

Ein mathematisches Modell für einen partiellen demografischen Übergang

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

Nicolas Bacaër¹ Hisashi Inaba² Ali Moussaoui³

¹ Institut de Recherche pour le Développement, Mathematische und Computermodellierung komplexer Systeme, Les Cordeliers, Paris, Frankreich, nicolas.bacaer@ird.fr

² Universität Tokio, Fakultät für Mathematik, Tokio, Japan, inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ Universität Tlemcen, Fakultät für Mathematik, Tlemcen, Algerien, moussaouidz@yahoo.fr

Zusammenfassung

Wir untersuchen ein mathematisches Modell für den demografischen Übergang. Es gibt zwei Altersklassen und zwei Fruchtbarkeitsstufen. Erwachsene mit hoher Fruchtbarkeit ahmen Erwachsene mit niedriger Fruchtbarkeit nach. Wenn der Imitationskoeffizient zunimmt, überschreitet die Population zwei Schwellenwerte, zwischen denen die Population mit einer stabilen Mischung der beiden Fertilitäten exponentiell zunimmt oder abnimmt. Dieser teilweise demografische Übergang erinnert an die Situation in bestimmten Ländern Afrikas südlich der Sahara.

Schlüsselwörter: mathematisches Modell, demografischer Übergang, exponentielles Wachstum

1. Einleitung

Der demografische Wandel ist ein Phänomen, das Jahrzehnte umfasst. Die Sterblichkeit der Bevölkerung nimmt zunächst ab. Mit einer gewissen Verzögerung sinkt dann auch die Fruchtbarkeit. Aufgrund dieser Verzögerung wächst die Bevölkerung häufig erheblich mit wichtigen wirtschaftlichen und sozialen Folgen [3].

Die bekannte Modernisierungshypothese besteht darauf, dass die niedrige Fertilitätsrate das Ergebnis einer individuellen Anpassung an modernisierte Umgebungen ist: Industrialisierung, Urbanisierung, Änderungen der Bildungs- und Familienstandards. Es ist jedoch schwierig, einen direkten Zusammenhang zwischen dem Rückgang der Fruchtbarkeit und vielen Indikatoren für das Niveau der sozialen Entwicklung herzustellen. Wir suchen daher nach einem dynamischen Mechanismus, um den Unterschied zwischen der Änderung der individuellen Einstellung und den makroskopischen statistischen Daten zu verstehen.

Wenn wir der Einteilung in "drei Demografien" von [9] folgen, können wir sagen, dass der demografische Übergang aus drei Blickwinkeln betrachtet werden kann: statistisch, politisch oder mathematisch. Aus diesem letzten Blickwinkel, der insbesondere durch die Arbeiten von Verhulst oder Lotka [19, 12] veranschaulicht und beispielsweise durch [14] zusammengefasst wird, werden wir das Problem betrachten.

Aus Sicht der mathematischen Modellierung kann der demografische Übergang entweder als exogen oder als endogen dargestellt werden. Im ersten Fall wird angenommen, dass die Bevölkerung homogen ist, aber die Modernisierung der Lebensbedingungen führt dazu, dass sich die demografischen Parameter im Laufe der Zeit ändern. Dies führt zu nicht autonomen Modellen [1].

Der endogene Ansatz besteht im Gegenteil darin, autonome Modelle zu verwenden, dh deren Koeffizienten nicht von der Zeit abhängen, mit einer heterogenen Population. Die qualitativen Veränderungen ergeben sich dann aus der Interaktion zwischen den Subpopulationen. Der demografische Übergang ist etwas analog zu einer Epidemie. Innovative kulturelle Normen, die die Anzahl der Geburten verringern, können wie in der Diffusionstheorie von Personen mit geringer Fruchtbarkeit (die "Infizierten") auf traditionelle Personen mit hoher Fruchtbarkeit (die "Gesunden") übertragen werden [18, 13]. Dieser Übertragungsprozess kann durch sozioökonomische und ökologische Veränderungen ausgelöst werden.

[8] haben kürzlich diesen epidemischen Standpunkt für die Diffusionstheorie des Fruchtbarkeitsübergangs entwickelt. Der Rückgang der Fruchtbarkeit wird als Folge der Ausbreitung der Tendenz beschrieben, weniger Kinder zu haben. Ihr erstes Modell teilte die Bevölkerung zwischen Personen mit hoher Fruchtbarkeit und Personen mit niedriger Fruchtbarkeit auf. $P_1(t)$ und $P_2(t)$. Ihre Anzahl entwickelte sich nach einem homogenen Differentialsystem des ersten Grades

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

r_1 und r_2 sind die Wachstumsraten isolierter Populationen mit $r_1 > r_2$. b ist ein Nachahmungskoeffizient, der die maximale Rate angibt, mit der Personen mit hoher Fruchtbarkeit eine niedrige Fruchtbarkeit annehmen. Es wird angenommen, dass diese Rate linear vom Anteil der Bevölkerung mit geringer Fruchtbarkeit abhängt: $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$. In ökologischer Hinsicht handelt es sich um ein Beute-Raubtier-System nach Art von Lotka und Volterra [20], jedoch mit einer nichtlinearen Raubtierate, die nur vom Verhältnis der beiden Populationen abhängt, wie im Modell von Arditi und Ginzburg [11, § 2.3]. Die mathematische Analyse ist sehr einfach. Es genügt, das zu beobachten $f(t)$ ist die Lösung einer logistischen Gleichung. Gemäß $b < r_1 - r_2$ oder $b > r_1 - r_2$ wächst die Gesamtbevölkerung tendenziell exponentiell mit einer Rate r_1 oder r_2 und es ist der Anteil der Bevölkerung mit geringer Fruchtbarkeit oder der mit hoher Fruchtbarkeit, der gegen 0 konvergiert. Ausgehend von einer Bevölkerung mit hoher Fruchtbarkeit und einigen wenigen Personen mit geringer Fruchtbarkeit findet der demografische Übergang daher statt, wenn und nur wenn $b > r_1 - r_2$.

Als nächstes untersucht [8] eine altersstrukturierte Version desselben Modells. Da Alter x eine kontinuierliche Variable war, führte dies zu einem System partieller Differentialgleichungen vom Typ McKendrick und von Foerster:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

mit

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

In diesem Modell $m(x)$ ist die Sterblichkeitsrate, $a_1(x)$ und $a_2(x)$ sind die Fruchtbarkeitsraten. Die mathematische Analyse des Modells ist dann komplizierter und es wurden nur sehr teilweise Ergebnisse erhalten. In der Regel gibt es keine einzige Schwelle mehr, sondern zwei. Unterhalb der ersten Schwelle und oberhalb der zweiten Schwelle gibt es eine einzige lokal stabile triviale Exponentiallösung (im Sinne der Theorie homogener Systeme), die sich aus Personen mit hoher Fruchtbarkeit im ersten Fall und geringer Fruchtbarkeit im ersten Fall zusammensetzt zweiter Fall. Zwischen den beiden Schwellenwerten konnte zumindest für bestimmte Werte der Parameter (dh mit bestimmten zusätzlichen Bedingungen, die sicherlich nicht optimal sind) die Existenz einer nicht trivialen Exponentiallösung bei Personen nachgewiesen werden, die dies getan haben unterschiedliche Fruchtbarkeit. Das Einzigartigkeit und Stabilität dieser nicht trivialen Lösung wurden nicht diskutiert. Bei dieser Lösung liegt die Bevölkerungswachstumsrate zwischen den beiden Extremfällen. Es gibt einen teilweisen demografischen Übergang. Dieser qualitative Unterschied zum ersten Modell war a priori nicht offensichtlich.

Das Regime zwischen den beiden Schwellenwerten schien in [8] anekdotisch, da die Motivation aus der Demographie Japans stammte. Der demografische Wandel ist dort so weit fortgeschritten, dass das Bevölkerungswachstum negativ geworden ist. Wir sind jenseits der zweiten Schwelle. Andererseits könnte das Zwischenregime für bestimmte Länder in Afrika südlich der Sahara von Interesse sein. Die durchschnittliche Fruchtbarkeit ist tatsächlich etwas gesunken, aber viel weniger als von den Demografen vorhergesagt [10]. Darüber hinaus veranlassen uns die Schwierigkeiten bei der Analyse des Systems partieller Differentialgleichungen, ein einfacheres Modell für einen partiellen demografischen Übergang zu suchen.

Wir untersuchen daher nachfolgend ein Modell mit nur zwei Altersklassen (jung und erwachsen) anstelle eines Alters, das kontinuierlich variiert. Der Vorteil ist, dass das gleiche Übergangsphänomen bei zwei Schwellenwerten beibehalten wird. Dies ermöglicht eine vollständigere Untersuchung. Wir zeigen insbesondere, dass die nicht triviale Lösung einzigartig ist und dass ihr Existenzbereich genau mit dem Bereich der Instabilität trivialer Lösungen übereinstimmt. Es gelingt uns auch, die lokale Stabilität der nicht trivialen Lösung zu beweisen.

Wir präsentieren das Modell in Abschnitt 2 mit seinen trivialen und nicht trivialen Exponentiallösungen. Wir untersuchen die Stabilität exponentieller Lösungen in Abschnitt 3 unter Verwendung des Routh-Hurwitz-Kriteriums und der Theorie homogener Differentialsysteme des ersten Grades. Für diese Theorie siehe [6, S. 638] und die Bücher [5, Kap. 5], [7, Kap. 4] und [16, Kap. 4]. Da das System die Dimension 4 hat, stellt die Stabilität der nicht trivialen Exponentiallösung eine Schwierigkeit dar, die in den Beispielen der obigen Referenzen nicht vorhanden war und die die Verwendung einer formalen Berechnungssoftware erforderte. Abschnitt 4 enthält ein numerisches Beispiel, das für einige Länder in Afrika südlich der Sahara repräsentativ sein soll. Abschnitt 5 schlägt eine Vermutung für globales asymptotisches Verhalten vor eine geeignete Liapounov-Funktion gefunden zu haben. Obwohl einfacher als das System der partiellen Differentialgleichungen, ist die Analyse unseres Modells daher noch unvollständig.

2 Das Modell und seine exponentiellen Lösungen

Wir definieren

- $X_1(t)$ die Anzahl der jungen Menschen aus fruchtbaren Familien
- $Y_1(t)$ die Anzahl der Erwachsenen in fruchtbaren Familien
- $X_2(t)$ die Anzahl der jungen Menschen aus Familien mit verminderter Fruchtbarkeit
- $Y_2(t)$ die Anzahl der Erwachsenen in Familien mit verminderter Fruchtbarkeit.

Wir nehmen an

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ und $a_2 > 0$ sind Fruchtbarkeit ($a_1 > a_2$), $m > 0$ ist Sterblichkeit, $c > 0$ ist die Jugendübergangsrate zum Erwachsenenalter, und $b > 0$ ist die maximale Rate, mit der Erwachsene mit hoher Fruchtbarkeit eine niedrige Fruchtbarkeit annehmen. Der Anteil weniger fruchtbarer Erwachsener an der erwachsenen Bevölkerung, $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ greift in dieses Modell ein. Im zweiten Modell von [8] war es dagegen der Anteil von Personen aus Familien mit geringer Fruchtbarkeit an der Gesamtbevölkerung. Wir nehmen an $X_1(0) > 0$, $Y_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$ und $Y_2(0) > 0$.

Wir definieren $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. Das obige Differentialsystem kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

mit einer Funktion F , die eine homogene Vektorfunktion vom Grad eins ist. Die globale Existenz und die Positivität der Lösungen des Systems (3) werden wie in den demografischen Modellen mit Ehe gezeigt. Siehe zum Beispiel [16, Kap. 4]. Positivität ergibt sich aus der Tatsache, dass $dX_1/dt \geq 0$ wenn $X_1 = 0$, $dY_1/dt \geq 0$ wenn $Y_1 = 0$, usw. Bei einer Anfangsbedingung, deren Komponenten alle streng positiv sind, bleibt jede Komponente sogar für alle $t > 0$ streng positiv. Die globale Existenz ergibt sich aus der Ungleichheit, der die Gesamtbevölkerung gehorcht

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ ist eine "positive exponentielle Lösung" des Systems (3), wenn

- $z = (z_i)$ ist ein Vektor mit $z_i \geq 0 \forall i$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) ist eine Lösung für das nichtlineare Eigenwertproblem $\lambda z = F(z)$.

Wenn (λ, z) eine solche Lösung ist und wenn $\alpha > 0$ ist, dann $(\lambda, \alpha z)$ ist auch eine Lösung. Wir sagen, dass eine positive Exponentiallösung normalisiert wird, wenn $\sum_i z_i = 1$.

Satz 1 . Es gibt eine einzige normalisierte positive Exponentiallösung der Form $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

In ähnlicher Weise gibt es eine einzelne normalisierte positive Exponentiallösung der Form $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

Im Falle $b_1 < b < b_2$ mit

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

dann gibt es eine einzelne normalisierte positive Exponentiallösung der Form $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_2^*, x_2^*, y_1^*)$ mit $x_1^* > 0$, $y_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ und $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Beweis . Für die erste Lösung

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

Daher die quadratische Gleichung für λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

Die beiden Wurzeln sind

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m$$

aber nur der mit einem + führt zu positiven Lösungen (x_1, y_1) .

Die zweite Lösung wird auf die gleiche Weise erhalten, indem der Index 1 durch den Index 2 ersetzt wird.

Für die dritte Lösung

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

Wir können nicht haben $c + \lambda + m = 0$ Andernfalls $y_1 = 0$. Also haben wir $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ und $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. Daher durch Ersetzen der beiden anderen Gleichungen und Teilen durch y_1 oder y_2 ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

Durch Subtrahieren dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

Das Mitglied rechts in der Formel für y_1/y_2 muss streng positiv sein. Wir haben

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

und

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

Wir definieren $b_3 = 2(a_1 - a_2)$. Wir haben

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

Darüber hinaus zeigt eine kleine Berechnung, dass $Q(b_1) = 0$ und $Q(b_2) = 1$. Wir haben auch $b_1 < b_2 < b_3$. Wir schließen daraus

- auf das Intervall $]0, b_1[$, $1/Q - 1$ ist eine abnehmende Funktion, die von -1 auf $-\infty$ abnimmt,
- auf das Intervall $]b_1, b_2[$, $1/Q - 1$ ist eine abnehmende Funktion, die von $+\infty$ auf 0 abnimmt,
- auf das Intervall $]b_2, b_3[$, $1/Q - 1$ ist immer noch eine abnehmende Funktion und $1/Q - 1 < 0$,
- auf das Intervall $]b_3, +\infty[$ $1/Q - 1$ ist eine zunehmende Funktion und wir haben immer noch $1/Q - 1 < 0$.

Also haben wir $y_1/y_2 > 0$ nur auf dem Intervall $]b_1, b_2[$. Die Formeln für x_1, y_1, x_2 und y_2 ergeben sich aus (6) und Standardisierung $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Beachten Sie, dass $b_1 < b_2$. Die Wachstumsrate λ^* gegeben durch (6) verringert sich um λ_1 bis λ_2 auf das Intervall $b_1 < b < b_2$.

Wenn c gegen $+\infty$ konvergiert, wird das Modell mit zwei Altersgruppen auf das Modell in der Einleitung mit einer einzelnen Altersgruppe reduziert. Wir können sehen, dass die beiden Schwellen b_1 und b_2 konvergieren dann in Richtung einer einzelnen Schwelle gleich $a_1 - a_2$.

3 Die Stabilität exponentieller Lösungen

Mit $i \in \{1, 2\}$, wir definieren

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Wir haben $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$. Eine ziemlich einfache Berechnung aus dem System (1) - (2) ergibt

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1 \mathcal{Y}_1 - c \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1 [a_1 \mathcal{Y}_1 + a_2 \mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c \mathcal{X}_1 - b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1 [a_1 \mathcal{Y}_1 + a_2 \mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2 \mathcal{Y}_2 - c \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2 [a_1 \mathcal{Y}_1 + a_2 \mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c \mathcal{X}_2 + b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2 [a_1 \mathcal{Y}_1 + a_2 \mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

Sei eine normalisierte Exponentiallösung des Systems (1) - (2), $e^{\lambda t} z$ mit $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Wir haben die Gleichungen (4) - (5). Durch Addition der vier Gleichungen erhalten wir

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m.$$

Wir schließen daraus, dass z ein Gleichgewichtspunkt des Systems (7) - (10) ist. Es wird gesagt, dass die Lösung $e^{\lambda t} z$ ist "asymptotisch stabil" (bzw. instabil), wenn z ein asymptotisch stabiler (bzw. instabiler) Gleichgewichtspunkt des Systems (7) - (10) ist. Aus dem Eulerschen Theorem für homogene Vektorfunktionen (hier vom Grad eins) folgt, dass λ immer ein Eigenwert der Jacobi-Matrix der durch (3) definierten Funktion F am Punkt z ist: $J_F(z)$. Tatsächlich,

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

Nach [6, S. 638] ist der Gleichgewichtspunkt z asymptotisch stabil, wenn die drei Eigenwerte dieser Jacobi-Matrix außer λ einen Realteil haben, der streng kleiner als λ ist. Der Gleichgewichtspunkt ist instabil, wenn einer dieser drei Eigenwerte einen Realteil hat, der streng größer als λ ist. Dies werden wir im folgenden Satz verwenden.

Satz 2

- Die normalisierte exponentielle Lösung von Satz 1, $e^{\lambda t}(x_1, y_1, 0, 0)$ ist asymptotisch stabil, wenn $b < b_1$, instabil wenn $b > b_1$.
- Die normalisierte exponentielle Lösung von Satz 1, $e^{\lambda t}(0, 0, x_2, y_2)$ ist asymptotisch stabil, wenn $b > b_2$, instabil wenn $b < b_2$.
- Die normalisierte exponentielle Lösung von Satz 1, $e^{\lambda t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ ist asymptotisch stabil für $b_1 < b < b_2$.

Beweis . Im Allgemeinen, wenn $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ mit $y_1 + y_2 > 0$ und wenn $p = y_2/(y_1 + y_2)$, dann haben wir

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2-m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2-m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Im ersten Fall haben wir also $p = 0$

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b-m \end{array} \right).$$

Der größte Eigenwert des oberen linken Blocks ist λ_1 . Der größte Eigenwert des unteren rechten Blocks ist

$$\mu_2 = \frac{b-c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

Es ist eine zunehmende Funktion von b . Nach einigen Berechnungen bekommen wir $\mu_2 > \lambda_1$ wenn $b > b_1$ und $\mu_2 < \lambda_1$ wenn $b < b_1$.

Im zweiten Fall haben wir also $p = 1$

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b-m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

Der größte Eigenwert des unteren rechten Blocks ist λ_2 . Der größte Eigenwert des oberen linken Blocks ist

$$\mu_1 = \frac{-b-c + \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

Es ist eine abnehmende Funktion von b , weil

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Nach einigen Berechnungen bekommen wir $\mu_1 > \lambda_2$ wenn $b < b_2$ und $\mu_1 < \lambda_2$ wenn $b > b_2$.

Im dritten Fall haben wir $0 < p < 1$. Aus Gleichung (6) folgt dann, dass

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

Das wissen wir schon λ^* ist ein Eigenwert der Matrix $J_F(z)$ definiert durch (11). Die Frage ist zu wissen, ob die drei anderen Eigenwerte einen Realteil haben, der streng niedriger ist als λ^* . Mit anderen Worten, die Matrix $M = J_F(z) - \lambda^* I$ hat einen Null-Eigenwert und die Frage ist, ob die anderen Eigenwerte einen streng negativen Realteil haben. Wir haben

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom hat daher die Form

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

Mit einer Entwicklung nach der ersten Spalte finden wir

$$\begin{aligned} \chi(\xi) = & - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ & \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ & - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Für den Koeffizienten von ξ^3 , wir finden

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

und nach Vereinfachung

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Für den Koeffizienten von ξ^2 , wir finden

$$k_1 = \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1 - p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1 - p)^2 - a_1 c - a_2 c,$$

und nach einer mühsamen Vereinfachung

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Schließlich haben wir für den Koeffizienten von ξ die formale Berechnungssoftware Xcas (<https://www.xcasenligne.fr>) verwendet, um zu erhalten

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 kann auch in der Form geschrieben werden

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Damit die drei Wurzeln des Polynoms $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$ einen streng negativen Realteil haben, ist es nach dem Routh-Hurwitz-Kriterium notwendig und ausreichend, dass $k_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ und $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17, p. 134]. Wir haben $k_2 > 0$. Auf der anderen Seite, $k_1 > 0$ wenn $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ und daher insbesondere für $b_1 < b < b_2$ da $b_2 < a_1 - a_2$. Wir haben auch $k_0 > 0$ wenn $b_1 < b < b_2$. Es bleibt nur zu beweisen, dass $k_1 k_2 - k_0 > 0$ wenn $b_1 < b < b_2$. Durch die Entwicklung des Produkts $k_1 k_2$ und indem wir den Zähler als Polynom in der Variablen b einstuften, erhalten wir

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Wir gruppieren einige Teile:

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Die Begriffe in eckigen Klammern sind alle streng positiv, weil $b < b_2 < a_1 - a_2$. Wir haben also $k_1 k_2 - k_0 > 0$. Die dritte Lösung ist daher asymptotisch stabil für $b_1 < b < b_2$.

4 Beispiel

Lass uns nehmen $a_1 = 10\%$ pro Jahr. Denken Sie daran, dass dieser Parameter gleich der Anzahl der Geburten in Familien mit hoher Fruchtbarkeit geteilt durch die erwachsene Bevölkerung mit hoher Fruchtbarkeit ist und nicht der in der Demografie üblicherweise verwendeten Geburtenrate, die durch die Gesamtbevölkerung geteilt wird. Nehmen wir auch: $a_2 = 4\%$ pro Jahr, $c = 5\%$ pro Jahr also $1/c = 20$ Jahre und $m = 2\%$ pro Jahr. Die Lebenserwartung bei der Geburt ist daher $1/m = 50$ Jahre. Wir möchten daran erinnern, dass die Lebenserwartung von Männern und Frauen im Jahr 2017 beispielsweise in Côte d'Ivoire 52 und 55 Jahre, in Tschad 51 und 54 Jahre, in Zentralafrika 50 und 53 Jahre betrug [15].

Mit diesen Parameterwerten erhalten wir $\lambda_1 = 3\%$ pro Jahr und $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ pro Jahr, $b_1 = 3\%$ pro Jahr und $b_2 \simeq 3,9\%$ pro Jahr. Abbildung 1 zeigt die unterschiedlichen Wachstumsraten λ_1 , λ^* und λ_2 als Funktion von b . Wir haben einen teilweisen demografischen Übergang, wenn $b_1 < b < b_2$ mit einer Wachstumsrate λ^* . Im Vergleich dazu beträgt die natürliche Wachstumsrate in Côte d'Ivoire 2,4%, im Tschad 3,3% und in Zentralafrika 2,2%. Der Tschad wäre daher eher in dem Fall, in dem $b < b_1$, während sich die beiden anderen Länder in der Zwischensituation befinden $b_1 < b < b_2$.

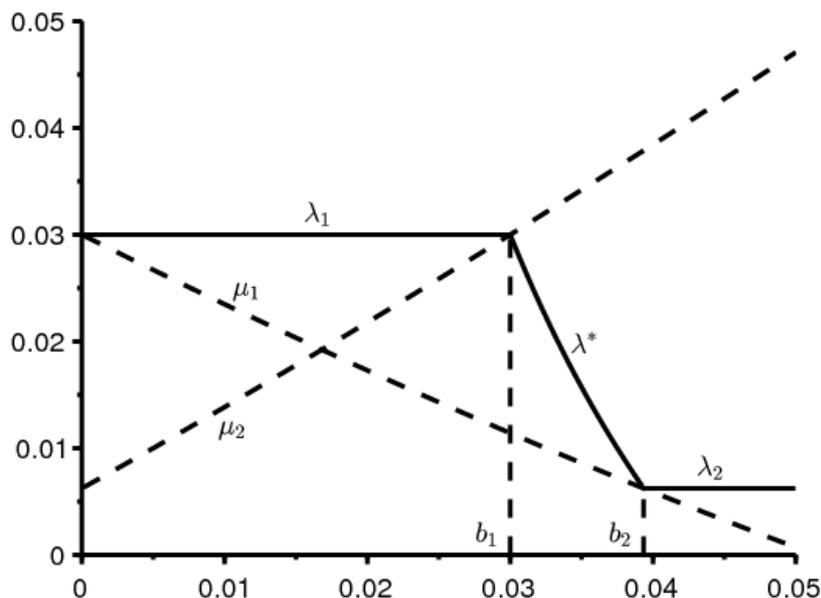


Abbildung 1. Asymptotische Wachstumsraten der Bevölkerung λ_1 , λ^* und λ_2 (durchgezogene Linie) als Funktion des Imitationskoeffizienten b (auf der Abszisse). Eigenwerte μ_1 und μ_2 sind gepunktet.

Für dieses Modell können wir den Anteil der „Jugend“ an der Bevölkerung berechnen. Dieser Anteil ist

$$x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$$

wenn $b < b_1$. Dieser Anteil ist

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

wenn $b > b_2$. Angesichts der Struktur des Modells hätten diese "jungen Leute" jedoch ein Durchschnittsalter $1/(c + m) \simeq 14,3$ Jahre. Es ist daher schwierig, mit demografischen Statistiken zu vergleichen. Laut [15] beträgt der Anteil der Kinder unter 15 Jahren in Côte d'Ivoire 43%, im Tschad 48% und in Zentralafrika 44%.

Die Geburtenrate beträgt

- $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$ pro 1000 Einwohner wenn $b < b_1$,
- $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$ pro 1000 Einwohner wenn $b > b_2$.

Für die drei bereits betrachteten Länder liegen die Zahlen in der Größenordnung von 37, 46 und 36 pro 1000 Einwohner.

Somit sind die für die Parameter gewählten Werte nicht zu unrealistisch.

5 Asymptotisches Verhalten

Die Stabilitätsstudie war bisher nur lokal. Das System hat die Dimension 4 und lässt sich am besten auf ein System der Dimension 3 reduzieren. Es scheint nicht möglich zu sein, das Poincaré-Bendixson-Theorem zur Bestimmung des globalen asymptotischen Verhaltens zu verwenden. Im demografischen Modell mit Ehen von [16, Kap. 4] war das System Dimension zwei.

Es ist auch schwierig, eine geeignete Liapunov-Funktion zu finden. Unser homogenes System kann sich sicherlich in ein System mit nur linearen oder quadratischen Termen verwandeln, wenn wir neue Unbekannte annehmen $X_1/(Y_1 + Y_2)$, $Y_1/(Y_1 + Y_2)$, $X_2/(Y_1 + Y_2)$ und $Y_2/(Y_1 + Y_2)$. Die Funktion von Liapunov mit logarithmischen Begriffen, die beispielsweise von [2] für eine bestimmte Klasse solcher Systeme verwendet werden, scheint jedoch nicht geeignet zu sein.

Inspiziert vom linearen Populationsmodell von [4, S. 80] erhalten wir jedoch den folgenden Satz.

Satz 3. Die Funktion

$$V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

ist immer positiv und abnehmend.

Beweis. Wir definieren allgemeiner $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ mit $k > 0$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c+m)X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + cX_1 - mY_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right].\end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ und $Y_2(t) > 0$. Der Term mit Faktor b ist daher negativ

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lambda + c + m \neq 0$, wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}.\end{aligned}$$

Der Koeffizient von Y_1^2 ist gleich 0, wenn wir wählen

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Wir behalten die Wurzel nur mit einem $+$ in \pm , damit $\lambda + c + m > 0$. Diese Wurzel, die von k abhängt, ist minimal, wenn $a_1^2/k + kc^2$ ist minimal, d. h. wenn $k = a_1/c$. Mit dieser Wahl haben wir $\lambda = \lambda_1$ und

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ konvergiert gegen eine Grenze ≥ 0 . Insbesondere gibt es eine Konstante $K > 0$ mit $\forall t > 0$, $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ und $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$.

Satz 4. Die Funktion

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

mit

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

ist immer positiv und abnehmend.

Beweis. Wir definieren allgemeiner $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ mit $k > 0$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c+m)X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + cX_2 - mY_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right].\end{aligned}$$

Mit $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m)X_2^2 + (a_2 + kc)X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m)Y_2^2].$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lambda + c + m \neq 0$, wir haben

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}.\end{aligned}$$

Der Koeffizient von Y_2^2 ist gleich 0, wenn wir wählen

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b+c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Wir behalten die Wurzel nur mit einem $+$ in \pm , damit $\lambda + c + m > 0$. Diese Wurzel, die von k abhängt, ist minimal, wenn $a_2^2/k + kc^2$ ist minimal, d. h. wenn $k = a_2/c$. Dann ist λ durch die Formel (12) gegeben und wir haben $dW/dt \leq 0$.

Diese Ergebnisse erlauben es jedoch nicht, die verschiedenen Regime nach dem Wert von b zu unterscheiden. Wir vermuten, dass:

- wenn $b < b_1$, wir haben

$$e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

mit $x_1 > 0, y_1 > 0$ und $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$. Es ist die Bevölkerung mit einer hohen Fruchtbarkeit, die proportional dominiert.

- wenn $b_1 < b < b_2$, wir haben

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

und es gibt eine Konstante $\alpha > 0$ mit $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$, wobei dieser letzte Vektor der von Satz 1 ist. Es gibt eine Koexistenz in den Anteilen von Subpopulationen mit unterschiedlicher Fruchtbarkeit;

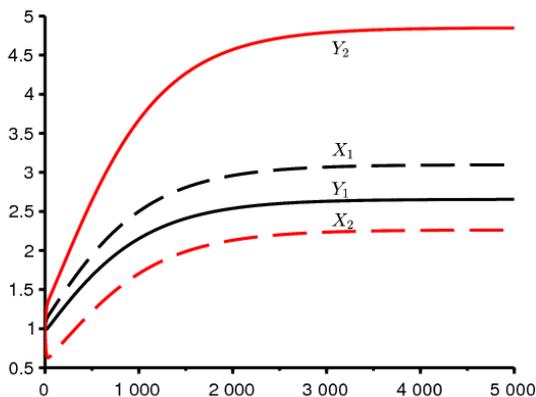
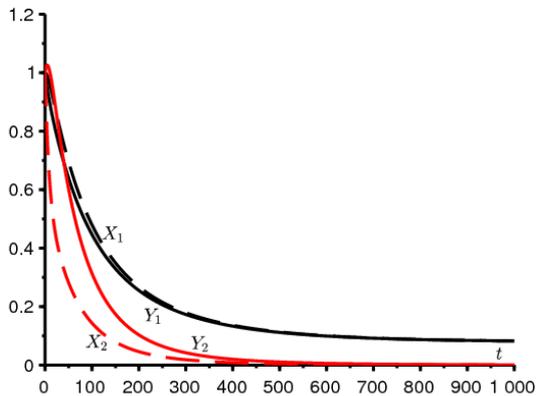
- wenn $b > b_2$, wir haben

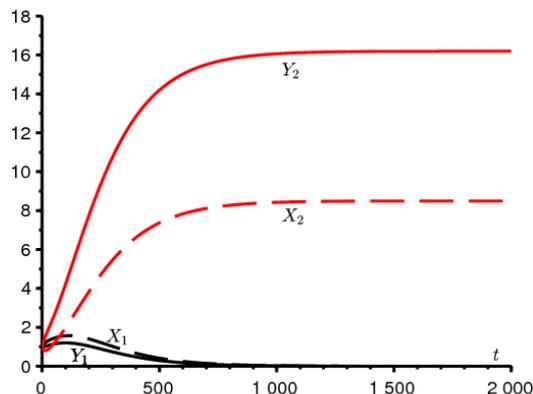
$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

mit $x_2 > 0, y_2 > 0$ und $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$. Es ist die Bevölkerung mit geringer Fruchtbarkeit, die proportional dominiert.

Somit könnte der in bestimmten Ländern Afrikas südlich der Sahara beobachtete partielle demografische Übergang dem Zwischenfall entsprechen, in dem $b_1 < b < b_2$.

Betrachten Sie zur Unterstützung dieser Vermutung das numerische Beispiel im vorherigen Abschnitt. Nehmen Sie zum Beispiel eine beliebige Anfangsbedingung $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ (Da das System homogen ist, können wir uns 1 Million vorstellen). Abbildung 2 zeigt, wie sich das System gemäß der Position von b in Bezug auf die beiden Schwellenwerte verhält. Wenn die Vermutung bestätigt zu sein scheint, werden wir jedoch in dem Fall feststellen, wo $b_1 < b < b_2$ dass die charakteristische Konvergenzzeit ziemlich lang ist. Der zweite Eigenwert der Jacobi-Matrix $J_F(z)$ liegt in der Nähe λ^* .





(a) Funktionen $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ wenn $b = 0,025 < b_1$. (b) Funktionen $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ wenn $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$. (c) Funktionen $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ wenn $b = 0,05 > b_2$. Zur Vereinfachung haben wir geschrieben (X_1, Y_1, X_2, Y_2) in den verschiedenen Figuren, aber dies sind Funktionen, die durch ein Exponential renormiert werden.

Literaturhinweise

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J.-C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderler K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderler K. P., Waldstätter R., Wörz-Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer
8. Inaba H., Saito R., Bacaër N., An age-structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), *La Relation ressource–consommateur, Modélisation mathématique*, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P., Fanti L. (2003), The demographic transition and neo-classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W., Schnaubelt R., Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser
17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero-Bixby L., Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P.-F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier-Villars.