



**HAL**  
open science

## Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité.

Fabrice Vandebrouck, Aline Robert

### ► To cite this version:

Fabrice Vandebrouck, Aline Robert (Dir.). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité.. IREM de Paris, 17, 2017, Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, Fabrice Vandebrouck, 9782866123796. hal-02111613

**HAL Id: hal-02111613**

**<https://hal.science/hal-02111613>**

Submitted on 26 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Cahiers du laboratoire de didactique  
André Revuz  
n°17**

**Février 2017**

**Activités mathématiques des élèves  
avec les technologies numériques:**

**Vers une théorie didactique de l'activité (TDA)**

Par Fabrice Vandebrouck et Aline Robert

ISSN : 2105-5203

**Imprimé par l'IREM de Paris – Université Denis Diderot Paris 7**

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>

### **Coordonnées de l'IREM**

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):  
Université Paris-Diderot, Bâtiment Sophie-Germain,  
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,  
75013 Paris 13ème arrondissement  
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France )

### **Nous Contacter**

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

*par voie postale:*

**Locufier Nadine**  
**IREM de Paris – Case 7018**  
**Université Paris Diderot**  
**75205 Paris cedex 13**

*par voie électronique:*

**nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr**

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

**<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>** (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°17

*Février 2017*

**ACTIVITES MATHEMATIKES DES ELEVES AVEC LES TECHNOLOGIES  
NUMERIQUES : VERS UNE THEORIE DIDACTIQUE DE L'ACTIVITE (TDA)**

**Fabrice Vandebrouck**

**et**

**Aline Robert**



ACTIVITES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES  
AVEC LES TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES :  
VERS UNE THÉORIE DIDACTIQUE DE L'ACTIVITÉ (TDA)

Fabrice Vandebrouck\*, Aline Robert\*\*

**Résumé**

Nous développons dans cette brochure une utilisation de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques, prolongeant ainsi des travaux inscrits dans la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes. Il s'agit d'une centration de l'étude sur les activités des élèves en classe, approchées par des outils d'analyse des tâches prescrites par le professeur, la prise en compte du contexte de la tâche, les médiations pendant le déroulement des séances, notamment toutes les aides de l'enseignant. La démarche est mobilisée pour un exemple d'étude des activités d'élèves en situation d'usage de GéoGébra, en classe de seconde. Nous utilisons une catégorisation des activités mathématiques en sous-activités de reconnaissance, organisation, traitement mathématiques. Nous mettons en évidence des interrelations entre ces sous-activités, les médiations fournies par le logiciel et les aides de l'enseignant. De nouvelles sous-activités apparaissent aussi, associées à des connaissances instrumentales et de nouvelles mises en fonctionnements.

**Mots-Clés** : didactique des mathématiques, théorie de l'activité, analyses de tâches, médiations, activités, ZPD.

INTRODUCTION

Loin de vouloir faire uniquement un clin d'œil aux deux théories françaises en didactique des mathématiques, internationalement reconnues, que sont la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et la Théorie des Situations Didactiques (TDS), cet article souhaite surtout mettre en lumière une troisième orientation, non contradictoire, complémentaire, sensiblement différente, qui n'est pas nouvelle mais qui, faute peut-être d'un acronyme accrocheur, n'est peut-être pas suffisamment bien identifiée par la communauté.

Il s'agit de prolonger des travaux développés depuis plus de 20 ans en didactique des mathématiques, en particulier par Robert (1998) sur les analyses de tâches, mais sans mobiliser d'emblée la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes, mieux connue, qui en est un prolongement, mais qui a laissé implicite une certaine approche de l'activité des élèves qui y est incluse (Vandebrouck, 2008).

---

\* LDAR, Université Paris Diderot, vandebro@univ-paris-diderot.fr

\*\* LDAR, Université de Cergy Pontoise, aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Cette centration sur les activités des élèves est propice à aborder l'une de nos questions de recherche générale, qui porte sur l'usage des technologies dans les classes, que nous nous posons depuis plus de 15 ans. Dans ces situations de plus en plus développées, l'activité des élèves est très autonome, orientée par un exercice à traiter – sur feuille de travail souvent - et les interventions de l'enseignant sont très individualisées pendant un temps long. Ceci justifie notre positionnement théorique centré directement sur les « activités mathématiques » des élèves elles-mêmes, en un sens que nous préciserons, et non à travers les activités de l'enseignant, ce qui est plus caractéristique de la double approche.

Cet article prolonge également deux contributions dans la revue : l'article de Gueudet et Vandebrouck (2011), « Technologies et évolution des pratiques enseignantes : études de cas et éclairages théoriques », et celui plus récent de Robert et Vandebrouck (2014) « Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes » Par ailleurs cet article complète le chapitre sur l'activité des élèves dans l'HDR du premier auteur (Vandebrouck, 2011b).

Dans le premier article, les auteurs dressent un inventaire de recherche sur l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques et mettent en regard deux approches théoriques complémentaires pour aborder ces questions : la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes d'une part et l'approche documentaire du didactique, extension de l'approche instrumentale de Rabardel (1995). Les deux théories partagent un enracinement dans la théorie de l'activité qui va être notre arrière-plan théorique et dont nous rappellerons plus loin les principes fondamentaux. Dans cet article, les auteurs développent des exemples de situations d'usage de technologies en classes mais leur problématique porte plus sur les activités et les pratiques des enseignants que sur celles des élèves. L'approche documentaire vise l'étude de l'activité du professeur en elle-même, sa structure et ses évolutions, en lien avec l'étude de ses ressources. La double approche vise l'étude des pratiques du professeur, en lien avec les activités des élèves mais à partir de l'étude des diverses formes que peut prendre son activité dans diverses situations, en classe et pour la classe. Plusieurs exemples sont donnés mais à chaque fois très peu d'informations concernent directement les activités des élèves, même si elles ne sont jamais totalement accessibles. Nous souhaitons ici focaliser davantage l'étude sur l'activité des élèves en situation d'usage des technologies.

Dans le deuxième article, les élèves sont plus présents. Il s'agit de caractériser les activités mathématiques des élèves sur des tâches complexes (en un sens là encore développé plus loin) en lien avec certaines caractéristiques des déroulements de séances en classes, organisées, voire privilégiées par l'enseignant, traduisant une certaine prise en compte des élèves : les proximités, faisant partie intégrante des pratiques de l'enseignant, souvent en acte et récurrentes. Outre le fait que l'article ne concerne pas exclusivement les usages en classes des technologies, il adopte le point de vue de zoomer sur les proximités elles-mêmes, avec en arrière-plan ce qu'elles peuvent entraîner dans l'activité des élèves. Mais le focus premier n'est encore pas suffisamment sur les activités des élèves elles-mêmes. Dans cet article nous parlerons des proximités mais aussi plus généralement de toutes les médiations qu'organise l'enseignant ou que déclenche l'usage de la technologie auprès des élèves.

Un troisième document sur lequel cet article prend appui est le chapitre 2 « Activités des élèves en analyse avec des technologies » de l'HDR du premier auteur. Indépendamment du fait que cela ne concerne que le champ de l'analyse, la visée plus large de l'auteur est bien de développer des outils d'analyse de l'activité des élèves avec des technologies. Nous y rappelons que cela suppose de s'interroger sur les versants productifs et constructifs de l'activité – encore développé plus loin – car la dialectique entre les deux semble spécifiquement cruciale dans l'activité des élèves avec les technologies. Les technologies ont par exemple un caractère d'immédiateté qui peut s'opposer au caractère laborieux de l'activité en environnement papier-crayon. Cela engage les élèves à entrer dans l'action, ce qui est positif en vertu de nos hypothèses sur l'apprentissage en théorie de l'activité ; mais cela peut aussi les enfermer dans le versant « productif » de l'activité, voire favoriser ce que Lagrange (2000) identifie comme des phénomènes de « pêche aux résultats ».

Notre ambition est donc, à partir de ces trois documents, d'avancer sur l'analyse des activités mathématiques des élèves en situation d'usage des technologies numériques – en particulier dans des tâches complexes, à partir d'analyses *a priori* spécifiques de ces tâches et de celles, *a posteriori*, de déroulement en classes – et donc de comprendre mieux comprendre quelles peuvent être les difficultés des élèves dans ces usages, voire celles des enseignants. Nous reprendrons dans la partie 3 l'exemple sur la situation de l'enseigne, en classe de seconde, avec GéoGébra, que nous avons déjà partiellement développé dans l'HDR susmentionnée et dans l'article Robert et Vandebrouck (2014). La problématique et la méthodologie générale seront exposées en partie 2, associée à notre cadre, développé quant à lui dans la partie 1. En conclusion, nous reviendrons sur des résultats nouveaux et des perspectives concernant les activités mathématiques des élèves dans des situations d'usage des technologies.

## CADRE THEORIQUE

Nous partons de la théorie de l'activité, telle qu'elle s'est développée en ergonomie cognitive, en France, avant d'être adaptée en didactique des mathématiques depuis une vingtaine d'année (Robert 1998, Rogalski 2008). Nous commençons par un historique (volontairement) consistant sur les fondements de la théorie puis nous détaillons certains des développements qui nous sont utiles.

### 1. Historique

La théorie de l'activité vient des travaux de psychologues russes, Rubinstein et Leontiev notamment (Leontiev 1978/1984, Nosulenko et Rabardel, 2008). Il s'agit à l'origine d'un ensemble d'outils théoriques et méthodologiques qui permettent l'analyse des activités de l'homme dans sa vie quotidienne et professionnelle. C'est un cadre qui vise à caractériser les formes de pratiques humaines en tant que processus développementaux, combinant à la fois des aspects individuels et sociaux. Elle ne se veut pas une grande théorie modélisante mais une théorie fondée sur des sujets réels et des cas concrets. Elle repose sur quelques principes fondateurs, notamment le fait qu'une activité est toujours le fait de quelqu'un, le sujet de l'activité, qui éprouve une nécessité (un besoin, quelque chose qui manque dans

des circonstances données), se fixe des buts et s'efforce de les atteindre. L'activité est aussi toujours tournée vers un objet (objectif et subjectif), elle est stimulée par lui et subordonnée à ses propriétés. L'activité n'est en outre pas possible en dehors d'outils de l'activité, qu'ils soient symboliques, gestuels, langagiers... Elle est de nature sociale et suppose l'existence d'un système de relations socialement conditionnées et socialement significatives entre différents sujets. L'activité est enfin consciente. Le sujet prévoit la façon et les moyens d'atteindre ses buts, associe d'autres sujets à la réalisation etc.

Notre enracinement en théorie de l'activité amène donc à étudier l'activité définie du point de vue des sujets (pour nous dans cet article les élèves) en prenant en compte l'ensemble du contexte de leur activité - ce que nous appelons la situation - mais pas au sens fort de Brousseau (1998) - avec ses contraintes et ses ressources - et en étant particulièrement sensible aux médiations entre les sujets et l'objet de leur activité. Les élèves sont des sujets psychologiques individualisés, avec des connaissances qui constituent un potentiel de ressources pour leurs actions et pour atteindre leurs buts. Cela nous démarque fondamentalement d'un enracinement en Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992) ou en Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) où les sujets ne sont pas considérés du même point de vue (de façon assez schématique, elles n'entrent pas de façon privilégiée par les sujets mais plutôt par les savoirs pour la première et par les situations pour la seconde).

## **2. La dialectique entre tâches et activité**

Les développements de la théorie de l'activité dans le champ de l'ergonomie cognitive ont éclairci la distinction entre tâche et activité. La tâche correspond au but que le sujet doit atteindre sous certaines conditions (Leplat, 1997). Elle se situe du côté de l'objet de l'activité, et donc de la situation. L'activité est alors ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche (actions, interactions visibles mais aussi inférences, hypothèses, décisions, non actions, manières de gérer le temps, état personnel...). L'activité est ainsi une activité « située » - en référence à la situation - et finalisée par l'existence de la tâche.

L'analyse de l'activité s'appuie donc d'abord sur une analyse préalable de la tâche. En général il s'agit d'une tâche prescrite (pour nous tâche prescrite aux élèves par l'enseignant). On peut raffiner l'étude en distinguant la tâche prescrite, la tâche redéfinie par le sujet ou bien la tâche effective. Parfois, la redéfinition de la tâche par le sujet est particulièrement intéressante à prendre en compte (*cf* certaines situations de classe inversée par exemple, où les élèves sont autonomes pour prendre connaissance d'un cours mais sans qu'aucune tâche prescrite ne soit bien identifiée). Notre ancrage en théorie de l'activité amène à une analyse de la tâche bien spécifique. Dans une approche anthropologique, par exemple, la tâche est catégorisée par un type de tâche, une ou des techniques et une inscription dans un bloc technologico théorique. En théorie de l'activité, la tâche est analysée en référence non seulement aux mathématiques en jeu mais aussi aux connaissances supposées disponibles du sujet et aux caractéristiques de la situation (contexte de la tâche : niveau scolaire considéré, programme en vigueur, environnement numérique...), ce qui est un point de vue complémentaire.

### 3. Activité, actions, opérations

On retrouve dans nos travaux, adapté bien sûr au cadre scolaire, le découpage classique en trois niveaux de finalité : l'activité associée à son motif d'une part, c'est le moteur direct de l'activité, que le sujet exerce afin de satisfaire ses « besoins », ce qui « pousse » l'activité ; l'action associée au but d'autre part, ce but étant la représentation mentale du résultat futur de l'activité, ce qui « tire » l'activité ; et enfin les opérations qu'il faut effectuer pour réaliser l'action sous certaines conditions (Galperine 1966, Leontiev 1984).

Pour Galpérine, l'intégration régulière des mêmes opérations dans l'action transforme celle-ci en une opération de plus haut niveau, le motif de l'activité évoluant lui-même vers un but d'action. En d'autres termes, le triplet activité, action, opération est défini de manière relative : une action composée d'opérations peut devenir une nouvelle unité fonctionnant alors comme une opération dans une action plus complexe. Chez certains auteurs, on trouve aussi que les opérations sont des actions qui ont été routinisées (Wells, 1993).

Galpérine définit par ailleurs des fonctions en jeu dans les opérations ou les actions, à savoir les fonctions d'« orientation », d'« exécution », et de « contrôle ». A travers les opérations d'orientation, le sujet se représente le résultat à atteindre, c'est ce qui déclenche la sélection des opérations d'exécution les plus adaptées pour atteindre le but visé. Les opérations de contrôle interviennent pour auto-évaluer l'action et les résultats obtenus au cours de l'action.

### 4. La dimension constructive de l'activité

L'essor des développements en ergonomie cognitive a également permis un centrage sur la dimension constructive de l'activité du sujet (Samurcay et Rabardel 2004, Pastré et Rabardel 2005). Cet accent est déjà présent dans la théorie originelle. Citons Rubinstein dans Nosulenko et Rabardel (2008) « *en transformant le monde, l'homme non seulement se révèle et se manifeste, mais encore il se constitue et se détermine* ». En d'autre terme, l'activité qui transforme l'objet vers lequel elle est tournée transforme par là-même le sujet qui la réalise.

C'est par exemple en ce sens que Rabardel (1995), en reprenant l'idée de médiation de l'activité par des outils (Vygotsky 1934/1997), a introduit la notion de genèse instrumentale, définissant ainsi une distinction entre l'artefact et l'instrument, que nous ne développons pas directement ici mais qui contribuera à nos analyses.

Cette orientation cognitive de la théorie de l'activité est sans doute ce qui tranche le plus avec des développements de la théorie de l'activité utilisés dans le monde anglo-saxon ou en Finlande, comme par exemple celle développée par Engeström (Engeström et al., 1999) : l'activité est traitée au niveau d'un système complexe, au-delà du sujet individuel. La théorie ne vise plus à rendre compte de la singularité de l'activité ni du développement du sujet singulier.

### 5. Le schéma de double régulation de l'activité

Dans notre acception de la théorie de l'activité développée en ergonomie cognitive, nous nous référons au schéma de double régulation de l'activité proposé par Leplat (1997). Comme le dit Rogalski (2008) « *le schéma de double régulation de l'activité est pertinent pour toute activité répondant au but de réalisation d'une tâche (activité finalisée)* ». La

notion de régulation de l'activité renvoie au fait que l'activité modifie aussi bien l'état de la situation que celui du sujet qui agit (dimension constructive de l'activité). La situation est à la fois un déterminant de l'activité et elle est modifiée par cette activité (au premier chef en ce qui concerne les objets visés par la tâche, mais aussi les ressources et les contraintes externes de sa réalisation). Il s'agit des régulations fonctionnelles. Le sujet lui-même est également un déterminant de l'activité et il est modifié par son activité, aussi bien dans son potentiel de connaissances et d'actions, que de façon plus générale que ce qui nous occupe dans son état physique : fatigue, sommeil, etc. ou psychique : plaisir, ennui, angoisse, etc. Il s'agit là des régulations structurantes.

La figure 1 présente le schéma de ce système de double régulation, en relation avec le système de déterminants relatifs à la situation et ceux relatifs au sujet acteur. Dans notre perspective, le sujet est l'élève et l'enseignant est un déterminant du contexte de l'activité de l'élève. C'est donc bien seulement d'une partie de la double approche dont nous traitons.

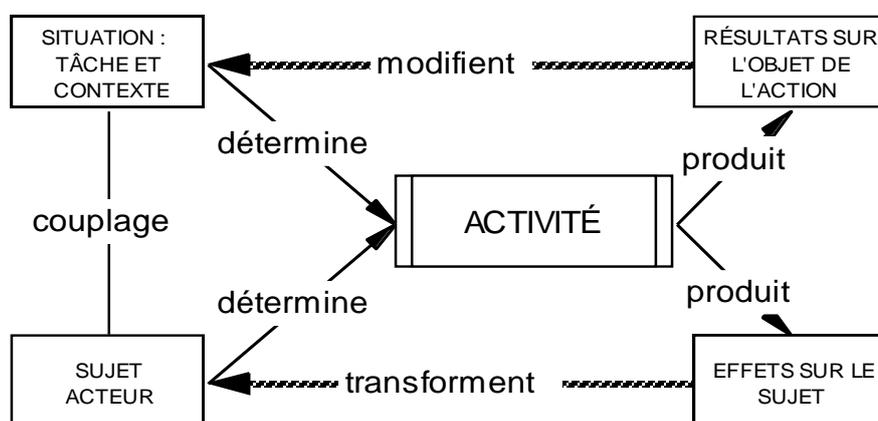


Figure 1 : Schéma de double régulation de l'activité

Plus récemment, Samurcay et Rabardel (2004) ont introduit la dialectique entre activité productive et activité constructive, ce qui est un raffinement supplémentaire. En effet, toute activité étant motivée, on ne va parler d'activité constructive que quand les régulations structurantes seront intentionnelles. En général, notre sujet élève n'est motivé que par la dimension productive de son activité et les apprentissages sont incidents. On parlera d'activité productive au sens où l'activité de l'élève est orientée vers l'objet, c'est-à-dire motivée par la résolution de la tâche. C'est donc un sens légèrement différent de celui de Rabardel pour qui activité productive réfère à un professionnel en activité et possède une dimension sociale et économique. Pour l'élève il n'y a pas de production ; ou du moins la production dans le cas de l'élève ne peut pas se traiter au sens économique comme dans l'analyse de l'activité d'un professionnel. Dans l'activité constructive, le but de l'élève est au-delà du résultat de la tâche (montrer que la fonction donnée est paire, exemple repris à Janine Rogalski, *ibid*). L'élève peut se fixer un autre but que la réalisation de la tâche, par

exemple « identifier le traitement de la parité des fonctions ». Alors il s'engage dans une activité constructive, et c'est *in fine* celle visée par l'enseignement et l'enseignant.

## **6. Les emprunts et l'articulation de Piaget et Vygotski : conceptualisation, médiations et ZPD**

Nous empruntons aux deux auteurs et c'est sans doute ce qui est le plus difficile à justifier de façon théorique – notamment à l'international. Comme l'écrit Jaworski dans la préface de l'ouvrage *Mathematics Classrooms : students' activities and teachers' practices* (Vandebrouck, 2013), « *The focus on the individual subject – as a person-subject rather than a didactic subject – is perhaps somewhat more surprising, especially since it leads the authors to consider a Piagetian approach of epistemological genetics alongside Vygotsky's sociohistorical framework* ».

Selon Rogalski (2008), la mise en regard des cadres met en avant le fait que ces deux auteurs ne sont pas en contradiction mais apportent chacun une contribution spécifique à la théorie, avec des convergences, quant aux facteurs du développement, à la temporalité longue et à la place des instruments dans ce développement (« instruments cognitifs » chez Piaget ; « instruments psychologiques » chez Vygotski). Le lecteur intéressé par cette complémentarité entre Piaget et Vygotski pourra également consulter Rogalski (2013) ou Cole et Wertsch (1996).

Piaget a une visée d'épistémologie génétique, c'est-à-dire qu'il étudie en particulier le développement des connaissances chez un sujet « épistémique », qui est ici proche du sujet dans la TSD de Brousseau (1998). Vergnaud a la même visée que Piaget mais il prend en compte le processus d'enseignement, celui des mathématiques notamment. Il met l'accent sur le rôle de l'action et de la résolution de problème dans la conceptualisation. Il reprend l'œuvre de Piaget sur les schèmes et complète avec les notions de champs conceptuels, qui sont relatifs à des classes de situations. Le développement est alors lié à la création de nouveaux schèmes, dans de nouveaux problèmes et de nouvelles classes de situations. Vygotski, quant à lui, a une visée de théorisation psychologique. Son sujet est un sujet « psychologique », individuel, pris dans une interaction sociale avec d'autres sujets. Son idée forte est celle d'un passage de l'inter individuel à l'intra individuel qui s'appuie sur la construction d'instruments psychologiques. On retiendra notamment l'importance des ZPD et des médiations.

## **7. L'adaptation à la didactique des mathématiques**

Dans le même mouvement que l'adaptation de la théorie de l'activité à la didactique professionnelle (Pastré 1999), on trouve une adaptation en didactique des mathématiques. Dans son article sur les analyses de tâches, Robert (1998) met en évidence l'importance des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances – disponibles, mobilisables - et les différentes adaptations des connaissances repérées dans les tâches : introduire des intermédiaires, des étapes, faire des choix...

Les élargissements en didactique des mathématiques intègrent des concepts déjà utilisés en didactique des mathématiques : par exemple la dialectique outil-objet de Douady (1986), les registres de représentations sémiotiques de Duval (1995), les notions de potentiel adidactique ou de contrat didactique introduites par Brousseau. Il y a parfois aussi des emprunts à la TAD dans une perspective institutionnelle (la valence pragmatique ou

épistémique d'une technique par exemple – Artigue, 2002, ou bien dans certains cas la notion d'ostensif plutôt que représentation).

Ces élargissements s'inscrivent surtout, de façon plus ou moins explicite, dans le schéma de double régulation de l'activité. L'analyse de la tâche mathématique doit inclure une analyse du contexte de la tâche, de son environnement, c'est-à-dire des conditions de sa réalisation. Les analyses de tâches sont en particulier toujours relatives à ce contexte, au niveau des classes, au programme, à l'environnement technologique, à ce que les élèves ont pu faire avant... Elles doivent en particulier sans cesse être renouvelées et aucune analyse *a priori* n'est totalement transférable d'un contexte à l'autre. Elles doivent permettre une analyse *a posteriori* intégrant les déroulements effectifs.

Les développements de la théorie en didactique des mathématiques mettent aussi en avant la dimension constructive de l'activité, en référence à la conceptualisation, avec une importance des médiations et de la ZPD. La distinction entre régulations fonctionnelle et structurantes permet notamment de différencier des processus locaux d'ajustement à la situation et des processus de conceptualisation par le sujet, sur un temps nécessairement plus long (Rogalski 2008).

Robert propose d'introduire le mot « activités » - au pluriel - pour des segments de l'activité, directement associés à une tâche précisée. Plusieurs « sous-activités mathématiques », liées à différentes mises en fonctionnement des connaissances à l'œuvre, sont distinguées, permettant de caractériser l'activité mathématique des élèves dans sa globalité. Il s'agit des sous-activités de reconnaissances, d'organisation et de traitement interne qui actualisent dans le contexte de l'activité mathématique et de la situation scolaire, et dans un certain sens, les fonctions proposées par Galpérine (Robert et Vandebrouck, 2014). Les tâches complexes sont alors définies comme les tâches qui activent et imbriquent plusieurs de ces sous-activités mathématiques, à partir de diverses adaptations de connaissances à mettre en fonctionnement, repérées dans l'analyse *a priori*.

Robert utilise aussi la distinction entre aides « procédurales » et aides « à visée constructive » en référence au schéma de double régulation. Les premières sont orientées vers la situation (notamment les tâches prescrites) en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir de l'énoncé. Elles correspondent surtout à des indications que peut donner l'enseignant, directement ou indirectement – par des questions notamment-avant ou pendant l'activité des élèves. Les secondes sont orientées vers les élèves et visent à ajouter « quelque chose » qui s'appuie sur l'activité stricte des élèves pour amorcer la construction (espérée) de connaissance, par des reprises, des reformulations, des distanciations, des généralisations... Plus récemment dans Robert et Vandebrouck (2014), nous avons aussi introduit l'idée de proximités, repérables (ou non) dans des décisions ou des discours de l'enseignant, dans lesquelles ce n'est pas la dialectique procédurale/constructive qui est mise en avant mais le fait que les apports de l'enseignants, et plus globalement les actions, peuvent (ou veulent) prendre en compte les ZPD des connaissances en jeu des élèves.

Robert introduit enfin les niveaux de conceptualisation d'une notion mathématique, en référence à une opérationnalisation de la conceptualisation et aux champs conceptuels de Vergnaud, mais dans un sens plus modeste ; et elle introduit aussi plus récemment l'idée de relief d'une notion mathématique (Robert et al., 2012). Il s'agit d'une étude épistémologique et mathématique de la notion mathématique, croisée avec une étude

curriculaire et didactique, incluant les difficultés connues des élèves le cas échéant. L'étude du relief de la notion permet en particulier de définir différents domaines de travail de la notion, associés à différents niveaux de conceptualisation, conformes aux programmes d'enseignement. A l'instar des champs conceptuels qui sont des espaces de problèmes, les domaines de travail sont décrits par le corps des problèmes qui peuvent être résolus en leur sein (donc des tâches), en suivant des modes de raisonnements et des démarches caractéristiques du domaine, avec des fondements mathématiques et un niveau de rigueur spécifique, en utilisant un arsenal de définitions, théorèmes et propositions bien délimité (Robert, 2003). Les niveaux de conceptualisation sont ainsi définis à partir des spécificités de la notion mathématique, à partir des programmes, en précisant les cadres et les registres (Duval 1995) à convoquer, et les niveaux de rigueur attendus (types de raisonnements, formalisme et démonstrations). Ils intègrent un ensemble de tâches mettant en jeu la notion concernée, par la disponibilité des caractères objets et outils de la notion (Douady 1986), associés aux mises en fonctionnement attendues sur ces tâches. Cette disponibilité inclut l'organisation des connaissances impliquées, nouvelles et anciennes, toujours en référence à la notion de champ conceptuel (Vergnaud 1991).

Cependant, la conversion par les enseignants de ce niveau de conceptualisation à atteindre, plus ou moins précisé, en un ensemble d'activités mathématiques attendues pour les élèves n'a rien d'automatique. Elle aboutit à un itinéraire cognitif, associé à un ensemble de tâches prescrites et à un déroulement prévu, concrétisé par l'élaboration d'un scénario, plus ou moins accessible, ensemble ordonné de cours, d'exercices, d'évaluations... Les manuels aussi donnent des éléments de scénarios.

L'adéquation de cet itinéraire cognitif à l'apprentissage des élèves n'est pas non plus transparente et nécessite d'aller regarder jusqu'au niveau des réalisations en classe, c'est-à-dire d'étudier les activités possibles – si ce n'est effectives – des élèves compte tenu du déroulement effectif. Les analyses mettent alors en jeu un certain nombre de variables, associées à des hypothèses partielles, issues des travaux de Piaget, de Vygotsky et des didacticiens, qui orientent l'élaboration d'indicateurs méthodologiques. Ces variables tiennent à la fois

- à la qualité de l'introduction de la notion visée, compte tenu du relief de la notion et du niveau de conceptualisation visé, les relations et les proximités possibles entre le nouveau et les connaissances anciennes déjà enseignées ou supposées disponibles ;
- à la quantité, la qualité, la variété et l'ordre précis des tâches prescrites aux élèves (exercices et problèmes), ainsi qu'à leur robustesse (elles sont plus ou moins déformables par les déroulements),
- aux dynamiques prévues entre ces tâches, les formes de travail et notamment les moments collectifs en classe (moments d'exposition des connaissances par exemple), en relation avec les difficultés connues des élèves,
- enfin à la qualité des déroulements, des médiations (aides et proximités notamment), et finalement des activités possibles, si ce n'est effectives, des élèves.

Le lien que nous faisons ensuite entre ces indicateurs, les activités mathématiques possibles ou effectives et la conceptualisation des connaissances reste de l'ordre des hypothèses, dont on peut énoncer certaines, mais qui dépendent des sujets eux-mêmes (la ZPD), des classes – aspects collectifs et sociaux – et encore des pratiques enseignantes. L'une d'entre elle est qu'il peut être efficace de varier les activités proposées aux élèves, par exemple ne pas se

limiter à des applications immédiates de connaissances, introduire les aspects outils et objets des notions (Douady, 1986), différents systèmes de représentations (Duval, 1995) et proposer des adaptations de connaissances ; d'où une centration sur les tâches complexes comme dans cet article. Toutefois, cela ne nous permet pas de faire des inférences directes entre activités et apprentissages. Cela nous amène à mieux connaître les régularités et diversités de l'activité des élèves, en relations avec des variables de leurs apprentissages.

## PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

Nous nous intéressons aux activités mathématiques des élèves dans des situations d'usage de la technologie numérique pour résoudre des tâches complexes.

Dans notre exemple, il va s'agir d'une étude locale (limitée) de moments de travail en début de classe de seconde au lycée général (16 ans), qui plus est sur une situation mathématique particulière avec un logiciel particulier (GéoGébra). L'impossibilité à partir de ce corpus de prendre en compte le temps long des apprentissages et de la conceptualisation ne permet en particulier pas de tirer des conséquences hâtives sur les acquisitions des élèves. Il s'agit seulement de décrire, à partir d'une tâche complexe, les régularités observées, en mettant en relation les sous-tâches, les formes de travail, les médiations fournies par le professeur (aides et proximités notamment), la machine ou les pairs, les actions des élèves (sur la machine, les échanges...) et les différentes sous-activités possibles ou effectives, inférées ou observées à partir de l'analyse de nos matériaux. Nous sommes également intéressés par décrire les différences dans ces régularités par rapport à des situations en environnement traditionnel en reconstituant notamment la façon dont les sous-tâches mathématiques prescrites vivraient dans un scénario et un déroulement sans technologie.

Les analyses qui suivent présupposent que l'on ait établi le relief de la notion concernée – ce qui sera développé plus loin – et précisé le contexte des séances analysées.

### 1. Analyses *a priori*, activités attendues des élèves

L'étude est d'abord chronologique, guidée par un découpage de la séance en épisodes. L'analyse *a priori* de la tâche complexe prescrite aux élèves (le but qu'il s'agit d'atteindre) permet de définir les épisodes de la séance. Ces épisodes sont caractérisés par des sous-tâches, voire des sous-buts à atteindre à l'intérieur de ces sous-tâches. L'analyse *a priori* de ces épisodes permet de guider et de faciliter l'analyse *a posteriori*. Un entretien avec l'enseignante avant ou après la séance permet d'identifier les sous-buts qu'elle a définis pour les élèves lorsqu'ils ne sont pas suffisamment explicites via l'analyse directe de la tâche (tâche qui peut rester implicite par exemple). Elle permet également de mettre en regard la séance observée avec le niveau de conceptualisation visé – à une échelle qui dépasse celle de la séance observée – et l'itinéraire cognitif.

On repère pour chaque épisode les connaissances à mettre en fonctionnement par les élèves et la façon dont s'opèrent ces mises en fonctionnement, en terme de niveaux de mise en fonctionnement – mobilisable / disponible - et d'adaptations des connaissances. Nous repérons par exemple les reconnaissances à effectuer, que ce soit de connaissances supposées disponibles (variable, formule etc...) ou que ce soit des modalités d'application

de ces connaissances. Nous repérons aussi le besoin d'introduire des intermédiaires – notations, points... - les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les choix, les changements de points de vue, l'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou de raisonnements...

Comme signalé dans le cadre théorique, ces analyses de tâches sont relatives au contexte et celui-ci doit être pris également en considération lors de ces analyses d'épisodes.

A partir des mises en fonctionnement de connaissances identifiées, on infère des sous-activités mathématiques que tous les élèves devraient faire – activités attendues. On utilise la catégorisation introduite plus haut en

- sous-activités de reconnaissance d'outils ou d'objets mathématiques à mettre en fonctionnement : ce sont les théorèmes ou propriétés concernés, supposés disponibles ou non, ou/et l'identification des modalités d'application de ces théorèmes ou propriétés à mettre en fonctionnement. Cela peut comprendre des choix de connaissances, forcés ou non, selon les alternatives existantes. Il y a plusieurs niveaux de disponibilité (objet, outil), selon que l'on considère la reconnaissance du fait que la connaissance doit être utilisée (comme outil) ou que c'est la définition ou une propriété, à adapter au contexte, qui est uniquement en jeu (comme objet),

- sous-activités d'organisation du raisonnement global : il s'agit de repérer les différents raisonnements mathématiques à mener, faire les choix de méthodes, avec les étapes éventuelles et leur ordre, les reprises de questions précédentes, les interprétations,

- sous-activités de traitement interne : il s'agit des constructions de figure, des calculs à effectuer, du travail sur les formules, simple remplacement des données par leurs valeurs ou transformations, équivalences, implications, mais aussi de l'introduction d'intermédiaires, notations ou expressions, des changements de registres ou de points de vue (imposés ou choisis) et des mélanges de cadres éventuels (imposés ou choisis).

Cette liste devrait être complétée par des activités transversales de formulation (en particulier à l'oral) et de rédaction (pour l'écrit), non étudiées ici. Chacun des épisodes fait ainsi l'objet d'une analyse en ces termes.

## **2. Analyses *a posteriori*, activités possibles pour tous, *a maxima*, *a minima***

L'analyse *a posteriori* complète l'analyse *a priori* (il y a en fait assez souvent des allers-retours et il est difficile après coup de savoir ce qui relève de l'analyse de tâche *stricto sensu* et ce qui relève des analyses des déroulements) et se fait à partir des vidéos des élèves en activité. L'accès est rendu possible par des vidéos tournées en classe, une caméra étant posée au fond de la classe pour saisir la globalité de la séance, une caméra sur des binômes d'élèves en activité et enfin un enregistrement des actions des élèves à l'écran. Les vidéos sont transcrites et mises en regard, avec les documents distribués par l'enseignant et les productions écrites des élèves durant la séance observée.

Nous repérons tout d'abord les formes de travail des élèves et leur nature, en complétant par des indications de durée. En particulier la répartition entre les moments de travail individuel des élèves et les moments collectifs (recherche avec le professeur, cours dialogué, écrit collectif...) va jouer sur le passage entre activités attendues et activités possibles.

Pendant les moments de travail individuel, on explicite les actions des élèves et on repère l'ensemble des médiations de leur activité. On utilise une dialectique entre les

médiations « procédurales » et les médiations « à visée constructive » : il s'agit ici d'une extension de ce que Robert appelle « aides procédurales » et « aides à visées constructives » en parlant des aides du professeur – individuelles ou collectives - pendant des séances traditionnelles. Dans notre contexte, les médiations de l'activité des élèves peuvent être également entre pairs (interactions collectives), liées aux rétroactions du logiciel ou aux rétroactions de la situation mathématique elle-même (lorsque la situation comporte notamment un potentiel adidactique). Les médiations procédurales correspondent à des apports qui modifient la tâche ou la situation en jeu pour le ou les élèves concernés tandis que les médiations à visée constructive sont orientées vers les élèves et visent à ajouter « quelque chose » entre leur activité et la construction de connaissance.

Ces repérages permettent de donner une idée des activités mathématiques possibles des élèves, sous forme d'activités *a maxima* - qui ne sont pas développées d'emblée par tous les élèves – et d'activité *a minima* ou pour tous, en regard du déroulement, des formes de travail et des médiations identifiées. Par exemple un travail individuel sur ordinateur ponctué par des médiations de la machine, des interventions du professeur ou des échanges entre les élèves ne donne pas toujours lieu à des activités où tous les élèves s'engagent suffisamment : cela peut être appréhendé par la durée de l'épisode, la durée du travail en totale autonomie, la nature et le temps avant une rétroaction de la machine, un échange entre pairs ou une intervention de l'enseignant, qui peuvent dégager d'une certaine complexité de la tâche et engager les élèves concernés vers d'autres activités que celles attendues. On dira que les activités possibles sont *a maxima* pour certains élèves et *a minima* pour d'autres. En revanche une recherche individuelle longue durant une séance sur logiciel, avec des rétroactions à visée constructive ou du moins qui ne sont pas que procédurales, peuvent laisser supposer que beaucoup d'élèves se sont appropriés la tâche prescrite, voire ont développé les activités mathématiques attendues (activités possibles pour tous).

On prend aussi en compte les médiations de l'activité qui courent au-delà des moments de travail des élèves et on réutilise ici la notion de proximités qui met cette fois en jeu directement la notion de ZPD des connaissances en jeu des élèves. Il s'agit ici de phrases de l'enseignant, éventuellement accompagnées de gestes ostensifs, dont nous analysons qu'elles rencontrent la ZPD des élèves compte tenu de leurs activités possibles. Elles peuvent donc mieux contribuer à la compréhension des élèves. Il s'agit d'une analyse des médiations suivant un axe complémentaire à celui fourni par la dialectique procédurale / constructive et qui est relative à l'activité possible des élèves (*a minima*, *a maxima*, pour tous). Par exemple, pendant les moments collectifs pilotés par l'enseignant, des interventions significatives sont recherchées et associées au déroulement des activités correspondantes des élèves, notamment ce qui suit ces activités en termes d'apports, de questionnements, de réponses, de reprises, d'explications, de commentaires, de validations... Robert (Bridoux et al. 2015) a distingué trois types de proximités discursives, qui précisent la notion de proximités en actes définies dans Robert et Vandebrouck (2014). Il peut s'agir

- soit de généralisations à partir des activités (possibles) sur une tâche et qui aboutissent à l'expression, la définition, voire la démonstration d'une propriété mathématique générale (proximité ascendante),

- soit de la manière dont on peut utiliser dans un exercice, voire dans une démonstration, une propriété (ou définition) générale sur lesquels les élèves ont déjà développé de l'activité (proximité descendante),

- soit du travail local sur une formule par exemple ou sur le sens d'un théorème, qui n'amènent pas de changement de niveau de généralité (horizontales).

Ces phrases sont repérées par le chercheur, qui distingue des absences de proximités, des proximités possibles imprévues aussi bien que des occasions manquées de proximités. Toutes restent seulement possibles, tout comme les activités des élèves. Là encore, on se donne la possibilité d'étendre la notion de proximité à toutes les médiations de l'activité des élèves dont on pense qu'elles peuvent mettre en jeu leurs activités possibles et leurs ZPD.

On cherche donc, pour analyser notre séance, à mettre en regard les activités mathématiques attendues des élèves - catégorisées en sous-activités de reconnaissances, d'organisation, de traitement - repérées à partir de l'analyse *a priori* de la tâche complexe proposée, et leurs activités possibles, *a maxima* et *a minima*, reconstituées grâce aux analyses du déroulement en classe (formes de travail et médiations diverses). Nous cherchons à décrire la répartition entre les sous-activités pendant la séance avec technologie, leurs relations aux sous-tâches prescrites et aux médiations, par exemple les types de médiations associées de façon privilégiée à ces différentes sous-activités. La comparaison avec un scénario et un déroulement (fictif) en environnement traditionnel permet d'avoir des points de repères en termes d'activités attendues sur une tâche du même type en environnement classique et sur les activités possibles des élèves sans technologie. On peut ainsi repérer s'il y a des tâches différentes ou des activités nouvelles ou agencées différemment.

A la fin, nous essayons de dépasser notre étude chronologique pour revenir à la globalité de la tâche, en reconstituant ce à quoi les différentes activités des élèves ont pu finalement leur donner accès. Cela conduit seulement à discuter ce qu'on peut en attendre en termes d'acquisition (voire conceptualisation) dans ces situations d'usage des technologies numériques. Il n'y a pas de recherche de modélisation de l'activité des élèves. Nos analyses nous permettent au mieux de tisser des relations relativement contextualisées entre les scénarios, les tâches, les déroulements et les activités des élèves.

#### L'EXEMPLE : UNE RECHERCHE PAR BINOMES SUR GEOGEBRA

Dans cet exemple d'application de la Théorie Didactique de l'Activité, nous nous intéressons à une séance TICE au niveau seconde (10ème grade), afin de faire travailler entre autre la disponibilité de la notion de fonction, comme « outil » dans un problème de modélisation. Les élèves vont travailler par binôme sur ordinateur. Les élèves ont déjà étudié les fonctions, surtout sous leurs aspects objets, dans l'environnement papier-crayon. Dans cette séance, ils sont amenés à utiliser le logiciel GéoGebra avec lequel ils sont familiers pour des tâches de géométrie qui ne mettent pas en jeu les fonctions. La tâche porte sur la figure 2 ci-dessous, qui est fournie aux élèves avec des questions sur une feuille de travail distribuée par l'enseignant (figure 3).

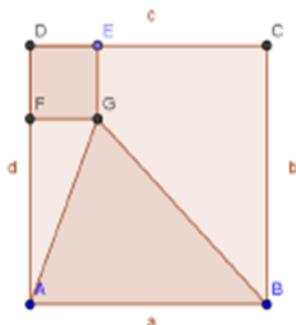


Figure 2: Enseigne

ABCD est un carré, avec A à l'origine et  $AB=4$ . E est un point mobile sur le segment [CD]. On considère la somme des aires du carré (DFGE) et du triangle (ABG). La tâche est de trouver le minimum de la somme des aires lorsque E se déplace sur [CD] et la position de E qui lui correspond.

Si la variable indépendante choisie  $x$  est DE alors  $f(x)$ , la somme des deux aires est égale à  $x^2$  (pour le petit carré) plus  $4(4-x)/2$  (pour le triangle), ce qui donne  $x^2-2x+8$ , soit  $(x-1)^2+7$  sous la forme canonique. Le minimum est donc 7 pour  $DE=1$  (c'est à dire la position actuelle de la figure).

Dans cette situation, GéoGébra aide les élèves à se lancer dans la tâche, en leur permettant de faire des conjectures sur le minimum. Les élèves vont également avoir une approche graphique de la fonction en jeu, comme dans la figure 4. Pour la démonstration, ils vont générer la forme canonique de la fonction (aidés par l'enseignant).

### 1. Relief sur fonctions et niveau de conceptualisation visé

La notion de fonction est un concept central en mathématique, en connexion à la fois avec les autres domaines scientifiques et avec les situations réelles. Le concept formalise, unifie (Robert, 2008) une diversité de notions que les élèves rencontrent de façon isolée : l'expression « en fonction de », la proportionnalité, les droites linéaires et affines, certaines courbes, des transformations géométriques, puis plus tard les polynômes, les exponentielles... Ce concept est caractérisé par une multiplicité de registres de représentations (langue naturelle, numérique, graphique, algébrique, symbolique, formel) et plusieurs perspectives (ponctuelle, globale et locale) (Duval, 1995 ; Maschietto, 2008 ; Vandebrouck, 2011).

Un nombre conséquent de recherches (Bloch, 2003; Gueudet, 2008 ; Hitt and Gonzalez-Martin, 2016) montrent que la conceptualisation de la notion de fonction nécessite une activité mathématique qui permet la mise en fonctionnement de cette diversité, ainsi qu'une diversité de cadres dans lesquels la notion de fonction est mobilisée (Douady, 1986). Cela signifie également que la notion doit être disponible à la fois comme outils dans la résolution de tâches et comme objet mathématique, dans une flexibilité avec d'autres concepts connexes (nombres réels, suites numériques notamment). Certains auteurs (Tall, 2006) mettent également en avant une progression nécessaire d'une conceptualisation incarnée (quand les fonctions sont fortement dépendantes de l'expérience physique) à une conception plus proceptuelle (basée sur les représentations) et enfin à une conception formelle.

A notre niveau d'enseignement (classe de seconde), le niveau de conceptualisation visé peut être caractérisé par un ensemble de situations (et donc de tâches) dans lesquelles les fonctions sont mobilisées comme outils et comme objet. Elles sont mises en jeu dans différents cadres, dans différents registres – numérique, graphique, algébrique essentiellement – pour que les élèves dégagent l'objet de ses diverses représentations, et enfin dans une dialectique entre la perspective ponctuelle et la perspective globale.

Une articulation de ces différentes perspectives dans les deux registres algébrique et graphique est spécialement importante. Les deux registres ne sont pas équivalents de ce point de vue (Bloch, 2003). Si le registre graphique porte naturellement la perspective globale – par exemple les notions globales de croissance et décroissance – le registre algébrique porte surtout la perspective ponctuelle. Il y a donc un enjeu à développer les liens entre la perspective globale et le registre algébrique. La perspective globale est en jeu à travers la mise en fonctionnement de définitions formalisées des notions globales, avec deux variables quantifiées universellement (Vandebrouck, 2011a) : par exemple montrer qu'une fonction définie algébriquement est croissante en mettant en fonctionnement que quelques soient  $x$  et  $y$  dans son domaine de définition, si  $x < y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ . Elle suppose aussi l'importance de la disponibilité pour les élèves d'un herbier de fonctions de références (affines, du second degré, inverse en seconde), connues graphiquement et algébriquement, associées à leurs propriétés globales, notamment de variations.

Les deux registres ne sont pas non plus congruents puisque une représentation algébrique permet d'accéder point par point à une idée de la courbe représentative de la fonction (et de ses variations) tandis qu'une courbe n'est pas nécessairement celle d'une fonction et, qui plus est, ne permet d'accéder au mieux qu'à un tableau de valeurs. Il y a des sous-activités de reconnaissances de formes (reconnaissances mathématiques) dans le passage graphique vers algébrique, qu'il n'y a pas impérativement dans le passage algébrique vers graphique, qui peut n'engager l'élève que sur des activités de traitement.

La mise en relation des deux registres de façon unifiée et croisée autour des objets fonctions est aussi l'une des difficultés à ce niveau d'enseignement. Les deux registres sont déjà connus des élèves, d'un côté dans les résolutions d'équations et d'inéquations algébriques, et de l'autre dans les activités graphiques dans le plan – avec des courbes qui ne sont pas nécessairement des courbes de fonctions. Les connaissances anciennes des élèves sur les graphiques comme ensemble de couples  $(x,y)$  du plan – par exemple la courbe est croissante du point  $A(x_1,y_1)$  au point  $B(x_2,y_2)$ , en supposant  $x_1 < x_2$  – doivent se transférer à des propriétés de fonctions, ce qui nécessite des changements de points de vue et un retour à la dimension 1 – la fonction est croissante sur  $[x_1,x_2]$ , lecture de gauche à droite... – ce qui est spécifiquement difficile pour les élèves (Bridoux et al., 2015).

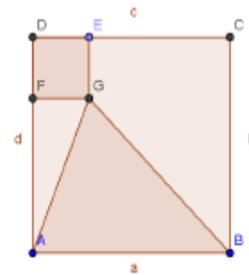
La situation de l'enseigne rentre dans ce niveau de conceptualisation, comme situation de modélisation géométrique, avec une tâche d'optimisation qui met en jeu la perspective ponctuelle et la perspective globale. Elle ne permet pas de travailler tous les aspects décrits plus haut mais les fonctions sont mobilisées comme outils et les trois registres de représentations visés peuvent être mis en fonctionnement : numérique, algébrique et graphique, avec un accent sur la perspective globale (optimisation). GéoGébra permet d'enrichir l'activité possible des élèves par rapport à l'environnement papier-crayon, en étant un support pour l'expérience physique de la covariation, la modélisation fonctionnelle, et l'apport du dynamisme pour favoriser les liens entre les trois registres. Il

est attendu en particulier que les élèves expérimentent les covariations globales (numériques et graphiques) de la fonction en jeu et puissent, à partir d'apports de l'enseignant (proximités ascendantes) reconnaître l'expression de ces variations dans la forme canonique et généraliser à terme à des expressions canoniques génériques, ce qui peut contribuer à enrichir leur herbier de fonctions disponibles, associées à leurs propriétés globales.

## 2. Analyse de la tâche et activités attendues

### L'enseigne

L'enseigne d'un magasin est constituée d'un carré. Dans celui-ci, un autre carré et un triangle sont éclairés (voir la figure ci-contre).  
 La surface éclairée est constituée du carré DEGF et du triangle GBA.  
 La dépense d'électricité est proportionnelle à la surface éclairée.  
 ABCD est un carré. DEGF également.  
 Le point E est mobile sur le segment [DC].



Où doit-on placer le point E pour que la dépense en électricité soit minimale ?

#### Première partie : construction de l'enseigne

Pour cette construction, on prendra A de coordonnées (0, 0) et le segment [AB] de longueur 4.  
 Détaillez l'ordre de vos constructions.

#### Deuxième partie : élaboration de la conjecture

1. Pour quelle position du point E la dépense semble-t-elle minimale ?
2. Quelles fonctionnalités du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ?

#### Troisième partie : Démonstrations

1. On pose  $DE = x$ . Exprimer en fonction de  $x$  la somme des aires du carré EDFG et du triangle GAB.
2. En déduire la position du point E répondant au problème.

Figure 3 : Feuille de travail distribuée par l'enseignant

### *Le découpage de la tâche*

La tâche est d'identifier la position du point E sur le segment [DC] afin que la somme des aires de (DFGE) et (AGB) soit minimale. La résolution de la tâche nécessite la mise en fonctionnement de connaissances sur les figures géométriques et sur les fonctions. En outre, la notion de fonction doit être disponible, c'est-à-dire que les élèves doivent la mobiliser par eux-mêmes, même si la consigne « on pose  $DE=x$  » dans la dernière question peut être considérée comme une indication qui fait passer le niveau de mise en fonctionnement de disponible à mobilisable pour certains élèves. Dans l'environnement traditionnel papier-crayon, il y aurait eu de la même façon ce type d'indication dans la feuille de travail des élèves, ou bien le professeur aurait sans doute donné une aide procédurale du même type.

La tâche sur GéoGébra est quant à elle divisée en trois sous-tâches, déclinées chacune en questions de la feuille de travail : reconstituer la figure sur GéoGébra avec des positions et des cotes données (en particulier A à l'origine du repère de GéoGébra et  $AB=4$ ), conjecturer grâce à la figure dynamique la position du point E répondant à la question (et conforter la conjecture à l'aide du logiciel) et enfin démontrer algébriquement le résultat. L'activité d'organisation globale du raisonnement est donc prise en charge par l'énoncé, comme elle pourrait l'être dans l'environnement traditionnel : il s'agit d'assurer que les élèves puissent s'engager dans l'activité (versant « productif » de l'activité). La différence majeure à ce niveau de l'analyse *a priori* est la présence de la sous-tâche de conjecture, spécifique de l'environnement logiciel. Dans l'environnement traditionnel papier-crayon, les élèves seraient aussi invités par l'énoncé – au mieux - à tracer la figure puis à résoudre le problème algébriquement (deux sous-tâches). Dans les deux cas, la tâche reste bien une tâche complexe dans la mesure où plusieurs cadres et connaissances doivent être mis en fonctionnement avec des adaptations que nous détaillons plus bas.

### *La construction de la figure (première sous tâche)*

Dans la première sous-tâche, les élèves doivent identifier les points fixes de la figure (A,B,C,D), le point libre E sur [DC] et les points dépendants F et G. Il y a donc des sous-activités de reconnaissances de la structure de la figure. Ces activités de reconnaissances sont de l'ordre de ce que Mithalal (2010) appelle après Duval la déconstruction dimensionnelle de la figure : c'est la reconnaissance de la configuration avec un grand carré composé d'un petit carré et d'un triangle, avec un point crucial qui est leur point commun G, à construire à partir du point mobile E (pointé comme tel dans l'énoncé).

A partir de cette reconnaissance de configuration, il y a une organisation de la construction à bâtir : d'abord le grand carré, puis le point mobile puis le petit carré et le triangle qui correspondent à des sous-buts distincts. L'ordre de la construction est donc crucial pour la robustesse de la figure finale, plus que dans l'environnement papier crayon. En d'autres termes, les sous-activités d'organisation (l'ordre des instructions) semblent plus importantes dans l'environnement GéoGébra que dans l'environnement papier-crayon. Nous y revenons plus bas.

Nous étudions maintenant plus en détail dans le tableau 1 les différents épisodes de la construction (première colonne) pour identifier les connaissances et leurs mises en fonctionnement attendues (deuxième colonne).

| Découpage <i>a priori</i> en épisodes                            | Connaissances et mises en fonctionnement des connaissances (attendues)   |
|--|--|
| Premier épisode : construction du carré ABCD                     | Il y a plusieurs choix : d'une part sur la construction des quatre points A, B, C, D par leur coordonnées dans la barre de saisie ou bien directement par manipulation directe sur l'écran avec la souris, ou bien un mixte des deux ; d'autre part sur le fait d'utiliser la commande polygone régulier ou bien construire les 4 côtés indépendamment, ce qui est plus proche de la procédure papier-crayon mais a des conséquences sur la possibilité de conjecture numérique. Lorsqu'on crée des polygones par la commande associée, GéoGébra les numérote 1,2..N et leur associe automatiquement dans la fenêtre algèbre les valeurs numériques de leurs aires appelées poly1, poly2, ... polyN. |
| Deuxième épisode : construction du point mobile E sur la côté DC | Il y a encore un choix, sur le fait de créer un curseur numérique puis le point E par ses coordonnées, l'abscisse étant la valeur de ce curseur. L'alternative est de créer un point sur segment mais encore une fois il y a des répercussions sur la suite pour récupérer facilement l'abscisse de ce point.  |
| Troisième épisode : construction du petit carré et du triangle   | Il y a deux étapes (sous-buts) à mener l'une après l'autre : construire le petit carré puis le triangle. Il y encore des choix du même type que dans l'épisode 1 selon que l'on construit les deux sous figures comme des polygones réguliers ou bien côté par côté, avec là encore des conséquences sur la suite.   |
| Quatrième épisode : expliciter l'ordre des constructions         | Il s'agit d'expliquer la construction faite donc il n'y a plus de sous-activités mathématiques au sens où nous l'avons défini. Sauf si l'élève n'a pas développé ces sous-activités au moment de la construction et cette question est le moyen de revenir <i>a minima</i> sur ces sous-activités (reconnaissance, organisation). Par contre cette question participe surement de la dimension constructive de l'activité mais il faudrait mieux l'étudier.  |

Tableau 1 : Analyse *a priori* de la tâche de construction

En environnement GéoGébra, l'analyse de la figure à reconstruire, c'est-à-dire l'ordre des étapes à tenir pour la construction de la figure, semble donc plus importante que dans la situation papier-crayon. Sans reconnaissance de la configuration géométrique (un grand carré composé d'un petit carré puis d'un triangle) les élèves sont en plus grande difficulté qu'en papier-crayon pour continuer la construction de la figure robuste. Il s'agit d'une contrainte de robustesse liée au fait d'être sur un logiciel de géométrie dynamique, et pas seulement une contrainte interne de la figure, ce qui complexifie l'activité de construction. Dans l'environnement papier-crayon, il semble que les élèves pourraient développer une activité *a minima* de traitement sans reconnaissance ni organisation (reproduction de la figure comme un dessin, en contournant ses contraintes internes). Dans l'environnement GéoGébra, les contraintes logicielles font ici que les sous-activités attendues sont pour tous (*a maxima*) plus longtemps. Les élèves n'ont pas la possibilité de définir les points dépendants avant les points libres, ce qui n'est pas forcément le cas dans l'environnement papier crayon. La reconnaissance et l'organisation (mathématique) sont en effet cruciales dès la construction de la figure avec GéoGébra.

Dans ces épisodes, les choix nécessitent en outre des connaissances qui vont au-delà des mathématiques et qu'il convient dès à présent d'étiqueter : des connaissances instrumentales (Abboud et Rogalski, 2017). Ces connaissances instrumentales peuvent être manipulatoires, voire très spécifiques du logiciel, ou bien instrumentales mathématiques, c'est-à-dire aller au-delà des fonctionnalités du logiciel et imbriquer des mathématiques. Les traitements sont donc complexifiés car il y a des adaptations nouvelles, instrumentales, sans équivalent en environnement papier-crayon où elles n'existent pas. Associées à ces nouvelles adaptations vont s'associer des reconnaissances « instrumentales » et des sous-activités d'organisation « instrumentales » nouvelles.

Dans l'épisode 1, on voit aussi que deux points de vue sur la figure cohabitent : un point de vue de géométrie repérée comme en papier crayon, dans laquelle les points (y compris le point E) sont placés avec la souris par manipulation directe sur l'écran (disons *Gd* pour simplifier) et d'autre part un point de vue beaucoup plus proche de la géométrie analytique dans laquelle les points sont placés par leurs coordonnées entrées dans la barre de saisie (*Gs*). GéoGébra permet *Gd* car il affiche en surbrillance les coordonnées des points libres ou liés que l'on souhaite positionner dans le plan, avec une « aspiration » des points libres à coordonnées entières ou des points liés approchés des objets géométriques déjà construits.

Dans l'épisode 2, le passage par le curseur est un intermédiaire qui est supposé favoriser l'activité de changement de cadre géométrie/fonctionnel chez les élèves mais il n'est nullement un passage obligé dans la construction. Les élèves ont déjà manipulé le logiciel GéoGébra et ils sont habitués à introduire des curseurs pour créer des points mobiles. De fait, dans l'épisode 2, il est attendu – entretien avec l'enseignant - compte tenu des connaissances anciennes des élèves, qu'ils créent un curseur qui permet de piloter le point E sur le segment [D,C]. On tiendra donc compte, dans la suite de l'analyse *a priori*, du fait qu'ils ont fait ce choix (passer par un curseur). Mais l'utilisation du curseur participe encore de la complexification de la construction de la figure avec le logiciel de géométrie dynamique, qui suppose un pilotage des commandes, dans un ordre précis, plus contraignant que lors d'un tracé traditionnel d'une figure en papier-crayon (ou dans *Gd*). C'est un traitement avec des sous-activités d'organisation « instrumentales ».

A la fin de la construction, les élèves peuvent vérifier sa robustesse en déplaçant le point E. Il s'agit par contre ici d'une activité de traitement spécifique du logiciel avec à une reconnaissance « instrumentale » de la robustesse.

*La conjecture (deuxième sous-tâche)*

Ces épisodes sont spécifiques de la situation dans l'environnement GéoGébra. Il n'y a pas l'équivalent de cette tâche de conjecture dans un environnement papier-crayon. Nous détaillons l'analyse *a priori* de cette tâche dans le tableau 2 ci-dessous.

|  |  |
|--|--|
| <p>Cinquième épisode : conjecture sur la position de E qui réalise le minimum</p>    | <p>Le logiciel affiche et actualise la valeur numérique des aires de (FGED) et (ABG) en temps réel en fonction de la valeur du curseur, et donc en fonction de la position de E. Il faut conjecturer numériquement, en déplaçant le curseur, la valeur pour laquelle la somme des aires semble minimale. Pour cela, il peut y avoir plusieurs étapes à enchaîner : il faut en effet redéfinir (FGED) et (ABG) comme deux polygones s'ils avaient été créés côtés par côtés (épisode 3) et ainsi faire afficher leurs aires respectives (poly1 et poly2 dans la suite). Il faut introduire la somme de ces deux aires (appelée poly3 dans la suite). Il faut enfin lire de façon dynamique les valeurs numériques pour le curseur et pour poly3, ce dynamisme étant une adaptation nouvelle dans cette sous-tâche de lecture.</p>   |
| <p>Sixième épisode : créer un point mobile M pour avoir une conjecture graphique</p> | <p>Il y a ici une sous-tâche implicite que les élèves sont supposés reconnaître (mis en lumière par l'entretien avec l'enseignant et confirmée par l'analyse <i>a posteriori</i>) : créer la trace d'un point mobile dont l'abscisse serait la variable indépendante (la position du point E sur le côté [DC]) et l'ordonnée la variable dépendante (la somme des aires poly3 à minimiser). Outre cette reconnaissance – qui n'est pas liée à l'usage de la technologie mais plutôt un phénomène de contrat – il y a donc à créer un point M dépendant, dont l'abscisse est la valeur du curseur et dont l'ordonnée est la somme numérique des deux aires poly3. Avec cette introduction, il peut y avoir un changement de point de vue à opérer. En effet, si les points définissant la figure ont pu jusque-là être placés par manipulation directe sur l'écran avec la souris (<i>Gd</i>), il est impératif</p> |

|   |  |
|---|--|
|   | ici d'entrer dans la géométrie où les points sont définis par leurs coordonnées dans la barre de saisie ( $G_s$ ). Notons que les choix sont minimisés car nous avons choisi de ne pas prendre en compte les cas où le point E ne serait pas créé avec le curseur.   |
| Septième épisode : avoir une conjecture graphique | Il faut maintenant déplacer le curseur et la trace du point M lorsqu'on déplace le curseur doit être interprétée comme la courbe de la fonction en jeu. Il y a donc maintenant un changement de cadre, du géométrique vers le fonctionnel. Il faut lire alors graphiquement les coordonnées du minimum sur la courbe et retrouver la valeur de curseur cherchée (abscisse de E) ainsi que la valeur du minimum (ordonnée). |

Tableau 2 : Analyse *a priori* de la tâche de conjecture

Dans ces épisodes de conjecture, on trouve des sous-activités de traitement qui n'ont aucun équivalent dans l'environnement papier-crayon. Il faut d'abord mettre en scène les conditions de la conjecture : les étudiants peuvent notamment avoir à redéfinir les figures comme des polygones de GéoGébra pour voir apparaître leurs aires dans la fenêtre algébrique. En effet, poly1 et poly2 ne sont créés automatiquement que lorsque les élèves créent géométriquement les polygones (DFGE) et (AGB) comme des objets du logiciel.

Dans l'épisode 5, les élèves doivent aussi introduire eux-mêmes une nouvelle variable numérique poly3 qui est la somme de poly1 et poly2. La lecture des covariations numériques du curseur et de poly3 met en jeu des nouvelles adaptations spécifiques de l'activité sur logiciel, liées aux rétroactions du mouvement du curseur (vers la gauche, vers la droite) et au dynamisme. Il n'est pas clair ici de savoir de quelle façon les sous-activités de traitements et de reconnaissances associées à ces nouvelles adaptations embarquent des connaissances mathématiques et lesquelles. Nous y revenons en conclusion.

Dans les épisodes 6 et 7, le traitement nécessaire pour créer le point M nécessite bien la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques mais dans un cadre qui n'est plus géométrique et pas encore totalement le cadre fonctionnel. Il y a à nouveau, en amont et en aval du traitement, des sous-activités de reconnaissances mathématiques : d'une part les futures variables indépendantes (c'est le curseur) et dépendante (c'est poly3) que le logiciel donne à voir dans la fenêtre algèbre à l'épisode 6 et d'autre part dans l'épisode 7 la reconnaissance de la trace comme courbe de la fonction en jeu, avec les coordonnées de son minimum.

Dans l'épisode 7, précisément, le fait de disposer dans une même fenêtre du cadre géométrique et du registre graphique fonctionnel, ou bien le fait de voir la courbe apparaître comme une juxtaposition de points peut questionner. Les élèves doivent reconnaître la trace – discrète - comme une courbe – continue - de fonction, c'est-à-dire avoir une activité de reconnaissance mathématiques (d'un objet mathématique) à partir d'une nouvelle représentation qui n'a pas d'équivalent dans l'environnement papier-crayon, de nature

discrète et que l'on peut parcourir de gauche à droite et de droite à gauche. Les élèves doivent lire graphiquement les coordonnées du minimum et revenir dans le registre numérique pour conforter leur conjecture. Ici la situation a un potentiel adidactique puisque les élèves doivent avoir les mêmes résultats en épisode 5 et 7. Il doit y avoir une rétroaction de la situation mathématique elle-même.

*Résolution algébrique (troisième sous-tâche)*

Cette sous-tâche semble maintenant similaire à l'environnement papier-crayon mais on doit tenir compte dans l'analyse de la situation avec logiciel que les élèves ont eu accès à la conjecture et connaissent le résultat attendu. La motivation de l'activité n'est plus la même que dans l'environnement traditionnel, où l'activité est motivée par la recherche de la valeur qui réalise la minimum. Ici l'activité est motivée par la recherche d'une preuve du résultat que l'on connaît déjà grâce aux conjectures concordantes numériques et graphiques.

Il faut introduire algébriquement une fonction, en l'occurrence la fonction somme des aires de (DEFG) et de (GBA), dépendant de la variable indépendante  $DE=x$  (introduite explicitement dans la fiche par l'aide procédurale, on peut penser qu'il en serait de même dans un scénario papier-crayon). L'introduction de cette variable marque cette fois explicitement de changement de cadre entre cadre géométrique et cadre fonctionnel.

Il faut que les élèves déterminent son expression algébrique, reconnaissent la forme d'une fonction du second degré avec un minimum, mobilisent les outils adéquats en classe de seconde pour le trouver et reviennent au cadre géométrique pour conclure. Nous détaillons l'analyse *a priori* par épisode dans le tableau 3 ci-dessous.

|  |   |
|--|---|
| 8ième épisode :<br>exprimer en fonction de $x$ l'aide du petit carré                                 | C'est un traitement algébrique. Il faut mobiliser la formule de l'aire du carré (niveau de mise en fonctionnement disponible) dans une application immédiate (à ce niveau d'enseignement)   |
| 9ième épisode :<br>exprimer l'aide du triangle   | C'est à nouveau un traitement algébrique qui mobiliser la formule d'aire du triangle, base par hauteur divisé par 2. Il s'agit encore d'une application immédiate à ce niveau, en remplaçant l'une des valeurs numériques dans la formule de l'aire par le $4-x$ .  |
| 10ième :<br>création et traitement de la formule algébrique pour faire apparaître la forme canonique | Il s'agit toujours d'un traitement algébrique, de développement et simplification d'une formule algébrique (application immédiate des connaissances de collège). Il faut ensuite reconnaître un polynôme du second degré et les traitements qui lui sont associés. La mise sous forme canonique n'est cependant pas exigible à ce niveau d'enseignement et l'enseignant devra apporter des aides procédurales. Il restera à reconnaître |

|  |   |
|--|---|
|  | dans la forme canonique les valeurs cherchées du minimum et de la valeur du curseur qui correspond à la position correspondante du point E. |
|--|---|

Tableau 3 : Analyse *a priori* de la tâche de démonstration algébrique

L'expérimentation de la covariation (numérique ou graphique) par pilotage du curseur doit favoriser, plus facilement que dans l'environnement traditionnel, l'introduction de la variable  $x$  indépendante correspondante au curseur et la variable dépendante, à savoir l'aire du carré en fonction de  $x$  ( $x^2$ ) plus l'aire du triangle en fonction de  $x$  ( $4(4-x)/2$ ).

Dans ces épisodes, on va encore voir que l'activité des élèves est différente que s'ils avaient été dans l'environnement traditionnel. En effet, les rétroactions du logiciel pendant les activités de traitement vont aider certains élèves à s'approcher de la formule algébrique.

Il reste toutefois le traitement purement algébrique sur l'expression  $x^2 + 4(4-x)/2 = x^2 - 2x + 8$ . En seconde, les élèves doivent passer, avec l'aide du professeur, par la forme canonique  $(x-1)^2 + 7$  de cette expression, pour retrouver la valeur du minimum et la valeur de la variable pour laquelle ce minimum est atteint. Ici (et c'est cohérent avec le programme de la classe de seconde à ce moment-là), interpréter la forme canonique pour en extraire la valeur du minimum et la valeur de  $x$  pour laquelle il est atteint nécessite pour les élèves d'adopter – avec des aides et des proximités de l'enseignant – la perspective globale à partir de la formule, la relier à la courbe vue globalement, ce qui est bien l'un des objectifs au niveau de conceptualisation visé. Les résultats algébriques doivent être cohérents avec la conjecture graphique.

### 3. L'analyse des sous-activités des deux binômes d'élèves sur quelques épisodes

On comprend que l'activité des élèves en séance TICE n'est pas la même que dans une séance traditionnelle où les élèves n'auraient pas eu accès à une figure dynamique et donc à la possibilité de conjecturer le résultat avant de le démontrer. En ce sens le potentiel d'activité possible à partir de la tâche complexe est augmenté, donnant peut-être plus de sens à la globalité de la tâche pour les élèves et favorisant peut-être ainsi la disponibilité « outil » de la notion de fonction (Gueudet et Vandebrouck 2011), ce qui est aussi en jeu à ce niveau de conceptualisation visé.

Durant la séance, les élèves travaillent par binôme. Il y a très peu d'interventions collectives de l'enseignant sauf au début de la séance afin de mettre en activité les élèves et à l'approche de la fin de la séance afin de faire une synthèse de l'activité des élèves. Le travail est donc essentiellement en autonomie. Toutefois, l'enseignant apporte beaucoup d'aides individuelles aux binômes d'élèves, en priorité à ceux qui le sollicitent.

Deux binômes d'élèves sont observés. Le tableau 4 ci-dessous donne le temps passé par chacun des deux binômes (Aurélien et Arnaud d'une part, Lolita et Farah d'autre part) sur les différents épisodes mis en évidence par l'analyse *a priori*.

| Durées (durées cumulées)  | Aurélien et Arnaud | Lolita et Farah |
|---|--------------------|-----------------|
| Premier épisode : construction du carré ABCD  | 3min32 (3min32)    | 5min (5min)     |
| Deuxième épisode : construction du point mobile sur la côté DC                                    | 7min (10min32)     | 2min (7min)     |
| Troisième épisode : construction du petit carré et du triangle                                    | 9min30 (20 min)    | 3min (10min)    |
| Quatrième épisode : expliciter l'ordre des constructions  | 0min               | 1min (11min)    |
| Cinquième épisode : conjecture sur la position de E qui réalise le minimum                        | 7min (27min)       | 6min (17min)    |
| Sixième épisode : créer un point mobile M pour avoir une conjecture graphique                     | 0 min              | 13min (30min)   |
| Septième épisode : avoir une conjecture graphique   | 0 min (27 min)     | 2min (32 min)   |
| 8ième épisode : exprimer en fonction de $x$ l'aide du petit carré                                 | 2 min (29 min)     | 1min (33min)    |
| 9ième épisode : exprimer l'aide du triangle   | 10 min (39 min)    | 6 min (39 min)  |
| Intervention au tableau de l'enseignante : idée de la forme canonique                             | 39min → 43 min     |                 |
| 10ième : création et traitement de la formule algébrique pour faire apparaître la forme canonique | 5 min (48 min)     | 5 min (48 min)  |

|   |                 |
|---|-----------------|
| Intervention de l'enseignante au tableau : correction de la mise sous forme canonique et interprétation globale | 48 min → 53 min |
|---|-----------------|

Tableau 4 : Répartition des temps passés sur les différents épisodes

*Activité possible et effectives du premier binôme (a maxima / a minima)*

Le binôme faible Aurélien et Arnaud passe beaucoup de temps à construire la figure sous Géogébra et la termine avec l'aide de l'enseignant (après 20 minutes). Nous passerons l'épisode de la conjecture et nous ajoutons l'épisode de création de la formule algébrique.

Le premier épisode porte sur la création du carré (A,B,C,D). Les élèves ont créé un carré en positionnant 4 points A,B,C,D directement sur l'écran, aux bonnes positions repérées par les coordonnées, avec la souris, sans passer par la barre de saisie. Ils choisissent donc la procédure plus proche de l'environnement papier-crayon, c'est celle que nous avons appelé *Gd*, sans utiliser la barre de saisie de Géogébra. Le repère Géogébra sert donc juste de repérage pour placer les points aux bonnes coordonnées par action directe et les points ne sont pas rentrés par leurs coordonnées dans la barre de saisie. Il semble donc y avoir une attirance naturelle des élèves vers les actions directes, c'est-à-dire orientées directement par le but mathématique (placer des points sur une figure), plus que vers des actions indirectes, médiée par le logiciel, orientées par des sous buts – commander le logiciel en utilisant la barre de saisie – et qui nécessitent sans nul doute de l'anticipation.

Le deuxième épisode porte sur la création du point mobile E. On est encore en amont de la construction robuste de la figure entière. L'épisode commence à 3min32. La sous tâche mathématique qui définit cet épisode est de créer un point mobile E sur le côté [BC] du carré (ABCD). Les élèves vont spontanément sur la commande curseur de Géogébra car l'enseignant a installé cette pratique et ils ont déjà effectué ce type de tâche auparavant (action indirecte qui a été routinisée, cf analyse *a priori*, entretien avec l'enseignante).

L'un des élèves sait qu'il faut créer un curseur pour placer E, ce qu'ils font. Il semble naturel pour eux que le curseur va être associé au point mobile E et donc qu'il varie entre 0 et 4. Aucune allusion n'est faite sur le fait que ce curseur correspond à l'abscisse de E mais les élèves profitent de la boîte de dialogue pour nommer leur curseur e. Le curseur se crée et apparaît à droite de l'écran avec comme valeur par défaut 1 (4min22).

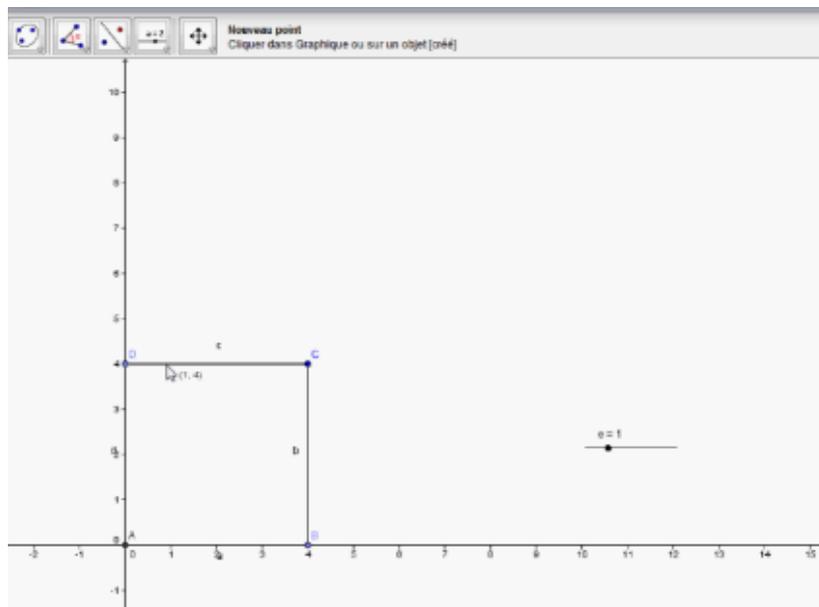
Ensuite les élèves doivent créer le point E sur le segment. Ils hésitent. Ils utilisent la commande nouveau point puis approchent le pointeur du segment [CD] au niveau du point (1,4). Il est à noter que la position (1,4) correspond à la fois à la figure sur la feuille papier et à la position avec la valeur par défaut du curseur. Les élèves renoncent finalement à cliquer pour créer le point (vignette 1, ci-dessous). On peut penser qu'ils savent que leur création doit mettre en jeu le curseur mais que leur procédure ne peut pas aboutir de la sorte.

Ils reviennent cliquer sur la commande curseur pour voir son menu déroulant (vignette 2) puis se résignent à retourner activer la commande nouveau point. Cette fois ils

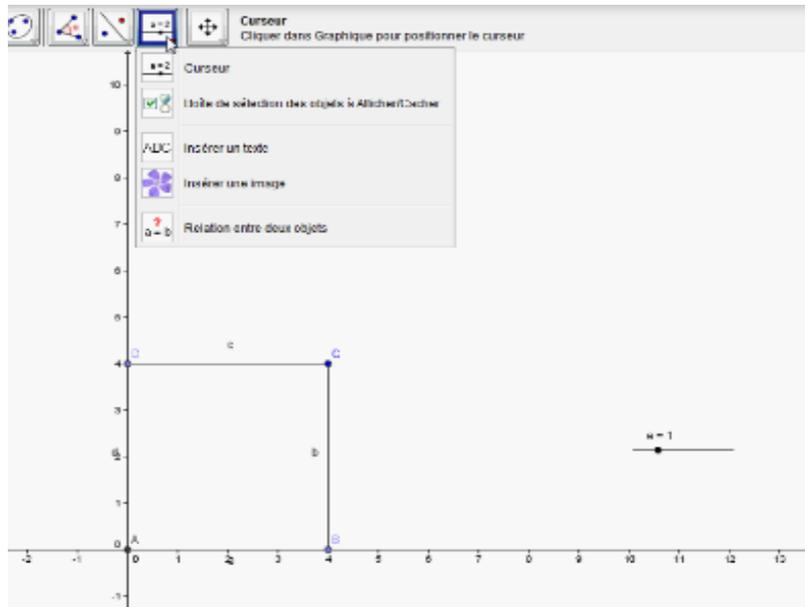
approchent le pointeur du segment [CD] et créent un point E de coordonnées (1,6 ; 3,96) (vignette 3) – il n'a pas été « aspiré » et n'est donc pas sur le segment en fait. Ils renomment le point E en e - pensant encore sans doute pouvoir faire l'association de cette façon - et à ce moment-là le curseur e se renomme automatiquement  $e_1$  (vignette 4). Les élèves ne le mentionnent pas. S'en rendent-ils compte ? Il y a déjà beaucoup de chose à l'écran, notamment en considérant la fenêtre algèbre qui se remplit petit-à-petit, et il n'est pas facile pour les élèves de veiller à tout ce qui apparaît, disparaît ou se transforme. Ils bougent leur curseur mais le point e ne bouge pas (vignette 5). Cela les renvoie à leurs erreurs et ils effacent toutes leurs constructions (vignette 6).

Cet épisode met en lumière plusieurs choses, notamment le fait que les élèves n'identifient pas facilement les transformations à l'écran suite à leurs actions. Il y a en jeu de nouvelles reconnaissances, qui n'embarquent pas de mathématiques mais qui parasitent sans nul doute, si ce n'est complexifient, l'activité mathématique.

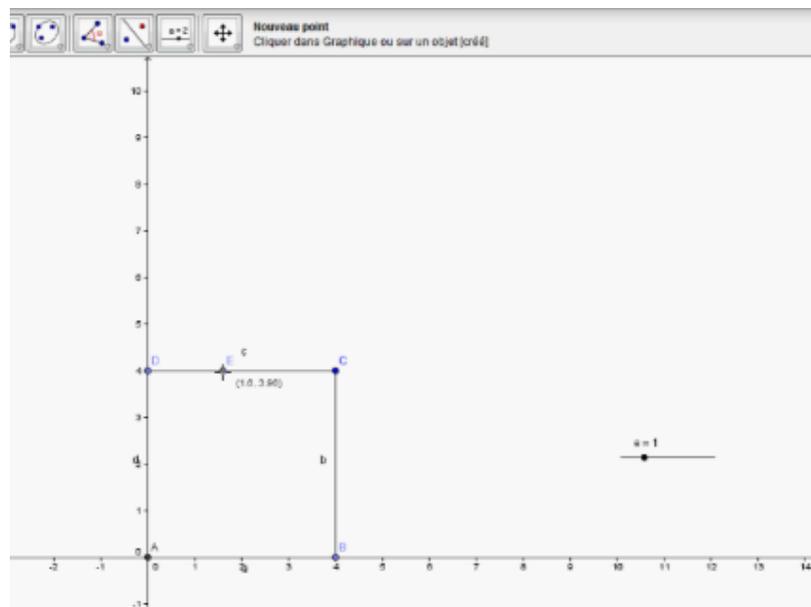
Il y a en outre des méconnaissances instrumentales sur les possibilités d'un logiciel de géométrie dynamique, par exemple la nuance entre associer des points visuellement par des dénominations identiques ou les associer par des propriétés mathématiques, ici le curseur étant l'abscisse du point E. Cette association nécessite une activité mathématique au niveau  $G_s$  (mettant en jeu les liens entre le curseur et l'abscisse de E) alors que comme nous l'avons mentionné plus haut, les deux élèves sont naturellement dans  $G_d$ . Il n'y a pas d'activité possible *a minima* de la part des élèves dans la seule interaction avec le logiciel, ce qui fait qu'ils sont bloqués.



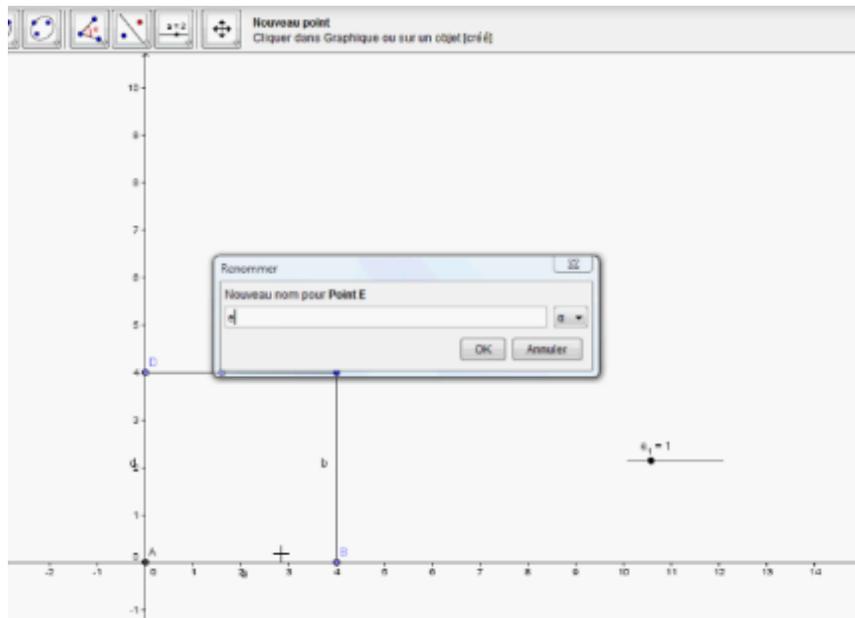
Vignette 1



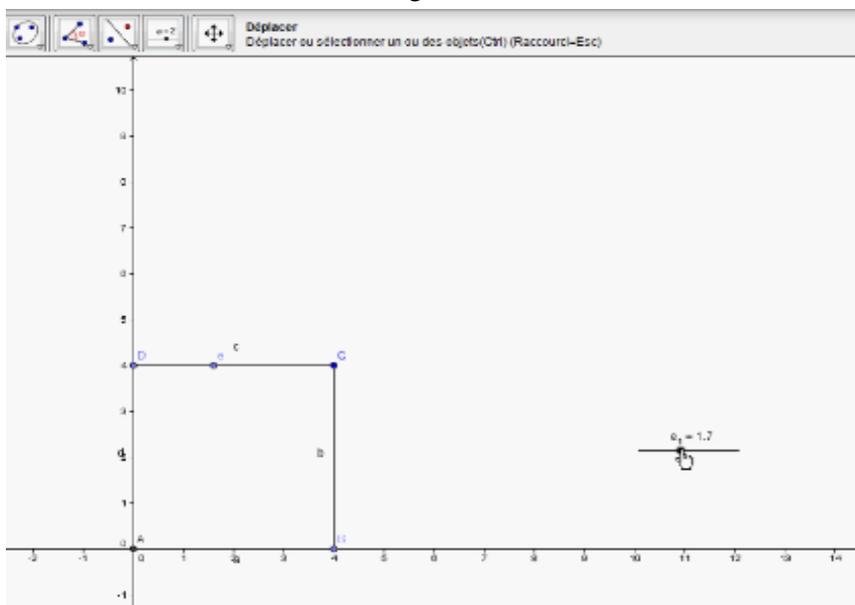
Vignette 2



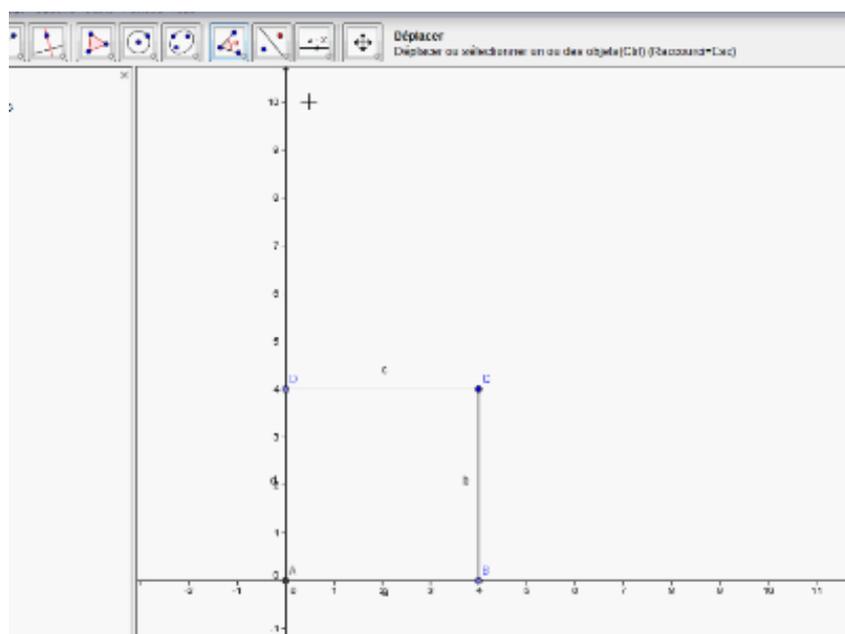
Vignette 3



Vignette 4

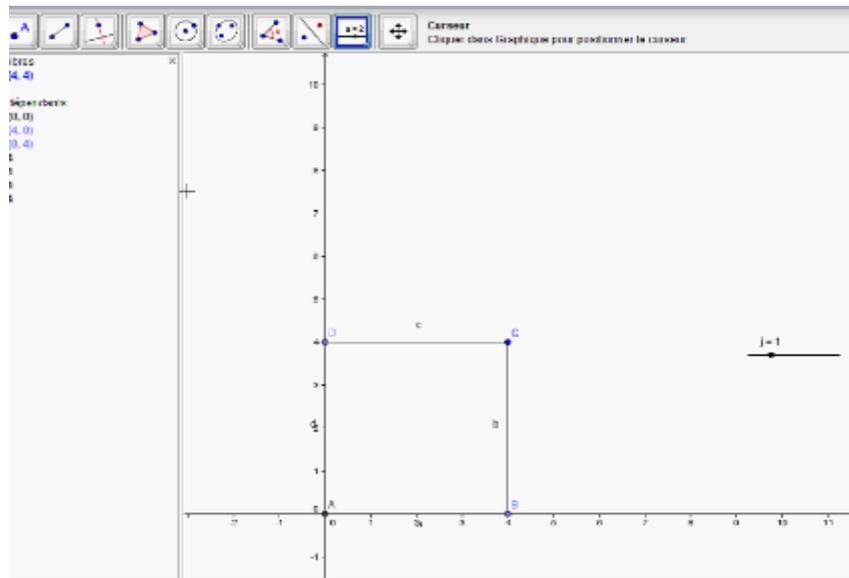


Vignette 5



Vignette 6

Ensuite les élèves recréent uniquement le curseur (ils l'appellent  $j$  cette fois), ils tapent dans la zone de saisie «  $j=(0,4)$  » (vignette 7). Cela crée un vecteur de composantes  $(0,4)$  et supprime le curseur (vignette 8). Les élèves n'identifient pas ce vecteur. Il y a toujours beaucoup de chose à l'écran mais comme le curseur est objet de leur activité, l'un des élèves interpelle l'autre « *t'as enlevé le curseur* » et l'autre de répondre « *c'est pas moi qui est enlevé ça* ». Ils n'ont pas vu le vecteur, ils ne comprennent donc pas ce que fait la machine. Là encore l'activité possible reste uniquement *a maxima* (nécessitant l'association entre le curseur et l'abscisse de  $E$  via la barre de saisie -  $G_s$ ) et cela bloque les élèves s'ils ne sont pas mieux aidés. Ils annulent toutes leurs actions, recréent le curseur  $j$ , puis appellent l'enseignante qui va leur expliquer la création du point  $E$ . C'est la première interaction entre l'enseignante et ce binôme (7min24).



Vignette 7

« E : Madame ?

P : Oui.

E : On a besoin d'aide pour le curseur aussi.

P : D'accord. L'aide pour le curseur. Déjà pour avoir la place du curseur.

E : Oui. Il est juste là ? Oui on l'a mis.

P : D'accord vous avez fait le curseur entre combien et combien ?

E : 0 - 4

P : Voilà. Après ? Ça c'est le nombre.

E : Oui.

P : Donc maintenant vous voulez créer le point.

E : Oui ici - il pointe sur l'écran le point de coordonnées (1,4).

P : Alors ce point, vous allez en saisie, il s'appelle comment ? Je veux qu'il s'appelle comment ce point ?

E : E !

P : E d'accord. Égal (l'un des élèves tape en saisie). D'accord. Quelle va être son abscisse ?

E : 0 - 4 !

P : Ben une abscisse 0 4 c'est difficile ! Justement qu'est-ce que t'as appelé...

E : j !

P : Ben justement comment tu l'as appelé ton curseur ?

E : j !

P : j ?

E : Oui oui !

P : OK ! Et son ordonnée ?

E : 4 !

P : Voilà ! Et bien vérifie si ça marche bien. Voilà. Maintenant fait varier avec le pointeur. Vois si c'est bon »

L'aide de l'enseignante est procédurale (avec des « questions à un mot » : comment s'appelle le curseur ? j ! Donc j c'est l'abscisse...) et même si elle aide les élèves à faire le pont entre le point E et le curseur, cela ne suffit pas à ce que les élèves construisent totalement ce lien entre le curseur et un point mobile (connaissance que l'on a qualifiée plus haut de connaissance instrumentale). Les élèves commencent par chercher à déplacer directement le point mobile E mais il ne bouge pas. C'est suite à cette rétroaction de GéoGébra qu'ils pensent après plusieurs tâtonnements (actions/rétroactions) à déplacer le curseur dans le but de faire déplacer le point mobile. La régulation de l'activité vient donc bien cette fois après la rétroaction de l'outil. Il y a donc une médiation de l'activité par GéoGébra (la rétroaction) qui permet la régulation à bon escient de l'activité des élèves, et dont on peut donc penser qu'elle a un effet constructif sur les élèves – au moins à court terme. Toutefois les connaissances (très locales) construites sont-elles mathématiques ou bien uniquement manipulatoires ? Ensuite les élèves rédigent.

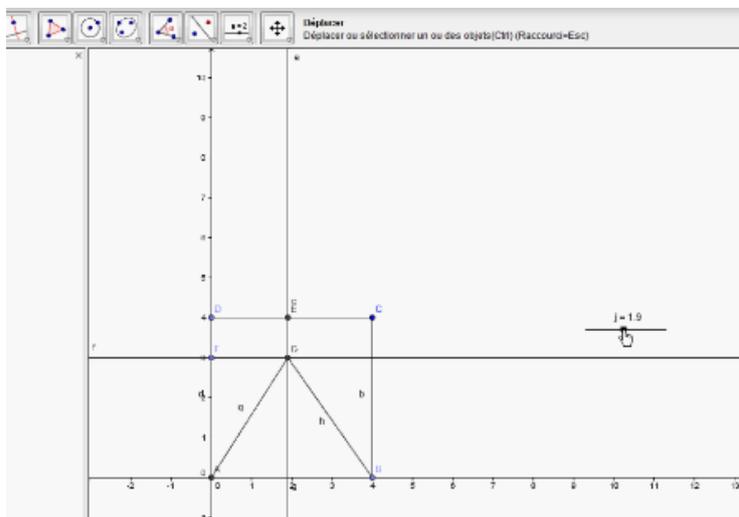
Le troisième épisode est la finalisation de l'enseigne (de 10min30 à 20min). Les élèves placent F en (0,3) sans construction, ne réutilisant pas le curseur. Ils sont donc à nouveau dans la géométrie directe *Gd*. Cela tend à montrer que la régulation qui a été opérée plus haut ne leur permet toujours pas d'accéder à *Gs* et au fait que les points liés doivent être définis et pilotés par le curseur. Peut-être une aide à visée constructive, ou du moins une reprise *a minima* de l'activité dans *Gs*, aurait été bénéfique aux élèves au moment où ils déplaçaient le point E avec le curseur, pour expliquer que les points liés de la figure, définis à partir du curseur, doivent nécessairement l'être à partir de la barre de saisie (dans *Gs*).

Puis ils construisent le quatrième point de façon correcte (par deux perpendiculaires) montrant qu'ils savent faire des figures robustes et que leurs difficultés ne sont pas de cet ordre. [GA] et [GB] ne posent ensuite pas de problème puisqu'il suffit de les redéfinir comme segments (11min34, vignette 9). Ils bougent leur curseur spontanément pour vérifier la robustesse mais ne reconnaissent pas que la figure n'est pas correcte (vignette 10). Ils ramènent la figure à sa « position d'équilibre », avec le curseur valant 1 et l'un des élèves conclut « voilà moi j'ai fini la figure (ie c'est bon, on passe à la suite) » (13min).

La dialectique dessin-figure - la mise en fonctionnement des commandes de GéoGébra pour construire des figures – et la dialectique *Gd/Gs* sont de nature différente. Ce sont d'autres connaissances instrumentales qui sont en jeu dans cette deuxième dialectique. On voit à nouveau combien les rétroactions logicielles, même si elles peuvent permettre de réguler localement l'activité, ne sont pas suffisamment constructives pour que les nouvelles connaissances instrumentales, sur le lien curseur-coordonnées des points liés, s'installent. L'aide procédurale de l'enseignante n'y contribue pas non plus puisque l'activité de création du point E (qui embarque *a maxima* les reconnaissance des liens entre le curseur et l'abscisse du point E) est transformée en traitement. On voit en outre que l'activité de reconnaissance des liens n'est pas reprise *a minima*, ce qui ne contribue pas à l'effet constructif espéré.

On peut aussi discuter sur le statut de la deuxième rétroaction fournie par GéoGébra, à propos de la robustesse de la figure. Elle n'est pas procédurale car elle ne modifie pas la



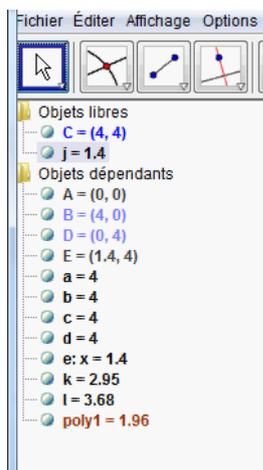


Vignette 10

A 15 minutes, l'observateur fait remarquer aux deux élèves que leur figure est fautive car le quadrilatère doit rester un carré dans les déplacements. L'un des élèves conteste le fait car l'énoncé ne le précise pas. Cela renforce notre analyse *a priori* sur le fait que la construction de la figure robuste en géométrie dynamique nécessite plus de reconnaissance de la configuration géométrique qu'en environnement papier-crayon, dans lequel les deux élèves auraient pu faire une figure – statique – en reproduisant la figure de la feuille de travail comme un dessin, c'est-à-dire une activité de construction *a minima* (sans toutes les reconnaissances supposées).

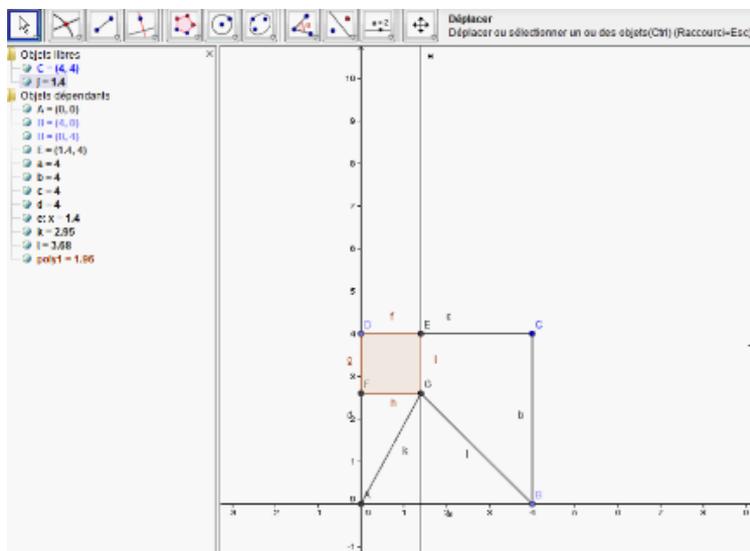
L'amorce de la construction correcte de la figure se fait donc avec l'aide de l'observateur. Les élèves identifient bien F comme étant le point problématique mais n'arrivent pas à le construire correctement sans l'aide du professeur (aides procédurales : « *vous allez dans polygones...* »...). Cela leur permet de créer le carré (DEGF) correctement comme un polygone. Ils complètent alors leur figure en créant les deux côtés du triangle comme dans la précédente construction (19min).

Le cinquième épisode est celui de la conjecture. Mais les élèves doivent ici préalablement avoir l'affichage des aires du carré et du triangle en vue de la conjecture. Celle du petit carré est déjà apparente dans la fenêtre algébrique car le carré a été créé comme polygone avec l'aide du professeur en épisode 3 (ce qui génère automatiquement une valeur numérique poly1 égale à son aire). Actuellement dans le menu algébrique, il y a donc 14 objets créés et qui apparaissent (vignettes 11 et 12), ce qui renforce une remarque déjà faite sur la difficulté pour les élèves à reconnaître les objets qui apparaissent, qui disparaissent, qui s'actualisent...

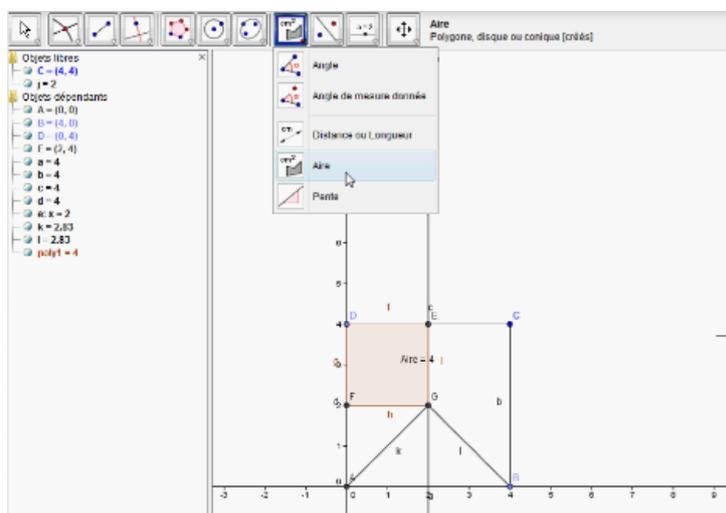


Vignette 11 : La fenêtre Algèbre de GéoGebra à ce moment de la construction

Les élèves demandent en fait à GéoGebra de réafficher l'aire du carré par la commande « aire » du menu et ils veulent aussi faire afficher l'aire du triangle. Mais celui-ci n'a pas été redéfini comme triangle dans GéoGebra (vignette 12). Il est donc visible par les élèves mais n'existe pas comme objet polygone.



Vignette 12

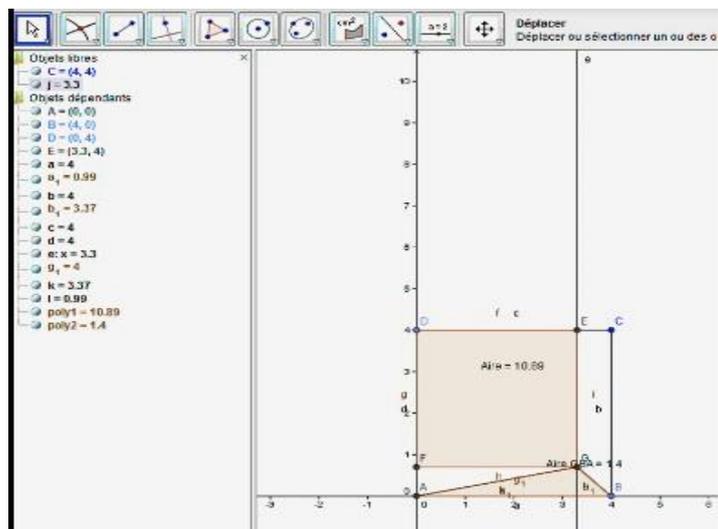


Vignette 13

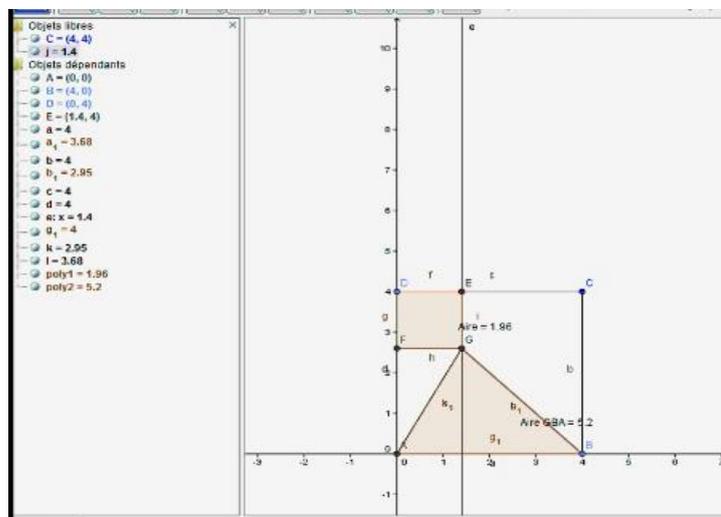
Les élèves arrivent finalement en tâtonnant à redéfinir le triangle comme polygone. Est-ce à dire que cette fois l'aide procédurale du professeur pour créer le petit carré comme un polygone a permis un transfert local ? Cela n'avait pas été le cas pour le transfert de l'aide procédurale sur la construction du point E à la construction du point F, mais dans ce cas-là cela mettait clairement en jeu des connaissances instrumentales sur le lien entre le curseur et l'ordonnée du point F. Ici, le transfert porte sur des connaissances qui embarquent des connaissances mathématiques mobilisables. Plus précisément, redéfinir le triangle comme un polygone pour faire afficher son aire, suppose une association triangle-polygone qui est une connaissance mathématique très ancienne et de fait sans doute mobilisable au moment où l'enseignant y fait appel.

L'aire du triangle apparaît donc dans la fenêtre algèbre mais les élèves ne la voient pas. Il faut avoir des connaissances sur le fait que la création d'un polygone génère une valeur numérique qui vaut son aire, dans la fenêtre algèbre, ce qui est une connaissance uniquement liée au logiciel. Les élèves recommandent à nouveau à GéoGébra d'afficher l'aire du triangle comme ils l'avaient fait pour le carré (vignette 13) (20min01).

Il y a donc un cinquième épisode bis, celui de la conjecture. Les élèves ont des difficultés pour faire la conjecture du minimum. En effet, ils n'ont pas demandé l'affichage de la valeur égale à la somme des aires du carré et du triangle – ce qui correspondait à une initiative à prendre identifiée dans l'analyse *a priori* - et ils calculent les sommes de tête. Ceci amène l'un des élèves à penser que la somme est constante égale à 8 (figure 14 et 15) « Regarde, c'est tout le temps 8 ! »



Vignette 14



Vignette 15

Finalement ils parviennent à la conjecture mais de nouveau avec l'aide de l'enseignant, qui leur fait générer dans la fenêtre algébrique une variable égale à la somme des deux aires (aide procédurale), puis en leur faisant observer les variations numériques de cette somme des aires dans la fenêtre algèbre de GéoGébra. Il y a donc une activité de traitement, *a minima* par rapport à l'activité attendue sur cet épisode, permise par l'intervention de l'enseignante et sans laquelle les élèves auraient été bloqués par une activité possible seulement *a maxima*. Là encore l'activité perdue d'organisation (introduire une variable numérique intermédiaire, égale à  $\text{poly1} + \text{poly2}$ ) n'est pas reprise *a minima* puisque le professeur est reparti.

Les huitième et neuvième épisodes sont ceux de la création de formule. Aurélien et Arnaud ayant perdu du temps sur leur construction et leur conjecture numérique, ils ne passent pas par le registre graphique (épisodes 6 et 7) et doivent directement faire la démonstration. Cela ne pose pas de problème pour eux de passer de la conjecture numérique à la phase de démonstration algébrique (partie 3 de l'énoncé). Le fait de démontrer dans le registre algébrique a sans doute été routinisé dans l'environnement papier-crayon par les élèves, comme le fait d'introduire spontanément le curseur pour le point E mobile. Les élèves suivent aussi peut-être méthodiquement leur feuille de travail.

Mais ils sont très vite en difficulté pour exprimer les aires en fonction de  $x$ . L'introduction de la variable  $x$  dans l'énoncé de la fiche élève reste en fait très artificielle pour eux. Ils voudraient au départ implémenter directement  $DE = x$  dans la ligne de saisie du logiciel, ce que le logiciel n'accepte pas (rétroaction « équation invalide »). Comme il apparaît dans la discussion, les rétroactions du logiciel ne permettent pas aux élèves de surmonter seuls la difficulté et le statut de la notation  $x$ .

« E2 - Bon après alors... on pose  $DE$  est égal à  $x$ ... donc il faut tracer  $DE$  déjà...

E1 - oui tracer  $DE$  tu traces et après faudra que tu mettes en bas  $DE$  est égal à  $x$  ce que j'ai mis déjà mais...

E2 - A la place de  $DE$  faudrait peut-être mettre le nom du segment, non ?

E1 - Ben non parce qu'il sera égal à  $x$ .

E2 - OK ... équation invalide, tu vois...

E1 - Ah, j'avais raison... »

Les élèves restent donc en difficulté et ont besoin du professeur pour comprendre qu'il faut travailler dans l'environnement papier-crayon. Il reste encore des difficultés profondes liées à la dépendance ce qui n'est pourtant plus l'enjeu à ce niveau de conceptualisation. L'expression « en fonction de » ne traduit pas pour eux l'idée de covariation mais se comprend comme « dépend de », c'est-à-dire en un sens uniquement algébrique et sans les perspectives sous-jacentes.

Les élèves travaillent sur la figure lorsque le point E est en (1,4). Alors le triangle dont la base mesure toujours 4 a une hauteur de 3. L'un des deux élèves pense que « dépendre de  $x$  » signifie qu'il faut rajouter  $x$  après les valeurs numériques comme le montre l'échange ci-dessous.

« E1 - Ici  $4x$

E2 - Base fois hauteur... Donc la base c'est 4...

E1 -  $4x$  ... c'est 4 fois  $x$ ... parce que c'est en fonction de  $x$

E2 - Ah ? La hauteur ?

E1 - Ben la hauteur...  $3x$

- E2 - *Non ça peut changer*  
 E1 - *Oui mais là en l'occurrence*  
 E2 - *Regardes, là c'est plus  $3x$  là... (il bouge le curseur)*  
 E1 - *Mmm ... ben écoutes...*  
 E2 - *Déjà pour le carré on a trouvé parce  $x$  carré ce sera toujours l'aire du machin... c'est pas plus compliqué que ça... la base ce sera toujours 4*  
 E1 - *Non, c'est pas beaucoup plus compliqué mais...*  
 E2 - *La base elle changera pas*  
 E1 - *C'est  $4x$  fois*  
 E2 - *Oui la base elle change pas, ça c'est déjà quelque chose...*  
 E1 - *La base elle changera pas*  
 E2 - *Oui ça c'est sûr*  
 E1 - *Mais après il faut trouver la hauteur...*  
 E2 - *Comment elle s'exprime en fonction de  $x$ ... »*
- L'élève E1 reste très accroché à la figure « *Oui mais là en l'occurrence* ». Il y a peut-être même une ambiguïté pour cet élève dans la mesure où il accepte que le côté du carré soit  $x$ . N'est-ce pas  $x$  car sur la figure affichée, le côté du carré vaut 1 (et donc  $1x = x$ ) ? A nouveau le second élève doute. L'interaction entre les deux élèves et le logiciel (« *Regardes, là c'est plus  $3x$  là...* ») permet d'entretenir un temps une activité *a maxima* mais la difficulté reste trop grande pour les élèves. La médiation ne leur permet pas de trouver la bonne formule algébrique pour l'aire du triangle. C'est le professeur qui vient les aider à nouveau. Le premier élève E1 pense toujours que la base du triangle est  $4x$  car les aires dépendent de  $x$ .
- « P - *Ici la longueur EG elle fait combien ?*  
 E1 -  *$x$  !*  
 P -  *$x$  ! La longueur totale là ?*  
 E2 - *4 !*  
 E1 -  *$4x$  !*  
 P -  *$4x$  ou 4 ?*  
 E1 -  *$4x$*   
 E2 - *Ben 4*  
 P - *Le carré c'est un carré de côté quoi ?*  
 E2 - *4*  
 P - *Ben 4 D'accord donc cette longueur totale elle fait combien ?*  
 E2 - *4*  
 P - *4 Et celle-ci fait ? (l'enseignant pointe sur l'écran)*  
 E2 -  *$x$  !*  
 P - *Et moi je veux ? Celle-là... (en pointant) La hauteur du triangle ! Oui Ben à vous !*  
 Ah...  
 E2 -  *$4-x$  ....*  
 P - *Peut-être...*  
 E2 - *Oh punaise ! »*

Enfin ils trouvent la formule développée simplifiée avec des aides procédurales du professeur (questions à un mot). L'activité effective a été *a minima* grâce aux

interventions du professeur mais n'auraient pu être possible *a maxima*. Même en interagissant avec la machine, les élèves auraient été bloqués.

La fin de la séance approchant, le professeur passe au tableau pour introduire l'idée de la mise sous forme canonique de l'expression algébrique de l'aire par une formule à trous. Les élèves recopient au tableau  $x^2-2x+8 = (x-)^2+_{}$  et travaillent sans succès dans le 10ième épisode sur cette mise sous forme canonique. Ils ont donc une activité *a minima* sur la génération de la formule algébrique et sur la mise sous forme canonique. Même s'ils ont encore du temps pour y travailler (8 minutes), ils n'ont pas du tout d'activité sur la sous-tâche qui leur reste dévolue de remplir les trous. Ils n'en comprennent pas l'enjeu.

La question est finalement entièrement corrigée par l'enseignant au tableau dans les 5 dernières minutes de la séance. Il apporte en outre des aides à visée constructive sur la signification des coefficients dans la forme canonique et leurs liens avec la valeur du minimum cherchée et la position du point E qui lui correspond. Cependant compte tenu des nombreuses activités *a minima* observées chez Aurélien et Arnaud, ces aides sont trop prématurées et les élèves ne font pas du tout le lien avec leur conjecture numérique. En d'autres termes, la médiation collective proposée par l'enseignant, qui aurait supposée plus d'activités *a maxima*, n'est pas du tout une proximité ascendante dans le cas de ce binôme d'étudiants.

#### *Activité possible et effectives du deuxième binôme (a maxima / a minima)*

L'autre binôme est constitué de Lolita et Farah, de bonnes élèves. Bien des difficultés observées au moment du passage à l'algèbre chez le binôme faible n'existent plus. Cependant, de nouvelles difficultés apparaissent, plus fines. Les élèves ont tout d'abord bien réalisé leur figure, bien expérimenté numériquement la covariation et bien conjecturé numériquement la valeur du minimum (activités *a maxima*, avec même quelques aides non procédurales de l'enseignante). On se concentre dans cette analyse *a posteriori* sur l'épisode 5, sur lequel les élèves Aurélien et Arnaud n'ont pas eu d'activité.

Elles ne comprennent pas l'une des questions de l'énoncé « Quelles fonctionnalités du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ? ». Elles ne reconnaissent donc pas la sous tâche implicite prescrite par le professeur et cherchent dans les menus GéoGébra ce qui pourrait les aider à répondre à la question.

« E3 - *Quelles fonctionnalités du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ?*

E4 - *Oui, on met que*

E3- *Ca veut dire en gros qu'est-ce qu'on peut utiliser.*

E4 - *Ah, au pluriel ?*

E3 - *Oui. Ca veut dire en gros qu'est ce qu'on peut utiliser pour confirmer que c'est ce qu'on a dit c'est bien ça quoi.*

E4 - *Oui, pour confirmer que quand E c'est (1,4) et bien c'est là que la truc d'électricité c'est minimale.*

E3 - *Ben on a fait les sommes donc c'est ça quoi. Mais à mon avis y'a un p'tit truc tu vois...*

E4 - *C'est pas là-dedans... C'est pas là-dedans... (elle cherche dans les menus)*

E3 - *AIRES ! Oui, mais ça avancera à rien. A mon avis, tu vois, comme on n'avait pas lu les questions avant et bien...En fait, c'est avec les sommes. Enfin, j'sais pas, je pense... »*

Les élèves concluent qu'elles ont été trop vite par rapport aux questions de la feuille de travail et donc que cette question est sans objet. Consciencieuses, elles appellent tout de

même le professeur. L'objet de la question du professeur est de faire utiliser la fonctionnalité de trace sur GéoGébra puis faire émerger par ce biais le concept de fonction comme outil pour prouver le résultat conjecturé numériquement.

« E3 - Pour la question 2 quelle fonctionnalité du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ?

P - Oui

E3 - Ben on met que c'est le fait de faire d'avoir fait les sommes ? Ou y'a un autre truc encore ?

P - Un autre truc... c'est une fonctionnalité, voilà, je cherche quelque chose qui on a déjà utilisé dans le logiciel

E3 - Ah on l'a déjà utilisé dans le logiciel ?

P - Mais ça c'est les aires ça c'est pour faire ton calcul donc t'as déjà trouvé quoi au fait comme minimum ?

E3 - E c'est (1,4)

P - (1,4) oui, d'accord, coordonnées (1,4). Bon OK donc qu'est que tu voudrais quand on demande un minimum. Trouvez-moi quelque chose qu'on a déjà utilisé dans le cours, ou... je sais pas, qui fait apparaître un minimum... Parce que là ce que vous m'expliquez-vous, vous avez déplacé votre curseur, vous avez regardé

E3 - s

P - s la somme et puis manuellement vous avez vu tiens c'est minimum à 7, OK... »

Finalement l'intervention du professeur se situe au niveau procédural. Le professeur donne les instructions aux élèves afin de construire le point M. L'activité des élèves sur le lien entre la trace et la covariation entre l'abscisse de E et la somme des aires devient donc *a minima*.

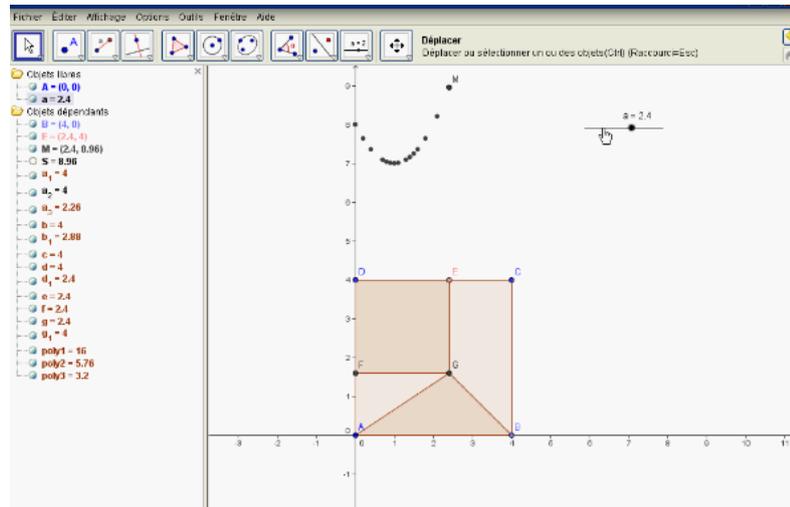


Figure 4 : Cadre géométrique et registre graphique du cadre fonctionnel

Lorsque la trace de M apparaît à l'écran, les élèves mettent spontanément en relation la forme de la trace avec les variations numériques et elles confirment leur conjecture graphiquement. Mais, paradoxalement, elles ne reconnaissent pas la représentation graphique de la fonction qu'elles manipulent déjà numériquement, confirmant sans doute des difficultés déjà identifiées au niveau du relief, sur la difficulté à transférer des connaissances graphiques en connaissances fonctionnelles, et sans doute aussi expliqué par leur absence d'activité *a maxima* lors de la construction du point M.

A l'occasion du tracé (qui a donc été aidé par l'enseignant), les élèves relèvent que « *ce n'est pas une courbe* » « *les minimums et les maximums, on a vu quand on a fait les courbes ... Donc excuses moi mais...* ». La difficulté de transfert est sûrement accentuée par le fait que GéoGebra représente la figure (cadre géométrique) et la trace de la covariation (représentation graphique dans le cadre fonctionnel) dans la même fenêtre (figure 4). Qui plus est cette trace est de nature discrète comme on l'avait relevé à l'analyse *a priori*, même si les élèves tentent de la rendre continue en insistant frénétiquement par déplacements du curseur de gauche à droite et de droite à gauche. La trace obtenue ne peut donc pas facilement acquérir un statut dans le cadre fonctionnel, ou du moins servir d'appui à son introduction.

En outre, si l'exploration numérique n'était pas acceptée par Lolita et Farah comme une preuve mathématique pour la valeur du minimum, l'exploration graphique de la courbe semble par contre bien acceptée : pour elles, l'exploration graphique de la trace permet de prouver la conjecture. Donc cette exploration numérique puis graphique de la covariation ne favorise pas le passage au registre algébrique. Les élèves travaillent volontiers dans la troisième partie mais leur travail algébrique est déconnecté des deux premières parties et elles n'en comprennent pas l'enjeu. Leurs activités algébriques ne semblent donc plus *a maxima* car elles ne sont plus pilotées par la recherche d'une preuve de la conjecture. Les

élèves ont ce faisant des difficultés algébriques à mettre l'expression développée sous forme canonique mais elles y arrivent aidées par l'observateur au moment où l'enseignant reprend la parole.

C'est ensuite l'enseignant au tableau qui corrige la mise sous forme canonique puis donne des aides à visée constructive pour interpréter globalement l'expression canonique, c'est-à-dire identifier à partir de la forme canonique la valeur du minimum et la valeur pour laquelle ce minimum est atteint. Ici compte tenu de l'activité observée des deux élèves, la correction est inutile tandis que l'interprétation des termes de la forme canonique n'est pas non plus une proximité pour ces deux élèves. Il y a en quelque sorte une occasion de proximité manquée sur la motivation de la troisième sous-tâche algébrique.

## CONCLUSION

### 1. Bilan à partir de la séance étudiée

Nous nous sommes fixés comme objectif d'étudier, à partir d'une tâche complexe, les régularités observées, en mettant en relation les sous-tâches, les formes de travail – ici essentiellement un travail en autonomie sur GéoGébra, les actions des élèves (sur la machine, les échanges...), les médiations fournies par le professeur, la machine ou les pairs, et les différentes activités possibles ou effectives des élèves. Nous avons cherché à décrire la répartition entre les sous-activités pendant la séance avec technologie, leurs relations aux sous-tâches prescrites et aux médiations, par exemple les types de médiations associées de façon privilégiée à ces différentes sous-activités. La comparaison avec un scénario et un déroulement (fictif) en environnement traditionnel nous a permis parfois d'avoir des points de repères en terme d'activités attendues sur une tâche du même type en environnement classique, et sur les sous-activités possibles des élèves sans technologie.

#### *Plusieurs types de connaissances en jeu*

La première observation est l'existence de plusieurs types de connaissances en jeu dans les activités des élèves et notamment des connaissances imbriquant des mathématiques et des connaissances de géométrie dynamique plus ou moins dépendante du logiciel GéoGébra lui-même. Ces connaissances sont des connaissances instrumentales. Par exemple l'association d'un curseur (variable numérique spécifique de l'environnement logiciel) à un point mobile met en jeu des connaissances logiciel bien sûr – dans la mesure où le curseur n'est pas un objet de l'environnement traditionnel – mais aussi des connaissances mathématiques : le curseur étant l'abscisse du point mobile dans le cas qui nous intéresse ici. Aurélien et Arnaud tentent l'association en procédant à des renommages visuels, superficiels, du curseur ou du point, ne mettant pas en fonctionnement toutes les connaissances attendues. Il est clair que nos analyses *a priori* doivent donner, encore plus que nous avons essayé de le faire, une dimension instrumentale à nos outils méthodologiques.

D'autres connaissances mathématiques peuvent devoir être disponibles comme par exemple le fait ici que les carrés et les triangles sont des polygones. Il s'agit de connaissances anciennes qui ne sont peut-être pas souvent mises en fonctionnement dans les séances classiques et qui surgissent dans ces tâches GéoGébra. Elles ne sont de fait pas

disponibles (c'est-à-dire spontanément) pour les élèves qui choisissent des procédures plus fastidieuses et perdent du temps.

Il y a aussi des connaissances spécifiques du logiciel – pas uniquement manipulatoires. Par exemple, les élèves doivent savoir que quand ils créent un polygone avec GéoGébra celui-ci associe automatiquement une valeur numérique dans la fenêtre algèbre. On a bien vu comment Aurélien et Arnaud manquent de connaissances sur GéoGébra et cherchent à faire afficher l'aire des polygones alors que ces aires existent déjà en tant qu'objet de la fenêtre algèbre. On a bien vu que Lolita et Farah cherchent des fonctionnalités « miracle » du logiciel qui leur permettrait de conforter leur conjecture. Toutes ces diverses connaissances instrumentales ne sont pas plus facilement disponibles que les connaissances mathématiques, d'autant plus si elles ne font l'objet d'aucune institutionnalisation – ou du moins une mise en lumière - et qu'elles ne sont pas mises en fonctionnement régulièrement.

Nous avons spécifiquement identifié ici la coexistence de deux géométries repérées liées au travail différent sur le logiciel : d'une part une géométrie directe ( $Gd$ ), proche du papier-rayon, et qui est privilégiée naturellement par les élèves faibles Aurélien et Arnaud car demandant une disponibilité plus faible de connaissances instrumentales, et d'autre part une géométrie où on commande le logiciel par une action indirecte (avec un sous-but) et qui suppose le passage par la barre de saisie ( $Gs$ ). Mais pour l'exploitation de GéoGébra dans cette situation, un passage de  $Gd$  à  $Gs$  est nécessaire pour les élèves et il n'a pas son équivalent en papier crayon. Cela suppose toujours d'avoir des connaissances instrumentales mathématiques : ici sur les deux façons de créer un point repéré dans le plan, par manipulation directe ou par la barre de saisie. Plus précisément, les élèves doivent savoir que dans certaines situations de dépendance, ils doivent utiliser la barre de saisie, ici pour créer E si on le définit à partir du curseur, ou pour obtenir la trace de M. On a bien vu comment les élèves faibles restent naturellement dans la géométrie directe, plus proche du papier-crayon car ils n'ont pas les connaissances instrumentales mathématiques nécessaires, ce qui explique leurs difficultés à associer le point mobile E et le curseur alors qu'ils avaient par contre les connaissances manipulatoires pour créer le curseur.

Ces identifications mettent en lumière les nouvelles connaissances en jeu, instrumentales, imbriquant notamment des connaissances mathématiques spécifiques, qui ne sont pas toujours travaillées comme telles, institutionnalisées, et disponibles chez les élèves. Nous en revenons plus bas

A ces nouvelles connaissances s'associent de nouvelles adaptations (des choix nouveaux comme dans les premiers épisodes, des étapes nouvelles comme dans l'épisode 5, un changement de point de vue pour passer de  $Gd$  à  $Gs$ ...) et dont on a vu qu'ils mettent en difficultés les élèves, par exemple l'interférence  $Gd/Gs$ , pour associer le curseur et le point mobile dans le cas d'Arnaud et Aurélien. Le dynamisme des représentations apporte également de nouvelles adaptations de connaissances, spécifiques du logiciel, comme par exemple quand il faut lire des valeurs numériques ou graphiques mais qui varient avec le déplacement du curseur. Lesquelles lire ?

#### *De nouvelles sous-activités mathématiques*

Il y a de fait de nouvelles sous-activités, qui n'ont pas leurs équivalents en environnement papier-crayon. Il s'agit par exemple au moment de la construction géométrique des sous-activités de traitements spécifiques, impliquant des organisations

spécifiques (curseur d'abord puis point ensuite, ordre des instructions induit par les contraintes logicielles et pas uniquement celles de la figure) et des reconnaissances « instrumentales » spécifiques (reconnaissance de la robustesse de la figure par exemple). On a aussi de nouvelles activités liées à l'existence de nouvelles tâches, typiquement la tâche de conjecture dans notre exemple, mais aussi des nouvelles sous-tâches associées à des sous-buts que les élèves doivent parfois se définir seuls (redéfinir les polygones pour faire afficher leurs aires, passer par la barre de saisie pour faire afficher un point..)

On a aussi identifié dans l'analyse *a posteriori* que des activités attendues pour la construction semblent rester *a maxima* pour tous élèves. En effet le logiciel impose d'identifier les points libres et les points dépendant et de les construire dans cet ordre. D'une part les activités sont *a maxima* et d'autre part elles sont plus complexes qu'en construction en environnement papier-crayon d'après ce que l'on vient d'identifier plus haut : il y a presque un transfert de sous-activités de traitement - la construction d'une figure en papier crayon - à des sous-activités de reconnaissance et d'organisation qui prennent le dessus. Les reconnaissances sont cruciales – points libres, points liés, configuration ... - et les sous-activités d'organisation dans la construction proprement dite sont tout autant imposées par les contraintes du logiciel – suites de commandes - que par les contraintes mathématiques de la figure. Il n'est donc pas étonnant que cette étape – qui n'est pourtant pas l'enjeu de la séance - soit très difficile pour les élèves : activités plus complexes, *a maxima*, avec un accent mis sur les reconnaissances et les organisations qui sont les sous-activités mathématiques sans doute les plus difficiles pour les élèves. Dans les usages des Bases d'Exercice en Ligne (Cazes et al, 2006), on avait au contraire mis en évidence que certaines activités pouvaient se faire *a minima* par des élèves, qui détournaient par exemple inconsciemment les logiciels en reconnaissant des régularités de forme dans les rétroactions que leur renvoyaient les BEL. Si on revient à notre exemple, il semble que Lolita et Farah ont développé une activité *a minima* quand elles ont conforté leur conjecture à partir de la trace graphique du point M mais sans en reconnaître les caractéristiques fonctionnelles. Il y a ici à ce sujet tout un champ de perspectives à creuser, selon les tâches mathématiques en jeu et les logiciels utilisés.

Concernant la répartition des sous-activités mathématiques, il semble en outre que les sous-activités de reconnaissances sont nettement majorées dans les tâches avec le logiciel, qui plus est, compte tenu de ce que nous avons dit plus haut, des reconnaissances qui ne sont pas uniquement mathématiques mais de l'ordre de l'instrumental avec des mathématiques embarquées. Il y a les reconnaissances mathématiques, comme par exemple les reconnaissances de configurations, plus cruciales qu'en environnement papier-crayon, mais surtout des reconnaissances nouvelles de représentations qui embarquent du dynamisme, comme la trace de M qui doit être reconnue comme une représentation graphique de fonction. De façon générale, les élèves doivent souvent reconnaître des représentations mathématiques à partir d'ostensifs dynamiques, qui n'ont pas nécessairement les caractéristiques mathématiques des représentations visées. Nos exemples montrent bien les difficultés générales des élèves à reconnaître et la complexité de ces sous-activités de reconnaissance. Aurélien et Arnaud ne reconnaissent pas la non robustesse de la figure, Lolita et Farah ne reconnaissent pas une courbe de fonction. Il n'y a pas forcément congruence entre les représentations dynamiques fournies et les représentations mathématiques des objets : comme on l'a vu la trace de M a un caractère

discret par nature et peut-être parcouru de gauche à droite comme de droite à gauche. Ne doit-on pas expliciter auprès des élèves ces types de « ruptures » avec les connaissances mathématiques ?

Les reconnaissances mathématiques sont aussi beaucoup plus subies que dans l'environnement papier crayon étant donné que le logiciel génère beaucoup d'objet, en réponse aux actions directes ou indirectes des élèves. Il y a beaucoup plus d'information (mathématique ou non, pertinente ou pas) et cela renforce les difficultés des élèves à développer des sous-activités de reconnaissances.

Ces difficultés de reconnaissances semblent toutefois être des spécificités mathématiques de difficultés plus générales de vision des objets sur l'écran. Ce sont des reconnaissances qui n'embarquent pas nécessairement des mathématiques. Il y a beaucoup d'information, pas toutes d'ordre mathématique, sans hiérarchie et qui brouille la perception des élèves. Aurélien et Arnaud ne maîtrisent pas les objets qu'ils génèrent par leurs actions indirectes sur la machine (un curseur qui change de nom, un vecteur sur l'axe des ordonnées). Savoir les repérer et les catégoriser les aurait aidés à réguler leur activité à partir des rétroactions du logiciel. A nouveau cela nécessite des connaissances instrumentales qu'ils n'ont pas – sur les effets des actions indirectes – et leur besoin systématique du professeur pour avancer.

#### *Les diverses médiations de l'activité*

Concernant les diverses médiations de l'activité des élèves, nous avons surtout observé des aides procédurales individuelles de la part de l'enseignant, qui réduisent les sous-activités de reconnaissance ou d'organisation (mathématiques) en amont de traitements : construction de la figure, du curseur, du point mobile, de la trace, de la formule algébrique. Mais il semble aussi que les élèves n'appellent pas le professeur pour les sous-activités d'organisation ou de reconnaissance seules, puisque par nature, soit ils ne reconnaissent pas (la robustesse de la figure, la courbe de la fonction), reconnaissent mal, ou s'organisent mal (ordre des points construits)... Seules les sous-activités de traitement sont bloquantes et cela explique peut-être cette corrélation entre sous-activités de traitement en jeu et aides procédurales. Nous avons observé que des aides procédurales (sans reprise *a maxima* des reconnaissances et des sous-activités d'organisation dont elles privent les élèves) semblent parfois être transférables si elles mettent en jeu des connaissances anciennes mobilisables par les élèves : ça a été le cas pour l'aide procédurale permettant à Aurélien et Arnaud de redéfinir le carré comme un polygone (ils ont transféré au triangle) mais ça n'a pas été possible de transférer l'aide procédurale pour créer le point E à partir du curseur : les élèves n'ont pas su transférer à la création de F. Ici aussi il conviendrait de revenir plus finement sur ces observations.

Les médiations – sous forme de rétroactions – du logiciel ne semblent pas du tout aider pour les sous-activités de reconnaissances ou d'organisation (par exemple pour introduire la variable poly3 avec Aurélien et Arnaud, reconnaître la trace comme une courbe pour Lolita et Farah...). Elles ne semblent aider que pour les sous-activités de traitement, en aval des reconnaissances et des sous-activités d'organisation. En outre, elles nécessitent d'autres reconnaissances « instrumentales » et spécifiques, pour être reçues comme des aides – procédurales ou constructives. Et puisque ces reconnaissances sont très difficiles pour les élèves, subies, les rétroactions du logiciel ne sont pas naturellement un moteur de l'activité

des élèves, en particulier les deux élèves faibles, contrairement à ce que suppose l'activité en autonomie sur le logiciel. On a quand même observé un début de régulation structurante de l'activité des élèves Aurélien et Arnaud au moment du traitement algébrique, dans une interaction mettant en jeu le logiciel et une discussion entre les deux élèves, renforçant toutefois cette idée que les médiations logicielles seules permettent difficilement aux élèves de réguler leur activité à bon escient.

Des activités *a maxima* peuvent rester *a maxima* car des rétroactions du logiciel ne sont pas assimilables par les élèves (manque de reconnaissances instrumentales nécessaires à la minoration des activités par les élèves) et ces élèves peuvent être bloqués. Lorsque des sous-activités de reconnaissance ou d'organisation sont reléguées *a minima* après des aides procédurales de l'enseignant, on retrouve aussi une observation mise en avant dans Robert et Vandebrouck (2014), à savoir que ces activités ne vivent même pas *a minima* car l'enseignant est reparti aider un autre binôme alors qu'une proximité (ou aide constructive – un écrit spécifique au tableau par exemple) pourrait être bénéfique aux élèves. Il n'y a même pas de discours de l'enseignant à propos de ces sous-activités comme cela pourrait au moins être le cas dans un cours dialogué en classe ordinaire. Certains élèves – toujours les mêmes sans doute – sont ainsi privés de sous-activités associées à la globalité de la tâche complexe. En conséquence, les reconnaissances nécessaires pour affronter les tâches complexes sont d'autant plus bloquantes qu'elles ne sont jamais développées par ces élèves.

En termes de proximités enfin, on retrouve aussi un résultat de Robert et Vandebrouck (2014), à savoir la difficulté des proximités collectives de l'enseignant dans ces situations dans lesquelles les activités des élèves sont si hétérogènes. Dans le cas de nos deux binômes, les expositions de connaissances de l'enseignant n'étaient pas suffisamment liées aux activités possibles et observées des élèves (et donc sans doute à leur ZPD) pour s'en faire l'écho et contribuer à des apprentissages sur ce que donne à voir la forme canonique.

## 2. Perspectives

On peut maintenant se demander in fine ce qu'apporte une telle séance sur machine en termes d'acquisition de connaissances pour les élèves. Les élèves sont plus autonome qu'en situation traditionnelle et dans une situation plus complexe à tout point de vue : aussi bien en terme de connaissances à mettre en fonctionnement, qu'en terme de nouvelles sous-tâches, non usuelles, en nouvelles adaptations et nouvelles activités attendues (y compris mathématiques). Dans les déroulements, les activités possibles peuvent rester *a maxima* pour tous, les élèves devant commencer par des sous-activités de reconnaissances et d'organisation, auxquelles ils ne sont pas entraînés de façon générale (Robert et Vandebrouck, 2014), ce qui ne favorise pas une avancée homogène de la classe.

Les médiations proposées par la machine supposent aussi des sous-activités supplémentaires (notamment reconnaissances) qui ne permettent pas à des élèves faibles d'avancer dans les tâches par des activités *a minima* qui pourraient ensuite être reprises par le professeur. Comment minorer à bon escient les sous-activités de reconnaissance et d'organisation pour permettre à ces élèves de travailler davantage, sur des activités réduites mais réelles, *a minima*, avec des médiations procédurales bien choisies et à trouver ?

Il y a souvent lieu d'anticiper, d'identifier, d'interpréter et de contrôler ce que fournit la machine, imposant des reconnaissances à la fois en amont et en aval des traitements, dans

des chronologies – organisations - qui ne sont pas forcément celles qui sont usuelles en papier-crayon et dans des relations différentes avec le reste des activités. Il y a par exemple une posture spécifique de contrôle des résultats de la machine – souvent subis - qui doit se développer chez les élèves et qui n'est pas de même nature que les reconnaissances de résultats mathématiques produits en papier-crayon par les élèves eux-mêmes dans leurs traitements. Il y a également un accent sur la conjecture et l'anticipation de ce que l'on va pouvoir faire avec la machine plutôt que sur la démonstration du résultat mathématique en jeu, ce qui change le motif de l'activité des élèves.

Il faut toutefois distinguer les résultats selon la variété des outils utilisés, entre tableurs, logiciels de géométrie dynamique, calculatrices, logiciels de calcul formel, logiciels de statistiques... Selon les cas, on peut obtenir des valeurs numériques (exactes ou approchées), des calculs algébriques « exacts », des figures, des lieux géométriques à interpréter différemment selon les situations... L'utilisation de ces informations peut ne pas être la même, ni la confiance qu'on peut leur accorder, selon les situations dans lesquelles on se trouve. Mais dans quelle mesure les élèves ont-ils les connaissances instrumentales nécessaires pour faire ces différentes appréciations ?

Il y a sans doute dans ces situations un ou même plusieurs nouveaux cadres mathématiques en jeu, voire de nouveaux niveaux de conceptualisation, qui n'ont pas leur équivalent en papier-crayon, qui intègrent des tâches instrumentales nouvelles et des activités spécifiques, avec certains besoins théoriques minorés mais de nouveaux savoirs à connaître, et dont les élèves ne mesurent pas la portée. Les élèves n'identifient pas les mathématiques qui peuvent être faites dans les nouveaux domaines de travail associés : dans nos exemples, Aurélien et Arnaud essaient d'entrer  $DE=x$  dans la barre de saisie et la rétroaction « équation invalide » du logiciel ne permet pas de comprendre qu'il y a un « changement de cadre », ou qu'il faut sortir du domaine de travail « logiciel » ; tandis que Lolita et Farah explorent le menu en espérant y trouver une fonctionnalité qui confortera comme par magie leur conjecture.

Dans ces domaines de travail mal identifiés, à la fois par les élèves, les professeurs mais aussi le chercheur (associés à des niveaux de conceptualisation non moins identifiés), le géométrique et le fonctionnel se chevauchent, des registres de représentations sans doute également. Dans notre exemple, on peut définir le point M géométriquement mais sa trace doit être interprétée comme la courbe d'une fonction. Il s'agit de reconnaître un objet du registre graphique fonctionnel mais avec des spécificités qui n'obéissent pas aux règles de ce registre : le discret doit s'interpréter comme du continu, le parcours de la trace peut se faire de gauche à droite mais aussi de droite à gauche. On peut sans doute aussi rajouter un aspect temporel – une variable temps sous-jacente - associé au mouvement que l'on peut faire et au dynamisme caractéristique de ces domaines, qui n'existe pas par exemple lorsque l'on considère la représentation graphique usuelle des fonctions.

Il n'est pas facile d'identifier les mathématiques en jeu dans ces situations tant elles sont imbriquées dans les connaissances instrumentales à mettre en fonctionnement. Comment les élèves font-ils ? Il n'est pas non plus facile de savoir dans quelles mesures les nouvelles activités mathématiques en jeu incrémentent réellement les connaissances mathématiques. Reste-il des connaissances mathématiques enjeu d'apprentissage à mettre en fonctionnement dans ces situations ou bien faut-il justement redéfinir les connaissances pertinentes à apprendre, pour aider les élèves à développer leur activité dans ces situations ?

On a bien vu que les sous-activités de reconnaissances, d'organisation et de traitement supposent des connaissances instrumentales mathématiques qui ne sont pas nécessairement mise en lumière par le professeur, ni même reprises, et qui de fait constituent des connaissances cachées, qui s'installent tout de même de façon assez pragmatique. Il y aurait donc lieu de modifier les moments d'expositions des connaissances pour intégrer ces connaissances instrumentales mathématiques. Mais ces connaissances à mettre en lumière supposent-elles les mêmes théories mathématiques et les mêmes besoins théoriques ? Si oui, il n'y a pas d'obstacle à ne pas les institutionnaliser, tout en balisant alors les apprentissages qui sont favorisés par les machines – sans doute certains apprentissages de connaissances graphiques – et au contraire les connaissances qui sont trop vite escamotées avec l'usage des logiciels. Si non, c'est peut-être un tournant à assurer et à assumer que de bâtir de nouvelles mathématiques scolaires, sûrement plus expérimentales, avec un rôle différent des démonstrations, incluant ces connaissances instrumentales.

## REFERENCES

- ABBOUD M., ROGALSKI J. (2017) Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant "ordinaire" utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. A paraître.
- ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a cas environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 7 (3). pp 245 -274.
- BLOCH I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3-28.
- BRIDOUX S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY, C., HACHE C., ROBERT A. (2015) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz* (n°14), IREM de Paris: Paris.
- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- CAZES C., GUEUDET G., HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006) Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies at university, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3) 327-350.
- CHEVALLARD Y. (2002) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 12 (1). pp 73-111.
- COLE, M. & WERTSCH J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski. *Human Development*, 39, 250-256.
- DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5–31.
- DUVAL R. (1995) *Semiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- ENGSTRÖM, Y., MIETTINEN, R., PUNAMÄKI, R.L. (eds) (1999) *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge (UK): Cambridge University Press.
- GALPERINE P. (1966) Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.) *Recherches psychologiques en URSS* (pp.114-132). Moscou: Editions du progrès.
- GUEUDET G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254
- GUEUDET G., VANDEBROUCK F. (2011) Technologies et évolution des pratiques enseignantes : études de cas et éclairages théoriques, *Recherche en Didactique des Mathématiques* 31(3) 271-313.
- HITT, F., GONZALEZ-MARTIN, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérrez, G.L. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 3-38). Rotterdam: Sense Publishers.
- LAGRANGE, J-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 43. pp 1-30.
- LEONTIEV A. (1978) *Activity, consciousness and personality*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- LEONTIEV A. (1984) *Activité Conscience Personnalité* Moscou : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

- LEPLAT J. (1997) *Contribution à la psychologie ergonomique* Paris : PUF.
- MASCHIETTO, M. (2008). Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 13, 207-230.
- MITHALAL, J. (2010) Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle, Thèse de l'Université de Grenoble.
- NOSULENKO, V, RABARDEL, P. (2008) Ergonomie, psychologie et travail dans les pays de l'ex.URSS : historique et spécificités du développement, In M.F. Dessaigne, I. Gaillard (Eds.), *Des évolutions en ergonomie*. Toulouse, OCTARES.
- PASTRE P. (1999) Apprendre des situations. *Éducation permanente*. Vol 139.
- PASTRE, P., RABARDEL, P. (Eds) (2005) Modèles du sujet pour la conception - Dialectiques activités développement, Toulouse: Octarès.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- ROBERT A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe, *Petit x*, 62, 61-71.
- ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.
- ROBERT A., PENNINGCKX J., LATTUATI M (2012) Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.
- ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2014) Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239-285
- ROGALSKI J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In F. VANDEBROUCK (Éd.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp 23-30 & pp 429-459). Toulouse : Octarès.
- ROGALSKI J. (2013) Theory of Activity and Developmental Frameworks for an Analysis of Teachers' Practices and Students' Learning. In F. Vandebrouck (Ed.) (2013) *Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 3-20). Rotterdam : Sense Publishers.
- SAMURCAY, R & RABARDEL, P. (2004) Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. In R. Samurcay et P. Pastré (Eds.), *Recherches en Didactique Professionnelle* (Chapitre 7). Toulouse: Octarès.
- TALL D. (2006) A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 11. pp 195-215.
- VANDEBROUCK F. (Ed.) (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

VANDEBROUCK F. (2011a) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 149-186.

VANDEBROUCK F. (2011b) *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

VANDEBROUCK F. (Ed.) (2013) *Mathematics classrooms – students' activities and teachers' practices*. Rotterdam : Sens Publishers.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2.3) 133-170.

VYGOTSKI L. (1934/1997) *Pensée et langage*. Paris : La dispute.

WELLS, G. (1993). Reevaluating the IRF sequence: A proposal for the articulation of theories of activity and discourse for the analysis of teaching and learning in the classroom. *Linguistics and Education*, 5(1), 1–37.



**TITRE :**

Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : Vers une théorie didactique de l'activité (TDA)

**AUTEURS:**

Fabrice Vandebrouck et Aline Robert

**RÉSUMÉ :**

Nous développons dans cette brochure une utilisation de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques, prolongeant ainsi des travaux inscrits dans la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes.

Il s'agit d'une centration de l'étude sur les activités des élèves en classe, approchées par des outils d'analyse des tâches prescrites par le professeur, la prise en compte du contexte de la tâche, les médiations pendant le déroulement des séances, notamment toutes les aides de l'enseignant. La démarche est mobilisée pour un exemple d'étude des activités d'élèves en situation d'usage de GéoGébra, en classe de seconde. Nous utilisons une catégorisation des activités mathématiques en sous-activités de reconnaissance, organisation, traitement mathématiques. Nous mettons en évidence des interrelations entre ces sous-activités, les médiations fournies par le logiciel et les aides de l'enseignant. De nouvelles sous activités apparaissent aussi, associées à des connaissances instrumentales et de nouvelles mises en fonctionnements.

**MOTS- CLÉS :**

Didactique des mathématiques, théorie de l'activité, analyses de tâches, médiations, activités, ZPD.

**Éditeur: IREM de Paris**

Responsable de la publication: F. Vandebrouck

IREM de Paris 7 – Case 7018

Université Paris Diderot

75205 Paris cedex 13

[irem\\_de\\_paris@univ-paris-diderot.fr](mailto:irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr)

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>

Dépôt légal : 2017

ISBN : 978-2-86612-379-6