

نموذج رياضي للانتقال الديموغرافي الجزئي

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123099>

³Ali Moussaoui ²Hisashi Inaba ¹Nicolas Bacaër

¹ Institut de Recherche pour le Développement ، Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا ، nicolas.bacaer@ird.fr

² جامعة طوكيو ، قسم الرياضيات ، طوكيو ، اليابان ، inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

³ جامعة تلمسان ، قسم الرياضيات ، تلمسان ، الجزائر ، moussaouidz@yahoo.fr

ملخص

نحن ندرس نموذجًا رياضيًا للتحوّل الديموغرافي. هناك فئتان عمريتان ومستويان من الخصوبة. البالغون ذوو الخصوبة العالية يقلدون البالغين ذوي الخصوبة المنخفضة. عندما يزيد معامل التقليد ، يتجاوز السكان عتبتين يتزايد بينهما أو ينخفض بشكل كبير مع مزيج مستقر من الخصوبتين. يشير هذا التحوّل الديموغرافي الجزئي إلى الوضع في بعض بلدان أفريقيا جنوب الصحراء الكبرى.

الكلمات المفتاحية: النموذج الرياضي ، التحوّل الديموغرافي ، النمو الأسي

1 المقدمة

إن التحوّل الديموغرافي ظاهرة تمتد على مدى عقود. يرى السكان أولاً انخفاض معدل الوفيات. ثم ، مع بعض التأخير ، تنخفض الخصوبة أيضًا. بسبب هذا الفارق ، ينمو السكان في كثير من الأحيان بشكل كبير ، مع عواقب اقتصادية واجتماعية مهمة [3].

تصر فرضية التحديث المعروفة على أن معدل الخصوبة المنخفض هو نتيجة للتكيف الفردي مع البيئات الحديثة: التصنيع والتحضر والتغيرات في المعايير التعليمية والأسرية. ومع ذلك ، من الصعب إقامة صلة مباشرة بين انخفاض الخصوبة والعديد من المؤشرات على مستوى التنمية الاجتماعية. لذلك نحن نبحث عن آلية ديناميكية لفهم الفرق بين التغيير في الموقف الفردي والبيانات الإحصائية المجهرية.

إذا اتبعنا التقسيم إلى "ثلاثة ديموغرافيات" من [9] ، فيمكننا القول أنه يمكن النظر إلى التحوّل الديموغرافي من ثلاث زوايا: إحصائي أو سياسي أو رياضي. من هذه الزاوية الأخيرة ، والموضحة بشكل خاص بأعمال Verhulst [12 ، 19] و Lotka [1] والتي تم تلخيصها على سبيل المثال بواسطة [14] ، سننظر في المشكلة.

من وجهة نظر النمذجة الرياضية ، يمكن تقديم التحوّل الديموغرافي إما خارجي أو داخلي. في الحالة الأولى ، يفترض أن السكان متجانسون ، ولكن تحديث ظروف المعيشة يعني أن المعلمات الديموغرافية تختلف مع مرور الوقت. هذا يؤدي إلى نماذج غير مستقلة [1].

ويتكون النهج الداخلي ، على العكس من ذلك ، من استخدام نماذج مستقلة ، أي أن معاملات لا تعتمد على الوقت ، مع عدد غير متجانس من السكان. ثم تنتج التغييرات النوعية عن التفاعل بين المجموعات الفرعية. إن التحوّل الديموغرافي يشبه إلى حد ما الوباء. يمكن نقل المعايير الثقافية المبتكرة التي تقلل من عدد الولادات من الأفراد ذوي الخصوبة المنخفضة ("المصابين") إلى الأفراد ذوي الخصوبة العالية (الأشخاص "الأصحاء") ، كما هو الحال في نظرية الانتشار [18 ، 13]. يمكن أن تبدأ عملية الانتقال هذه بالتغيرات الاجتماعية الاقتصادية والبيئية.

[8] طور مؤخرًا وجهة النظر الوبائية هذه لنظرية انتشار انتقال الخصوبة. يوصف انخفاض الخصوبة نتيجة لانتشار الميل إلى إنجاب عدد أقل من الأطفال. قام نموذجهم الأول بتقسيم السكان بين الأفراد ذوي الخصوبة العالية والأفراد ذوي الخصوبة المنخفضة ، $P_1(t)$ و $P_2(t)$. تطورت أعدادهم وفقًا لنظام تفاضلي متجانس من الدرجة الأولى

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} , \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} .$$

r_1 و r_2 هي معدلات نمو السكان المعزولين $r_1 > r_2$. b هو معامل التقليد يشير إلى المعدل الأقصى الذي يتبنى عنده الأفراد ذوو الخصوبة العالية الخصوبة المنخفضة. يفترض أن هذا المعدل يعتمد خطيًا على جزء السكان ذوي الخصوبة المنخفضة: $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$ من الناحية البيئية ، هو نظام فريسة مفترسة بطريقة لوتكا وفولتيرا [20] ولكن بمعدل افتراض غير خطي يعتمد فقط على نسبة السكان ، كما هو الحال في نموذج أرديتي وجينزبرج [11 ، § 2.3]. التحليل الرياضي بسيط للغاية. يكفي أن نلاحظ ذلك $f(t)$ هو حل معادلة لوجستية. ادعى أن $r_1 - r_2 < b$ أو $r_1 - r_2 > b$ ، يميل مجموع السكان إلى النمو بشكل مطرد مع معدل

r_1 أو r_2 إن نسبة السكان الذين يعانون من انخفاض الخصوبة أو نسبة الخصوبة العالية هي التي تتقارب إلى الصفر. بدءًا من السكان ذوي الخصوبة العالية وقليل من الأفراد ذوي الخصوبة المنخفضة ، فإن التحول الديموغرافي يحدث إذا و فقط إذا $b > r_1 - r_2$.

بعد ذلك ، [8] يدرس إصدارًا منظمًا حسب العمر من نفس النموذج. نظرًا لأن العمر x كان متغيرًا مستمرًا ، فقد أدى ذلك إلى نظام معادلات تفاضلية جزئية من نوع McKendrick و von Foerster :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

مع

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

في هذا النموذج ، $m(x)$ هو معدل الوفيات ، $a_1(x)$ و $a_2(x)$ هي معدلات الخصوبة. بعد ذلك ، أصبح التحليل الرياضي للنموذج أكثر تعقيدًا وتم الحصول على نتائج جزئية جدًا. عموماً لم يعد هناك حد واحد ولكن اثنين. تحت العتبة الأولى وفوق العتبة الثانية ، هناك حل آسي تافه مستقر محليًا (بمعنى نظرية النظم المتجانسة) يتكون من أفراد ذوي خصوبة عالية في الحالة الأولى ، مع خصوبة منخفضة في الحالة الثانية. بين العتبتين ، على الأقل لقيم معينة من المعلمات (أي مع بعض الشروط الإضافية التي ليست مثالية بالتأكيد) ، كان من الممكن إثبات وجود حل آسي غير تافه مع الأفراد الذين لديهم خصوبة مختلفة. ال لم تتم مناقشة تفرد واستقرار هذا الحل غير التافه. لهذا الحل ، فإن معدل النمو السكاني متوسط بين الحالتين المتطرفتين. هناك تحول ديموغرافي جزئي. لم يكن هذا الاختلاف النوعي مع النموذج الأول بديهياً.

بدا النظام بين العتبتين قصصًا في [8] ، لأن الدافع جاء من التركيبة السكانية لليابان. إن التحول الديموغرافي متقدم هناك لدرجة أن معدل النمو السكاني أصبح سلبياً. نحن أبعد من العتبة الثانية. من ناحية أخرى ، يمكن أن يكون النظام الوسيط ذا أهمية في حالة بعض البلدان في أفريقيا جنوب الصحراء الكبرى. انخفض معدل الخصوبة في الواقع قليلاً ولكن أقل بكثير مما توقعه الديمغرافيون [10]. بالإضافة إلى ذلك ، فإن صعوبات تحليل نظام المعادلات التفاضلية الجزئية تدفعنا إلى البحث عن نموذج أبسط للانتقال الديموغرافي الجزئي.

لذلك ندرس أدناه نموذجًا يحتوي على فئتين عمريتين فقط (الشباب والكبار) بدلاً من العمر الذي يختلف باستمرار. والميزة أنها تحتفظ بظاهرة الانتقال نفسها عند عتبتين. هذا يسمح بدراسة أكثر اكتمالاً. يظهر بشكل خاص أن الحل غير التافه فريد من نوعه وأن مجال وجوده يتطابق تمامًا مع مجال عدم الاستقرار للحلول التافهة. تمكنا أيضًا من إثبات الاستقرار المحلي للحل غير التافه.

نقدم النموذج في القسم 2 مع حلول أسية تافهة وغير تافهة. ندرس استقرار الحلول الأسية في القسم 3 باستخدام معيار Routh-Hurwitz بشكل خاص ونظرية النظم التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى. لهذه النظرية ، انظر [6 ، ص. 638] والكتب [5 ، الفصل 5] ، [7] ، الفصل 4] و [16 ، الفصل 4]. نظرًا لأن النظام ذو بُعد 4 ، فإن استقرار الحل الآسي غير البسيط يمثل صعوبة كانت غائبة عن أمثلة المراجع أعلاه ، والتي تتطلب استخدام برمجيات حسابية رسمية. يقدم القسم 4 مثالاً رقمياً يهدف إلى أن يكون ممثلًا لبعض البلدان في أفريقيا جنوب الصحراء. القسم 5 يقترح التخمين للسلوك المقارب العالمي لعدم وجود العنثر على وظيفة Liapounov مناسبة. على الرغم من كونه أبسط من نظام المعادلات التفاضلية الجزئية ، فإن تحليل نموذجنا لا يزال غير مكتمل.

2 النموذج وحلوله الاسية

نحدد

- $X_1(t)$ عدد الشباب من العائلات الخصبة
- $Y_1(t)$ عدد البالغين في الأسر الخصبة
- $X_2(t)$ عدد الشباب من العائلات ذات الخصوبة المنخفضة
- $Y_2(t)$ عدد البالغين في الأسر ذات الخصوبة المنخفضة.

ومن المفترض

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}. \quad (2)$$

$a_1 > 0$ و $a_2 > 0$ هي الخصوبة ($a_1 > a_2$) ، $m > 0$ هو الموت ، $c > 0$ هو معدل انتقال الشباب إلى مرحلة البلوغ ، و $b > 0$ هو الحد الأقصى لمعدل الخصوبة المرتفعة عند البالغين. جزء البالغين الأقل خصوبة في السكان البالغين ، $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ ، يتدخل في هذا النموذج. على العكس من ذلك ، في النموذج الثاني [8] ، كان جزءًا من الأفراد من أسر الخصوبة الفقيرة في إجمالي السكان. ومن المفترض $X_1(0) > 0$ ، $Y_1(0) > 0$ ، $X_2(0) > 0$ و $Y_2(0) > 0$.

نحدد $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. يمكن كتابة النظام التفاضلي أعلاه في النموذج التالي

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

مع دالة F وهي دالة متجه متجانسة من الدرجة الأولى. يظهر الوجود العالمي وإيجابية حلول النظام (3) كما في النماذج الديموغرافية مع الزواج. انظر على سبيل المثال [16 ، الفصل 4]. نتائج إيجابية من حقيقة ذلك $dX_1/dt \geq 0$ إذا $X_1 = 0$ ، $dY_1/dt \geq 0$ إذا $Y_1 = 0$ ، إلخ. مع الحالة الأولية التي تكون جميع مكوناتها إيجابية تمامًا ، يظل كل مكون إيجابيًا تمامًا لجميع $t > 0$. ينتج الوجود العالمي عن عدم المساواة الذي يطبعه إجمالي السكان

$$P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \quad \frac{dP}{dt} \leq (a_1 - m)P.$$

$Z(t) = e^{\lambda t} z$ هو "حل أسّي إيجابي" للنظام (3) إذا

- $z_i \geq 0 \forall i$ هو ناقل مع $z = (z_i)$
- $\sum_i z_i > 0$
- (λ, z) هو حل لمشكلة القيمة الذاتية غير الخطية. $\lambda z = F(z)$.

إذا كان (λ, z) هو مثل هذا الحل وإذا كان $\alpha > 0$ ، فعندئذٍ $(\lambda, \alpha z)$ هو أيضًا حل. نقول أن الحل الأسّي الإيجابي يتم تطبيقه إذا $\sum_i z_i = 1$.

الافتراض 1 . هناك حل أسّي إيجابي واحد مقيس للنموذج $e^{\lambda t}(x_1, y_1, 0, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

وبالمثل ، هناك حل أسّي إيجابي واحد مقيس للنموذج $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

في الحالة $b_1 < b < b_2$ مع

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

ثم هناك حل أسّي إيجابي واحد مقيس للنموذج $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ مع $x_1^* > 0$ ، $x_2^* > 0$ ، $y_1^* > 0$ و $y_2^* > 0$

$$\lambda^* = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[\frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

إثبات . للحل الأول ،

$$(x_1, y_1) \neq (0, 0), \quad (\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1.$$

ومن هنا المعادلة التربيعية ل λ

$$(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0.$$

الجنور هي

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m$$

ولكن فقط الشخص الذي لديه علامة + يؤدي إلى حلول إيجابية (x_1, y_1) .

يتم الحصول على الحل الثاني بنفس الطريقة عن طريق استبدال المؤشر 1 بالمؤشر 2.

للحل الثالث ،

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad (4)$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad (5)$$

لا يمكننا ذلك $c + \lambda + m = 0$ غير ذلك $y_1 = 0$ اذا لدينا $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$ و $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$. ومن ثم ، عن طريق استبدال المعادلتين الأخرين والقسمة على y_1 أو y_2 ،

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

من خلال طرح هاتين المعادلتين ، نحصل على

$$\lambda = c \left(\frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1 := \frac{1}{Q} - 1. \quad (6)$$

العضو على اليمين في صيغة y_1/y_2 يجب أن تكون إيجابية للغاية. نملك

$$\frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow 0^+} -1, \quad \frac{1}{Q} - 1 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} -\frac{a_2}{a_1} < 0,$$

و

$$\frac{dQ}{db} = -\frac{c}{b^2} + \frac{2c(a_1 - a_2)}{b^3}.$$

نحدد $b_3 = 2(a_1 - a_2)$. نملك

$$\frac{dQ}{db}(b) > 0 \quad \forall b \in]0, b_3[, \quad \frac{dQ}{db}(b_3) = 0, \quad \frac{dQ}{db} < 0 \quad \forall b > b_3.$$

علاوة على ذلك ، يظهر حساب صغير ذلك $Q(b_1) = 0$ و $Q(b_2) = 1$. ولدينا ايضا $b_1 < b_2 < b_3$. نستنتج أن

- على الفاصل الزمني $]0, b_1[$ ، $1/Q - 1$ هي وظيفة متناقصة تنخفض من 1 إلى $-\infty$ ،
- على الفاصل الزمني $]b_1, b_2[$ ، $1/Q - 1$ دالة تناقص تنقص من $+$ إلى 0 ،
- على الفاصل الزمني $]b_2, b_3[$ ، $1/Q - 1$ وظيفة لا تزال تتناقص و $1/Q - 1 < 0$ ،
- على الفاصل الزمني $]b_3, +\infty[$ هي وظيفة متزايدة ولا يزال لدينا $1/Q - 1 < 0$.

اذا لدينا $y_1/y_2 > 0$ فقط على الفاصل الزمني $]b_1, b_2[$. الصيغ لـ x_1, y_1, x_2, y_2 تنشأ من (6) والتوحيد $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$. هذا يكمل الدليل.

لاحظ أن $b_1 < b_2$ معدل النمو λ^* بواسطة (6) ينخفض بمقدار λ_1 حتى λ_2 على الفاصل الزمني $b_1 < b < b_2$.

عندما يتقارب c إلى $+\infty$ ، يتم تقليل النموذج مع فئتين عمريتين إلى النموذج في المقدمة مع فئة عمرية واحدة. يمكننا أن نرى أن العتبتين b_1 و b_2 ثم تتلاقى نحو عتبة واحدة تساوي $a_1 - a_2$.

3 استقرار الحلول الأسية

مع $i \in \{1, 2\}$ ، نحدد

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

نملك $\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2 = 1$. حساب بسيط إلى حد ما من النظام (1) - (2) يعطي

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (8)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2 \mathcal{Y}_2 - c \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c \mathcal{X}_2 + b \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2[a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (10)$$

لنكن حل أسّي عادي للنظام (1) - (2)، $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ مع $e^{\lambda t} z$ ، لدينا المعادلات (4) - (5). بإضافة المعادلات الأربعة، نحصل على

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m.$$

نستنتج أن z هي نقطة توازن النظام (7) - (10). يقال أن الحل $z e^{\lambda t}$ يكون "مستقرًا مقاربًا" (غير مستقر على التوالي) إذا كانت z هي نقطة توازن مستقرة (تقلب غير مستقر) للنظام (7) - (10). يستنتج من نظرية أولر لوظائف المتجه المتجانسة (هنا من الدرجة الأولى) أن λ هي دائمًا قيمة ذاتية للمصفوفة اليعقوبية للدالة F المحددة بواسطة (3) عند النقطة z : $J_F(z)$. في الواقع،

$$J_F(z)z = F(z) = \lambda z.$$

بحسب [6، ص. 638]، نقطة التوازن z مستقرة بشكل تقارب إذا كانت القيم الذاتية الثلاثة لهذه المصفوفة اليعقوبية، بخلاف λ ، لديها جزء حقيقي أقل من λ . نقطة التوازن غير مستقرة إذا كان لأحد هذه القيم الذاتية الثلاثة جزء حقيقي أكبر من λ . هذا ما سنستخدمه في الاقتراح التالي.

الاقتراح 2

- الحل الأسّي المقيس للمقترح 1، $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$ ، مستقر تقارب إذا $b < b_1$ ، غير مستقر إذا $b > b_1$.
- الحل الأسّي المقيس للمقترح 1، $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$ ، مستقر تقارب إذا $b > b_2$ ، غير مستقر إذا $b < b_2$.
- الحل الأسّي المقيس للمقترح 1، $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ ، مستقر تقارب ل $b_1 < b < b_2$.

إثبات. بشكل عام، إذا $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ مع $y_1 + y_2 > 0$ وإذا $p = y_2/(y_1 + y_2)$ ، لدينا بعد ذلك

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

في الحالة الأولى، لدينا $p = 0$ ، لذا

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b-m \end{array} \right).$$

أكبر قيمة ذاتية للكتلة العلوية اليسرى هي λ_1 . أكبر قيمة ذاتية للكتلة اليمنى السفلى هي

$$\mu_2 = \frac{b-c + \sqrt{(b+c)^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

إنها وظيفة متزايدة من b . بعد بعض الحسابات نحصل $\mu_2 > \lambda_1$ إذا $b > b_1$ و $\mu_2 < \lambda_1$ إذا $b < b_1$.

في الحالة الثانية، لدينا $p = 1$ ، لذا

$$J_F(z) = \left(\begin{array}{cc|cc} -c-m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b-m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c-m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

أكبر قيمة ذاتية للكتلة اليمنى السفلى هي λ_2 . أكبر قيمة ذاتية للكتلة العلوية اليسرى هي

$$\mu_1 = \frac{-b-c + \sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}}{2} - m.$$

إنها وظيفة متناقصة لـ b لأنه

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

بعد بعض الحسابات نحصل $\mu_1 > \lambda_2$ إذا $b < b_2$ و $\mu_1 < \lambda_2$ إذا $b > b_2$.

في الحالة الثالثة، لدينا $0 < p < 1$. ثم يترتب على المعادلة (6) ذلك

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

نحن نعلم ذلك بالفعل λ^* هو قيمة ذاتية للمصفوفة $J_F(z)$ تعرف بـ (11). السؤال هو معرفة ما إذا كانت القيم الذاتية الثلاثة الأخرى لها جزء حقيقي أقل من ذلك λ^* . وبعبارة أخرى، المصفوفة $M = J_F(z) - \lambda^* I$ ليس له قيمة eigenvalue والسؤال هو ما إذا كانت القيم الذاتية الأخرى لها جزء حقيقي سلبي تمامًا. نملك

$$M = \left(\begin{array}{cccc} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{array} \right).$$

وبالتالي فإن كثيرات الحدود المميزة هي من الشكل

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0).$$

مع تطور وفقا للعمود الأول نجد

$$\chi(\xi) = - \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left\{ \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ - c \left\{ -a_1 \left[c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}.$$

لمعامل ξ^3 ، نجد

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1 - 2p),$$

وبعد التبسيط

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

لمعامل ξ^2 ، نجد

$$k_1 = \left[-3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c,$$

وبعد تبسيط شاق

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

أخيرًا ، بالنسبة لمعامل ξ ، استخدمنا برنامج الحساب الرسمي (<https://www.xcasenligne.fr>) (Xcas) للحصول على

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

k_0 يمكن أيضًا كتابتها في النموذج

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left(b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

بحيث تكون جذور كثيرات الحدود الثلاثة $k_0 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3$ لها جزء حقيقي سلبى تمامًا ، فهي ضرورية وكافية وفقًا لمعيار روث هورويتز ذلك $k_0 > 0$ ، $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ و $k_0 > 0$ ، $k_1 k_2 - k_0 > 0$ [17 ، ص. 134]. نملك $k_2 > 0$ من جهة أخرى ، $k_1 > 0$ إذا $0 < b < 2(a_1 - a_2)$ وبالتالي على وجه الخصوص ل $b_1 < b < b_2$ لأن $b_2 < a_1 - a_2$ ولدينا أيضًا $k_0 > 0$ إذا $b_1 < b < b_2$. يبقى فقط لإثبات ذلك $k_1 k_2 - k_0 > 0$ إذا $b_1 < b < b_2$ من خلال تطوير المنتج $k_1 k_2$ ومن خلال تصنيف البسط على أنه متعدد الحدود في المتغير b ، نحصل على

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

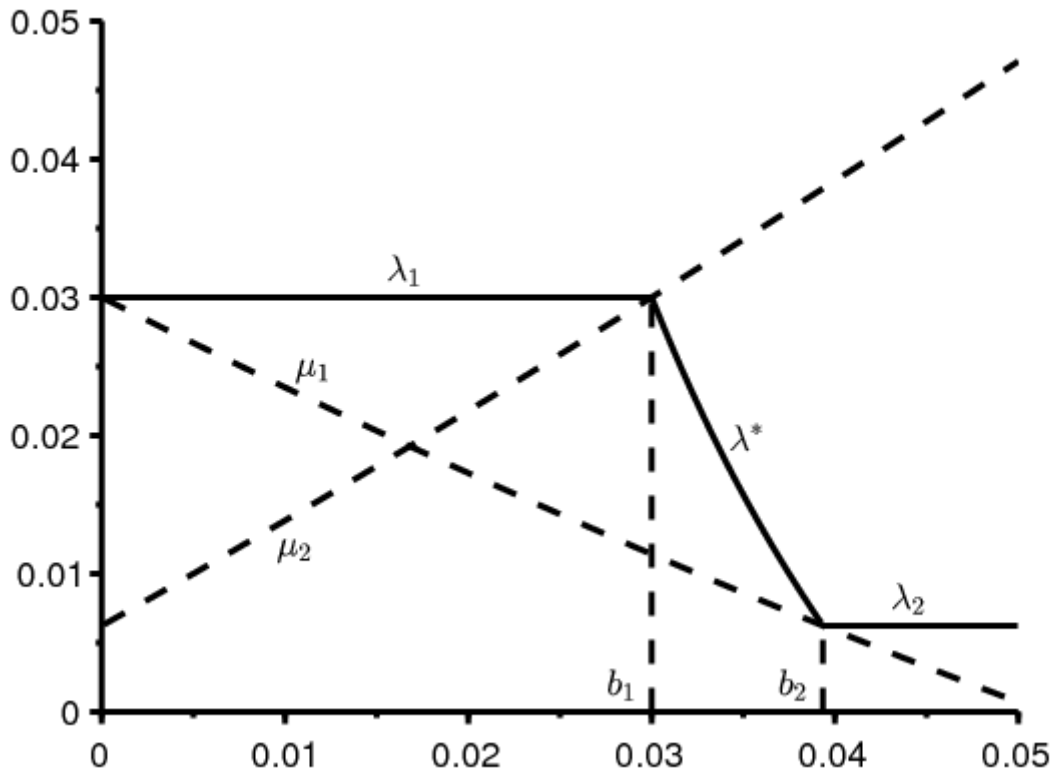
$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ \left. + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \right. \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

العبارات بين الأقواس المربعة كلها إيجابية تمامًا لأنه $b < b_2 < a_1 - a_2$. لقد فعلنا ذلك $k_1 k_2 - k_0 > 0$. الحل الثالث مستقر لذلك مقارب $b_1 < b < b_2$.

4 مثال

لنأخذ $a_1 = 10\%$ سنويًا. تذكر أن هذه المعلمة تساوي عدد المواليد في العائلات ذات الخصوبة العالية مقسومًا على السكان البالغين ذوي الخصوبة العالية، وليس معدل المواليد المستخدم عادة في الديموغرافيا، والذي يقسم على إجمالي السكان. لنأخذ أيضًا: $a_2 = 4\%$ سنويًا، $c = 5\%$ في السنة، لذلك $1/c = 20$ سنوات و $m = 2\%$ سنويًا. لذلك متوسط العمر المتوقع عند الولادة $1/m = 50$ أعوام. دعونا نتذكر أنه في عام 2017، كان متوسط العمر المتوقع للرجال والنساء، على سبيل المثال، يساوي 52 و 55 سنة في كوت ديفوار، و 51 و 54 سنة في تشاد، و 50 و 53 سنة في وسط أفريقيا [15].

نحصل على قيم المعلمة هذه $\lambda_1 = 3\%$ في السنة و $\lambda_2 \simeq 0,62\%$ سنويًا، $b_1 = 3\%$ في السنة و $b_2 \simeq 3,9\%$ سنويًا. يوضح الشكل 1 معدلات النمو المختلفة λ_1 ، λ^* و λ_2 كدالة ب. لدينا تحول ديموغرافي جزئي إذا $b_1 < b < b_2$ ، بمعدل نمو λ^* . وبالمقارنة، يبلغ معدل النمو الطبيعي 2.4% في كوت ديفوار و 3.3% في تشاد و 2.2% في وسط إفريقيا. ولذلك، تفضل تشاد أن تكون في حالة حدوث ذلك $b < b_1$ بينما البلدان الأخران في وضع وسيط مع $b_1 < b < b_2$.



الشكل 1. معدلات مقارنة للنمو السكاني λ_1 ، λ^* و λ_2 (الخط الصلب) كدالة لمعامل التقليد ب (على الخراجي). القيم الذاتية μ_2 و μ_1 منقط.

بالنسبة لهذا النموذج، يمكننا حساب نسبة "الشباب" في السكان. هذه النسبة

$$x_1 / (x_1 + y_1) = 1 / (1 + c / (\lambda_1 + m)) = 50\%$$

إذا $b < b_1$. هذه النسبة

$$x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$$

إذا $b > b_2$ ، ومع ذلك ، بالنظر إلى هيكل النموذج ، فإن متوسط عمر هؤلاء "الشباب" $1/(c + m) \simeq 14,3$ أعوام. لذلك يصعب المقارنة مع الإحصاءات الديمغرافية. وفقاً لـ [15] ، تبلغ نسبة الأطفال دون سن 15 عامًا 43٪ في كوت ديفوار و 48٪ في تشاد و 44٪ في وسط إفريقيا.

معدل المواليد

- $b < b_1$ إذا نسمة 1000 لكل $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$
- $b > b_2$ إذا نسمة 1000 لكل $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$

بالنسبة للبلدان الثلاثة التي تم النظر فيها بالفعل ، فإن الأرقام بالترتيب 37 و 46 و 36 لكل 1000 نسمة.

وبالتالي ، فإن القيم المختارة للمعاملات ليست غير واقعية للغاية.

5 السلوك المقارب

كانت دراسة الاستقرار حتى الآن محلية فقط. النظام هو البعد 4 وأفضل اختزاله إلى نظام البعد 3. لا يبدو من الممكن استخدام نظرية بوانكاريه-بنديكسون لتحديد السلوك المقارب العالمي. في النموذج الديموغرافي مع زيجات [16 ، الفصل 4] ، كان النظام البعد الثاني.

من الصعب أيضًا العثور على وظيفة Liapunov مناسبة. يمكن لنظامنا المتجانس بالتأكيد أن يتحول إلى نظام بعبارات خطية أو تربيعية فقط إذا أخذنا كمجهول جديد $X_1/(Y_1 + Y_2)$ ، $Y_1/(Y_1 + Y_2)$ ، $X_2/(Y_1 + Y_2)$ و $Y_2/(Y_1 + Y_2)$. لكن وظيفة Liapunov ذات المصطلحات اللوغاريتمية المستخدمة على سبيل المثال بواسطة [2] لفئة معينة من هذه الأنظمة لا تبدو مناسبة.

مستوحاة من النموذج الخطي للسكان [4 ، ص. 80] ومع ذلك ، نحصل على الاقتراح التالي.

الاقتراح 3. الوظيفة

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$$

دائمًا ما يكون إيجابيًا ومتناقصًا .

إثبات . نحدد بشكل عام $V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$ مع $k > 0$. لدينا بعد ذلك

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1 [-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c + m) X_1] \\ &+ k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[-\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

$Y_1(t) > 0$ و $Y_2(t) > 0$. وبالتالي فإن المصطلح الذي يحمل العامل b هو سلبي

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m) X_1^2 + (a_1 + kc) X_1 Y_1 - (\lambda + m) k Y_1^2].$$

بشرط $\lambda + c + m \neq 0$ ، نحصل

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m) k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

معامل Y_1^2 يساوي 0 إذا اخترنا

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

نحن نحتفظ فقط بالجذر مع $\pm +$ ، بحيث $\lambda + c + m > 0$. هذا الجذر ، الذي يعتمد على k ، هو الحد الأدنى إذا $a_1^2/k + kc^2$ هو الحد الأدنى ، أي إذا $k = a_1/c$. مع هذا الاختيار ، لدينا $\lambda = \lambda_1$ و

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

$V(t)$ تتقارب إلى حد $0 \leq$. على وجه الخصوص ، هناك ثابت $K > 0$ مع $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ و $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$.

الاقتراح 4. الوظيفة

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

مع

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad (12)$$

دائمًا ما يكون إيجابيًا ومتناقصًا .

إثبات . نحدد بشكل عام $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$ مع $k > 0$. لدينا بعد ذلك

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[-\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

مع $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

بشرط $\lambda + c + m \neq 0$ ، نملك

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

معامل Y_2^2 يساوي 0 إذا اخترنا

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

نحن نحتفظ فقط بالجذر مع $\pm +$ ، بحيث $\lambda + c + m > 0$. هذا الجذر ، الذي يعتمد على k ، هو الحد الأدنى إذا $a_2^2/k + kc^2$ هو الحد الأدنى ، أي إذا $k = a_2/c$. ثم λ تعطى بالصيغة (12) ولدينا $dW/dt \leq 0$.

ومع ذلك ، فإن هذه النتائج لا تسمح بتمييز الأنظمة المختلفة وفقًا لقيمة b . نفترض أن:

• إذا $b < b_1$ ، نملك

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, 0, 0)$$

مع $x_1 > 0$ ، $y_1 > 0$ و $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$. إنهم سكان يتمتعون بخصوبة عالية وينتهي بهم الأمر في النهاية إلى الهيمنة .

• إذا $b_1 < b < b_2$ ، نملك

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

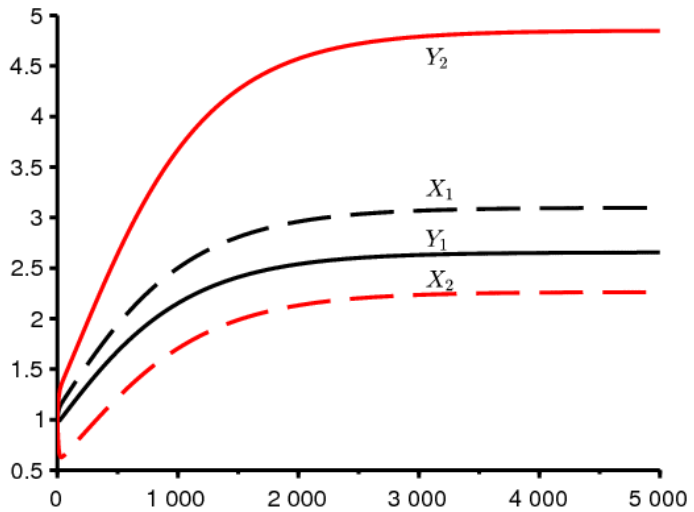
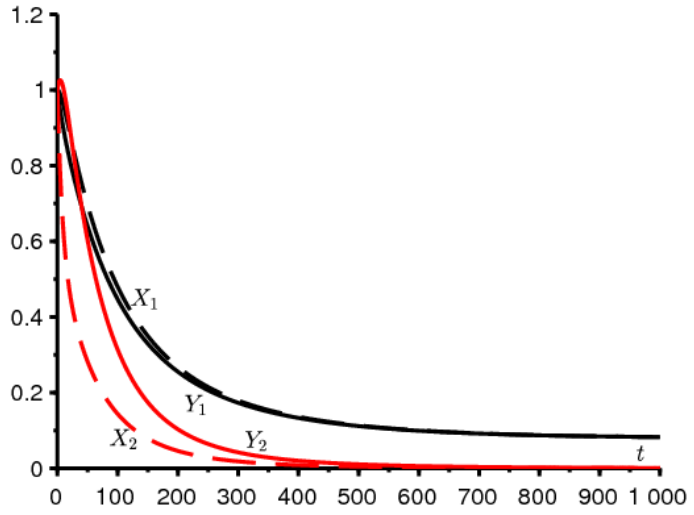
وهناك ثابت $\alpha > 0$ مع $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ ، هذا المتجه الأخير هو الافتراض 1. هناك تعايش في نسب المجموعات الفرعية ذات الخصوبة المختلفة؛
 • إذا $b > b_2$ ، نملك

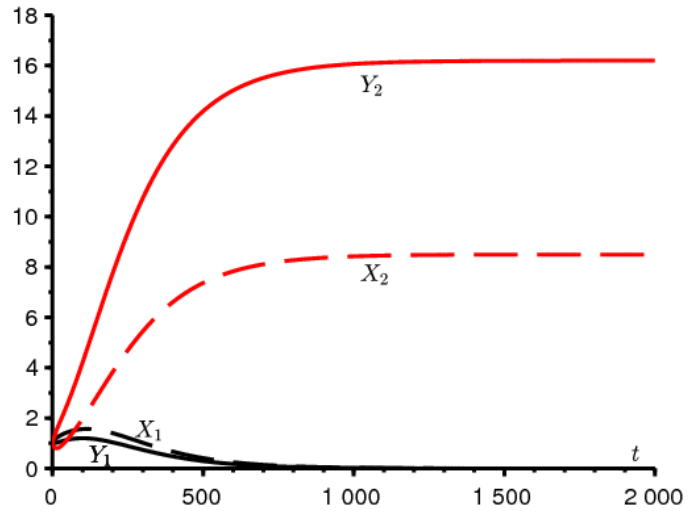
$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (0, 0, x_2, y_2)$$

مع $x_2 > 0, y_2 > 0$ و $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$. إن السكان ذوي الخصوبة المنخفضة هم في نهاية المطاف يهيمنون.

وهكذا، فإن التحول الديموغرافي الجزئي الذي لوحظ في بعض بلدان أفريقيا جنوب الصحراء الكبرى يمكن أن يتوافق مع الحالة المتوسطة حيث $b_1 < b < b_2$.

لدعم هذا التخمين، خذ بعين الاعتبار المثال العددي في القسم السابق. خذ أي شرط أولي، على سبيل المثال $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$ وفقاً لموضع b بالنسبة إلى العتبتين. إذا بدا أن التخمين قد تم تأكيده، فسوف نلاحظه في حالة حدوث ذلك $b_1 < b < b_2$ أن وقت التقارب المميز طويل جداً. القيمة الذاتية الثانية للمصفوفة العنقودية $J_F(z)$ قريب من λ^* .





إذا $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ الوظائف (ب) $b = 0,025 < b_1$ إذا $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ الوظائف (أ)
 إذا $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ الوظائف (ج) $b = 0,035 \in]b_1, b_2[$ للتبسيط ، كتبنا
 في الأشكال المختلفة ، ولكن هذه هي الوظائف التي يعاد تنظيمها بواسطة أسي.

المراجع البيولوجرافية

1. Artzrouni M. (1986), Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population*, 41 (3), p. 497–509.
2. Capasso V. (1993), *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Berlin, Springer
3. Chesnais J. – C. (1986), *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
4. Goudon T. (2017), *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Londres, ISTE.
5. Haderer K. P. (2017), *Topics in Mathematical Biology*, Cham, Springer
6. Haderer K. P., Waldstätter R., Wörz–Busekros A. (1988), Models for pair formation in bisexual populations, *Journal of Mathematical Biology*, 26, p. 635–649
7. Inaba H. (2017), *Age–Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Singapour, Springer
8. Inaba H., Saito R., Bacaër N., An age–structured epidemic model for the demographic transition, *Journal of Mathematical Biology*, 77, p. 1299–1339
9. Le Bras H. (2013), Les trois démographies, *Socio*, 2, p. 273–290.
10. Leridon H. (2015), Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles*, 407, p. 5–21.
11. Lobry C. (2018), *La Relation ressource–consommateur*, Modélisation mathématique, Londres, ISTE.
12. Lotka A. J. (1939), *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie, Paris, Hermann.
13. Manfredi P., Fanti L. (2003), The demographic transition and neo–classical models of balanced growth, N. Salvadori (ed.) *The Theory of Economic Growth*, Cheltenham, Edward Elgar.
14. Pressat R. (1995), *Éléments de démographie mathématique*, Paris, AIDELF.
15. Pison G. (2017), Tous les pays du monde, *Population & Sociétés*, 547, p. 1–8.
16. Prüss J. W., Schnaubelt R., Zacher R. (2008), *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*, Bâle, Birkhäuser

17. Reinhard H. (1989), *Équations différentielles, fondements et applications*, Paris, Dunod.
18. Rosero–Bixby L., Casterline J. B. (1993), Modelling diffusion effects in fertility transition, *Population Studies*, 47 (1), p. 147–167
19. Verhulst P.–F. (1838), Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement, *Correspondance mathématique et physique*, 10, p. 113–121.
20. Volterra V. (1931), *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier–Villars.