Une spécification du potentiel-vecteur en hydrodynamique

Jean Jacques Moreau

▶ **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Une spécification du potentiel-vecteur en hydrodynamique. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1959, 248, pp.3406-3408. hal-02117802

HAL Id: hal-02117802
https://hal.science/hal-02117802

Submitted on 2 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Une spécification du potentiel-vecteur en hydrodynamique.* Note de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Joseph Peres.

On montre que le champ de vitesses d'un fluide incompressible en présence de parois bornées fixes (sur un domaine borné ou non, peut-être multiplement connexe) possède un *potentiel-vecteur à divergence nulle normal sur ces parois.* Une fonction de Green est construite pour son calcul à partir de la vorticité; il en résulte une expression de l'énergie cinétique du fluide en fonction de la vorticité.

1. *Potentiel-vecteur normal.* — Soit, sur un domaine D de l'espace, un champ vectoriel $\mathbf{v}$, à divergence nulle, tangentiel à la frontière S du domaine (champ de vitesses d'un fluide incompressible en présence de la paroi fixe S). Nous nous restreignons dans cette Note au cas où $\mathbf{v}$ est continu sur $D \cup S = \overline{D}$, continûment différentiable sur D et où la surface S a un plan tangent continûment variable. On suppose S bornée, même si D ne l'est pas; cette surface est éventuellement constituée de n parties connexes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (parois de corps immergés dans le fluide et, si D borné, paroi externe). Enfin, si D non borné, on suppose qu'à l'infini, uniformément par rapport aux variables de direction, on a

$$|\mathbf{v}| = O(r^{-\lambda}) \qquad (1 < \lambda < 3).$$

Si l'on prolonge $\mathbf{v}$ en prenant $\mathbf{v} = 0$ sur le complémentaire D′ de $\overline{D}$, on construit un champ à divergence nulle sur l'espace entier (divergence *faible*, au sens de la théorie des distributions, car $\mathbf{v}$ a sur S une discontinuité tangentielle). L'intégrale de Biot-Savart de ce champ fournit donc un *potentiel-vecteur* $\mathbf{P}$, à divergence nulle, continu sur tout l'espace et $O(r^{1-\lambda})$ à l'infini (1). Nous allons en déduire, pour $\mathbf{v}$ sur D, un autre *potentiel-vecteur*, $\mathbf{Q}$, *à divergence nulle, normal à* S *en chaque point de cette surface, et, si* D *non borné,* $O(r^{1-\lambda})$ *à l'infini.*

Une condition nécessaire évidente pour que $\mathbf{Q}$ existe est, d'après la formule de Stokes, *que le flux de* $\mathbf{v}$ *soit nul à travers toute cloison à bord dans* S. Cette condition est vérifiée d'elle-même dans le cas le plus usuel où chacune des S_s est simplement connexe; plus généralement nous la supposerons remplie alors que les S_s sont des « tores à nombre quelconque de trous ». Si cela est, la formule de Stokes montre que la circulation de $\mathbf{P}$ le long de toute courbe fermée tracée dans une S_s est nulle; c'est dire que la forme différentielle $\mathbf{P}.d\mathbf{x}$, restreinte à S, y est la différentielle exacte d'une fonction f, uniforme, dont la définition comporte autant de constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que S présente de parties connexes. Soit φ la solution du problème de Dirichlet sur D pour la donnée $\varphi = f$ sur S, avec, si D non borné, annulation de φ à l'infini. Le champ

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \operatorname{grad}\varphi$$

a les propriétés annoncées ([2]). On peut en outre disposer des n constantes C_s *pour que* $\mathbf{Q}$ *ait un flux nul à travers chacune des* S_s (cela revient à résoudre un problème d'électrostatique pour les n conducteurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$).

Cet ensemble de propriétés caractérise $\mathbf{Q}$ de manière unique ([3]) : nous appellerons ce champ *potentiel-vecteur normal de* $\mathbf{v}$ *sur* D.

2. *Relation avec l'énergie cinétique.* — Si $\boldsymbol{\omega} = 1/2\ \mathrm{rot}\mathbf{v}$ est la vorticité, on trouve, en intégrant par parties, l'expression suivante de l'énergie cinétique du fluide (pris de densité unité)

$$\mathrm{T} = \iiint_{\mathrm{D}} \frac{1}{2}\mathbf{v}.\mathbf{v}\, d\tau = \iiint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{\omega}.\mathbf{Q}\, d\tau. \tag{1}$$

Si D non borné, on suppose ici, pour la convergence, que $\lambda > 3/2$.

Plus généralement, si $\mathbf{v}'$ est un autre champ sur D, satisfaisant aux mêmes hypothèses que $\mathbf{v}$, on a

$$\iiint_{\mathrm{D}} \frac{1}{2}\mathbf{v}.\mathbf{v}'\, d\tau = \iiint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{\omega}'.\mathbf{Q}\, d\tau = \iiint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{\omega}.\mathbf{Q}'\, d\tau.$$

On peut dire, à cet égard, que $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{Q}$ sont *adjoints* vis-à-vis de la fonctionnelle quadratique T.

3. *Construction d'une fonction de Green.* — Soient $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes orthonormé. Si l'on désigne par y le point courant de $\overline{\mathrm{D}}$ et par x un point, pour l'instant fixe, de D, on peut montrer l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{\gamma}_i(x, y)$ satisfaisant, comme fonction vectorielle de y, aux conditions suivantes

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}_i = 0 \quad \text{sur D} - x,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i - \frac{1}{2\pi\,|\mathbf{xy}|}\boldsymbol{\alpha}_i \quad \text{régulier lorsque } y \text{ vient en } x,$$

$$|\boldsymbol{\gamma}_i| = \mathrm{O}(r^{-1}) \quad \text{si D non borné},$$

$$\text{flux } \boldsymbol{\gamma}_i = 0 \quad \text{à travers chaque } S_s,$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{composante tangentielle } \boldsymbol{\gamma}_i = 0 \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\gamma}_i = \chi_i^s\end{array}\right\} \text{lorsque } y \in S_s;$$

où les $\chi_i^s(x)$ sont des inconnues. Il suffit alors d'associer $\boldsymbol{\gamma}_i$ et $\mathbf{Q}$ dans une formule intégrale de réciprocité pour trouver, en désignant par Q_i les composantes de $\mathbf{Q}$, par γ_{ik} celles de $\boldsymbol{\gamma}_i$ et par ω_k celles de $\boldsymbol{\omega}$,

$$Q_i(x) = \iiint_{y \in \mathrm{D}} \gamma_{ik}(x, y)\,\omega_k(y)\, d\tau. \tag{2}$$

Un raisonnement analogue conduit à une propriété de symétrie

$$\gamma_{ik}(x, y) = \gamma_{ki}(y, x). \tag{3}$$

D'après (1) et (2), l'énergie cinétique du fluide s'écrit

$$\mathrm{T} = \int_{(x,y) \in \mathrm{D} \times \mathrm{D}}^{(6)} \gamma_{ik}(x, y)\,\omega_i(x)\,\omega_k(y)\, d\tau_x\, d\tau_y. \tag{4}$$

Notons que $\gamma_{ik}(x, y)$ n'est pas la seule fonction tensorielle possédant les propriétés (2), (3) et (4) : on peut indifféremment lui ajouter un terme $\partial^2\psi/\partial x_i\,\partial y_k$ où ψ est une quelconque fonction scalaire symétrique de x et y, nulle lorsque x ou y vient sur S.

(1) **P** n'est autre que le *potentiel-vecteur de Poincaré*, construit habituellement comme somme d'une intégrale triple en ω sur D et d'une intégrale double en **v** sur S. Rappelons que M. Joseph Pérès (*J. Math. pures et appl.*, 9, 1930, p. 113-125) a donné, pour l'expression de ce potentiel-vecteur à partir de ω, une fonction de Green analogue à celle que nous présentons dans cette Note.

(2) A vrai dire, nous supposons là que φ *est différentiable sur* $\overline{D}$, ce que les hypothèses initiales ne permettent pas d'affirmer. Si, dans un cas d'espèce, on n'est pas en mesure de vérifier cette hypothèse complémentaire on pourra cependant obtenir, au lieu de la normalité au sens ordinaire de **Q** en chaque point de S, une conclusion un peu plus faible (en invoquant, par exemple, dans D, une suite de surfaces tendant vers S) suffisante pour légitimer les intégrations par parties des paragraphes 2 et 3 (en supposant ω continu sur $\overline{D}$).

(3) R. Timman (*Mémoires offerts à D. Riabouchinsky, Publ. scient. techn. Min. Air*, 1954, p. 351-361), en vue de l'analyse harmonique d'un écoulement visqueux, a considéré, avec D simplement connexe borné, le cas particulier où **v** *est nul sur* S. Il prétend construire pour **v**, dans ce cas, un potentiel-vecteur, à divergence nulle, *nul sur* S (qui coïnciderait donc avec le présent champ **Q**). Le contre-exemple suivant montre que *ce résultat ne peut être accepté* : identifions **v** avec le rotationnel d'un champ **U**, à divergence nulle, tangentiel sur S. On sait que **U** est défini par cela de manière unique; le potentiel-vecteur de R. Timman, ayant sa composante normale nulle sur S, devrait donc lui être identique. Or il est connu que **U** n'est pas, en général, nul sur S (même dans le cas particulier, plus facile à examiner, où **v** est nul sur tout un voisinage de S).