op het interval $b_1 < b < b_2$.

Wanneer c convergeert naar $+\infty$, wordt het model met twee leeftijdsgroepen gereduceerd tot het model in de inleiding met een enkele leeftijdsgroep. We kunnen zien dat de twee drempels b_1 en b_2 vervolgens convergeren naar een enkele drempel gelijk aan $a_1 - a_2$.

3 De stabiliteit van exponentiële oplossingen

Met $i \in \{1, 2\}$, definiëren we

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Men heeft $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$. Een vrij eenvoudige berekening uit het systeem (1) - (2) geeft

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Laat een genormaliseerde exponentiële oplossing van het systeem zijn (1) - (2), $e^{\lambda t} z$ met $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. We hebben de vergelijkingen (4) - (5). Door de vier vergelijkingen toe te voegen, krijgen we

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m.$$

We leiden hieruit af dat z een evenwichtspunt van het systeem is (7) - (10). Er wordt gezegd dat de oplossing $e^{\lambda t} z$ is "asymptotisch stabiel" (respectievelijk instabiel) als z een asymptotisch stabiel (resp. onstabiel) evenwichtspunt van het systeem is (7) - (10). Uit de stelling van Euler voor homogene vectorfuncties (hier van graad één) volgt dat λ altijd een eigenwaarde is van de Jacobiaanse matrix van de functie F gedefinieerd door (3) op punt $z : J_F(z)$. Inderdaad,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

Volgens [6, p. 638], is het evenwichtspunt z asymptotisch stabiel als de drie eigenwaarden van deze Jacobiaanse matrix, behalve λ , een reëel deel hebben dat strikt kleiner is dan λ . Het evenwichtspunt is instabiel als een van deze drie eigenwaarden een reëel deel heeft dat strikt groter is dan λ . Dit is wat we zullen gebruiken in de volgende propositie.

Stelling 2

- De genormaliseerde exponentiële oplossing van voorstel 1, $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$, is asymptotisch stabiel als $b < b_1$, onstabiel als $b > b_1$.
- De genormaliseerde exponentiële oplossing van voorstel 1, $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$, is asymptotisch stabiel als $b > b_2$, onstabiel als $b < b_2$.

- De genormaliseerde exponentiële oplossing van voorstel 1, $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, is asymptotisch stabiel voor $b_1 < b < b_2$.

Bewijs . Over het algemeen, als $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ met $y_1 + y_2 > 0$ en als $p = y_2/(y_1 + y_2)$, dan hebben we

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

In het eerste geval hebben we $p = 0$, dus

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

De grootste eigenwaarde van het blok linksboven is λ_1 . De grootste eigenwaarde van het blok rechtsonder is

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

Het is een toenemende functie van b . Na wat berekeningen krijgen we $\mu_2 > \lambda_1$ als $b > b_1$ en $\mu_2 < \lambda_1$ als $b < b_1$.

In het tweede geval hebben we $p = 1$, dus

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

De grootste eigenwaarde van het blok rechtsonder is λ_2 . De grootste eigenwaarde van het blok linksboven is

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

Het is een afnemende functie van b omdat

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b - c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Na wat berekeningen krijgen we $\mu_1 > \lambda_2$ als $b < b_2$ en $\mu_1 < \lambda_2$ als $b > b_2$.

In het derde geval hebben we $0 < p < 1$. Uit vergelijking (6) volgt dan dat

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Dat weten we al λ^* is een eigenwaarde van de matrix $J_F(z)$ gedefinieerd door (11). De vraag is of de drie andere eigenwaarden een reëel deel hebben dat strikt lager is dan λ^* . Met andere woorden, de matrix $M = J_F(z) - \lambda^* I$ heeft een eigenwaarde nul en de vraag is of de andere eigenwaarden een strikt negatief reëel deel hebben. Men heeft

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

Het karakteristieke polynoom is daarom van de vorm

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

Met een ontwikkeling volgens de eerste kolom vinden we

$$\chi(\xi) = - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}.$$

Voor de coëfficiënt van ξ^3 , we vinden

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

en na vereenvoudiging

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Voor de coëfficiënt van ξ^2 , we vinden

$$k_1 = \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c,$$

en na een moeizame vereenvoudiging

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Ten slotte hebben we voor de coëfficiënt van ξ de formele berekeningssoftware Xcas (<https://www.xcasenligne.fr>) gebruikt om te verkrijgen

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 kan ook in het formulier worden geschreven

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2), \\ k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Zodat de drie wortels van de polynoom $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$ hebben een strikt negatief reëel deel, het is noodzakelijk en voldoende volgens het Routh-Hurwitz-criterium dat $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ en $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, p. 134]. Men heeft $k_2 > 0$. Aan de andere kant, $k_1 > 0$ als $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ en dus in het bijzonder voor $b_1 < b < b_2$ omdat $b_2 < a_1 - a_2$. We hebben ook $k_0 > 0$ als $b_1 < b < b_2$. Het blijft alleen om dat te bewijzen $k_1 k_2 - k_0 > 0$ als $b_1 < b < b_2$. Door het product te ontwikkelen $k_1 k_2$ en door de teller als polynoom in de variabele b te rangschikken, krijgen we

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ \left. + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \right. \\ \left. + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \right. \\ \left. + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \right. \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

We groeperen enkele onderdelen:

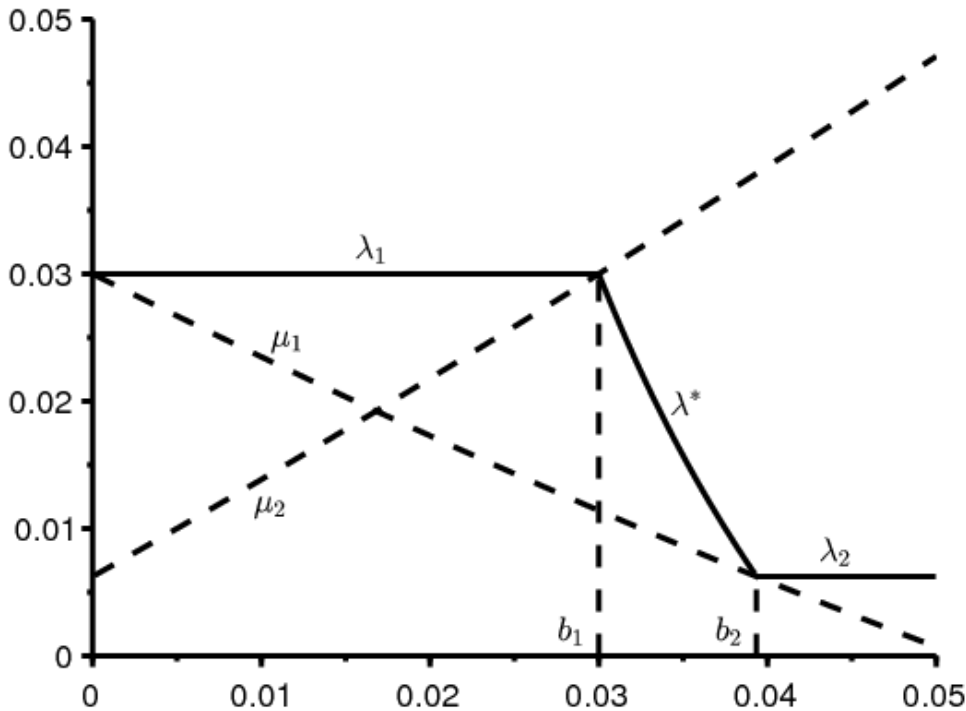
$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ \left. + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \right. \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

De termen tussen vierkante haken zijn allemaal strikt positief omdat $b < b_2 < a_1 - a_2$. We hebben dus $k_1 k_2 - k_0 > 0$. De derde oplossing is dus asymptotisch stabiel voor $b_1 < b < b_2$.

4 Voorbeeld

Laten we nemen $a_1 = 10\%$ per jaar. Bedenk dat deze parameter gelijk is aan het aantal geboorten in gezinnen met een hoge vruchtbaarheid gedeeld door de volwassen bevolking met een hoge vruchtbaarheid, en niet het geboortecijfer dat gewoonlijk wordt gebruikt in de demografie, dat wordt gedeeld door de totale bevolking. Laten we ook nemen: $a_2 = 4\%$ per jaar, $c = 5\%$ per jaar, dus $1/c = 20$ jaren, en $m = 2\%$ per jaar. Levensverwachting bij geboorte is dus $1/m = 50$ jaar. Laten we niet vergeten dat de levensverwachtingen voor mannen en vrouwen in 2017 bijvoorbeeld 52 en 55 jaar waren in Ivoorkust, 51 en 54 jaar in Tsjaad, en 50 en 53 jaar in Centraal-Afrika [15].

Met deze parameterwaarden krijgen we $\lambda_1 = 3\%$ per jaar en $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ per jaar, $b_1 = 3\%$ per jaar en $b_2 \simeq 3,9\%$ per jaar. Figuur 1 laat de verschillende groeipercentages zien λ_1 , λ^* en λ_2 als functie van b . We hebben een gedeeltelijke demografische transitie als $b_1 < b < b_2$, met een groeipercentage λ^* . Ter vergelijking: het natuurlijke groeipercentage is 2,4% in Ivoorkust, 3,3% in Tsjaad en 2,2% in Centraal-Afrika. Tsjaad zou daarom liever in het geval zijn waar $b < b_1$, terwijl de andere twee landen zich in de intermediaire situatie bevinden met $b_1 < b < b_2$.



Figuur 1. Asymptotische percentages van bevolkingsgroei λ_1 , λ^* en λ_2 (ononderbroken lijn) als functie van de imitatiecoëfficiënt b (op de abscis). Eigenwaarden μ_1 en μ_2 zijn gestippeld.

Voor dit model kunnen we het aandeel "jongeren" in de bevolking berekenen. Deze verhouding is

$$x_1 / (x_1 + y_1) = 1 / (1 + c / (\lambda_1 + m)) = 50\%$$

als $b < b_1$. Deze verhouding is

$$x_2 / (x_2 + y_2) = 1 / (1 + c / (\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

als $b > b_2$. Gezien de structuur van het model zouden deze "jonge mensen" echter een gemiddelde leeftijd hebben $1/(c + m) \simeq 14,3$ jaar. Het is daarom moeilijk te vergelijken met demografische statistieken. Volgens [15] bedraagt

het aandeel kinderen onder de 15 jaar 43% in Ivoorkust, 48% in Tsjaad en 44% in Centraal-Afrika.

Het geboortecijfer is

- $a_1 y_1 / (x_1 + y_1) = a_1 c / (\lambda_1 + m + c) = 50$ per 1000 inwoners als $b < b_1$,
- $a_2 y_2 / (x_2 + y_2) = a_2 c / (\lambda_2 + m + c) = 26$ per 1000 inwoners als $b > b_2$.

Voor de drie reeds overwogen landen liggen de cijfers in de orde van 37, 46 en 36 per 1000 inwoners.

De gekozen waarden voor de parameters zijn dus niet al te onrealistisch.

5 Asymptotisch gedrag

Het stabiliteitsonderzoek was tot dusver alleen plaatselijk. Het systeem heeft dimensie 4 en kan het beste worden gereduceerd tot een systeem met dimensie 3. Het lijkt niet mogelijk om de stelling van Poincaré-Bendixson te gebruiken om het globale asymptotische gedrag te bepalen. In het demografisch model met huwelijken van [16, hfst. 4], was het systeem dimensie twee.

Het is ook moeilijk om een geschikte Liapunov-functie te vinden. Ons homogene systeem kan zeker transformeren in een systeem met alleen lineaire of kwadratische termen als we het als nieuwe onbekenden beschouwen $X_1/(Y_1 + Y_2)$, $Y_1/(Y_1 + Y_2)$, $X_2/(Y_1 + Y_2)$ en $Y_2/(Y_1 + Y_2)$. Maar de functie van Liapunov met logaritmische termen die bijvoorbeeld door [2] voor een bepaalde klasse van dergelijke systemen worden gebruikt, lijkt niet geschikt.

Geïnspireerd door het lineaire populatiemodel van [4, p. 80], we krijgen echter het volgende voorstel.

Stelling 3. *De functie*

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

is altijd positief en neemt af.

Bewijs. We definiëren meer algemeen $V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ met $k > 0$. We hebben dan

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c + m) X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ en $Y_2(t) > 0$. De term met factor b is dus negatief

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m) X_1^2 + (a_1 + kc) X_1 Y_1 - (\lambda + m) k Y_1^2].$$

Mits dat $\lambda + c + m \neq 0$, we verkrijgen

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m) k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

De coëfficiënt van Y_1^2 is gelijk aan 0 als we kiezen

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

We behouden de wortel alleen met een + in \pm , zodat $\lambda + c + m > 0$. Deze wortel, die afhankelijk is van k , is minimaal als $a_1^2/k + kc^2$ is minimaal, d.w.z. als $k = a_1/c$. Met deze keuze hebben we $\lambda = \lambda_1$ en

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ convergeert naar een limiet ≥ 0 . In het bijzonder is er een constante $K > 0$ met $\forall t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda t}$ en $Y_1(t) \leq K e^{\lambda t}$.

Stelling 4. *De functie*

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

met

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m \quad (12)$$

is altijd positief en neemt af.

Bewijs. We definiëren meer algemeen $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ met $k > 0$. We hebben dan

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Met $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

Mits dat $\lambda + c + m \neq 0$, men heeft

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

De coëfficiënt van Y_2^2 is gelijk aan 0 als we kiezen

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

We behouden de wortel alleen met een + in \pm , zodat $\lambda + c + m > 0$. Deze wortel, die afhankelijk is van k , is minimaal als $a_2^2/k + kc^2$ is minimaal, d.w.z. als $k = a_2/c$. Dan wordt λ gegeven door formule (12) en we hebben $dW/dt \leq 0$.

Deze resultaten laten echter niet toe om de verschillende regimes te onderscheiden naar de waarde van b . We vermoeden dat:

- als $b < b_1$, men heeft

$$e^{-\lambda t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

met $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ en $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$. Het is de populatie met een hoge vruchtbaarheid die naar verhouding domineert.

- als $b_1 < b < b_2$, men heeft

$$e^{-\lambda t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

en er is een constante $\alpha > 0$ met $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, deze laatste vector is die van Propositie 1. Er bestaat coëxistentie in de eigenschappen van subpopulaties met verschillende vruchtbaarheid;

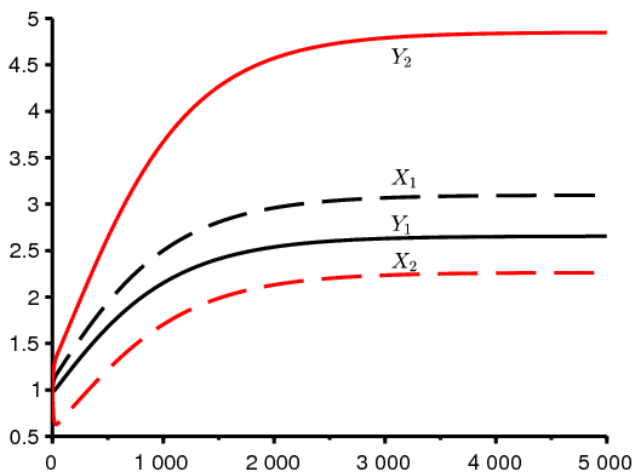
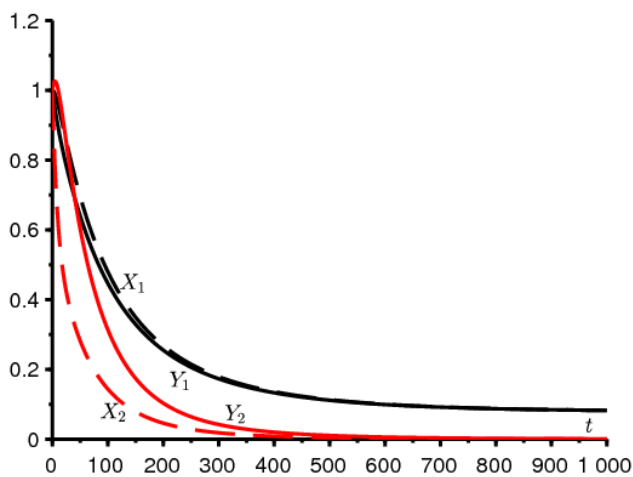
- als $b > b_2$, men heeft

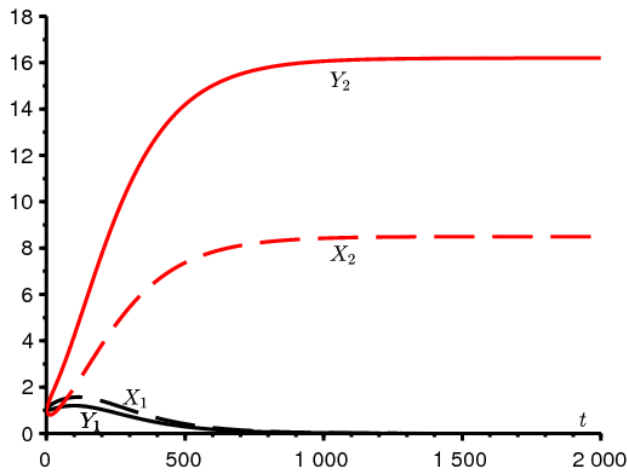
$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

met $x_2 > 0, y_2 > 0$ en $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$. Het is de populatie met een lage vruchtbaarheid die uiteindelijk domineert.

De gedeeltelijke demografische overgang die in bepaalde landen van Afrika bezuiden de Sahara wordt waargenomen, zou dus kunnen corresponderen met het tussenliggende geval waarin $b_1 < b < b_2$.

Om dit vermoeden te ondersteunen, overweeg dan het numerieke voorbeeld in de vorige paragraaf. Neem bijvoorbeeld elke beginvoorwaarde $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (aangezien het systeem homogeen is, kunnen we denken aan 1 miljoen). Figuur 2 laat zien hoe het systeem zich gedraagt volgens de positie van b ten opzichte van de twee drempels. Als het vermoeden lijkt te zijn bevestigd, zullen we echter opmerken in het geval waar $b_1 < b < b_2$ dat de karakteristieke convergentietijd vrij lang is. De tweede eigenwaarde van de Jacobiaanse matrix $J_F(z)$ is dicht bij λ^* .





(a) Foncties $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ als $b = 0,025 < b_1$. (b) Foncties $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ als $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$. (c) Foncties $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ als $b = 0,05 > b_2$. Om het eenvoudiger te maken, schreven we (X_1, Y_1, X_2, Y_2) in de verschillende figuren, maar dit zijn functies die hernormaliseerd zijn door een exponentieel.

Bibliografische referenties

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderl K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderl K. P., Waldstätter R., Wörz-Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer
8. Inaba H., Saito R., Bacaër N., An age-structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), La Relation ressource–consommateur, *Modélisation mathématique*, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P., Fanti L. (2003), The demographic transition and neo-classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W., Schnaubelt R., Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero-Bixby L., Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P.-F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier-Villars.