



HAL
open science

Une méthode de "cinématique fonctionnelle" en hydrodynamique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Une méthode de "cinématique fonctionnelle" en hydrodynamique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1959, 249, pp.2156-2158. hal-02117797

HAL Id: hal-02117797

<https://hal.science/hal-02117797>

Submitted on 2 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Une méthode de « cinématique fonctionnelle » en hydrodynamique.* Note de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Joseph Pérès.

Au mouvement d'un fluide incompressible sur un domaine fixe de l'espace est associé celui d'un hypersolide à nombre infini de dimensions. Une analogie étroite se révèle ainsi entre l'hydrodynamique et la mécanique élémentaire du solide à point fixe (avec ou sans amortissement selon que le fluide est, ou non, visqueux).

1. *Transport d'un champ vectoriel en moindre contrainte.* — Un fluide incompressible se meut sur un domaine fixe D , de frontière S , peut-être multiplement connexe, de l'espace à 3 dimensions $\{x\}$.

On appelle E l'espace des champs vectoriels continus sur $D \cup S$, tangentiels sur S , dérivables, à dérivées lipschitziennes, à divergence nulle sur D et qui, enfin, si D non borné, s'annulent à l'infini suffisamment vite pour la convergence des intégrales envisagées. On pose

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \iiint_{x \in D} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{w}(x) dx.$$

Soit $\mathbf{u} \in E$ le champ des vitesses du fluide; on note

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t}.$$

On dira qu'un champ \mathbf{v} dépendant du temps, $\mathbf{v} \in E$ pour tout t , est *transporté en moindre contrainte* par le fluide (en abrégé : m.c.), s'il existe une fonction scalaire φ de x et t telle que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{grad } \varphi,$$

relation qui définit $\partial \mathbf{v} / \partial t$ à l'instant t lorsque \mathbf{v} est connu à cet instant. En effet la détermination de φ s'ensuit par un problème de Neumann pour l'équation de Poisson :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

(conséquence de la condition de divergence nulle). A chaque instant, $\partial \mathbf{v} / \partial t$ résulte ainsi de \mathbf{v} par une opération linéaire ⁽¹⁾. Par suite, si plusieurs champs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont transportés m.c., il en est de même de toute combinaison linéaire à coefficients constants; en outre on vérifie sans peine que le produit $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est invariant au cours du temps. Le transport m.c. entre deux instants quelconques définit donc une application linéaire isométrique de E sur E . Il est commode d'exprimer cette constatation en langage cinématique. L'ensemble des $\mathbf{v} \in E$ qui, en tant que champs vectoriels sur $\{x\}$, sont indépendants du temps constitue, par définition,

l'hypersolide S_1 , de dimension infinie. Les $\mathbf{v} \in E$ qui sont transportés m.c. par le fluide constituent un second hypersolide, S_0 , en mouvement sur S_1 , avec coïncidence des éléments zéro. Pour un $\mathbf{v} \in E$, variable avec le temps de manière suffisamment régulière, on envisagera donc, comme en cinématique élémentaire, deux types de dérivées : l'une à x constant, ou *dérivée selon* S_1 :

$$\frac{d_1 \mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

et la *dérivée selon* S_0 :

$$\frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \quad \left(\varphi \text{ tel que } \frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} \in E \right).$$

On a alors

$$\frac{d_0 \mathbf{v}}{dt} = \frac{d_1 \mathbf{v}}{dt} + R(\mathbf{v}),$$

R joue le rôle du vecteur rotation de la cinématique élémentaire : c'est un opérateur linéaire, antisymétrique relativement à la métrique $\langle \rangle$.

2. *Dynamique d'un fluide parfait.* — Si le fluide est parfait, soumis à des forces extérieures à potentiel, les équations de l'hydrodynamique expriment que son champ de vitesse $\mathbf{u} \in E$ est transporté m.c. ⁽²⁾, donc *fixe par rapport* à S_0 . L'analogie est évidente avec le mouvement d'un solide, sans frottement ni forces actives, autour d'un point fixe : S_0 serait le repère galiléen et S_1 le solide mobile ; \mathbf{u} joue le rôle du moment cinétique, R celui du vecteur rotation ; la relation linéaire entre \mathbf{u} et R se définit relativement à S_1 de manière indépendante du temps, tout comme se définit l'inertie d'un solide en mécanique élémentaire ⁽³⁾.

3. *Dynamique d'un fluide visqueux.* — Pour un fluide visqueux, on suppose \mathbf{u} suffisamment différentiable et les équations de Navier donnent

$$(1) \quad \frac{d_0 \mathbf{u}}{dt} = \nu \Delta' \mathbf{u},$$

où Δ' désigne l'opérateur

$$\Delta' \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{grad} \psi \quad (\psi \text{ tel que } \Delta' \mathbf{u} \in E).$$

On cerne une des difficultés de la dynamique des fluides visqueux lorsqu'on remarque que cet opérateur Δ' est indépendant du temps dans S_1 , donc variable dans S_0 selon un loi qui dépend de \mathbf{u} lui-même. Il en serait exactement de même, en dimension 3, pour l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe avec amortissement visqueux : la loi linéaire reliant le moment d'amortissement au vecteur rotation (donc au moment cinétique) est alors définie *par rapport au solide*, d'après la forme de ce dernier, indépendamment du temps.

Comme illustration de ce mode d'étude, indiquons qu'on peut trouver une constante positive k , dépendant du domaine D , telle que

$$\langle \mathbf{u}, \Delta' \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u} \rangle \leq -k \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Si $2T = \rho \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ est la force vive du fluide il vient alors, en $\langle \rangle$ -multipliant par $\rho \mathbf{u}$ les deux membres de (1)

$$\frac{dT}{dt} \leq -2k\nu T,$$

d'où une majoration de l'énergie cinétique ⁽³⁾

$$T \leq T_0 \exp(-2k\nu t).$$

4. *Conclusion.* — Les méthodes que nous venons d'esquisser paraissent susceptibles des applications suivantes :

a. Examen qualitatif des solutions des équations de l'hydrodynamique et, notamment, étude de leur comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$.

b. Résolutions numériques : le remplacement de S_0 et S_1 par des hypersolides à nombre fini de dimensions fournit la représentation approchée d'un fluide par un système à nombre fini de degrés de liberté.

c. Il s'imposera de reprendre la présente théorie sous des hypothèses plus faibles, c'est-à-dire au sein d'un prolongement convenable de l'espace E , en reformulant dans ce cadre les équations de la dynamique des fluides visqueux. Les solutions trouvées dans l'espace prolongé, même non réalisables comme champs de vitesses réguliers sur D , n'en seront pas moins significatives au point de vue physique si elles permettent la prévision des observables (pressions sur les obstacles, transport de petits corps en suspension, etc.).

⁽¹⁾ La dénomination de transport en *moindre contrainte* se justifie par le fait que, de toutes les valeurs de $\partial \mathbf{v} / \partial t$ compatibles avec le maintien de \mathbf{v} dans E , la valeur en question rend $\langle \partial \mathbf{v} / \partial t, \partial \mathbf{v} / \partial t \rangle$ minimum.

⁽²⁾ La propriété extrême du transport m. c. exprime alors, pour ce système mécanique, le *principe de moindre contrainte de Gauss*.

⁽³⁾ Cf., pour le cas bidimensionnel, J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 1096 et, pour le cas tridimensionnel, S. K. LAKSHMANA RAO, *Proc. Ind. Acad. Sc. (A)*, 44, 1956, p. 6-14.