



HAL
open science

Invariants intégraux d'un ensemble de solutions des équations de l'hydrodynamique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Invariants intégraux d'un ensemble de solutions des équations de l'hydrodynamique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1959. hal-02117407

HAL Id: hal-02117407

<https://hal.science/hal-02117407>

Submitted on 2 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Invariants intégraux d'un ensemble de solutions des équations de l'hydrodynamique.* Note de M. **JEAN-JACQUES MOREAU**, présentée par M. Joseph Pérès.

Une mesure invariante au cours du temps est définie sur une famille à $2p$ paramètres d'écoulements d'un fluide parfait incompressible, limité par une paroi de mouvement imposé.

Dans une portion de l'espace $\{x\}$ (où x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires) se meut un fluide parfait incompressible, soumis à un champ de forces massiques dérivant d'un potentiel, en présence d'une paroi S , de mouvement imposé. On suppose, pour simplifier, que le domaine fluide $D_t \subset \{x\}$ que limite cette paroi, à tout instant t , est borné. Comme dans la plupart des considérations sur les fluides parfaits, on pose que l'écoulement est différentiable, c'est-à-dire que l'évolution de chaque particule entre deux instants quelconques t' et t'' définit une application C_1 -différentiable biunivoque de $D_{t'}$ sur $D_{t''}$: ainsi est induite sur le milieu matériel fluide une structure de variété C_1 -différentiable (appelons $\{\mu\}$ cette variété) à trois dimensions : chaque particule du fluide, soit μ , est repérée dans $\{\mu\}$ par trois « coordonnées matérielles » μ_1, μ_2, μ_3 . Les coordonnées cartésiennes x_k de la position de μ à l'instant t sont des fonctions C_1 -différentiables des μ_i et de t , de même, *par hypothèse*, que les composantes cartésiennes de la vitesse

$$u_k = \frac{\mathcal{D}x_k}{\mathcal{D}t}$$

($\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ représente une *dérivée suivieuse*, c'est-à-dire prise à μ constant).

Soit une famille de tels écoulements, dépendant différentiablement de n paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (écoulements « modifiés ») ⁽¹⁾, On note δ des différentielles prises à μ et t constants : ce sont des éléments de E_n , espace des covecteurs tangents au point λ de la variété $\{\lambda\}$, variété C_1 -différentiable de dimension n . Pour plus de clarté, on pose $\delta x_k = X_k, \delta u_k = U_k$: Les grandes lettres représentent, dans les équations qui vont suivre, des éléments de E_n ou de ses puissances extérieures.

De ce que tous les écoulements sont incompressibles on tire

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} X_k \right) = 0 \quad (\text{dans tout } D_t)$$

et, de ce qu'ils s'effectuent en respectant S :

$$(2) \quad \alpha_i \left(U_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} X_k \right) = 0 \quad (\text{sur } S_t)$$

les α_i étant les cosinus directeurs de la normale sortante au point courant de S_t .

On convient enfin que « la modification conserve les circulations » : le long d'une ligne fluide fermée $\gamma \subset \{\mu\}$, la circulation $\int u_i dx_i$ ne dépend pas de λ (elle ne dépend pas non plus de t , d'après le théorème de Kelvin). Cela veut dire, si l'on préfère, que les états de mouvement « modifiés » se définissent en déformant les lignes tourbillon tout en conservant à chaque tube tourbillon son intensité. On en tire facilement l'existence d'une fonction G , uniforme sur tout D_t , à valeurs dans E_n , telle que

$$U_i - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} X_k = \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Soit

$$\zeta_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

le tourbillon tensoriel. Formons

$$I = \int_{D_t} \zeta_{ik} X_i \wedge X_k d\tau \quad (d\tau, \text{élément de volume de } \{x\}).$$

THÉORÈME — L'expression $I \in E_n^{\wedge 2}$, forme différentielle extérieure de degré 2 sur $\{\lambda\}$, est invariante par rapport à t .

On le montre en notant d'abord que, en vertu de l'incompressibilité, $d\tau$ définit aussi bien sur $\{\mu\}$ que sur $\{x\}$ une mesure indépendante de t et que I s'exprime ainsi par une intégrale étendue à $D \subset \{\mu\}$, d'où

$$\frac{dI}{dt} = \int_D \left(\frac{\partial \zeta_{ik}}{\partial t} X_i \wedge X_k + 2 \zeta_{ik} \frac{\partial X_i}{\partial t} \wedge X_k \right) d\tau.$$

Comme

$$\frac{\partial \zeta_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (\text{équations de Helmholtz})$$

et (2)

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = U_i,$$

cela donne

$$\frac{dI}{dt} = 2 \int_{D_t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} X_i \wedge X_k + \zeta_{ik} U_i \wedge X_k \right) d\tau.$$

Il n'y a qu'à multiplier extérieurement par G la relation (2), intégrer sur S_t , puis transformer l'intégrale de surface par la formule d'Ostrogradsky dans $\{x\}$ pour obtenir, compte tenu de (1), la nullité de dI/dt .

En multipliant extérieurement p formes identiques à I , à la dénomination des variables près, on obtient plus généralement une forme différentielle extérieure sur $\{\lambda\}$, de degré $2p$, invariante par rapport à t . Si l'on intègre cette forme sur un morceau de sous-variété différentiable de $\{\lambda\}$, de dimension $2p$, on obtient un *invariant intégral* : on peut dire encore que, *sur une famille différentiable de dimension paire d'écoulements du fluide est définie une mesure invariante à l'égard du temps*.

On pourrait obtenir des invariants assez analogues en adaptant au système fluide certains raisonnements classiques fournissant les invariants intégraux d'un système mécanique à un nombre fini de degrés de liberté, rattachés au principe variationnel de Hamilton. Mais les résultats présents sont substantiellement différents : soulignons notamment que les δx_k *ne sont pas astreints à respecter les liaisons mécaniques du fluide* (incompressibilité et présence de la paroi S); seuls les u_k sont affectés par ces liaisons (ce qui permet, par exemple, dans chaque « état modifié », la détermination des u_k à partir du seul *champ tourbillonnaire*, dont on a précisé plus haut la règle de modification). Au fond, nous dégageons ici une « *physionomie hamiltonienne* » pour les lois d'évolution d'une structure tourbillonnaire, lois qui peuvent s'énoncer en faisant abstraction du fluide matériel qui en est le support. Un tel caractère hamiltonien est déjà bien connu dans le *cas bidimensionnel d'un ensemble fini de tourbillons ponctuels* (3).

(1) Des exemples simples permettraient de montrer que de telles familles différentiables d'écoulements existent. Nous n'abordons pas ici la question de savoir si le fait de supposer que les modifications à un instant initial t_0 dépendent différentiablement de λ suffit à assurer à la famille des mouvements consécutifs les caractères de différentiabilité voulus.

(2) Noter qu'il n'est pas indispensable d'invoquer à titre local la commutativité de différentiations qu'implique cette égalité, mais seulement en intégrale sur des parties de $\{x\}$. De façon analogue, dans l'égalité (1), la dérivation $\partial/\partial x_i$ peut n'être définie qu'à titre distributionnel.

(3) Le fait que les équations d'évolution sont, dans ce cas, des équations canoniques, sert de base, notamment, à des considérations de L. Onsager sur la turbulence à deux dimensions (*Nuovo Cimento*, 9^e série, 6, suppl., 1949, p. 279).