

Un modelo matemático para una transición demográfica parcial.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement, Modelado matemático e informático de sistemas complejos, Les Cordeliers, París, Francia, nicolas.bacaer@ird.fr

² Universidad de Tokio, Departamento de Matemáticas, Tokio, Japón, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ Universidad de Tlemcen, Departamento de Matemáticas, Tlemcen, Argelia, moussaouidz@yahoo.fr

resumen

Estudiamos un modelo matemático para la transición demográfica. Hay dos clases de edad y dos niveles de fertilidad. Los adultos con alta fertilidad imitan a los adultos con baja fertilidad. Cuando el coeficiente de imitación aumenta, la población cruza dos umbrales entre los cuales la población aumenta o disminuye exponencialmente con una mezcla estable de las dos fertilidades. Esta transición demográfica parcial recuerda la situación en ciertos países del África subsahariana.

Palabras clave: modelo matemático, transición demográfica, crecimiento exponencial.

1. Introducción

La transición demográfica es un fenómeno que abarca décadas. La población primero ve disminuir su mortalidad. Luego, con cierto retraso, la fertilidad también cae. Debido a este retraso, la población a menudo crece considerablemente, con importantes consecuencias económicas y sociales [3].

La conocida hipótesis de modernización insiste en que la baja tasa de fertilidad es el resultado de la adaptación individual a los entornos modernizados: industrialización, urbanización, cambios en los estándares educativos y familiares. Sin embargo, es difícil establecer un vínculo directo entre la disminución de la fertilidad y muchos indicadores del nivel de desarrollo social. Por lo tanto, estamos buscando un mecanismo dinámico para comprender la diferencia entre el cambio en la actitud individual y los datos estadísticos macroscópicos.

Si seguimos la división en "tres datos demográficos" de [9], podemos decir que la transición demográfica se puede ver desde tres ángulos: estadístico, político o matemático. Es desde este último ángulo, ilustrado en particular por los trabajos de Verhulst o Lotka [19, 12] y resumido, por ejemplo, por [14], que consideraremos el problema.

Desde el punto de vista del modelado matemático, la transición demográfica puede presentarse como exógena o endógena. En el primer caso, se supone que la población es homogénea, pero la modernización de las condiciones de vida significa que los parámetros demográficos varían con el tiempo. Esto lleva a modelos no autónomos [1].

El enfoque endógeno, por el contrario, consiste en utilizar modelos autónomos, es decir, cuyos coeficientes no dependen del tiempo, con una población heterogénea. Los cambios cualitativos resultan de la interacción entre las subpoblaciones. La transición demográfica es algo análoga a una epidemia. Las normas culturales innovadoras que reducen el número de nacimientos pueden transmitirse de individuos de baja fertilidad (los "infectados") a individuos tradicionales de alta fertilidad (las personas "sanas"), como en la teoría de la difusión [18, 13] Este proceso de transmisión puede ser desencadenado por cambios socioeconómicos y ambientales.

[8] desarrolló recientemente este punto de vista epidémico para la teoría de la difusión de la transición de la fertilidad. La disminución de la fertilidad se describe como el resultado de la propagación de la tendencia a tener menos hijos. Su primer modelo dividió la población entre individuos con alta fertilidad e individuos con baja fertilidad, $P_1(t)$ y $P_2(t)$. Sus números evolucionaron de acuerdo con un sistema diferencial homogéneo de primer grado.

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 y r_2 son las tasas de crecimiento de poblaciones aisladas, con $r_1 > r_2$. b es un coeficiente de imitación que indica la tasa máxima a la que las personas con alta fertilidad adoptan baja fertilidad. Se supone que esta tasa depende linealmente de la fracción de la población con baja fertilidad:

$f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$. En términos ecológicos, es un sistema de presa-depredador a la manera de Lotka y Volterra [20], pero con una tasa de depredación no lineal que depende solo de la proporción de las dos poblaciones, como en el modelo de Arditi y Ginzburg [11, § 2.3]. El análisis matemático es muy simple. Basta observar que $f(t)$ es la solución de una ecuación logística. De acuerdo a $b < r_1 - r_2$ o $b > r_1 - r_2$, la población total tiende a crecer exponencialmente con una tasa r_1 o r_2 y es la fracción de la población con baja fertilidad o aquella con alta fertilidad la que converge a 0. A partir de una población con alta fertilidad y unos pocos individuos con baja fertilidad, la transición demográfica por lo tanto tiene lugar si y sólo si $b > r_1 - r_2$.

Luego, [8] estudia una versión estructurada por edad del mismo modelo. Como la edad x era una variable continua, esto condujo a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales del tipo de McKendrick y von Foerster:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx, \end{aligned}$$

con

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

En este modelo, $m(x)$ es la tasa de mortalidad $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son las tasas de fertilidad. El análisis matemático del modelo es entonces más complicado y solo se han obtenido resultados muy parciales. En general, ya no hay un solo umbral, sino dos. Por debajo del primer umbral y por encima del segundo umbral, hay una única solución exponencial trivial estable localmente (en el sentido de la teoría de sistemas homogéneos) compuesta de individuos con alta fertilidad en el primer caso, con baja fertilidad en el segundo caso. Entre los dos umbrales, al menos para ciertos valores de los parámetros (es decir, con ciertas condiciones adicionales que ciertamente no son óptimas), ha sido posible demostrar la existencia de una solución exponencial no trivial con individuos que tienen fertilidad diferente. Los la unicidad y la estabilidad de esta solución no trivial no se han discutido. Para esta solución, la tasa de crecimiento de la población es intermedia entre los dos casos extremos. Hay una transición demográfica parcial. Esta diferencia cualitativa con el primer modelo no era obvia a priori.

El régimen entre los dos umbrales parecía anecdótico en [8], ya que la motivación provenía de la demografía de Japón. La transición demográfica está tan avanzada allí que la tasa de crecimiento de la población se ha vuelto negativa. Estamos más allá del segundo umbral. Por otro lado, el régimen intermedio podría ser de interés en el caso de ciertos países del África subsahariana. La fertilidad promedio en realidad ha disminuido un poco, pero mucho menos de lo que predijeron los demógrafos [10]. Además, las dificultades de analizar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales nos llevan a buscar un modelo más simple para una transición demográfica parcial.

Por lo tanto, estudiamos a continuación un modelo con solo dos clases de edad (jóvenes y adultos) en lugar de una edad que varía continuamente. La ventaja es que conserva el mismo fenómeno de transición en dos umbrales. Esto permite un estudio más completo. Mostramos en particular que la solución no trivial es única y que su dominio de existencia coincide exactamente con el dominio de inestabilidad de las soluciones triviales. También logramos probar la estabilidad local de la solución no trivial.

Presentamos el modelo en la sección 2 con sus soluciones exponenciales triviales y no triviales. Estudiamos la estabilidad de las soluciones exponenciales en la sección 3 utilizando en particular el criterio de Routh-Hurwitz y la teoría de los sistemas diferenciales homogéneos de primer grado. Para esta teoría, ver [6, p. 638] y los libros [5, cap. 5], [7, cap. 4] y [16, cap. 4]. Como el sistema es de dimensión 4, la estabilidad de la solución exponencial no trivial presenta una dificultad que estaba ausente de los ejemplos de las referencias anteriores y que requería el uso de un software de cálculo formal. La sección 4 presenta un ejemplo numérico que pretende ser representativo de algunos países en África subsahariana. La sección 5 propone una conjetura para el comportamiento asintótico global por falta de haber encontrado una función de Liapounov adecuada. Aunque es más simple que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, el análisis de nuestro modelo aún es incompleto.

2 El modelo y sus soluciones exponenciales.

Definimos

- $X_1(t)$ el número de jóvenes de familias fértiles
- $Y_1(t)$ la cantidad de adultos en familias fértiles
- $X_2(t)$ El número de jóvenes de familias con fertilidad reducida
- $Y_2(t)$ El número de adultos en familias con fertilidad reducida.

Asumimos

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ son fertilidad ($a_1 > a_2$), $m > 0$ es la mortalidad $c > 0$ es la tasa de transición juvenil a la edad adulta, y $b > 0$ es la tasa máxima a la que los adultos con alta fertilidad adoptan baja fertilidad. La fracción de adultos menos fértiles en la población adulta, $Y_2/(Y_1 + Y_2)$, interviene en este modelo. Por el contrario, en el segundo modelo de [8], fue la fracción de individuos de familias de baja fertilidad en la población total. Asumimos $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ y $Y_2(0) > 0$.

Definimos $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. El sistema diferencial anterior se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

con una función F que es una función vectorial homogénea de grado uno. La existencia global y la positividad de las soluciones del sistema (3) se muestran como en modelos demográficos con el matrimonio. Ver por ejemplo [16, cap. 4]. La positividad resulta del hecho de que $dX_1/dt \geq 0$ Si $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ Si $Y_1 = 0$ etc. Con una condición inicial cuyos componentes son estrictamente positivos, cada componente permanece estrictamente positivo para todos $t > 0$. La existencia global resulta de la desigualdad a la que la población total obedece

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ es una "solución exponencial positiva" del sistema (3) si

- $z = (z_i)$ es un vector con $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) es una solución al problema del valor propio no lineal $\lambda z = F(z)$.

Si (λ, z) es una solución y si $\alpha > 0$, entonces $(\lambda, \alpha z)$ También es una solución. Decimos que una solución exponencial positiva se normaliza si $\sum_i z_i = 1$.

Proposición 1. Hay una única solución exponencial positiva normalizada de la forma $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}.$$

Del mismo modo, hay una única solución exponencial positiva normalizada de la forma $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2 c}}.$$

En caso $b_1 < b < b_2$ con

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

entonces hay una única solución exponencial positiva normalizada de la forma $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ con $x_1^* > 0$, $y_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ y $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Prueba. Para la primera solución,

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

De ahí la ecuación cuadrática para λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

Las dos raíces son

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

pero solo el que tiene un + lleva a soluciones positivas (x_1, y_1) .

La segunda solución se obtiene de la misma manera reemplazando el índice 1 por el índice 2.

Para la tercera solución,

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

No podemos tener $c + \lambda + m = 0$ de otra manera $y_1 = 0$. Entonces tenemos $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ y $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. Por lo tanto, al reemplazar en las otras dos ecuaciones y dividir por y_1 o y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Al restar estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

El miembro a la derecha en la fórmula para y_1/y_2 Debe ser estrictamente positivo. Se tiene

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

y

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

Definimos $b_3 = 2(a_1 - a_2)$. Se tiene

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Además, un pequeño cálculo muestra que $Q(b_1) = 0$ y $Q(b_2) = 1$. También tenemos $b_1 < b_2 < b_3$. Concluimos que

- en el intervalo $]0, b_1[$, $1/Q - 1$ es una función decreciente que disminuye de -1 a $-\infty$,
- en el intervalo $]b_1, b_2[$, $1/Q - 1$ es una función decreciente que disminuye de $+\infty$ a 0 ,
- en el intervalo $]b_2, b_3[$, $1/Q - 1$ sigue siendo una función decreciente y $1/Q - 1 < 0$,
- en el intervalo $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ es una función creciente y todavía tenemos $1/Q - 1 < 0$.

Entonces tenemos $y_1/y_2 > 0$ solo en el intervalo $]b_1, b_2[$. Las fórmulas para x_1 , y_1 , x_2 y y_2 surgen de (6) y la estandarización $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. Esto completa la prueba.

Tenga en cuenta que $b_1 < b_2$. La tasa de crecimiento λ^* dado por (6) disminuye en λ_1 hasta λ_2 en el intervalo $b_1 < b < b_2$.

Cuando c converge a $+\infty$, el modelo con dos grupos de edad se reduce al modelo en la introducción con un solo grupo de edad. Podemos ver que los dos umbrales b_1 y b_2 luego convergen hacia un umbral único igual a $a_1 - a_2$.

3 La estabilidad de las soluciones exponenciales.

Con $i \in \{1, 2\}$, definimos

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Se tiene $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$. Un cálculo bastante simple del sistema (1) - (2) da

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b\frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Sea una solución exponencial normalizada del sistema (1) - (2), $e^{\lambda t}z$ con $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Tenemos las ecuaciones (4) - (5). Al sumar las cuatro ecuaciones, obtenemos

$$a_1y_1 + a_2y_2 = \lambda + m.$$

Deducimos que z es un punto de equilibrio del sistema (7) - (10). Se dice que la solución $e^{\lambda t}z$ es "asintóticamente estable" (respectivamente inestable) si z es un punto de equilibrio asintóticamente estable (resp. inestable) del sistema (7) - (10). Del teorema de Euler se sigue para las funciones vectoriales homogéneas (aquí del grado uno) que λ es siempre un valor propio de la matriz jacobiana de la función F definida por (3) en el punto z : $J_F(z)$. En efecto,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

De acuerdo con [6, p. 638], el punto de equilibrio z es asintóticamente estable si los tres valores propios de esta matriz jacobiana, distintos de λ , tienen una parte real estrictamente menor que λ . El punto de equilibrio es inestable si uno de estos tres valores propios tiene una parte real estrictamente mayor que λ . Esto es lo que usaremos en la siguiente proposición.

Proposición 2

- La solución exponencial normalizada de la proposición 1, $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$, es asintóticamente estable si $b < b_1$ inestable si $b > b_1$.
- La solución exponencial normalizada de la proposición 1, $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$, es asintóticamente estable si $b > b_2$ inestable si $b < b_2$.
- La solución exponencial normalizada de la proposición 1, $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, es asintóticamente estable para $b_1 < b < b_2$.

Prueba. En general, si $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ con $y_1 + y_2 > 0$ y si $p = y_2/(y_1 + y_2)$, entonces nosotros tenemos

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En el primer caso, tenemos $p = 0$, entonces

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

El valor propio más grande del bloque superior izquierdo es λ_1 . El mayor valor propio del bloque inferior derecho es

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

Es una función creciente de b . Después de algunos cálculos, obtenemos $\mu_2 > \lambda_1$ Si $b > b_1$ y $\mu_2 < \lambda_1$ Si $b < b_1$.

En el segundo caso, tenemos $p = 1$, entonces

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

El mayor valor propio del bloque inferior derecho es λ_2 . El valor propio más grande del bloque superior izquierdo es

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

Es una función decreciente de b porque

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b - c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Después de algunos cálculos, obtenemos $\mu_1 > \lambda_2$ Si $b < b_2$ y $\mu_1 < \lambda_2$ Si $b > b_2$.

En el tercer caso, tenemos $0 < p < 1$. Luego se deduce de la ecuación (6) que

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Ya lo sabemos λ^* es un valor propio de la matriz $J_F(z)$ definido por (11). La pregunta es saber si los otros tres valores propios tienen una parte real estrictamente inferior a λ^* . En otras palabras, la matriz $M = J_F(z) - \lambda^* I$ tiene un valor propio cero y la pregunta es si los otros valores propios tienen una parte real estrictamente negativa. Se tiene

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es, por lo tanto, de la forma

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

Con un desarrollo de acuerdo con la primera columna, encontramos

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Para el coeficiente de ξ^3 , encontramos

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1-2p),$$

y después de la simplificación

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Para el coeficiente de ξ^2 , encontramos

$$\begin{aligned} k_1 = & \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ & + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c, \end{aligned}$$

y luego de una laboriosa simplificación

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Finalmente, para el coeficiente de ξ , utilizamos el software de cálculo formal Xcas (<https://www.xcasenligne.fr>) para obtener

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 también se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} k_0 = & -k(b-b_1)(b-b_2), \\ k = & \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right). \end{aligned}$$

Para que las tres raíces del polinomio $\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0$ tener una parte real estrictamente negativa, es necesario y suficiente según el criterio de Routh-Hurwitz que $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ y $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, p. 134]. Se tiene $k_2 > 0$. De otra parte, $k_1 > 0$ Si $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ y por lo tanto en particular para $b_1 < b < b_2$ porque $b_2 < a_1 - a_2$. También tenemos $k_0 > 0$ Si $b_1 < b < b_2$. Solo queda probar que $k_1 k_2 - k_0 > 0$ Si $b_1 < b < b_2$. Desarrollando el producto $k_1 k_2$ y al clasificar el numerador como un polinomio en la variable b , obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 k_2 - k_0 = & \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ & + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ & + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ & + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ & \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}. \end{aligned}$$

Agrupamos algunas partes:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 - k_0 = & \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ & + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ & \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}. \end{aligned}$$

Los términos entre corchetes son estrictamente positivos porque $b < b_2 < a_1 - a_2$. Así tenemos $k_1 k_2 - k_0 > 0$. Por lo tanto, la tercera solución es asintóticamente estable para $b_1 < b < b_2$.

4 Ejemplo

Echemos $a_1 = 10\%$ anualmente. Recuerde que este parámetro es igual al número de nacimientos en familias con alta fertilidad dividido por la población adulta con alta fertilidad, y no la tasa de natalidad que se usa generalmente en la demografía, que se divide por la población total. Tomemos también: $a_2 = 4\%$ anualmente, $c = 5\%$ por año, entonces $1/c = 20$ años y $m = 2\%$ anualmente. Por lo tanto, la esperanza de vida al nacer es $1/m = 50$ años. Recordemos que en 2017, la esperanza de vida de hombres y mujeres era, por ejemplo, igual a 52 y 55 años en Costa de Marfil, a 51 y 54 años en Chad, a 50 y 53 años en África Central [15].

Con estos valores de parámetros, obtenemos $\lambda_1 = 3\%$ por año y $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ anualmente, $b_1 = 3\%$ por año y $b_2 \simeq 3,9\%$ anualmente. La Figura 1 muestra las diferentes tasas de crecimiento λ_1 , λ^* y λ_2 en función de b . Tenemos una transición demográfica parcial si $b_1 < b < b_2$, con una tasa de crecimiento λ^* . En comparación, la tasa de crecimiento natural es de 2.4% en Costa de Marfil, 3.3% en Chad y 2.2% en África Central. Chad, por lo tanto, preferiría estar en el caso donde $b < b_1$, mientras que los otros dos países se encuentran en una situación intermedia con $b_1 < b < b_2$.

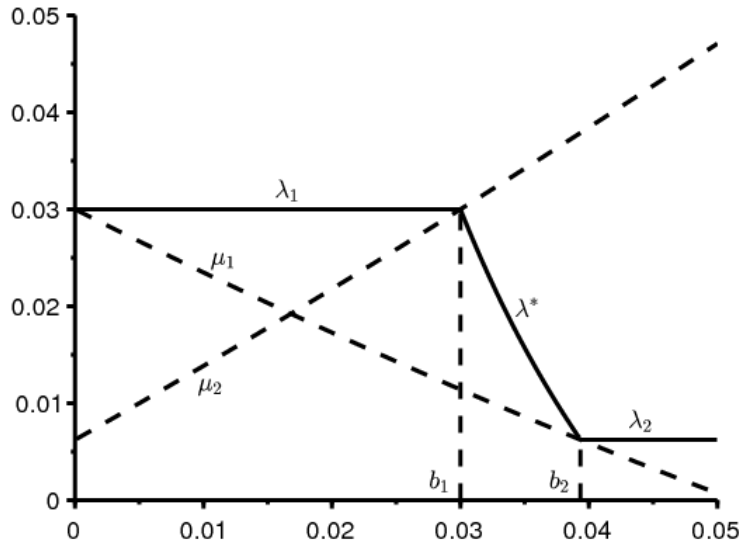


Figura 1. Tasas asintóticas de crecimiento de la población. λ_1 , λ^* y λ_2 (línea continua) en función del coeficiente de imitación b (en la abscisa). Valores propios μ_1 y μ_2 están punteados

Para este modelo, podemos calcular la proporción de "jóvenes" en la población. Esta proporción es

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

Si $b < b_1$. Esta proporción es

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

Si $b > b_2$. Sin embargo, dada la estructura del modelo, estos "jóvenes" tendrían una edad promedio $1/(c + m) \simeq 14,3$ años. Por lo tanto, es difícil comparar con las estadísticas demográficas. Según [15], la proporción de niños menores de 15 años es del 43% en Costa de Marfil, el 48% en Chad y el 44% en África Central.

La tasa de natalidad es

- $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$ por 1000 habitantes si $b < b_1$,
- $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$ por 1000 habitantes si $b > b_2$.

Para los tres países ya considerados, las cifras están en el orden 37, 46 y 36 por 1000 habitantes.

Por lo tanto, los valores elegidos para los parámetros no son demasiado poco realistas.

5 Comportamiento asintótico

El estudio de estabilidad fue hasta ahora solo local. El sistema es de dimensión 4 y se reduce mejor a un sistema de dimensión 3. No parece posible utilizar el teorema de Poincaré-Bendixson para determinar el comportamiento asintótico global. En el modelo demográfico con matrimonios de [16, cap. 4], el sistema era la dimensión dos.

También es difícil encontrar una función de Liapunov adecuada. Nuestro sistema homogéneo ciertamente puede transformarse en un sistema con solo términos lineales o cuadráticos si tomamos como nuevas incógnitas $X_1/(Y_1 + Y_2)$, $Y_1/(Y_1 + Y_2)$, $X_2/(Y_1 + Y_2)$ y $Y_2/(Y_1 + Y_2)$. Pero la función de Liapunov con términos logarítmicos usados, por ejemplo, por [2] para una clase particular de tales sistemas no parece ser adecuada.

Inspirado en el modelo de población lineal de [4, p. 80], sin embargo, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3. La función

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

Siempre es positivo y decreciente.

Prueba. Definimos más generalmente $V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ con $k > 0$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c+m)X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + cX_1 - mY_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right].\end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ y $Y_2(t) > 0$. El término con factor b es, por lo tanto, negativo.

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

Siempre que $\lambda + c + m \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}.\end{aligned}$$

El coeficiente de Y_1^2 es igual a 0 si elegimos

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Solo mantenemos la raíz con un $+$ en \pm , de manera que $\lambda + c + m > 0$. Esta raíz, que depende de k , es mínima si $a_1^2/k + kc^2$ es mínimo, es decir, si $k = a_1/c$. Con esta elección, tenemos $\lambda = \lambda_1$ y

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ converge a un límite ≥ 0 . En particular, hay una constante $K > 0$ con $\forall t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ y $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$.

Proposición 4. *La función*

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

con

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

Siempre es positivo y decreciente.

Prueba. Definimos más generalmente $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ con $k > 0$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c+m)X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + cX_2 - mY_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right].\end{aligned}$$

Con $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m)X_2^2 + (a_2 + kc)X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m)Y_2^2].$$

Siempre que $\lambda + c + m \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}.\end{aligned}$$

El coeficiente de Y_2^2 es igual a 0 si elegimos

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b+c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Solo mantenemos la raíz con un $+$ en \pm , de manera que $\lambda + c + m > 0$. Esta raíz, que depende de k , es mínima si $a_2^2/k + kc^2$ es mínimo, es decir, si $k = a_2/c$. Entonces λ viene dado por la fórmula (12) y tenemos $dW/dt \leq 0$.

Sin embargo, estos resultados no permiten distinguir los diferentes regímenes de acuerdo con el valor de b . Conjeturamos que:

- Si $b < b_1$, se tiene

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, 0, 0)$$

con $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ y $(\lambda_1 + m)y_1 = cx_1$. Es la población con una alta fertilidad que en proporción termina dominando.

- Si $b_1 < b < b_2$, se tiene

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

y hay una constante $\alpha > 0$ con $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, este último vector es el de la Proposición 1. Hay coexistencia en las proporciones de subpoblaciones con diferente fertilidad;

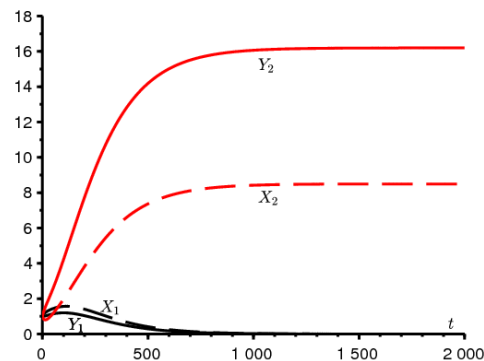
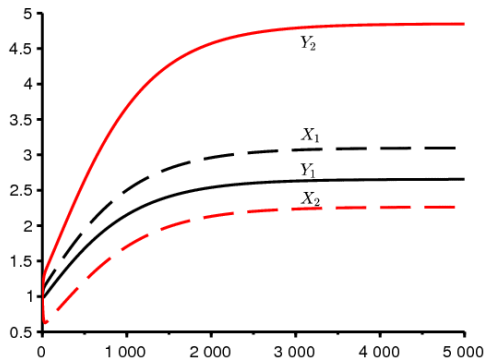
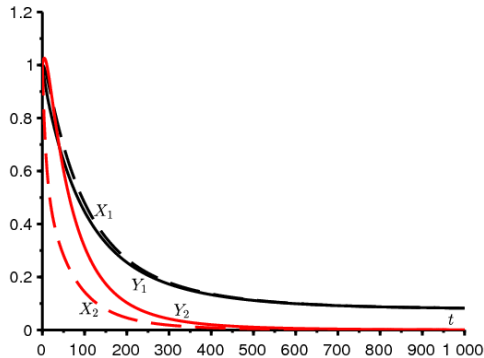
- Si $b > b_2$, se tiene

$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0, x_2, y_2)$$

con $x_2 > 0, y_2 > 0$ y $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$. Es la población con baja fertilidad la que en proporción termina dominando.

Por lo tanto, la transición demográfica parcial observada en ciertos países del África subsahariana podría corresponder al caso intermedio donde $b_1 < b < b_2$.

Para apoyar esta conjetura, considere el ejemplo numérico en la sección anterior. Tome cualquier condición inicial, por ejemplo $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (como el sistema es homogéneo, podemos pensar en 1 millón). La Figura 2 muestra cómo se comporta el sistema de acuerdo con la posición de b con respecto a los dos umbrales. Si la conjetura parece confirmarse, notaremos sin embargo en el caso donde $b_1 < b < b_2$ que el tiempo de convergencia característico es bastante largo. El segundo valor propio de la matriz jacobiana $J_F(z)$ esta cerca de λ^* .



(a) Funciones $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Si $b = 0,025 < b_1$. (b) Funciones $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Si $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$. (c) Funciones $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ Si $b = 0,05 > b_2$. Para simplificar, escribimos (X_1, Y_1, X_2, Y_2) en las diferentes figuras, pero estas son funciones renormalizadas por un exponencial.

Referencias bibliográficas

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, Population, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), Mathematical Structures of Epidemic Systems, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique, Londres, ISTE.

5. Haderl K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderl K. P. , Waldstätter R. , Wörz–Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age–Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer
8. Inaba H. , Saito R. , Bacamir N. , An age–structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), *La Relation ressource–consommateur, Modélisation mathématique*, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P. , Fanti L. (2003), The demographic transition and neo–classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W. , Schnaubelt R. , Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero–Bixby L. , Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P. –F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier–Villars.