

Un modello matematico per una transizione demografica parziale

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement, Modellistica matematica e computerizzata di sistemi complessi, Les Cordeliers, Parigi, Francia, nicolas.bacaer@ird.fr

² Università di Tokyo, Dipartimento di Matematica, Tokyo, Giappone, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ Università di Tlemcen, Dipartimento di Matematica, Tlemcen, Algeria, moussaouidz@yahoo.fr

riassunto

Studiamo un modello matematico per la transizione demografica. Esistono due classi di età e due livelli di fertilità. Gli adulti con elevata fertilità imitano gli adulti con bassa fertilità. Quando il coefficiente di imitazione aumenta, la popolazione attraversa due soglie tra le quali la popolazione aumenta o diminuisce in modo esponenziale con una miscela stabile delle due fertilità. Questa parziale transizione demografica ricorda la situazione in alcuni paesi dell'Africa sub-sahariana.

Parole chiave: modello matematico, transizione demografica, crescita esponenziale

1. Introduzione

La transizione demografica è un fenomeno che attraversa decenni. La popolazione vede prima diminuire la sua mortalità. Quindi, con un certo ritardo, diminuisce anche la fertilità. A causa di questo ritardo, la popolazione cresce spesso considerevolmente, con importanti conseguenze economiche e sociali [3].

La nota ipotesi di modernizzazione insiste sul fatto che il basso tasso di fertilità è il risultato dell'adattamento individuale agli ambienti modernizzati: industrializzazione, urbanizzazione, cambiamenti negli standard educativi e familiari. È tuttavia difficile stabilire un legame diretto tra il declino della fertilità e molti indicatori del livello di sviluppo sociale. Stiamo quindi cercando un meccanismo dinamico per comprendere la differenza tra il cambiamento nell'atteggiamento individuale e i dati statistici macroscopici.

Se seguiamo la divisione in "tre dati demografici" di [9], possiamo dire che la transizione demografica può essere vista da tre angolazioni: statistica, politica o matematica. È da quest'ultimo punto di vista, illustrato in particolare dalle opere di Verhulst o Lotka [19, 12] e riassunto ad esempio da [14], che considereremo il problema.

Dal punto di vista della modellistica matematica, la transizione demografica può essere presentata come esogena o endogena. Nel primo caso, si presume che la popolazione sia omogenea, ma la modernizzazione delle condizioni di vita significa che i parametri demografici variano nel tempo. Ciò porta a modelli non autonomi [1].

L'approccio endogeno, al contrario, consiste nell'utilizzare modelli autonomi, vale a dire i cui coefficienti non dipendono dal tempo, con una popolazione eterogenea. I cambiamenti qualitativi derivano quindi dall'interazione tra le sottopopolazioni. La transizione demografica è in qualche modo analoga a un'epidemia. Norme culturali innovative che riducono il numero di nascite possono essere trasmesse da individui a bassa fertilità (gli "infetti") a individui tradizionali ad alta fertilità (le persone "sane"), come nella teoria della diffusione [18, 13]. Questo processo di trasmissione può essere innescato da cambiamenti socioeconomici e ambientali.

[8] ha recentemente sviluppato questo punto di vista epidemico per la teoria della diffusione della transizione della fertilità. Il declino della fertilità è descritto come il risultato della diffusione della tendenza ad avere meno figli. Il loro primo modello ha diviso la popolazione tra individui con elevata fertilità e individui con bassa fertilità, $P_1(t)$ e $P_2(t)$. I loro numeri si sono evoluti secondo un sistema differenziale omogeneo di grado uno

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 e r_2 sono i tassi di crescita delle popolazioni isolate, con $r_1 > r_2$. b è un coefficiente di imitazione che indica la velocità massima con cui gli individui con elevata fertilità adottano una bassa fertilità. Si presume che questo tasso dipenda linearmente dalla frazione della popolazione con bassa fertilità:

$f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$. In termini ecologici, è un sistema di prede-predatore alla maniera di Lotka e Volterra [20] ma con un tasso di predazione non lineare che dipende solo dal rapporto tra le due popolazioni, come nel modello di Arditi e Ginzburg [11, § 2.3]. L'analisi matematica è molto semplice. Basta osservarlo $f(t)$ è la soluzione di un'equazione logistica. Secondo $b < r_1 - r_2$ o $b > r_1 - r_2$, la popolazione totale tende a crescere esponenzialmente con un tasso r_1 o r_2 ed è la frazione della popolazione con bassa fertilità o quella con alta fertilità che converge a 0. Partendo da una popolazione con alta fertilità e pochi individui con bassa fertilità, la transizione demografica ha quindi luogo se e solo se $b > r_1 - r_2$.

Successivamente, [8] studia una versione strutturata per età dello stesso modello. Poiché l'età x era una variabile continua, ciò portò a un sistema di equazioni differenziali parziali del tipo di McKendrick e von Foerster:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx, \end{aligned}$$

con

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

In questo modello, $m(x)$ è il tasso di mortalità, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ sono i tassi di fertilità. L'analisi matematica del modello è quindi più complicata e sono stati ottenuti solo risultati molto parziali. Generalmente non esiste più una sola soglia ma due. Sotto la prima soglia e sopra la seconda soglia, esiste un'unica soluzione esponenziale banale localmente stabile (nel senso della teoria dei sistemi omogenei) composta da individui con elevata fertilità nel primo caso, con bassa fertilità nel secondo caso. Tra le due soglie, almeno per determinati valori dei parametri (vale a dire con determinate condizioni aggiuntive che non sono certamente ottimali), è stato possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione esponenziale non banale con individui che hanno diversa fertilità. L'unicità e la stabilità di questa soluzione non banale non sono state discusse. Per questa soluzione, il tasso di crescita della popolazione è intermedio tra i due casi estremi. C'è una transizione demografica parziale. Questa differenza qualitativa con il primo modello non era evidente a priori.

Il regime tra le due soglie sembrava aneddótico in [8], poiché la motivazione proveniva dalla demografia del Giappone. La transizione demografica è così avanzata lì che il tasso di crescita della popolazione è diventato negativo. Siamo oltre la seconda soglia. D'altro canto, il regime intermedio potrebbe essere di interesse nel caso di alcuni paesi dell'Africa sub-sahariana. La fertilità media è in realtà diminuita un po', ma molto meno di quanto previsto dai demografi [10]. Inoltre, le difficoltà di analizzare il sistema di equazioni differenziali parziali ci spingono a cercare un modello più semplice per una transizione demografica parziale.

Studiamo quindi sotto un modello con solo due classi di età (giovani e adulti) invece di un'età che varia continuamente. Il vantaggio è che mantiene lo stesso fenomeno di transizione a due soglie. Ciò consente uno studio più completo. Mostriamo in particolare che la soluzione non banale è unica e che il suo dominio di esistenza coincide esattamente con il dominio di instabilità di soluzioni banali. Riusciamo anche a dimostrare la stabilità locale della soluzione non banale.

Presentiamo il modello nella sezione 2 con le sue soluzioni esponenziali banali e non banali. Studiamo la stabilità delle soluzioni esponenziali nella sezione 3 usando in particolare il criterio di Routh-Hurwitz e la teoria dei sistemi differenziali omogenei di primo grado. Per questa teoria, vedi [6, p. 638] e i libri [5, cap. 5], [7, cap. 4] e [16, cap. 4]. Poiché il sistema è di dimensione 4, la stabilità della soluzione esponenziale non banale presenta una difficoltà che era assente dagli esempi dei riferimenti sopra e che richiedeva l'uso di software di calcolo formale. La sezione 4 presenta un esempio numerico che mira ad essere rappresentativo di alcuni paesi dell'Africa sub-sahariana. La sezione 5 propone una congettura per un comportamento asintotico globale per mancanza di avere trovato una funzione Liapounov adatta. Sebbene più semplice di quello del sistema di equazioni differenziali parziali, l'analisi del nostro modello è quindi ancora incompleta.

2 Il modello e le sue soluzioni esponenziali

Definiamo

- $X_1(t)$ il numero di giovani appartenenti a famiglie fertili
- $Y_1(t)$ il numero di adulti in famiglie fertili
- $X_2(t)$ il numero di giovani appartenenti a famiglie con ridotta fertilità
- $Y_2(t)$ il numero di adulti in famiglie con ridotta fertilità.

Assumiamo

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ sono la fertilità ($a_1 > a_2$), $m > 0$ è la mortalità, $c > 0$ è il tasso di transizione dei giovani all'età adulta e $b > 0$ è la velocità massima alla quale gli adulti con elevata fertilità adottano una bassa fertilità. La frazione di adulti meno fertili nella popolazione adulta, $Y_2/(Y_1 + Y_2)$, interviene in questo modello. Al contrario, nel secondo modello di [8], era la frazione di individui appartenenti a famiglie povere di fertilità nella popolazione totale. Assumiamo $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ e $Y_2(0) > 0$.

Definiamo $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. Il sistema differenziale sopra riportato può essere scritto nella forma seguente

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

con una funzione F che è una funzione vettoriale omogenea di grado uno. L'esistenza globale e la positività delle soluzioni del sistema (3) sono mostrate come nei modelli demografici con il matrimonio. Vedi ad esempio [16, cap. 4]. La positività deriva dal fatto che $dX_1/dt \geq 0$ Se $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ Se $Y_1 = 0$, eccetera. Con una condizione iniziale i cui componenti sono tutti rigorosamente positivi, ogni componente rimane addirittura strettamente positivo per tutti $t > 0$. L'esistenza globale deriva dalla disuguaglianza a cui la popolazione totale obbedisce

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ è una "soluzione esponenziale positiva" del sistema (3) se

- $z = (z_i)$ è un vettore con $z_i \geq 0 \forall i$

- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) è una soluzione al problema degli autovalori non lineari $\lambda z = F(z)$.

Se (λ, z) è una tale soluzione e se $\alpha > 0$, allora $(\lambda, \alpha z)$ è anche una soluzione. Diciamo che una soluzione esponenziale positiva è normalizzata se $\sum_i z_i = 1$.

Proposta 1 . Esiste un'unica soluzione esponenziale positiva normalizzata del modulo $e^{\lambda t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

Allo stesso modo, esiste un'unica soluzione esponenziale positiva normalizzata del modulo $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

Nel caso $b_1 < b < b_2$ con

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

quindi esiste un'unica soluzione esponenziale positiva normalizzata del modulo $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ con $x_1^* > 0, y_1^* > 0, x_2^* > 0$ e $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Prova . Per la prima soluzione,

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

Da qui l'equazione quadratica per λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

Le due radici sono

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m$$

ma solo quello con un + porta a soluzioni positive (x_1, y_1) .

La seconda soluzione si ottiene allo stesso modo sostituendo l'indice 1 con l'indice 2.

Per la terza soluzione,

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

Non possiamo avere $c + \lambda + m = 0$ altrimenti $y_1 = 0$. Quindi abbiamo $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ e $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. Quindi, sostituendo le altre due equazioni e dividendole per y_1 o y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Sottraendo queste due equazioni, otteniamo

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

Il membro a destra nella formula per y_1/y_2 deve essere rigorosamente positivo. abbiamo

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

e

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

Definiamo $b_3 = 2(a_1 - a_2)$. abbiamo

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Inoltre, un piccolo calcolo lo dimostra $Q(b_1) = 0$ e $Q(b_2) = 1$. Abbiamo anche $b_1 < b_2 < b_3$. Concludiamo quello

- sull'intervallo $]0, b_1[$, $1/Q - 1$ è una funzione decrescente che diminuisce da -1 a $-\infty$,
- sull'intervallo $]b_1, b_2[$, $1/Q - 1$ è una funzione decrescente che diminuisce da $+\infty$ a 0 ,
- sull'intervallo $]b_2, b_3[$, $1/Q - 1$ è ancora una funzione decrescente e $1/Q - 1 < 0$,
- sull'intervallo $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ è una funzione crescente e abbiamo ancora $1/Q - 1 < 0$.

Quindi abbiamo $y_1/y_2 > 0$ solo sull'intervallo $]b_1, b_2[$. Le formule per x_1, y_1, x_2 e y_2 derivano da (6) e standardizzazione $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. Questo completa la prova.

Nota che $b_1 < b_2$. Il tasso di crescita λ^* dato da (6) diminuisce di λ_1 fino a λ_2 sull'intervallo $b_1 < b < b_2$.

Quando c converge a $+\infty$, il modello con due fasce d'età viene ridotto al modello nell'introduzione con una singola fascia d'età. Possiamo vedere che le due soglie b_1 e b_2 quindi convergere verso un'unica soglia pari a $a_1 - a_2$.

3 La stabilità delle soluzioni esponenziali

Con $i \in \{1, 2\}$, definiamo

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

abbiamo $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$. Dà un calcolo abbastanza semplice dal sistema (1) - (2)

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Sia una soluzione esponenziale normalizzata del sistema (1) - (2), $e^{\lambda t}z$ con $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Abbiamo le equazioni (4) - (5). Aggiungendo le quattro equazioni, otteniamo

$$a_1y_1 + a_2y_2 = \lambda + m.$$

Deduciamo che z è un punto di equilibrio del sistema (7) - (10). Si dice che la soluzione $e^{\lambda t}z$ è "asintoticamente stabile" (rispettivamente instabile) se z è un punto di equilibrio asintoticamente stabile (o instabile) del sistema (7) - (10). Dal teorema di Eulero segue funzioni vettoriali omogenee (qui di primo grado) che λ è sempre un autovalore della matrice giacobina della funzione F definita da (3) nel punto z : $J_F(z)$. In effetti,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

Secondo [6, p. 638], il punto di equilibrio z è asintoticamente stabile se i tre autovalori di questa matrice giacobina, diversi da λ , hanno una parte reale strettamente inferiore a λ . Il punto di equilibrio è instabile se uno di questi tre autovalori ha una parte reale strettamente maggiore di λ . Questo è ciò che useremo nella seguente proposta.

Proposta 2

- La soluzione esponenziale normalizzata della proposizione 1, $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$, è asintoticamente stabile se $b < b_1$, instabile se $b > b_1$.
- La soluzione esponenziale normalizzata della proposizione 1, $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$, è asintoticamente stabile se $b > b_2$, instabile se $b < b_2$.
- La soluzione esponenziale normalizzata della proposizione 1, $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, è asintoticamente stabile per $b_1 < b < b_2$.

Prova. In genere, se $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ con $y_1 + y_2 > 0$ e se $p = y_2/(y_1 + y_2)$, Poi abbiamo

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Nel primo caso, abbiamo $p = 0$, quindi

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

Il più grande autovalore del blocco in alto a sinistra è λ_1 . Il più grande autovalore del blocco in basso a destra è

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

È una funzione crescente di b . Dopo alcuni calcoli, otteniamo $\mu_2 > \lambda_1$ Se $b > b_1$ e $\mu_2 < \lambda_1$ Se $b < b_1$.

Nel secondo caso, abbiamo $p = 1$, quindi

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

Il più grande autovalore del blocco in basso a destra è λ_2 . Il più grande autovalore del blocco in alto a sinistra è

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

È una funzione decrescente di b perché

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b - c}{\sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Dopo alcuni calcoli, otteniamo $\mu_1 > \lambda_2$ Se $b < b_2$ e $\mu_1 < \lambda_2$ Se $b > b_2$.

Nel terzo caso, abbiamo $0 < p < 1$. Segue quindi dall'equazione (6) che

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Lo sappiamo già λ^* è un autovalore della matrice $J_F(z)$ definito da (11). La domanda è sapere se gli altri tre autovalori hanno una parte reale strettamente inferiore a λ^* . In altre parole, la matrice $M = J_F(z) - \lambda^* I$ ha un autovalore zero e la domanda è se gli altri autovalori abbiano una parte reale strettamente negativa. abbiamo

$$M = \left(\begin{array}{cccc} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1 - p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{array} \right).$$

Il polinomio caratteristico è quindi della forma

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

Con uno sviluppo secondo la prima colonna, troviamo

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1 - p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Per il coefficiente di ξ^3 , noi troviamo

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

e dopo la semplificazione

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Per il coefficiente di ξ^2 , noi troviamo

$$k_1 = \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c,$$

e dopo una laboriosa semplificazione

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Infine, per il coefficiente di ξ , abbiamo utilizzato il software di calcolo formale Xcas (<https://www.xcasenligne.fr>) per ottenere

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 può anche essere scritto nel modulo

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2), \\ k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

In modo che le tre radici del polinomio $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$ hanno una parte reale strettamente negativa, è necessario e sufficiente secondo il criterio di Routh-Hurwitz che $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ e $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, pag. 134]. abbiamo $k_2 > 0$. D'altro canto, $k_1 > 0$ Se $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ e quindi in particolare per $b_1 < b < b_2$ perché $b_2 < a_1 - a_2$. Abbiamo anche $k_0 > 0$ Se $b_1 < b < b_2$. Resta solo da dimostrarlo $k_1 k_2 - k_0 > 0$ Se $b_1 < b < b_2$. Sviluppando il prodotto $k_1 k_2$ e classificando il numeratore come un polinomio nella variabile b , otteniamo

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Raggruppiamo alcune parti:

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

I termini tra parentesi quadre sono tutti strettamente positivi perché $b < b_2 < a_1 - a_2$. Abbiamo così $k_1 k_2 - k_0 > 0$. La terza soluzione è quindi asintoticamente stabile per $b_1 < b < b_2$.

4 Esempio

Prendiamo $a_1 = 10\%$ per anno. Ricordiamo che questo parametro è uguale al numero di nascite in famiglie con elevata fertilità diviso per la popolazione adulta con elevata fertilità, e non al tasso di natalità solitamente usato in demografia, che si divide per la popolazione totale. Prendiamo anche: $a_2 = 4\%$ per anno, $c = 5\%$ all'anno, quindi $1/c = 20$ anni e $m = 2\%$ per anno. L'aspettativa di vita alla nascita è quindi $1/m = 50$ anni. Ricordiamo che nel 2017 le aspettative di vita per uomini e donne erano, ad esempio, pari a 52 e 55 anni in Costa d'Avorio, a 51 e 54 anni in Ciad, a 50 e 53 anni in Africa centrale [15].

Con questi valori di parametro, otteniamo $\lambda_1 = 3\%$ all'anno e $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ per anno, $b_1 = 3\%$ all'anno e $b_2 \simeq 3,9\%$ per anno. La Figura 1 mostra i diversi tassi di crescita λ_1 , λ^* e λ_2 in funzione di b . Abbiamo una transizione demografica parziale se $b_1 < b < b_2$, con un tasso di crescita λ^* . In confronto, il tasso di crescita naturale è del 2,4% in Costa d'Avorio, 3,3% in Ciad e 2,2% in Africa centrale. Il Ciad preferirebbe quindi essere nel caso in cui $b < b_1$, mentre gli altri due paesi si trovano nella situazione intermedia con $b_1 < b < b_2$.

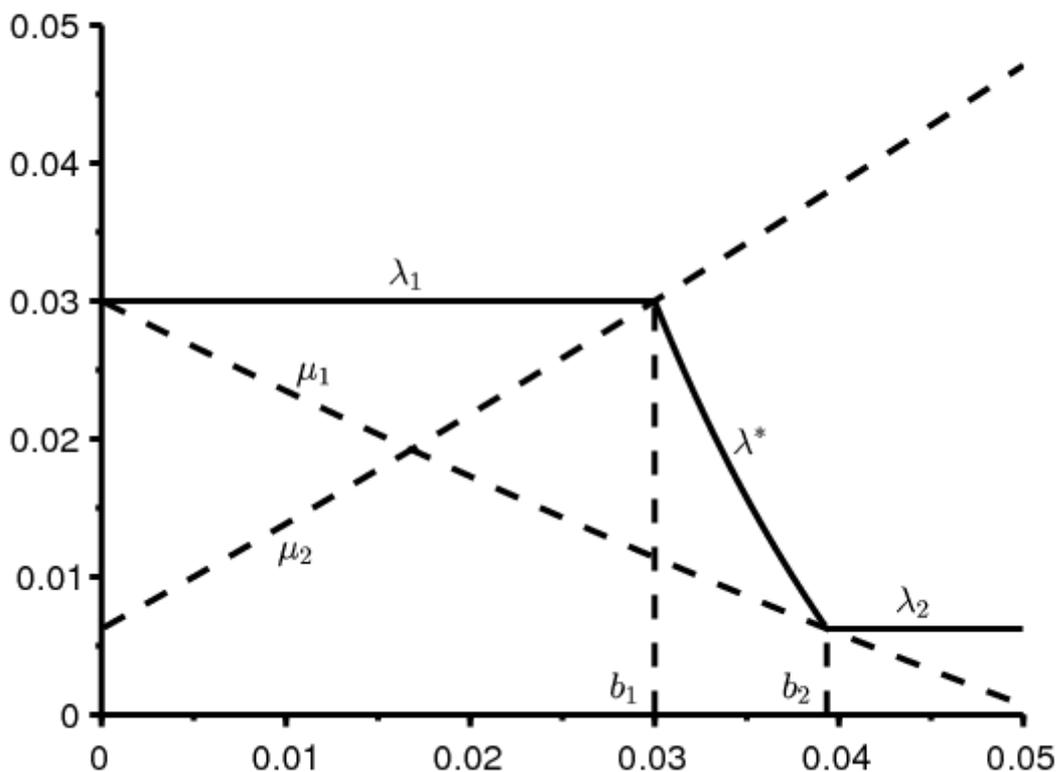


Figura 1. Tassi asintotici di crescita della popolazione λ_1 , λ^* e λ_2 (linea continua) in funzione del coefficiente di imitazione b (sull'ascissa). autovalori μ_1 e μ_2 sono punteggiati.

Per questo modello, possiamo calcolare la proporzione di "giovani" nella popolazione. Questa proporzione è

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

Se $b < b_1$. Questa proporzione è

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

Se $b > b_2$. Tuttavia, data la struttura del modello, questi "giovani" avrebbero un'età media $1/(c + m) \simeq 14,3$ anni. È quindi difficile confrontarsi con le statistiche demografiche. Secondo [15], la percentuale di bambini di età inferiore a 15 anni è del 43% in Costa d'Avorio, 48% in Ciad e 44% in Africa centrale.

Il tasso di natalità è

- $a_1 y_1 / (x_1 + y_1) = a_1 c / (\lambda_1 + m + c) = 50$ per 1000 abitanti se $b < b_1$,
- $a_2 y_2 / (x_2 + y_2) = a_2 c / (\lambda_2 + m + c) = 26$ per 1000 abitanti se $b > b_2$.

Per i tre paesi già considerati, le cifre sono nell'ordine 37, 46 e 36 per 1000 abitanti.

Pertanto, i valori scelti per i parametri non sono troppo irrealistici.

5 Comportamento asintotico

Lo studio di stabilità era finora solo locale. Il sistema è di dimensione 4 ed è ridotto al meglio a un sistema di dimensione 3. Non sembra possibile utilizzare il teorema di Poincaré-Bendixson per determinare il comportamento asintotico globale. Nel modello demografico con matrimoni di [16, cap. 4], il sistema era di dimensione due.

È anche difficile trovare una funzione Liapunov adatta. Il nostro sistema omogeneo può certamente trasformarsi in un sistema con termini solo lineari o quadratici se prendiamo come nuove incognite $X_1/(Y_1 + Y_2)$, $Y_1/(Y_1 + Y_2)$, $X_2/(Y_1 + Y_2)$ e $Y_2/(Y_1 + Y_2)$. Ma la funzione di Liapunov con termini logaritmici usati ad esempio da [2] per una particolare classe di tali sistemi non sembra adatta.

Ispirato al modello di popolazione lineare di [4, p. 80], tuttavia, otteniamo la seguente proposta.

Proposizione 3. *La funzione*

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

è sempre positivo e decrescente.

Prova. Definiamo più in generale $V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ con $k > 0$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c + m) X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ e $Y_2(t) > 0$. Il termine con fattore b è quindi negativo

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m) X_1^2 + (a_1 + kc) X_1 Y_1 - (\lambda + m) k Y_1^2].$$

Purché $\lambda + c + m \neq 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m) k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di Y_1^2 è uguale a 0 se scegliamo

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Manteniamo la radice solo con un + in \pm , così che $\lambda + c + m > 0$. Questa radice, che dipende da k , è minima se $a_1^2/k + kc^2$ è minimo, ovvero se $k = a_1/c$. Con questa scelta, abbiamo $\lambda = \lambda_1$ e

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ converge a un limite ≥ 0 . In particolare, c'è una costante $K > 0$ con $\forall t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ e $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$.

Proposizione 4. *La funzione*

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

con

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

è sempre positivo e decrescente.

Prova. Definiamo più in generale $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ con $k > 0$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Con $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

Purché $\lambda + c + m \neq 0$, noi abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di Y_2^2 è uguale a 0 se scegliamo

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Manteniamo la radice solo con un + in \pm , così che $\lambda + c + m > 0$. Questa radice, che dipende da k , è minima se $a_2^2/k + kc^2$ è minimo, ovvero se $k = a_2/c$. Quindi λ è dato dalla formula (12) e abbiamo $dW/dt \leq 0$.

Tuttavia, questi risultati non consentono di distinguere i diversi regimi in base al valore di b . Noi ipotizziamo che:

- Se $b < b_1$, noi abbiamo

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, 0, 0)$$

con $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ e $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$. È la popolazione con un'alta fertilità che in proporzione finisce per dominare.

- Se $b_1 < b < b_2$, noi abbiamo

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

e c'è una costante $\alpha > 0$ con $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, quest'ultimo vettore è quello della Proposizione 1. Vi è coesistenza nelle proporzioni di sottopopolazioni con diversa fertilità;

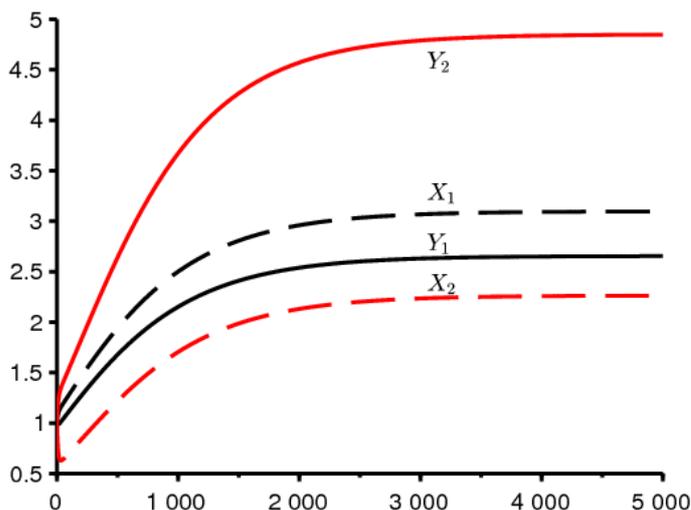
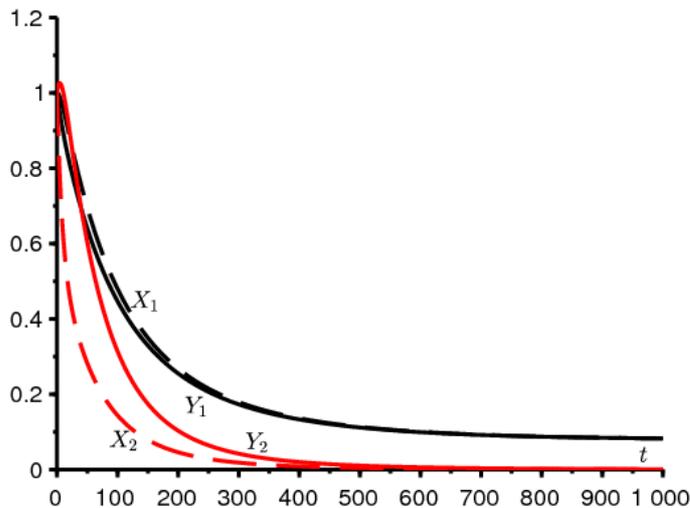
- Se $b > b_2$, noi abbiamo

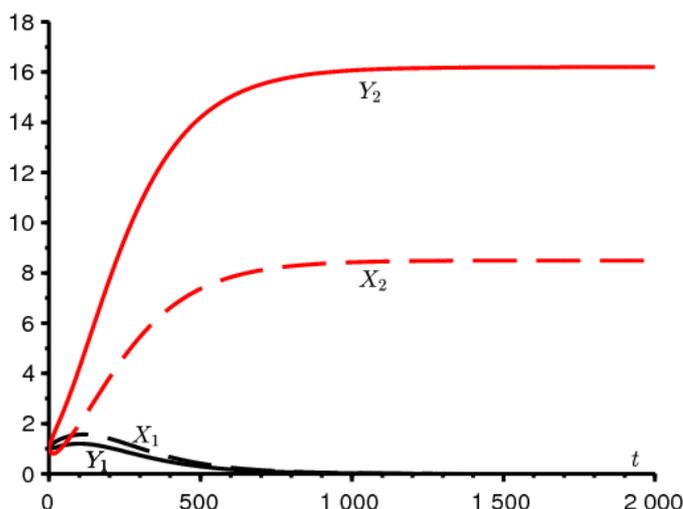
$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0, x_2, y_2)$$

con $x_2 > 0, y_2 > 0$ e $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$. È la popolazione con bassa fertilità che in proporzione finisce per dominare.

Pertanto, la parziale transizione demografica osservata in alcuni paesi dell'Africa subsahariana potrebbe corrispondere al caso intermedio in cui $b_1 < b < b_2$.

Per supportare questa congettura, si consideri l'esempio numerico nella sezione precedente. Prendi qualsiasi condizione iniziale, per esempio $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (poiché il sistema è omogeneo, possiamo pensare a 1 milione). La Figura 2 mostra come il sistema si comporta in base alla posizione di b rispetto alle due soglie. Se la congettura sembra essere confermata, noteremo comunque nel caso in cui $b_1 < b < b_2$ che il tempo caratteristico di convergenza è piuttosto lungo. Il secondo autovalore della matrice giacobina $J_F(z)$ è vicino a λ^* .





(a) Funzioni $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Se $b = 0,025 < b_1$. (b) Funzioni $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Se $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$. (c) Funzioni $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Se $b = 0,05 > b_2$. Per semplificare, abbiamo scritto (X_1, Y_1, X_2, Y_2) nelle diverse figure, ma queste sono funzioni rinormalizzate da un esponenziale.

Riferimenti bibliografici

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderler K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderler K. P., Waldstätter R., Wörz-Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer
8. Inaba H., Saito R., Bacaër N., An age-structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), *La Relation ressource-consommateur*, Modélisation mathématique, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P., Fanti L. (2003), The demographic transition and neo-classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W., Schnaubelt R., Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser

17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero–Bixby L., Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P.–F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier–Villars.