

部分的な人口転換の数学的モデル

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement、複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリング、Les Cordeliers、パリ、フランス、nicolas.bacaer @ ird.fr

² 東京大学、数学科、東京、inaba @ ms.u-tokyo.ac.jp

³ トレムセン大学、数学科、トレムセン、アルジェリア、moussaouidz @ yahoo.fr

概要

人口転換の数学的モデルを研究します。2つの年齢階級と2つのレベルの出生率があります。出生率が高い成人は、出生率が低い成人に似ています。模倣係数が増加すると、母集団は2つのしきい値を超えます。このしきい値の間で、2つの受精率の安定した混合により、母集団は指数関数的に増加または減少します。この部分的な人口転換は、サハラ以南アフリカの特定の国の状況を思い起こさせます。

キーワード：数学的モデル、人口転換、指数関数的成長

1はじめに

人口転換は数十年にわたる現象です。人口は最初にその死亡率の減少を見ます。その後、一定の遅延で出生率も低下します。この遅れのために、人口はしばしばかなり増加し、重要な経済的および社会的影響を伴います[3]。

有名な近代化仮説は、出生率の低下は近代化された環境への個人の適応の結果であると主張しています：工業化、都市化、教育と家族の基準の変化。しかし、出生率の低下と社会開発のレベルに関する多くの指標との間に直接的なつながりを確立することは困難です。したがって、個人の態度の変化と巨視的な統計データの違いを理解するための動的メカニズムを探しています。

[9]の「3つの人口統計」に分割すると、人口統計の推移は、統計、政治、または数学の3つの角度から見ることもできますと言えます。この最後の角度から、特にVerhulstまたはLotkaの作品[19、12]によって示され、たとえば[14]によって要約されて、問題を検討します。

数学的モデリングの観点から、人口動態の推移は外因性または内因性のいずれかとして提示できます。最初のケースでは、人口は均一であると想定されますが、生活条件の近代化は、人口統計学的パラメーターが時間とともに変化することを意味します。これは非自律モデルにつながります[1]。

それどころか、内因性のアプローチは、自律的なモデル、つまり、その係数が時間に依存しない、異種の母集団を使用することにあります。質的变化は、亜集団間の相互作用から生じます。

人口動態の変化は、流行にいくぶん似ています。出生数を減らす革新的な文化的規範は、拡散理論のように、低出生率の個体（「感染した」）から伝統的な高出生率の個体（「健康な」人々）に伝達できます[18、13]。この感染プロセスは、社会経済および環境の変化によって引き起こされます。

[8]は最近、受精率遷移の拡散理論についてこの流行の視点を開発しました。出生率の低下は、子供が少ない傾向が広がった結果として説明されます。彼らの最初のモデルは、出生率の高い個人と出生率の低い個人との間で人口を分け、 $P_1(t)$ そして $P_2(t)$ 。それらの数は1次の同次微分システムに従って進化した

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 そして r_2 孤立した人口の成長率であり、 $r_1 > r_2$ 。 b は、出生率が高い個人が出生率を低くする最大率を示す模倣係数です。この率は、出生率が低い人口の割合に直線的に依存すると想定されています。 $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$ 。生態学的に言えば、それはロトカとヴォルテッラの方法で獲物-捕食者システム[20]ですが、アルディティとギンツブルクのモデルのように、2つの個体数の比率のみに依存する非線形捕食率[11、§2.3]。数学的分析は非常に簡単です。それを観察することで十分です $f(t)$ はロジスティック方程式の解です。による $b < r_1 - r_2$ または $b > r_1 - r_2$ 、総人口はある割合で指数関数的に増加する傾向があります r_1 または r_2 0に収束するのは、出生率が低い人口または出生率が高い人口の割合です。したがって、出生率が高い人口と少数の出生率を持つ個体から始めて、場合のみ $b > r_1 - r_2$ 。

次に、[8]は同じモデルの年齢構成バージョンを研究します。年齢 x は連続変数であるため、これにより、マッケンドリックとフォンフェルスターのタイプの偏微分方程式のシステムが導き出されました。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx, \end{aligned}$$

と

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

このモデルでは、 $m(x)$ 死亡率です $a_1(x)$ そして $a_2(x)$ 出生率です。モデルの数学的分析はさらに複雑になり、非常に部分的な結果しか得られませんでした。一般に、しきい値は1つではなく2つです。1番目のしきい値の下で2番目のしきい値を超えると、最初のケースでは出生率が高く、2番目のケース。2つのしきい値の間で、少なくともパラメーターの特定の値について（つまり、確かに最適ではない特定の追加条件を使用して）、異なる受胎能力。この重要な解決策の一意性と安定性については、議論されていません。このソリューションでは、人口増加率は2つの極端なケ

ースの中間です。部分的な人口動態の変化があります。最初のモデルとのこの定性的な違いは、アプリオリでは明らかではありませんでした。

動機は日本の人口統計学から来たので、2つの閾値の間の体制は[8]で逸話のように見えました。人口動態の変化が非常に進んでいるため、人口増加率はマイナスになっています。2つ目のしきい値を超えています。一方で、サハラ以南のアフリカの特定の国の場合には、中間政権が重要である可能性があります。平均出生率は実際には少し低下しましたが、人口統計学者が予測した値よりもはるかに低くなっています[10]。さらに、偏微分方程式のシステムを分析するのが困難であるため、部分的な人口統計学的遷移のより単純なモデルを探する必要があります。

したがって、継続的に変化する年齢ではなく、2つの年齢クラス（若者と大人）のみのモデルを以下で検討します。利点は、2つのしきい値で同じ遷移現象を保持することです。これにより、より完全な調査が可能になります。特に、非自明な解が一意であり、その存在領域が自明な解の不安定性の領域と正確に一致することを示します。また、重要な解決策の局所的な安定性を証明することもできます。

セクション2でモデルをその自明なおよび非自明な指数解とともに提示します。セクション3では、特にRouth-Hurwitz基準と1次の同次微分システムの理論を使用して、指数解の安定性を研究します。この理論については、[6, p. 638]と本[5, chap. 5]、[7, chap. 4]と[16, chap. 4]。システムは4次元であるため、重要な指数解の安定性は、上記の参考文献の例にはない、形式計算ソフトウェアの使用を必要とする困難を示します。セクション4では、サハラ以南アフリカの一部の国を代表することを目的とした数値例を示します。セクション5は、世界的な漸近的行動の欠如に対する推測を提案している。適切なリアポノフ関数を見つけた。したがって、偏微分方程式システムよりも単純ですが、モデルの分析はまだ不完全です。

2モデルとその指数解

私たちは定義します

- $X_1(t)$ 肥沃な家族の若者の数
- $Y_1(t)$ 肥沃な家族の大人の数
- $X_2(t)$ 出生率が低下した家族の若者の数
- $Y_2(t)$ 出生率が低下した家族の成人の数。

とする

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ そして $a_2 > 0$ 出生率 ($a_1 > a_2$)、 $m > 0$ 死亡率です $c > 0$ 青年期から成人期への移行率であり、 $b > 0$ 出生率の高い成人が出生率の低い方を採用する最大率です。成人集団における出生率の低い成人の割合、 $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ 、このモデルに介入します。それどころか、[8]の2番目のモデルでは、それは総人口における出生率の低い家族からの個人の割合でした。とする $X_1(0) > 0$ 、 $Y_1(0) > 0$ 、 $X_2(0) > 0$ そして $Y_2(0) > 0$ 。

私たちは定義します $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ 。上記の微分システムは次の形式で書くことができます

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

次数が1の同次ベクトル関数である関数 F を使用します。システムの解のグローバルな存在と陽性 (3) は、結婚のある人口統計モデルのように示されます。たとえば、[16、chap. 4]。陽性は、 $dX_1/dt \geq 0$ もし $X_1 = 0$ 、 $dY_1/dt \geq 0$ もし $Y_1 = 0$ 、など成分がすべて正である初期条件では、各成分はすべての $t > 0$ でさえ正のままです。全世界が存在することは、全人口が従う不平等から生じる

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ の場合、システム (3) の「正の指数解」です。

- $z = (z_i)$ はベクトルです $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) 非線形固有値問題の解です $\lambda z = F(z)$.

(λ, z) がそのような解であり、 $\alpha > 0$ の場合、 $(\lambda, \alpha z)$ もソリューションです。正の指数解は、次の場合に正規化されます。 $\sum_i z_i = 1$ 。

命題1。 次の形式の単一の正規化された正の指数解があります $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

同様に、次の形式の単一の正規化された正の指数解があります。 $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

その場合 $b_1 < b < b_2$ と

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

次に、次の形式の単一の正規化された正の指数解があります $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_2^*, x_2^*, y_1^*)$ と $x_1^* > 0$ 、 $y_1^* > 0$ 、 $x_2^* > 0$ そして $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

証明。最初のソリューションでは、

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

したがって、 λ の二次方程式

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

2つのルーツは

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

+のあるものだけが正の解決策を導きます (x_1, y_1)。

2番目の解は、インデックス1をインデックス2で置き換えることによって同じ方法で取得されず。

3番目のソリューションでは、

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

持てない $c + \lambda + m = 0$ さもないと $y_1 = 0$ 。だから私たちは $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ そして $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$ 。したがって、他の2つの方程式を置き換えて、 y_1 または y_2 、

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

これら2つの方程式を引くと、

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

式の右側のメンバー y_1/y_2 厳密に正でなければなりません。我々は持っています

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

そして

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

私たちは定義します $b_3 = 2(a_1 - a_2)$ 。我々は持っています

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

さらに、小さな計算は、 $Q(b_1) = 0$ そして $Q(b_2) = 1$ 。また、 $b_1 < b_2 < b_3$ 。私たちはそれを結論付けます

- 間隔で $]0, b_1[$ 、 $1/Q - 1$ は-1から $-\infty$ に減少する減少関数です。
- 間隔で $]b_1, b_2[$ 、 $1/Q - 1 + \infty$ から0に減少する減少関数です。
- 間隔で $]b_2, b_3[$ 、 $1/Q - 1$ まだ減少関数であり、 $1/Q - 1 < 0$ 、
- 間隔で $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ 増加する機能であり、私たちはまだ持っています $1/Q - 1 < 0$ 。

だから私たちは $y_1/y_2 > 0$ インターバルのみ $]b_1, b_2[$ 。 の式 x_1 、 y_1 、 x_2 そして y_2 (6) と標準化から生じる $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$ 。これで証明は完了です。

ご了承ください $b_1 < b_2$ 。 成長率 λ^* (6) で与えられる λ_1 まで λ_2 間隔で $b_1 < b < b_2$ 。

ときの $C + \infty$ に収束するが、2つの年齢グループでのモデルは、単一の年齢層と導入でモデルに縮小されます。2つのしきい値が b_1 そして b_2 次に、次の値に等しい単一のしきい値に向かって収束します $a_1 - a_2$ 。

3指数関数解の安定性

と $i \in \{1, 2\}$ 、私たちは定義します

$$x_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad y_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

我々は持っています $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$ 。システム (1) - (2) からのかなり単純な計算により、

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 y_1 - c x_1 - x_1 [a_1 y_1 + a_2 y_2], \quad (7)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} - y_1 [a_1 y_1 + a_2 y_2], \quad (8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 y_2 - c x_2 - x_2 [a_1 y_1 + a_2 y_2], \quad (9)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} - y_2 [a_1 y_1 + a_2 y_2]. \quad (10)$$

をシステム (1) - (2) の正規化された指数解とします。 $e^{\lambda t} z$ と $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ 。方程式 (4) - (5) があります。4つの方程式を追加すると、

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m.$$

z がシステム (7) - (10) の平衡点であると推定します。解決策は $e^{\lambda t} z$ がシステムの漸近的に安定した (それぞれ不安定な) 平衡点である場合、「漸近的に安定した」 (それぞれ不安定) です (7) - (10)。同次ベクトル関数 (ここでは1次) のオイラーの定理から、 λ は常に点 z で (3) によって定義される関数 F のヤコビ行列の固有値であることがわかります。 $J_F(z)$ 。確かに、

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

[6, p. 638]、 λ 以外のこのヤコビアン行列の3つの固有値の実部が厳密に λ よりも小さい場合、平衡点 z は漸近的に安定しています。これらの3つの固有値の1つが λ よりも厳密に大きい実部を持っている場合、平衡点は不安定です。これは、次の命題で使用するものです。

命題2

- 命題1の正規化された指数解 $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$ 、漸近的に安定している場合 $b < b_1$ 、不安定な場合 $b > b_1$ 。
- 命題1の正規化された指数解 $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$ 、漸近的に安定している場合 $b > b_2$ 、不安定な場合 $b < b_2$ 。
- 命題1の正規化された指数解 $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ 、に対して漸近的に安定している $b_1 < b < b_2$ 。

証明。一般的に、 $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ と $y_1 + y_2 > 0$ で、もし $p = y_2/(y_1 + y_2)$ 、その後、

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

最初のケースでは、 $p = 0$ なので、

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

左上のブロックの最大固有値は λ_1 。右下のブロックの最大固有値は

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

b の増加関数です。いくつかの計算の後、 $\mu_2 > \lambda_1$ もし $b > b_1$ そして $\mu_2 < \lambda_1$ もし $b < b_1$ 。

2番目のケースでは、 $p = 1$ なので、

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

右下のブロックの最大固有値は λ_2 。左上のブロックの最大固有値は

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

これは b の減少関数です。

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b - c}{\sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

いくつかの計算の後、 $\mu_1 > \lambda_2$ もし $b < b_2$ そして $\mu_1 < \lambda_2$ もし $b > b_2$ 。

3番目のケースでは、 $0 < p < 1$ 。次に、式 (6) から、

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

私たちはすでにそれを知っています λ^* 行列の固有値です $J_F(z)$ (11) で定義されています。問題は、他の3つの固有値が実数部よりも厳密に低いかどうかを知ることです λ^* 。言い換えれば、行列 $M = J_F(z) - \lambda^* I$ 固有値はゼロであり、他の固有値に厳密に負の実数部があるかどうか問題になります。我々は持っています

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

したがって、特性多項式は次の形式になります。

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

最初の列による開発で、私たちは見つけます

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

の係数 ξ^3 、我々は気づく

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

そして単純化の後

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

の係数 ξ^2 、我々は気づく

$$\begin{aligned} k_1 = & \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ & + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c, \end{aligned}$$

面倒な簡素化の後

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

最後に、 ξ の係数については、公式計算ソフトウェアXcas (<https://www.xcasenligne.fr>) を使用して、

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 フォームで書くこともできます

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

多項式の3つの根が $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$ 厳密に負の実数部がある場合、Routh-Hurwitzの基準によれば、 $k_2 > 0$ 、 $k_1 > 0$ 、 $k_0 > 0$ そして $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, p. 134]。我々は持っています $k_2 > 0$ 。一方、 $k_1 > 0$ もし $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ したがって、特に $b_1 < b < b_2$ なぜなら $b_2 < a_1 - a_2$ 。また、 $k_0 > 0$ もし $b_1 < b < b_2$ 。それだけを証明するために残っています $k_1 k_2 - k_0 > 0$ もし $b_1 < b < b_2$ 。製品を開発することにより $k_1 k_2$ 変数に多項式として分子をランク付けすることによって、 B 、我々が得ます

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

私たちはいくつかの部分グループ化します：

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

角括弧内の用語はすべて厳密に正です。 $b < b_2 < a_1 - a_2$ 。このように $k_1 k_2 - k_0 > 0$ 。したがって、3番目の解は漸近的に安定です。 $b_1 < b < b_2$ 。

4例

取りましょう $a_1 = 10\%$ 1年あたり。このパラメーターは、出生率の高い家族の出生数を出生率の高い成人人口で割った値に等しく、人口統計で通常使用される出生率ではなく、総人口で割ったものであることを思い出してください。とりましょう： $a_2 = 4\%$ 1年あたり、 $c = 5\%$ 年間なので、 $1/c = 20$ 年、そして $m = 2\%$ 1年あたり。したがって、出生時の平均余命は $1/m = 50$ 年。2017年の男性と女性の平均余命は、たとえば、コートジボワールでは52歳と55歳、チャドでは51歳と54歳、中央アフリカでは50歳と53歳でした[15]。

これらのパラメーター値により、 $\lambda_1 = 3\%$ 年間および $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ 1年あたり、 $b_1 = 3\%$ 年間および $b_2 \simeq 3,9\%$ 1年あたり。図1は異なる成長率を示しています λ_1 、 λ^* そして $\lambda_2 b$ の関数として。次の場合、人口統計の一部が移行します $b_1 < b < b_2$ 、成長率 λ^* 。比較すると、自然成長率はコー

トジボワールで2.4%、チャドで3.3%、中央アフリカで2.2%です。したがって、チャドはむしろ $b < b_1$ 、他の2か国は、 $b_1 < b < b_2$ 。

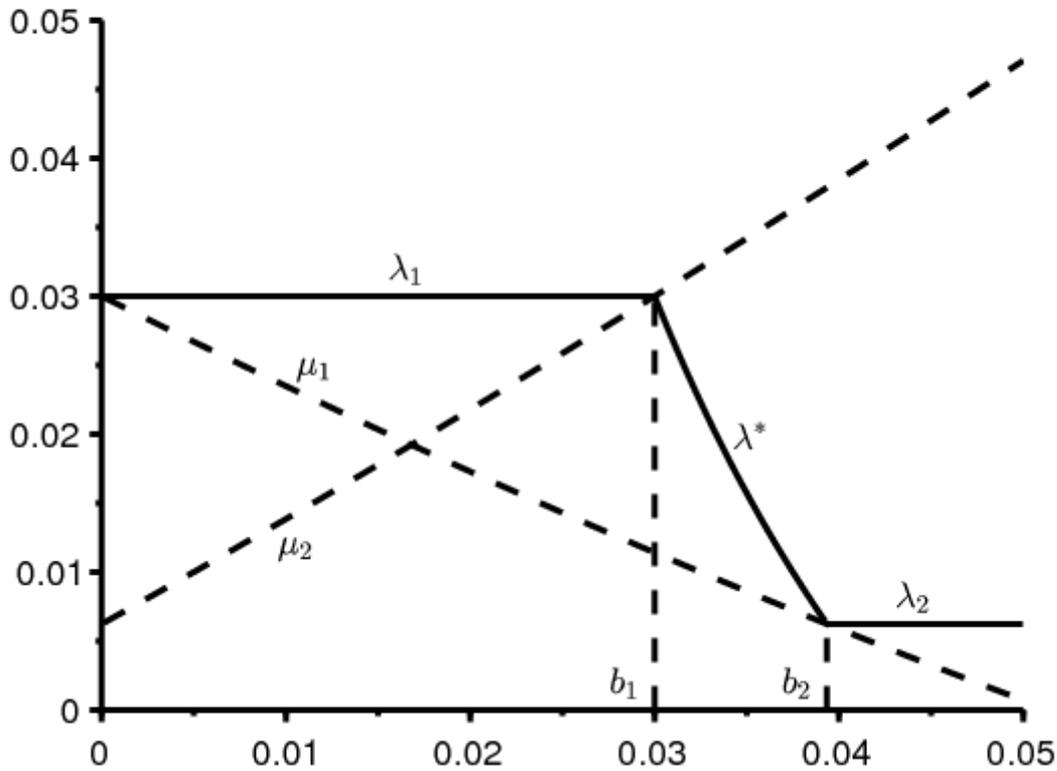


図1.人口増加の漸近率 λ_1 、 λ^* そして λ_2 (実線) (横軸に) 模倣係数 b の関数として。固有値 μ_1 そして μ_2 点線です。

このモデルでは、人口に占める「若者」の割合を計算できます。この比率は

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

もし $b < b_1$ 。この比率は

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

もし $b > b_2$ 。ただし、モデルの構造を考えると、これらの「若者」の平均年齢は $1/(c + m) \simeq 14,3$ 年。したがって、人口統計と比較することは困難です。[15]によると、15歳未満の子供の割合は、コートジボワールで43%、チャドで48%、中央アフリカで44%です。

出生率は

- $a_1 y_1 / (x_1 + y_1) = a_1 c / (\lambda_1 + m + c) = 50$ 1000人あたり $b < b_1$ 、
- $a_2 y_2 / (x_2 + y_2) = a_2 c / (\lambda_2 + m + c) = 26$ 1000人あたり $b > b_2$ 。

すでに検討されている3か国の場合、この数値は人口1000人あたり37、46、36の順になっています。

したがって、パラメーターに選択された値は、それほど現実的ではありません。

5漸近的振る舞い

これまでのところ、安定性研究は局所的なもののみでした。システムは4次元であり、3次元のシステムに最適化されます。ポアンカレベンディクソンの定理を使用してグローバルな漸近的振る舞いを決定することは不可能のようです。結婚が[16、chap. 4]、システムは2次元でした。

また、適切なリアプノフ関数を見つけることも困難です。私たちの均一系は、新しい未知数として扱う場合、線形項または二次項のみを持つシステムに確実に変換できます。 $X_1/(Y_1 + Y_2)$ 、 $Y_1/(Y_1 + Y_2)$ 、 $X_2/(Y_1 + Y_2)$ そして $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ 。しかし、そのようなシステムの特定のクラスに対して[2]が使用するような対数項を使用したリアポノフの関数は適切ではないようです。

[4、pの線形人口モデルに触発されました。80]しかしながら、我々は以下の命題を得る。

命題3. 機能

$$V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$$

常にポジティブで減少しています。

証明。より一般的に定義します $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ と $k > 0$ 。私たちは

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c + m) X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ そして $Y_2(t) > 0$ 。したがって、係数 b の項は負です

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m) X_1^2 + (a_1 + kc) X_1 Y_1 - (\lambda + m) k Y_1^2].$$

それが条件 $\lambda + c + m \neq 0$ 、私達は手に入れました

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m) k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

の係数 Y_1^2 選択すると、0になります

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

ルートは+を付けたままにします \pm 、そのため $\lambda + c + m > 0$ 。 k に依存するこのルートは、次の場合に最小になります。 $a_1^2/k + kc^2$ が最小、つまり $k = a_1/c$ 。この選択により、 $\lambda = \lambda_1$ そして

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t) \geq 0$ の限界に収束します。特に、定数があります $K > 0$ と $\forall t > 0, X_1(t) \leq K e^{\lambda t}$ そして $Y_1(t) \leq K e^{\lambda t}$ 。

命題4. 機能

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

と

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m \quad (12)$$

常にポジティブで減少しています。

証明。より一般的に定義します $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ と $k > 0$ 。私たちは

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

と $Y_1 / (Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

それが条件 $\lambda + c + m \neq 0$ 、我々は持っています

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

の係数 Y_2^2 選択すると、0になります

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

ルートは+を付けたままにします \pm 、そのため $\lambda + c + m > 0$ 。 k に依存するこのルートは、次の場合に最小になります。 $a_2^2/k + kc^2$ が最小、つまり $k = a_2/c$ 。次に、 λ は式 (12) で与えられ、 $dW/dt \leq 0$ 。

ただし、これらの結果では、 b の値に従って異なる体制を区別することはできません。私たちはそれを推測します：

- もし $b < b_1$ 、我々は持っています

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

と $x_1 > 0$ 、 $y_1 > 0$ そして $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$ 。出生率が高い人口であり、比例して支配的になります。

- もし $b_1 < b < b_2$ 、我々は持っています

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

そして定数があります $\alpha > 0$ と $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ 、この最後のベクトルは命題 1 のベクトルです。出生率の異なる部分母集団の割合には共存があります。

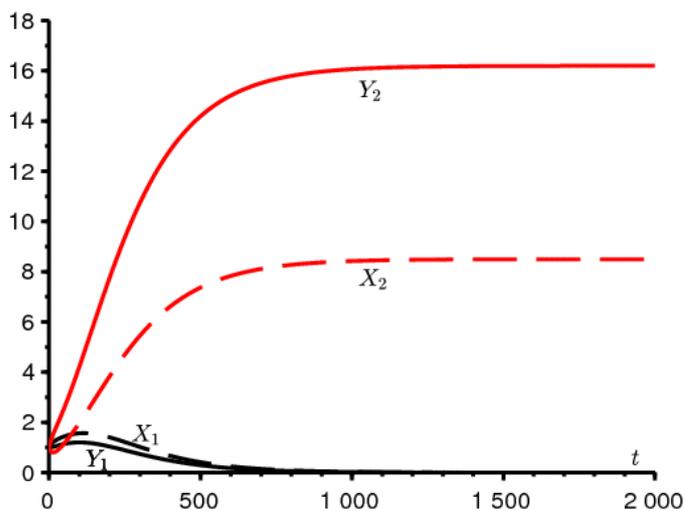
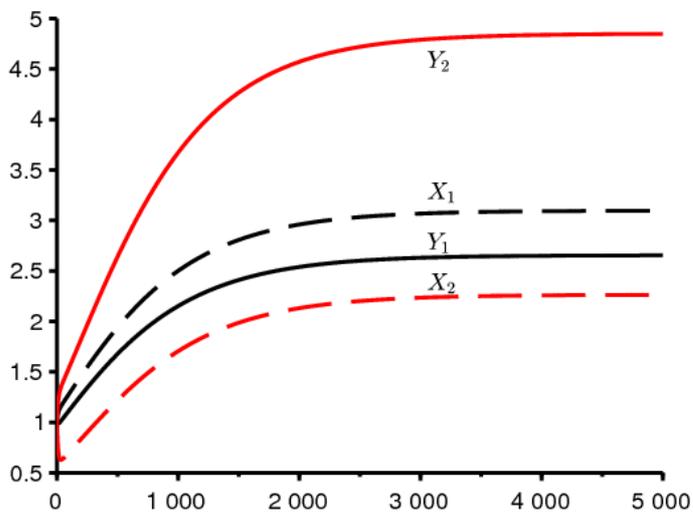
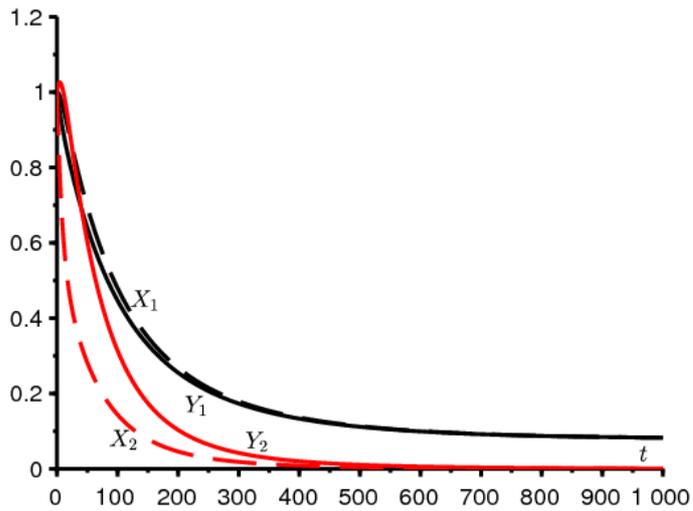
- もし $b > b_2$ 、我々は持っています

$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

と $x_2 > 0$ 、 $y_2 > 0$ そして $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$ 。出生率の低い集団であり、比例して支配的になります。

したがって、サハラ以南のアフリカの特定の国で観察された部分的な人口動態の変化は、 $b_1 < b < b_2$ 。

この推測を裏付けるために、前のセクションの数値例を検討してください。たとえば、任意の初期条件を取ります $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ （システムは均質なので、100万と考えることができます）。図2は、2つのしきい値に対する b の位置に従ってシステムがどのように動作するかを示しています。予想が確認されたように見える場合は、ただし、 $b_1 < b < b_2$ 特徴的な収束時間がかかり長いこと。ヤコビ行列の2番目の固有値 $J_F(z)$ に近い λ^* 。



(a) 機能 $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ もし $b = 0,025 < b_1$ 。 (b) 機能 $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ もし $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$ 。 (c) 関数 $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ もし $b = 0,05 > b_2$ 。簡単にするために、私たちは書きました (X_1, Y_1, X_2, Y_2) 別の図では、これらは指数関数でくりこまれた関数です。

参考文献

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986),
La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques,
Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*,
Londres, ISTE.
5. Haderler K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderler K. P., Waldstätter R., Wörz-Busekros A. (1988),
Models for pair formation in bisexual populations,
Journal of Mathematical Biology, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*,
Singapour, Springer
8. Inaba H., Saito R., Bacaër N.,
An age-structured epidemic model for the demographic transition,
Journal of Mathematical Biology, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive,
Futuribles, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), *La Relation ressource-consommateur, Modélisation mathématique*,
Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie,
Paris, Hermann.
13. Manfredi P., Fanti L. (2003),
The demographic transition and neo-classical models of balanced growth,
N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J.W., Schnaubelt R., Zacher R. (2008),
Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme,
Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero-Bixby L., Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition,
Population Studies, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P.-F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement,
Correspondance mathématique et physique, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*,
Paris, Gauthier-Villars.