



Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss

Jean Jacques Moreau

► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1963, 256, pp.871-874. hal-02117973

HAL Id: hal-02117973

<https://hal.science/hal-02117973>

Submitted on 2 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Soit un système matériel auquel des liaisons différentiables, bilatérales, sans frottement, laissent n degrés de liberté; soit un paramétrage régulier $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ et la fonction énergie cinétique

$$T(q, q', t) = \frac{1}{2} \sum_{i, k} a^{ik}(q, t) q'_i q'_k + \sum_i b^i(q, t) q'_i + c(q, t).$$

Ce système est, en outre, soumis à une famille de *liaisons unilatérales* décrites par les inégalités (supposées compatibles)

$$(1) \quad f_\alpha(q, t) \geq 0 \quad (\forall \alpha \in I, \text{ ensemble fini d'indices}).$$

Ces liaisons unilatérales sont sans frottement, c'est-à-dire que les forces de réaction qui assurent $f_\alpha \geq 0$ ont des composantes covariantes de la forme $\lambda_\alpha u_\alpha^i$, avec $\lambda_\alpha \geq 0$ et $u_\alpha^i = \partial f_\alpha / \partial q_i$; en outre,

$$(2) \quad \lambda_\alpha = 0 \quad \text{pour toute configuration telle que } f_\alpha > 0.$$

Enfin on donne les composantes covariantes Q^i (fonctions continues de q, q', t) des forces actives appliquées au système. A un instant t_0 on suppose données les valeurs des q_i et des q'_i , compatibles avec tous les contacts $f_\alpha = 0$, c'est-à-dire qu'à cet instant

$$(3) \quad \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_i u_\alpha^i q'_i = 0 \quad (\forall \alpha \in I).$$

Le problème posé ⁽¹⁾ est de déterminer l'état d'accélération « immédiatement postérieur à t_0 », c'est-à-dire les limites à droite $q''_i(t_0^+)$.

Soit (e_i) une base dans un espace vectoriel E , de dimension n , et (e^i) la base duale dans l'espace dual E^* ; la matrice symétrique (a^{ik}) représente dans ces bases une bijection linéaire A de E^* sur E . On munit E d'une structure d'espace euclidien en définissant, pour tout couple $x \in E, y \in E$, le produit scalaire

$$(x|y) = \langle x, A^{-1}(y) \rangle = \langle A^{-1}(x), y \rangle.$$

Si l'on pose

$$q'' = \sum_i q''_i e^i \in E^* \quad \text{et} \quad u_\alpha = \sum_i u_\alpha^i e_i \in E,$$

les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme d'une égalité dans E (où z désigne une fonction connue de q, q', t)

$$A(q'') = z + \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha u_\alpha.$$

D'autre part, en notant s_α une fonction connue de q, q', t , on a

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = -s_\alpha + \sum_i u_\alpha^i q_i''$$

de sorte que (1) et (3) assujettissent $q''(t_0^+)$ aux inégalités

$$(4) \quad \langle u_\alpha, q'' \rangle - s_\alpha \geq 0 \quad (\forall \alpha \in I)$$

et la loi (2) implique que, pour chaque α , un au moins des deux nombres λ_α et $\langle u_\alpha, q'' \rangle - s_\alpha$ est nul. On fait le changement d'inconnue $A(q'') = x \in E$ et le problème se formule comme suit :

(P) Trouver $x \in E$ et une famille de nombres $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ tels que

$$x = z + \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha u_\alpha$$

$$(u_\alpha | x) - s_\alpha \geq 0, \quad \lambda_\alpha \geq 0, \quad \lambda_\alpha [(u_\alpha | x) - s_\alpha] = 0.$$

Montrons que, quelles que soient les données $z \in E, u_\alpha \in E, s_\alpha \in \mathbb{R}$ ce problème admet une unique solution x qui est, dans l'espace euclidien E , la projection de z sur l'ensemble convexe fermé :

$$C = \{ \xi \in E / \forall \alpha \in I, (u_\alpha | \xi) - s_\alpha \geq 0 \}$$

[non vide, puisque les inégalités (1) sont supposées compatibles].

1° Soit une solution de (P) et ξ quelconque dans C ; on a

$$(z - x | \xi - x) = \left(- \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha u_\alpha | \xi - x \right) = - \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha [(u_\alpha | \xi) - s_\alpha] \leq 0.$$

On sait que cette inégalité caractérise x comme égal à $\text{proj}_C z$.

2° Réciproquement, soit

$$x = \text{proj}_C z \quad \text{et} \quad J = \{ \alpha \in I / (u_\alpha | x) - s_\alpha = 0 \}$$

(ensemble peut-être vide), c'est-à-dire que

$$\alpha \notin J \Rightarrow (u_\alpha | x) - s_\alpha > 0.$$

Les fonctions $\xi \rightarrow (u_\alpha | \xi) - s_\alpha$ étant continues, il existe alors V , voisinage de zéro dans E , tel que

$$\alpha \notin J, \quad \xi - x \in V \Rightarrow (u_\alpha | \xi) - s_\alpha > 0.$$

On a donc la suite d'implications

$$\begin{aligned} \xi - x \in V, \quad \inf_{\alpha \in I} (u_\alpha | \xi - x) \geq 0 &\Rightarrow \inf_{\alpha \in I} [(u_\alpha | \xi) - s_\alpha] \geq 0 \\ &\Rightarrow \xi \in C \Rightarrow (z - x | \xi - x) \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement, en posant $k(\xi - x) = v$, avec $k > 0$ arbitraire, de sorte que v parcourt E entier lorsque $\xi - x$ parcourt V , on a

$$\sup_{x \in J} (-u_x | v) \leq 0 \Rightarrow (z - x | v) \leq 0.$$

Donc $z - x$ appartient à l'enveloppe conique convexe des $(-u_x)_{x \in J}$, c'est-à-dire que pour chaque $x \in J$ il existe $\lambda_x \geq 0$ tel que

$$z - x = - \sum_{x \in J} \lambda_x u_x$$

(soit 0 si J est vide).

En prenant, d'autre part, $\lambda_x = 0$ si $x \notin J$, on construit bien une solution du problème (P).

Cette interprétation extrême du problème signifie que le principe de moindre contrainte de Gauss s'applique aux liaisons unilatérales.

En effet, dans le cas classique d'un système à liaisons toutes bilatérales, sans frottement, le principe de Gauss peut s'énoncer sous la forme suivante : la configuration et l'état de vitesse d'un système $\mathcal{E}$ étant donnés à un certain instant, l'état d'accélération consécutif est, parmi tous les états d'accélération cinématiquement compatibles avec ces données et avec les liaisons, celui qui confère son minimum à la « fonction d'Appell » :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \Gamma^2 dm - \int_{\mathcal{E}} \Gamma \cdot d\mathbf{F}$$

(Γ désigne l'accélération de l'élément générique du système; dm est la mesure masse, définie sur $\mathcal{E}$, tandis que la mesure vectorielle $d\mathbf{F}$ représente les forces actives appliquées au système $\mathcal{E}$).

Pour un mouvement défini par une évolution quelconque des q_i , la fonction d'Appell du système de tout à l'heure a l'expression

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} a^{ik} q_i'' q_k'' - \sum_i z^i q_i'' + K \\ &= \frac{1}{2} (x | x) - (z | x) + K = \frac{1}{2} (x - z | x - z) - \frac{1}{2} (z | z) + K, \end{aligned}$$

où K ne dépend pas de q'' et où $x = A(q'')$. Minimiser cette expression sur l'ensemble des q'' respectant les inégalités (4) revient bien à prendre pour x , dans E , le point de C le plus proche de z .

Le calcul effectif de q'' relève alors des techniques de la programmation quadratique ⁽²⁾.

Mentionnons, d'autre part, qu'un théorème de dualité, publié précédemment ⁽³⁾ permettrait, indépendamment du calcul de q'' , une caractérisation extrême de la réaction $\sum_{x \in J} \lambda_x u_x$. Enfin, les liaisons unilatérales dans un milieu continu peuvent s'étudier dans le même esprit ⁽⁴⁾.