



**HAL**  
open science

# Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle

Nicolas Bacaër, Hisashi Inaba, Ali Moussaoui

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër, Hisashi Inaba, Ali Moussaoui. Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle. 2019. hal-02123099v2

**HAL Id: hal-02123099**

**<https://hal.science/hal-02123099v2>**

Preprint submitted on 8 Jun 2019 (v2), last revised 24 Feb 2021 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle

Nicolas Bacaër<sup>\*</sup>    Hisashi Inaba<sup>†</sup>    Ali Moussaoui<sup>‡</sup>

## Résumé

On propose un système d'équations différentielles ordinaires avec des termes non linéaires homogènes de degré un pour modéliser la transition démographique. Il y a deux classes d'âge et deux niveaux de fécondité. La fécondité faible s'étend par mimétisme aux adultes avec une fécondité élevée. Lorsque le coefficient de mimétisme augmente, la population traverse deux seuils. Entre ces deux seuils, la population croît ou décroît exponentiellement avec un mélange stable des deux fécondités. Cette transition démographique partielle s'observe dans certains pays d'Afrique subsaharienne.

## Abstract

We study a system of ordinary differential equations with nonlinear terms that are homogeneous of degree one in order to model the demographic transition. There are two age groups and two levels of fertility. The adults with a high fertility mimic the adults with a low fertility. When the mimicry coefficient increases, the population crosses two thresholds. Between the two thresholds, the population increases or decreases exponentially with a stable mix of the two fertilities. This partial demographic transition can be observed in some subsaharan countries.

Keywords : homogeneous differential equations, stability, demography

MSC : 91D20, 34D20

## 1 Introduction

La transition démographique est un phénomène observé dans tous les pays du monde au cours de l'histoire. Elle s'étend sur des décennies, parfois sur plus d'un siècle. La population voit d'abord sa mortalité baisser. Puis, avec un certain

---

<sup>\*</sup>Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Institut de Recherche pour le Développement, Campus des Cordeliers, Paris, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr (auteur correspondant)

<sup>†</sup>Département de mathématiques, Université de Tokyo, Japon

<sup>‡</sup>Département de mathématiques, Université de Tlemcen, Algérie

retard, c'est au tour de la fécondité de baisser. À cause de ce décalage, la population croît souvent de manière considérable, avec d'importantes conséquences économiques et sociales [3].

Du point de vue de la modélisation, la transition démographique peut être présentée soit comme exogène, soit comme endogène. Dans le premier cas, la population est supposée homogène mais la « modernisation » des conditions de vie fait que les paramètres démographiques varient dans le temps. Cela conduit à des modèles mathématiques non autonomes comme par exemple dans [1]. L'approche endogène consiste au contraire à utiliser des modèles autonomes mais avec une population hétérogène. La transition démographique est alors un peu analogue à une épidémie, comme dans le travail récent [8] qui se concentre sur la deuxième phase de la transition, celle qui voit la baisse de la fécondité. Le premier modèle de [8] divisait la population entre individus  $P_1(t)$  avec une fécondité élevée et individus  $P_2(t)$  avec une fécondité faible. Leurs nombres évoluaient selon un système de deux équations différentielles homogènes de degré un

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2},$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les taux de croissance des populations isolées ( $r_1 > r_2$ ), tandis que  $b$  est un coefficient de mimétisme indiquant le taux maximum auquel les individus avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Ce taux est supposé dépendre linéairement de la fraction  $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$  de la population avec une fécondité faible. En termes écologiques, c'est un système du genre proies-prédateurs avec un taux de prédation non linéaire qui ne dépend que du rapport des deux populations [10]. L'analyse mathématique est très simple : il suffit d'observer que  $f(t)$  est solution d'une équation logistique. Selon que  $b < r_1 - r_2$  ou  $b > r_1 - r_2$ , la population totale tend à croître exponentiellement avec un taux  $r_1$  ou  $r_2$  et c'est la fraction de la population avec une fécondité faible ou celle avec une fécondité élevée qui tend vers 0. En partant d'une population avec une fécondité élevée et quelques individus avec une fécondité faible, la transition démographique n'a donc lieu que si  $b$  est strictement supérieur au seuil unique  $r_1 - r_2$ .

Dans un deuxième temps, [8] considérait une version structurée par âge du même modèle. Comme l'âge  $x$  était une variable continue, cela conduisait à un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles du type de McKendrick et von Foerster :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx, \end{aligned}$$

avec

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

Dans ce modèle,  $m(x)$  est la mortalité,  $a_1(x)$  et  $a_2(x)$  sont les fertilités. L'analyse mathématique du modèle est alors beaucoup plus compliquée et seuls des résultats très partiels ont été obtenus. Il n'existe en général plus un seul seuil mais deux. Sous le premier seuil et au-dessus du second seuil, il existe une unique solution exponentielle triviale localement stable composée d'individus avec une fécondité élevée dans le premier cas, faible dans le second cas. Entre les deux seuils, au moins pour certaines valeurs des paramètres (c'est-à-dire avec certaines conditions mathématiques supplémentaires probablement non optimales), il a été possible de montrer qu'il existe une solution exponentielle qui mêle des individus avec des fécondités différentes ; la question de l'unicité n'a pas été abordée. Dans ce cas, le taux de croissance de la population était intermédiaire. La transition démographique n'était alors que partielle. Cette différence qualitative avec le premier modèle n'était pas évidente a priori.

Le régime entre les deux seuils semblait anecdotique dans [8], puisque la motivation provenait de la démographie du Japon. La transition démographique y est si avancée que le taux de croissance de la population est devenu négatif ; on se trouve au-delà du second seuil. En revanche, il se pourrait que le régime intermédiaire présente un intérêt dans le cas de certains pays d'Afrique subsaharienne. La fécondité moyenne y a effectivement baissé un peu mais bien moins que ce que prévoyaient les démographes [9]. Par ailleurs, les difficultés d'analyse du système d'équations aux dérivées partielles poussent à chercher un modèle plus simple pour une transition démographique partielle.

On propose donc ci-dessous un modèle quelque peu différent de celui de [8], avec seulement deux classes d'âge (jeunes et adultes) au lieu d'un âge qui varie continûment. L'intérêt est qu'il conserve le même phénomène de transition à deux seuils. Ceci permet de faire une étude plus complète : on montre notamment que la solution non triviale est unique et que son domaine d'existence coïncide exactement avec le domaine d'instabilité des solutions triviales ; on parvient aussi à démontrer la stabilité locale de la solution non triviale. Ceci n'avait pas été possible avec le modèle structuré par âge de [8].

On présente le modèle dans la section 2 avec ses solutions exponentielles triviales et non triviales. Tous les calculs peuvent se faire explicitement. On étudie la stabilité des solutions exponentielles dans la section 3 en utilisant notamment le critère de Routh-Hurwitz et la théorie des systèmes différentiels homogènes de degré un de [6, p. 638], également exposée dans les livres [5, chap. 5], [7, chap. 4] et [12, chap. 4]. Comme le système est de dimension 4, la stabilité de la solution exponentielle non triviale présente une difficulté qui était absente des exemples des références ci-dessus, et qui a nécessité l'usage d'un logiciel de calcul formel. La section 4 propose une conjecture pour le comportement asymptotique global faute d'avoir trouvé une fonction de Liapounov convenable. Ainsi, quoique nettement plus simple que celle du système d'équations aux dérivées partielles, l'analyse de notre modèle n'est pas encore complète.

## 2 Le modèle et ses solutions exponentielles

Notons  $X_1(t)$  et  $Y_1(t)$  le nombre de jeunes et d'adultes de familles fécondes. Notons de même  $X_2(t)$  et  $Y_2(t)$  le nombre de jeunes et d'adultes de familles peu fécondes. On suppose que

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (2)$$

où  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$  sont les fécondités ( $a_1 > a_2$ ),  $m > 0$  est la mortalité,  $c > 0$  est le taux de passage des jeunes à l'âge adulte, et  $b > 0$  est le taux maximum auquel les adultes avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Contrairement au deuxième modèle de [8], c'est la fraction  $Y_2/(Y_1 + Y_2)$  d'adultes peu féconds dans la population adulte qui intervient dans le modèle et non la fraction d'individus de familles peu fécondes dans la population totale. On suppose  $X_1(0) > 0$ ,  $Y_1(0) > 0$ ,  $X_2(0) > 0$  et  $Y_2(0) > 0$ .

Si l'on pose  $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ , on remarque que le système différentiel ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad (3)$$

avec un second membre qui est une fonction vectorielle homogène de degré un.

L'existence globale et la positivité des solutions du système se montrent comme dans les modèles démographiques avec mariage (voir par exemple [12, chap. 4]). La positivité résulte de ce que  $dX_1/dt \geq 0$  lorsque  $X_1 = 0$ ,  $dY_1/dt \geq 0$  lorsque  $Y_1 = 0$ , etc. Avec une condition initiale dont les composantes sont toutes strictement positives, chaque composante reste même strictement positive pour tout  $t > 0$ . L'existence globale résulte de l'inégalité pour la population totale  $P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2$  :  $dP/dt \leq (a_1 + a_2)P$ .

Cherchons des solutions exponentielles triviales de la forme

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = e^{\lambda t}(x_1, y_1, 0, 0)$$

avec  $x_1 > 0$  et  $y_1 > 0$ . On voit que  $(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1$  et  $(\lambda + m)y_1 = c x_1$ . D'où l'équation quadratique pour  $\lambda$  :  $\lambda + m = a_1 c / (\lambda + m) - c$ . Pour avoir  $x_1 > 0$  et  $y_1 > 0$ , il faut avoir  $\lambda + m > 0$ . Donc la seule solution pour le taux de croissance est

$$\lambda = \lambda_1 := \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} - m.$$

Notons que le vecteur solution  $(x_1, y_1, 0, 0)$  n'est défini qu'à une constante multiplicative près.

De même, pour les solutions triviales de la forme

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = e^{\lambda t}(0, 0, x_2, y_2)$$

avec  $x_2 > 0$  et  $y_2 > 0$ , on trouve que

$$\lambda = \lambda_2 := \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m.$$

Cherchons maintenant une solution non triviale de la forme

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = e^{\lambda t}(x_1, y_2, x_2, y_2)$$

avec  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  et  $y_2 > 0$ . On doit avoir

$$\begin{aligned} (\lambda + m)x_1 &= a_1 y_1 - c x_1, & (\lambda + m)y_1 &= c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \\ (\lambda + m)x_2 &= a_2 y_2 - c x_2, & (\lambda + m)y_2 &= c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \end{aligned}$$

On a :  $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$  et  $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$ . D'où, en remplaçant dans la 2<sup>e</sup> et dans la 4<sup>e</sup> équation,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

En soustrayant, on obtient

$$\lambda = \Lambda := c \left( \frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1. \quad (4)$$

Le membre de droite dans la formule pour  $y_1/y_2$  doit être strictement positif (Fig. 1). Notons qu'il tend vers  $-1$  quand  $b$  tend vers  $0$  et qu'il tend vers  $-a_2/a_1 < 0$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$ . La dérivée du dénominateur par rapport à  $b$  est  $-c/b^2 + 2c(a_1 - a_2)/b^3$ . Elle est strictement positive pour  $0 < b < 2(a_1 - a_2) := b_3$ , nulle quand  $b = b_3$  et strictement négative quand  $b > b_3$ . Par ailleurs, un petit calcul montre que le dénominateur dans (4) s'annule pour

$$b = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}} := b_1$$

et vaut  $1$  quand

$$b = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}} := b_2.$$

On remarque enfin que  $b_1 < b_2 < b_3$ . On en conclut que le membre de droite dans la formule (4) pour  $y_1/y_2$  décroît de  $-1$  à  $-\infty$  sur l'intervalle  $]0, b_1[$ , décroît de  $+\infty$  à  $0$  sur l'intervalle  $]b_1, b_2[$ , continue à décroître sur l'intervalle  $]b_2, b_3[$  en prenant des valeurs négatives, puis croît sur l'intervalle  $]b_3, +\infty[$  en restant négatif. Donc  $y_1/y_2$  n'est positif que sur l'intervalle  $]b_1, b_2[$ . Lorsque  $b_1 < b < b_2$ , il y a donc une unique solution (à une constante multiplicative près) pour la coexistence de sous-populations avec des fécondités différentes. On remarque enfin que lorsque  $b$  croît de  $b_1$  à  $b_2$ , le taux de croissance  $\Lambda$  donné par (4) décroît de  $\lambda_1$  à  $\lambda_2$ .

Lorsque  $c$  tend vers  $+\infty$ , le modèle avec deux groupes d'âges se réduit au modèle de l'introduction avec un seul groupe d'âges ; on vérifie bien que les deux seuils  $b_1$  et  $b_2$  convergent alors vers un seuil unique égal à  $a_1 - a_2$ .

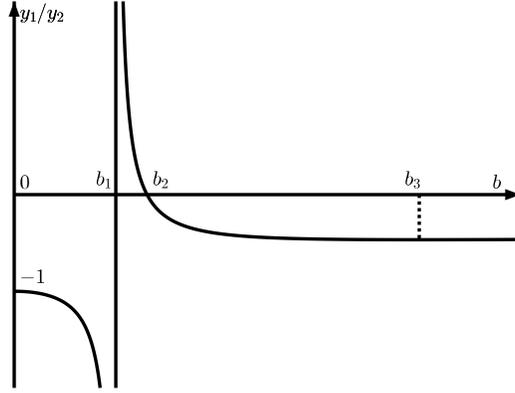


FIGURE 1 – Le rapport  $y_1/y_2$  en fonction de  $b$  selon la formule (4). Ce rapport n'est positif que dans l'intervalle  $]b_1, b_2[$ .

### 3 Stabilité des solutions exponentielles

#### 3.1 Rappels

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , posons

$$\mathcal{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Un calcul assez simple montre alors que

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} = a_1\mathcal{Y}_1 - c\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_1 [a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (5)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = c\mathcal{X}_1 - b \frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_1 [a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (6)$$

$$\frac{d\mathcal{X}_2}{dt} = a_2\mathcal{Y}_2 - c\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2 [a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2], \quad (7)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = c\mathcal{X}_2 + b \frac{\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - \mathcal{Y}_2 [a_1\mathcal{Y}_1 + a_2\mathcal{Y}_2]. \quad (8)$$

Aux solutions exponentielles du système (1)-(2) de la forme  $e^{\lambda t}z$ , où  $z$  est un vecteur fixe, correspondent des solutions stationnaires du système (5)-(8). Pour la notion de stabilité dans les systèmes différentiels homogènes de degré un, on renvoie à [6, p. 638] ou aux livres [5, chap. 5], [7, chap. 4] et [12, chap. 4]. La « stabilité » dans le système (1)-(2) correspond par définition à la stabilité asymptotique locale dans le système (5)-(8). Il résulte du théorème d'Euler pour

les fonctions homogènes vectorielles (ici de degré un) que  $\lambda$  est toujours une valeur propre de la matrice jacobienne  $J_F(z)$  de la fonction  $F$ , définie par (3), en  $z$  (car  $J_F(z)z = F(z) = \lambda z$ ). D'après [6, p. 638], il y a stabilité asymptotique locale si et seulement si toutes les valeurs propres de  $J_F(z)$  autres que  $\lambda$  ont une partie réelle strictement inférieure à  $\lambda$ . C'est cette caractérisation que l'on va utiliser dans les trois sous-sections suivantes. Si  $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  et  $p = y_2/(y_1 + y_2)$ , alors

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad (9)$$

### 3.2 Stabilité de la population avec une fécondité élevée

Considérons une solution triviale de la forme  $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$  avec  $x_1 > 0$  et  $(\lambda_1 + m)y_1 = cx_1$ . Alors  $p = 0$  et

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est  $\lambda_1$ . La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est

$$\mu_2 := \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m,$$

qui est une fonction croissante de  $b$ . Après quelques calculs, on obtient que  $\mu_2 > \lambda_1$  lorsque  $b > b_1$ . La solution triviale où la population a une fécondité élevée est donc localement stable lorsque  $b < b_1$  et instable lorsque  $b > b_1$ .

### 3.3 Stabilité de la population avec une fécondité basse

Considérons une solution triviale de la forme  $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$  avec  $x_2 > 0$  et  $(\lambda_2 + m)y_2 = cx_2$ . Alors  $p = 1$  et

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est  $\lambda_2$ . La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est

$$\mu_1 := \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m,$$

qui est une fonction décroissante de  $b$  puisque

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Après quelques calculs, on obtient que  $\mu_1 > \lambda_2$  lorsque  $b < b_2$ . La solution triviale où la population a une fécondité basse est donc localement stable lorsque  $b > b_2$  et instable lorsque  $b < b_2$ .

Comme  $b_1 < b_2$ , on voit que dans l'intervalle  $]b_1, b_2[$ , les deux types de solutions exponentielles triviales sont tous les deux instables.

### 3.4 Stabilité de la solution non triviale avec des fécondités différentes

Considérons une solution non triviale de la forme  $e^{\Lambda t}(x_1, y_1, x_2, y_2)$  dont toutes les composantes sont  $> 0$ . Il résulte alors de l'équation (4) que

$$p = \frac{y_2}{y_1 + y_2} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

On sait déjà, d'après les résultats généraux rappelés dans la sous-section 3.1, que  $\Lambda$  est une valeur propre de la matrice  $J_F(z)$  définie par (9). La question est de savoir si les trois autres valeurs propres ont une partie réelle strictement inférieure à  $\Lambda$ . Avec l'aide du logiciel libre de calcul formel Xcas ([www.xcasenligne.fr](http://www.xcasenligne.fr)), on trouve que le polynôme caractéristique (en la variable  $\xi$ ) de la matrice  $J_F(z) - \Lambda I$ , est de la forme

$$\xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0),$$

où

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2c(a_1 - a_2)^2}{(a_1 - a_2)b}, \\ k_1 &= c \left( \frac{2}{b} - \frac{1}{a_1 - a_2} \right) [(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c], \\ k_0 &= -c \frac{[a_1b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c][a_2b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2c]}{b^3(a_1 - a_2)}. \end{aligned}$$

Notons que  $k_0$  peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} k_0 &= -k(b - b_1)(b - b_2), \\ k &= \frac{a_1a_2c}{b^3(a_1 - a_2)} \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right). \end{aligned}$$

Pour que les trois racines du polynôme  $\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0$  aient une partie réelle strictement négative, il faut et il suffit d'après le critère de Routh-Hurwitz que  $k_2 > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_0 > 0$  et  $k_1k_2 - k_0 > 0$  [13, p. 134]. On a bien  $k_2 > 0$ .

D'autre part,  $k_1 > 0$  lorsque  $0 < b < 2(a_1 - a_2)$  et donc en particulier pour  $b_1 < b < b_2$  puisque  $b_2 < a_1 - a_2$ . On a aussi  $k_0 > 0$  pour  $b_1 < b < b_2$ . Il ne reste donc qu'à voir si  $k_1 k_2 - k_0 > 0$  lorsque  $b_1 < b < b_2$ . Un calcul assez long et fastidieux montre que

$$k_1 k_2 - k_0 = c \frac{W_1 + W_2 + W_3}{b^3 (a_1 - a_2)^2},$$

où

$$\begin{aligned} W_1 &= (a_1 - a_2)^3 c^2 [(a_1 - a_2)^2 + 2(a_1 - a_2)b - b^2], \\ W_2 &= (a_1 + a_2)(a_1 - a_2)b^2 c [3(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)b - b^2], \\ W_3 &= b^4 [a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2) - (a_1 + a_2)^2 b], \end{aligned}$$

et où les différents termes ont été ordonnés suivant les puissances croissantes du paramètre  $b$ . Comme  $b < b_2 < a_1 - a_2$ , on voit que  $W_1 > 0$ ,  $W_2 > 0$  et  $W_3 > 0$ . Ainsi  $k_1 k_2 - k_0 > 0$ . La solution non triviale est donc bien stable sur tout son domaine d'existence  $b_1 < b < b_2$ .

## 4 Comportement asymptotique global

Jusqu'ici, l'étude de stabilité n'était que locale. Comme le système est de dimension 4 et comme il se ramène au mieux à un système de dimension 3, il ne semble pas possible d'utiliser le théorème de Poincaré-Bendixson pour déterminer le comportement asymptotique global, contrairement au modèle démographique avec mariage de plus petite dimension dans [12, chap. 4].

Il est également difficile de trouver une fonction de Liapounov convenable. Quoique notre système homogène puisse se transformer en un système avec uniquement des termes linéaires ou quadratiques si l'on prend comme nouvelles inconnues  $X_1/(Y_1 + Y_2)$ ,  $Y_1/(Y_1 + Y_2)$ ,  $X_2/(Y_1 + Y_2)$  et  $Y_2/(Y_1 + Y_2)$ , la fonction de Liapounov avec des termes logarithmiques utilisée par exemple dans [2] pour une classe particulière de pareils systèmes ne semble pas convenir.

En s'inspirant du modèle linéaire de population de [4, p. 80], on note cependant que la fonction

$$V(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

est toujours positive et décroissante. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda_1 t} X_1 [-\lambda_1 X_1 + a_1 Y_1 - (c + m) X_1] \\ &+ \frac{a_1}{c} e^{-2\lambda_1 t} Y_1 \left[ -\lambda_1 Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $Y_1(t) > 0$  et  $Y_2(t) > 0$ , le terme avec  $b$  en facteur est négatif et il reste

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda_1 t} \left[ (-\lambda_1 - c - m)X_1^2 + 2a_1 X_1 Y_1 - (\lambda_1 + m) \frac{a_1}{c} Y_1^2 \right] \\ &= -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left( X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right)^2\end{aligned}$$

puisque  $(\lambda_1 + m)(\lambda_1 + m + c) = a_1 c$ . Ainsi  $dV/dt \leq 0$  et  $V(t)$  converge vers une limite positive ou nulle. Cela ne permet pas néanmoins de distinguer les différents régimes selon la valeur de  $b$ .

On conjecture que :

— si  $b < b_1$ , alors

$$e^{-\lambda_1 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, 0, 0)$$

avec  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$  et  $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$ ; c'est la population avec une fécondité élevée qui en proportion finit par dominer;

— si  $b_1 < b < b_2$ , alors

$$e^{-\Lambda t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

avec  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  et  $y_2 > 0$ ; cette limite est unique à une constante multiplicative près; il y a coexistence en proportion des sous-populations avec des fécondités différentes;

— si  $b > b_2$ , alors

$$e^{-\lambda_2 t} (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0, x_2, y_2)$$

avec  $x_2 > 0$ ,  $y_2 > 0$  et  $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$ ; c'est la population avec une fécondité basse qui en proportion finit par dominer.

Ainsi donc, la transition démographique partielle observée dans certains pays d'Afrique subsaharienne pourrait correspondre au cas intermédiaire où  $b_1 < b < b_2$ .

## 5 Exemple et discussion

Considérons un exemple. Prenons  $a_1 = 10\%$  par an. Rappelons que ce paramètre est égal au nombre de naissances dans les familles avec une fécondité élevée divisé par la population adulte avec une fécondité élevée, et non le taux de natalité employé habituellement en démographie, qui divise par la population totale. Prenons aussi :  $a_2 = 4\%$  par an,  $c = 5\%$  par an (de sorte que  $1/c = 20$  ans) et  $m = 2\%$  par an. L'espérance de vie à la naissance est donc  $1/m = 50$  ans. Rappelons qu'en 2017, les espérances de vie pour les hommes et pour les femmes étaient par exemple égales à 52 et 55 ans en Côte d'Ivoire, à 51 et 54 ans au Tchad, à 50 et 53 ans en Centrafique [11].

Avec ces valeurs des paramètres, on obtient d'une part  $\lambda_1 = 3\%$  par an et  $\lambda_2 \simeq 0,62\%$  par an, d'autre part  $b_1 = 3\%$  par an et  $b_2 \simeq 3,9\%$  par an. La figure 2 montre les différents taux de croissance  $\lambda_1$ ,  $\Lambda$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $b$ . C'est dans l'intervalle  $]b_1, b_2[$  qu'il y a une transition démographique partielle avec un taux de croissance  $\Lambda$ . Par comparaison, le taux d'accroissement naturel est de 2,4% en Côte d'Ivoire, de 3,3% au Tchad et de 2,2% en Centrafrique. Le Tchad serait donc plutôt dans le cas où  $b < b_1$ , tandis que les deux autres pays seraient dans la situation intermédiaire avec  $b_1 < b < b_2$ .

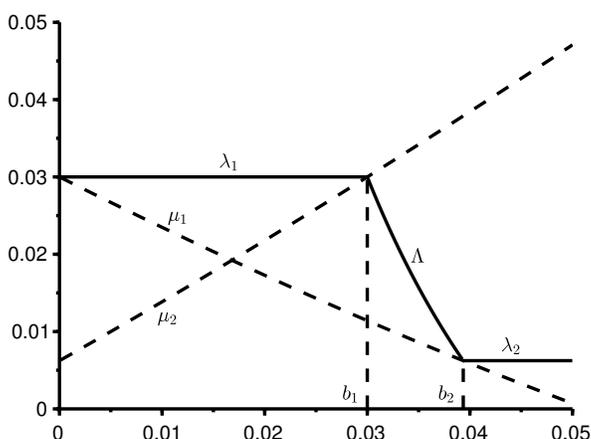


FIGURE 2 – Les taux asymptotiques de croissance de la population  $\lambda_1$ ,  $\Lambda$  et  $\lambda_2$  (ligne continue) en fonction du coefficient de mimétisme  $b$  (en abscisse). Les valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont en pointillé.

Pour ce modèle, on peut calculer la proportion de « jeunes » dans la population. Lorsque  $b < b_1$ , elle vaut  $x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$ . Lorsque  $b > b_2$ , elle vaut  $x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$ . Néanmoins, étant donnée la structure du modèle, ces « jeunes » auraient une moyenne d'âge  $1/(c + m)$  de 14,3 ans. Il est donc difficile de comparer avec les statistiques démographiques. D'après [11], la proportion des moins de 15 ans est de 43% en Côte d'Ivoire, de 48% au Tchad et de 44% en Centrafrique.

On en déduit aussi que le taux de natalité est  $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$  pour 1000 habitants si  $b < b_1$ ,  $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$  pour 1000 habitants si  $b > b_2$ . Pour les trois pays déjà considérés, les chiffres sont dans l'ordre 37, 46 et 36 pour 1000 habitants.

Ainsi donc, les valeurs choisies pour les paramètres ne sont pas trop irréalistes. Nous espérons que ce modèle rudimentaire aura intéressé les spécialistes de démographie mathématique et ceux qui travaillent sur la démographie de l'Afrique subsaharienne.

## Références

- [1] M. Artzrouni, Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique, *Population* 41 (1986) 497-509.
- [2] V. Capasso, *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Springer, Berlin, 1993.
- [3] J.C. Chesnais, *La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- [4] T. Goudon, *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, ISTE, Londres, 2017.
- [5] K.P. Hadeler, *Topics in Mathematical Biology*, Springer, Cham, 2017.
- [6] K.P. Hadeler, R. Waldstätter, A. Wörz-Busekros, Models for pair formation in bisexual populations, *J. Math. Biol.* 26 (1988) 635-649.
- [7] H. Inaba, *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Springer, Singapour, 2017.
- [8] H. Inaba, R. Saito, N. Bacaër, An age-structured epidemic model for the demographic transition, *J. Math. Biol.* 77 (2018) 1299-1339.
- [9] H. Leridon, Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive, *Futuribles* 407 (2015) 5-21.
- [10] C. Lobry, *La Relation ressource-consommateur, Modélisation mathématique*, ISTE, Londres, 2018.
- [11] G. Pison, Tous les pays du monde, *Population* 547 (2017) 1-8.
- [12] J.W. Prüß, R. Schnaubelt, R. Zacher, *Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme*. Birkhäuser (2008).
- [13] H. Reinhard, *Équations différentielles, fondements et applications*, Dunod, Paris, 1989.