



HAL
open science

Éclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire.

Christine Chambris, Eric Mounier, Patricia Nebout, Marie-Jeanne Perrin-Glorian

► **To cite this version:**

Christine Chambris, Eric Mounier, Patricia Nebout, Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Dir.). Éclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire.. IREM de Paris, 4, 2012, Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, Fabrice Vandebrouck, 9782866123406. hal-02110818

HAL Id: hal-02110818

<https://hal.science/hal-02110818>

Submitted on 25 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IREM
PARIS 7

Ldard

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°4
Novembre 2012**

**Eclairages sur l'enseignement des nombres et de
la numération à l'école primaire**

**Editeurs : C. Chambris, E. Mounier, P. Nebout,
M-J. Perrin-Glorian**

ISSN : 2105-5203

**INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

ECLAIRAGES SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES ET DE LA NUMERATION A L'ECOLE PRIMAIRE

Sommaire

Introduction : Des nombres pour quoi faire ? Comment les nommer, comment les écrire ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian 3

La prise en compte de deux systèmes de numération en classe de CP. Une autre façon d'analyser les procédures de dénombrement

Eric Mounier 5

Etude des activités numériques du manuel scolaire ivoirien de mathématiques du CP1 « Mon cahier d'application »

Patricia Nebout-Arkhurst 29

Évolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France

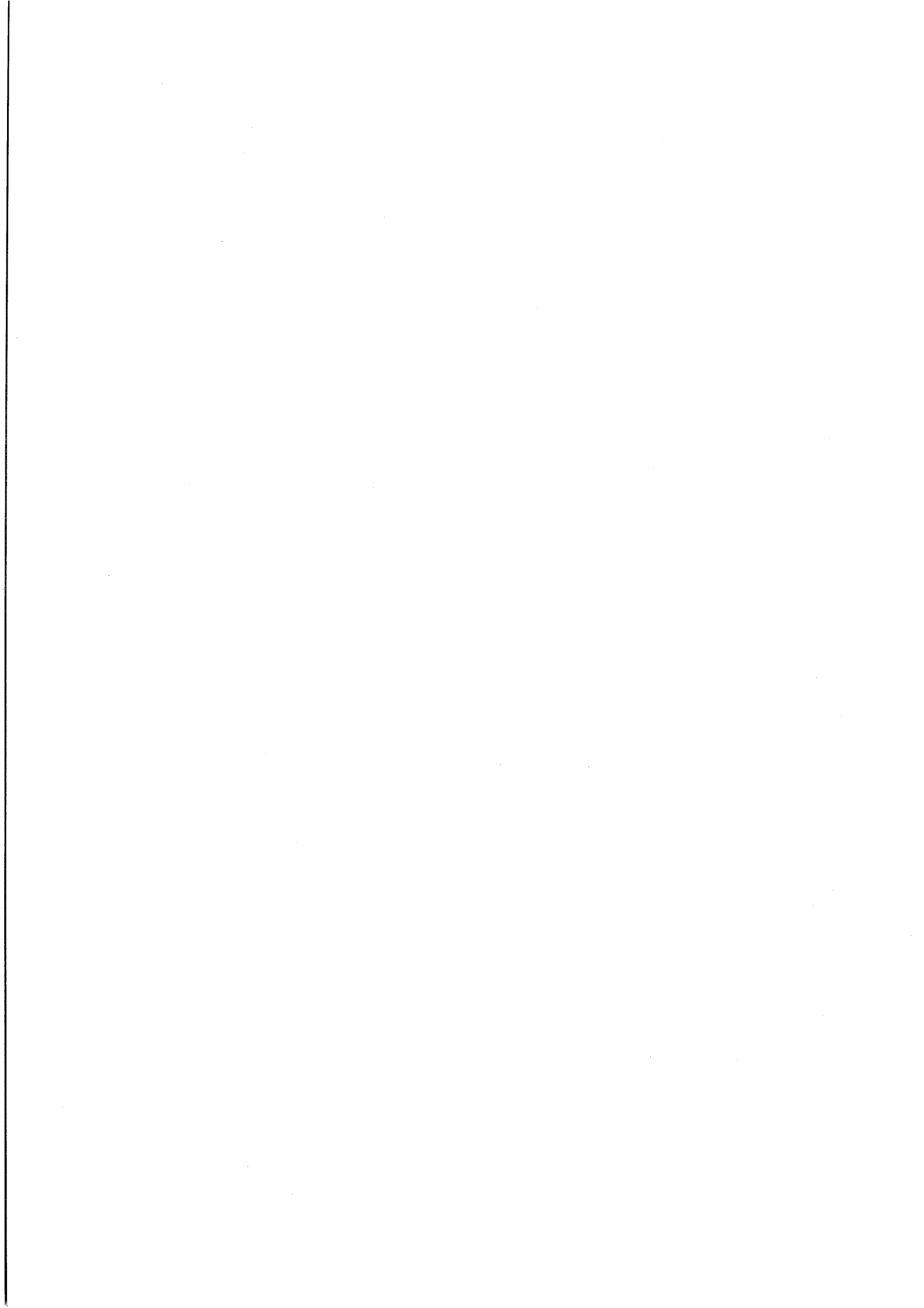
Christine Chambris 51

Epilogue : Des savoirs pour enseigner la numération

Marie-Jeanne Perrin-Glorian 73

The logo consists of the letters 'Ldar' in a stylized, bold, sans-serif font. The 'L' is tall and narrow, while the 'd', 'a', and 'r' are shorter and wider, with the 'a' and 'r' having a slightly rounded, modern feel.

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie



Introduction

Marie-Jeanne Perrin-Glorian*

Des nombres pour quoi faire ? Comment les nommer, comment les écrire ?

L'usage des nombres par les hommes se perd dans la nuit des temps. Divers systèmes ont été inventés pour nommer les nombres dans les différents langages. Divers systèmes de signes ont été inventés pour les écrire plus rapidement et pour calculer. Le système d'écriture chiffrée en base dix qui est maintenant utilisé partout dans le monde a montré son efficacité pour désigner non seulement les entiers mais aussi les décimaux qui permettent d'approcher les réels d'aussi près qu'on veut. C'est un fondement essentiel des mathématiques dont l'apprentissage commence dès le plus jeune âge dans les familles et à l'école.

Cependant les hommes ont mis beaucoup de temps pour créer un système de signes aussi performant et son apprentissage n'est pas aussi simple qu'il y paraît. Il ne suffit pas de savoir compter ni de savoir dire et écrire les nombres. Si l'on veut que les enfants sachent aussi calculer, qu'ils puissent étendre les nombres et les opérations pour mesurer des quantités continues, coder des fonctions linéaires etc. il est nécessaire que les constructions premières soient assez solides pour pouvoir être reprises, transformées, étendues. Ceci explique que l'enseignement de notre système de numération à l'école primaire, bien qu'il ait fait l'objet de nombreuses recherches en psychologie des apprentissages et en didactique, ne fasse toujours pas consensus et qu'il soit encore objet de recherches et de débats.

Deux grandes questions principales se posent pour l'enseignement et l'apprentissage : comment faire accéder les enfants d'une part au sens des nombres et des opérations, c'est-à-dire aux fonctions qu'ils remplissent pour résoudre des problèmes qui se sont posés aux hommes, et d'autre part leur transmettre les réponses que la culture a apportées, notamment le système d'écriture chiffrée en base dix, de façon qu'elles apparaissent bien comme des réponses à ces problèmes et qu'ils puissent les utiliser comme telles, en incluant dans cette question l'étude de ces réponses apportées par la culture.

Décrire une situation fondamentale avec ses variables (Brousseau, 1998) est un type de réponse que la recherche en didactique des mathématiques a apporté à la première question. Brousseau (1995) et El Bouazzaoui (1982) ont décrit une situation fondamentale pour les premiers apprentissages du nombre sous la forme « Des pots de peinture sont disposés sur une table et il faut aller chercher dans une autre pièce en un seul voyage juste ce qu'il faut de pinceaux pour mettre exactement un pinceau dans chaque pot de peinture » ou des variantes. C'est une réalisation de la situation plus générale suivante : un acteur A et un acteur B situés à des endroits et/ou des moments différents doivent se communiquer les informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes. Certaines des variables de cette situation concernent le code commun dont disposent A et B et la forme de la communication, d'autres la nature des objets de la collection et son organisation. Cette situation, dans le cas où l'on impose que l'information soit donnée sous la forme d'une écriture chiffrée en base 10 (produit de la culture), représente les relations entre les collections discrètes et les nombres écrits en chiffres : le jeu de l'émetteur consiste à produire un nombre pour représenter une collection ; celui du récepteur à produire une collection dont le cardinal est donné. L'organisation de la collection est une variation importante ; elle pourra favoriser les

* Laboratoire de Didactique André Revuz, Université d'Artois

groupements itérés par dix ; elle pourra aussi amener à considérer des réunions de collections, des compléments, des partages... et ainsi créer des conditions qui demandent la mise en œuvre des opérations arithmétiques sur les nombres entiers. La thèse en cours de Frédéric Tempier étudie notamment des mises en œuvre possibles de cette situation fondamentale pour enseigner au CE2 la désignation et l'écriture chiffrée des nombres entre 1000 et 9999.

Cependant les nombres entiers servent aussi à comparer et mesurer des grandeurs continues, par exemple les longueurs ou les masses. Pour cela il est nécessaire de discrétiser le continu par report d'une unité : on peut alors compter les unités comme on compte les objets. D'autres situations sont nécessaires dès le début du primaire pour mettre en scène l'utilisation des nombres entiers pour mesurer des grandeurs continues. Elles pourront par la suite être le germe d'une rencontre avec la nécessité de prolonger les nombres par quelques fractions et les décimaux.

La deuxième question est celle de l'étude des réponses apportées par la culture à ces problèmes, notamment la désignation des nombres dans la langue, le système d'écriture chiffrée en base dix, les rapports entre les deux, le système métrique pour la mesure des grandeurs et ses rapports avec le système de numération en base dix.

Les textes d'Eric Mounier et de Christine Chambris, appuyés chacun sur une thèse soutenue respectivement en 2010 et 2008, apportent des éclairages complémentaires sur cette question. Eric Mounier étudie de façon approfondie les relations entre les noms des nombres jusqu'à cent en français et l'écriture chiffrée en base dix. Il en tire des outils d'analyse des procédures des élèves et de l'enseignement en CP. Christine Chambris de son côté s'appuie sur une analyse de manuels pour étudier l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du 20^{ème} siècle. Elle dégage des théories intermédiaires qui permettent de justifier et d'expliquer la cohérence des choix faits aux différentes époques, mais aussi d'identifier les tâches qui peuvent vivre ou non dans l'enseignement selon ces choix.

Le texte de Patricia Nebout se situe dans un autre contexte : celui de la mise en place en Côte d'Ivoire de nouveaux programmes visant une approche par compétences de l'enseignement. Elle analyse de ce point de vue les exercices concernant les apprentissages pré-numériques et numériques (nombres jusqu'à 9) dans le cahier d'exercices fourni aux élèves de CP 1^{ère} année (en Côte d'Ivoire l'école primaire dure six ans et le cours préparatoire se fait sur deux ans).

Références

Brousseau G. (1995). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP*, 400, 831-850.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

El Bouazzaoui H. (1982). *Etude des situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension, l'apprentissage de ces notions*. Thèse de 3^{ème} cycle, université de Bordeaux 1.

La prise en compte de deux systèmes de numération en classe de CP

Une autre façon d'analyser les procédures de dénombrement

Eric Mounier *

Résumé

Les propositions contenues dans ce texte sont étayées par un travail de thèse (Mounier 2010). L'article a pour but de montrer l'intérêt qu'il y a à analyser les procédures de dénombrement en considérant qu'il existe deux systèmes de numération à part entière : la numération parlée et la numération écrite chiffrée. Il se centre sur les dénombrements de collections de cardinaux inférieurs à cent, ceux proposés aux élèves de Cours Préparatoire (CP, élèves âgés de 6-7 ans) lorsqu'ils abordent les aspects positionnels de la numération écrite chiffrée. Les deux systèmes sont distingués en mettant en évidence les propriétés mathématiques qui les différencient. Les procédés modèles de dénombrement que l'on peut alors élaborer permettent une analyse spécifique des procédures d'élèves. Celle-ci peut renseigner sur la proximité des théorèmes-en-acte¹ utilisés avec les propriétés de chacune des numérations. Ceci amène à revisiter la terminologie employée usuellement concernant l'enseignement et l'apprentissage du nombre entier au primaire (nombre, numération, dénombrer, compter, système décimal). Nous proposons en outre de distinguer (et de définir) un des moyens possibles pour obtenir la désignation écrite chiffrée du cardinal d'une collection d'objets. Il se décompose en deux temps qui sont à considérer comme un ensemble : un premier que nous nommons « organiser/configurer pour désigner » et un deuxième consistant à coder cette organisation. Cette stratégie apparaît comme reliée à la numération écrite chiffrée car elle renvoie à des propriétés qui font écho aux principes que nous avons adoptés pour celle-ci dans le cadre de nos analyses. Ceci nous permet de discuter à la fin de ce texte de l'apprentissage du nombre au CP.

Mots clés : nombres, numérations, numération parlée, numération chiffrée, dénombrement, signes et nombre, procédures.

Introduction

L'origine des questions

D'après les programmes scolaires français, les élèves de Cours Préparatoire résolvent, pour les nombres inférieurs à 100, certains problèmes numériques : désigner le cardinal d'une collection d'objets donnée, fournir le nombre d'objets demandé ou encore comparer des quantités ou des nombres donnés sous forme écrite ou orale. Ceci mobilise certaines connaissances sur la comptine numérique orale et les aspects positionnels des écritures chiffrées. Ces connaissances sont utilisées lors de la résolution de problèmes, la plupart du

* Université Paris-Est-Créteil, Laboratoire de Didactique André Revuz

¹ En référence à la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1991), nous considérons que la fonctionnalité d'un schème (l'organisation invariante de la conduite d'un sujet générique pour une classe de situations donnée) peut être analysée comme relevant (au moins en partie) de propriétés pragmatiques tenues pour vraies utilisées sans qu'elles soient formulées (ou même conscientisées) par son auteur. Ce sont des propriétés ou théorèmes utilisés en-acte.

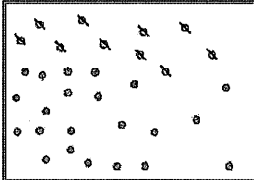
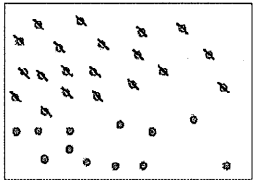
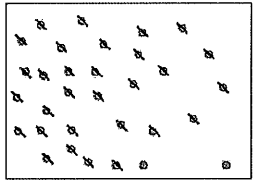
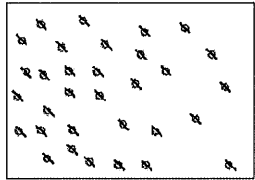
temps de manière non formalisée, en-acte. Plusieurs facteurs non indépendants, qui peuvent se chevaucher, et pris en compte en didactique, influent sur la mobilisation effective par un élève de telle ou telle procédure :

- la nature du problème, selon la classe à laquelle il appartient² ou selon sa complexité³,
- le contexte dans lequel est proposé le problème : cela peut concerner son « habillage », (qui a des conséquences sur la familiarité que l'élève en a) mais aussi le contrat didactique (les attentes réciproques de l'élève et du professeur),
- les variables didactiques : par exemple, le fait que les éléments des collections soient manipulables ou non, ou encore la disposition et le nombre de ces objets,
- les connaissances mobilisables de l'élève, son appréciation de la fiabilité d'une procédure.

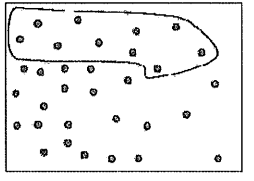
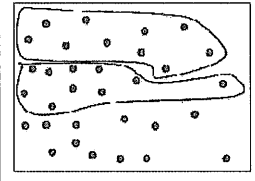
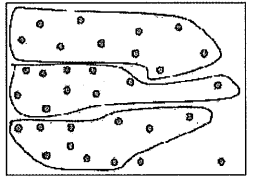
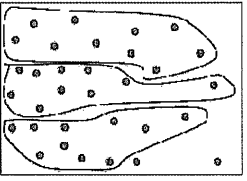
L'analyse des facteurs listés ci-avant concernant les procédures des élèves ne peut pas suffire à comprendre ce qui est du ressort de la numération écrite chiffrée de position ou de la numération orale ... ou bien des deux. Prenons l'exemple d'une collection de ronds dessinés sur une feuille (donc non manipulables) dont on demande à un élève de fin de CP d'écrire le nombre.

Voici deux procédures envisageables parmi d'autres :

Procédure 1

				
Ce qui est dit	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix, vingt	Un, deux, ..., neuf, dix, trente	Un, deux, trente deux
Ce qui est écrit				32

Procédure 2

				
Ce qui est dit	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix	Dix, vingt, trente Un, deux
Ce qui est écrit				32

² Le terme « classe de problèmes » fait référence à la théorie des champs conceptuels, de Vergnaud (1991). Dans ce cadre Fénichel & Pfaff (2005) décrivent celles relatives au nombre à l'école primaire.

³ Robert (2007) considère trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances : technique (contexte familial indiquant explicitement la connaissance à mobiliser, la procédure étant routinière), mobilisable (contexte familial mais la procédure n'est pas routinière, elle demande quelques adaptations au contexte) et disponible (contexte qui ne fait pas appel à la connaissance explicitement).

Il est possible de distinguer dans l'emploi même des procédures certaines propriétés issues de deux systèmes de numération, avec des ressemblances et des différences. La première procédure semble révéler un emploi de l'écriture chiffrée comme une (simple) version écrite de la numération orale : le but est d'obtenir le nom du nombre, ensuite il s'agit d'en trouver la traduction en chiffre. C'est aussi le cas dans un comptage utilisant la comptine numérique des noms des nombres, un, deux, ..., dix, onze, douze, ... vingt, vingt-et-un, ..., trente, trente-et-un, trente-deux, suivi encore ici de la traduction en écriture chiffrée « 32 ». La seconde procédure suit-elle cette logique ? Le nom « trente-deux » est-il utilisé pour obtenir l'écriture « 32 » comme précédemment ? En effet le « 3 » peut être obtenu en comptant le nombre de groupements : directement à partir de l'organisation obtenue en 3 dizaines (mais ici cela n'est peut-être pas le cas puisqu'on n'entend pas compter « un, deux, trois ») ou indirectement, en considérant le nombre de mots dans « dix, vingt, trente ». Les groupements visibles dans cette seconde procédure sont-ils le témoignage de l'emploi de ressources propres à l'écriture chiffrée ? En outre, les deux procédures exposées pourraient révéler des conceptions différentes concernant nombre ou/et numération, ou plus précisément la relation entre numération et nombre.

Cadre d'analyse

Du rapport écrit/oral

Les questions que nous abordons concernent l'emploi simultané de deux numérations, l'une ayant un support écrit avec des chiffres, l'autre un support oral avec les noms prononcés dans la langue parlée. C'est pourquoi nous prenons comme exemple la tâche consistant à écrire une désignation. Ecrire c'est bien souvent transcrire à l'écrit un mot de la langue parlée. En ce sens la numération chiffrée est souvent utilisée dans la pratique en tant que version écrite des désignations orales. Ecrire le nombre revient alors à transcrire en chiffres un mot de la comptine numérique et, réciproquement, comprendre une écriture chiffrée est un exercice de lecture, de transcription dans la langue parlée. Dans cette perspective, l'écriture « 32 » a le même rôle que l'écriture littérale « trente-deux ». Cependant on n'apprend pas à lire « trente-deux » comme on apprend à lire « 32 ». Des similitudes entre le système chiffré et les noms des nombres dans la langue orale peuvent être utilisées pour faire des liens⁴. Par exemple, en se restreignant aux nombres inférieurs à cent et aux langues indo-européennes, une règle peut être utilisée pour la plupart des nombres : le premier chiffre peut être associé à un mot et le second à un autre. Ainsi, en français, s'il est placé en premier « 1 » peut se lire « dix », « 2 » « vingt », « 3 » « trente », etc. S'il est placé en second, « 1 » se lit « un », « 2 » « deux », « 3 » « trois », etc. Outre l'ajout de mots pour quelques noms de nombres (comme le « et » en français dans « vingt-et-un »), il s'agit ensuite de considérer à part le cas de certains noms de nombres. Ces particularités dépendent des langues : en français de France, les noms des nombres de 11 à 16 ainsi que ceux de 70 à 99.

Néanmoins, les deux systèmes peuvent se concevoir indépendamment. Historiquement pour les langues indo-européennes la numération positionnelle chiffrée n'est devenue que tardivement le système écrit utilisé en parallèle du système parlé (Ifrah 1994). Il est donc légitime de s'intéresser aux potentialités d'expression du nombre de chacun des systèmes de numération indépendamment l'un de l'autre.

Références théoriques et méthodologie

Le cadre d'analyse que nous avons adopté dans notre thèse (Mounier 2010) permet de regarder l'apprentissage et l'enseignement du nombre au CP en privilégiant deux systèmes de

⁴ Les erreurs de transcription écriture chiffrée/désignation orale sont souvent relevées, voir par exemple une synthèse dans Fayol (1990).

numération distincts. Ces derniers ont été étudiés à partir des signes qui les constituent. Pour chacun nous avons distingué : d'une part des principes mathématiques qui peuvent sous-tendre la logique de la syntaxe de chaque système de signes et d'autre part la mise en signes de ces principes. Par exemple pour la numération écrite chiffrée, il s'agit d'une part de la décomposition polynomiale du nombre (vue comme une échelle de numération particulière) suivie des choix spécifiques à une numération positionnelle, parmi d'autres possibles (voir annexe). La situation de la numération orale est plus complexe, nous y revenons dans le premier paragraphe. Le lien avec l'apprentissage est fait via la théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1991) en regardant dans la conceptualisation du nombre le rôle joué par les deux systèmes de numération (considérés comme deux systèmes de signifiants) dans la multiplicité des problèmes qui constituent la référence du concept. Les autres signifiants y sont considérés alors comme des leviers pour la conceptualisation⁵. La méthode proposée⁶ pour répondre aux questions précédentes repose alors sur des éléments de la théorie des champs conceptuels. Nous donnons ici les grandes lignes de cette méthode, le paragraphe 2 permet d'y revenir avec des exemples.

Les théorèmes-en-acte sont des outils pour comprendre les mathématiques en jeu dans les procédures des élèves. Pour comprendre à quelles propriétés mathématiques des numérations ces théorèmes-en-acte peuvent renvoyer, nous dégagons tout d'abord les principes mathématiques sous-jacents aux numérations, ceci grâce à une analyse de ces dernières à partir de leurs signes. Nous utilisons ensuite ces principes mathématiques afin de constituer des procédés modèles de dénombrement. C'est la confrontation entre ces procédés modèles et les procédures utilisées par les élèves qui nous permet d'accéder à une compréhension du nombre chez les élèves.

Plan de l'article

Dans le paragraphe 1 nous explicitons les éléments concernant le nombre sur lesquels nous nous appuyons. Nous précisons la terminologie employée et en indiquons les principes mathématiques que nous retenons dans les numérations. Dans le paragraphe 2 nous utilisons ces principes (qui constituent donc notre référence) afin de donner des exemples de ce que nous nommons des procédés modèles de dénombrement. Le paragraphe 3 présente alors une analyse des deux procédures citées ci-avant à l'aide de ces procédés modèles, suivie d'une discussion sur les limites et l'intérêt d'une telle analyse. Ce travail nous conduit dans le paragraphe 4 à revenir sur la terminologie employée quand il est question de nombre entier au primaire. Nous concluons par une discussion concernant son apprentissage en classe de CP.

1. Différents principes de numération pour désigner les nombres entiers

Les principes que nous retenons sont exposés dans les sous-paragraphe 1.3 et 1.4. Auparavant nous revenons sur ce qui distingue nombre et numération.

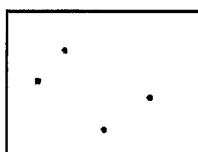
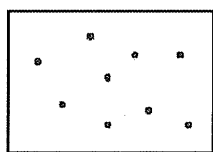
1.1. Nombre sans désignation

Nous avons pour l'instant essentiellement abordé le nombre via des systèmes de désignation. Signalons dès maintenant qu'il est possible d'envisager le nombre sans utiliser une désignation dans un système de numération. On le voit par exemple avec les écritures algébriques ($y=ax+b$, une équation d'une droite), mais aussi dès les premiers apprentissages.

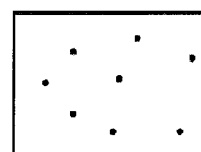
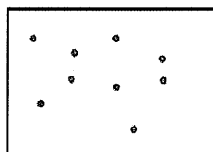
⁵ Ainsi, « la numération en unités » dont parle Christine Chambris dans ce cahier est pour nous un de ces autres signifiants.

⁶ Voir aussi le paragraphe 2.1.

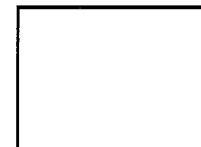
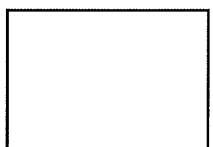
Ainsi, dans les deux cas suivants il n'est pas nécessaire de recourir à des désignations du nombre pour savoir laquelle des deux collections contient le plus de points.



Perception globale de la différence de quantité.



Association terme à terme des éléments.



Pour autant les nombres sont très souvent associés à leur nom dans la langue parlée ou encore à leur écriture chiffrée. Ces désignations servent à informer, se souvenir, poser et résoudre des problèmes, effectuer des opérations : ce sont des moyens pour communiquer avec les autres ou encore raisonner avec et sur les nombres.

1.2. Mise au point terminologique

Nous exposons ici certaines définitions sur lesquelles nous nous appuyons dans la suite. Elles montrent déjà le regard que nos recherches amènent à poser sur le nombre et mettent en perspective certaines définitions que nous proposons dans le quatrième paragraphe.

Nombre (entier) et Numération(s)

Ce n'est que récemment (XIX^e siècle) que des définitions du nombre sont avancées par les mathématiciens en faisant clairement abstraction de leurs désignations (orales ou écrites). Deux grandes orientations sont intéressantes à signaler (Atlas des Mathématiques 1997) : l'une utilisant la notion de successeur (Peano), l'autre de bijection entre ensembles. En les transposant dans le contexte des collections, nous avons alors deux entrées pour définir le nombre. La première construit les nombres au fur et à mesure par ajout d'un élément. On augmente le nombre d'éléments d'une collection en lui ajoutant un. Cette nouvelle collection a un nombre d'éléments égal au successeur du précédent. L'aspect ordinal y est privilégié. La deuxième établit que deux collections ont le même cardinal si on peut faire une association terme à terme (une bijection) entre leurs éléments. Si deux collections ont le même cardinal, on pourra dire qu'elles ont le même nombre d'éléments.

Pour nous, une numération est un système de signes qui permet de désigner les nombres (entiers naturels en ce qui concerne cet article). Le mot système fait référence à l'existence d'une syntaxe qui organise les signes entre eux. Ce système est tel qu'une numération doit être non redondante (deux signes différents ne peuvent désigner un même nombre), mais aussi non ambiguë (un même signe ne peut désigner deux nombres différents) et exhaustive (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, *a minima* tous les nombres entiers inférieurs à une certaine borne). Dans ce sens, une numération est toujours un système particulier de signes. Ainsi, la numération en unités (Chambris, 2008) n'apparaît pas comme une numération telle que nous la définissons ici, puisqu'elle peut être redondante (douze dizaines désigne le même nombre qu'une centaine et deux dizaines).

Il existe, ou a existé, de nombreuses numérations (Ifrah 1994). Elles peuvent être orales (auxquelles correspondent des sons) ou écrites (auxquelles correspondent des signes

graphiques disposés sur une surface)⁷. Dans le premier cas on peut obtenir les noms des nombres dans une langue, qui peuvent aussi s'écrire avec l'alphabet de la langue. Dans le second on peut parler de chiffres⁸ qui peuvent se dire avec les mots de la langue. L'oralisation chiffre à chiffre permet de communiquer le nombre mais ne donne pas directement le nom du nombre. L'écrit et l'oral n'offrent pas les mêmes possibilités de mises en signes: d'un côté l'espace à deux dimensions du support des écritures et leur possibilité de permanence (dans le temps et l'espace) due à la matérialité de ce support, d'un autre la linéarité du langage et la non permanence des sons dans le temps et l'espace. Cette différence essentielle entre les numérations écrites et les numérations orales éclaire aussi certaines des raisons pour lesquelles elles sont utilisées de manière différente pour résoudre des problèmes numériques (par exemple de calcul : mental avec les mots de la numération parlée ou posé avec un algorithme sur les chiffres)⁹. Ce qui amène à la précision suivante.

Numération orale/numération parlée ; numération écrite chiffrée/numération décimale de position

Employer le terme de numération orale permet de mettre l'accent sur l'aspect oral de ses signes (des mots de la langue), en opposition à des signes écrits. Cependant, beaucoup de numérations orales ont existé sans qu'il n'y ait de système d'écriture de la langue, elles ont néanmoins cohabité avec différents systèmes écrits pour désigner les nombres. Ces systèmes écrits pouvaient aussi être différents d'une civilisation à une autre. Actuellement, le système positionnel des écritures chiffrées (avec la graphie des chiffres dits arabes) s'est imposé dans le monde, quelle que soit la numération parlée dans la langue. Dans chaque pays, l'expression « numération orale » pourrait laisser penser à tort que cette dernière serait l'homologue oral de la numération écrite chiffrée employée dans le monde entier (c'est-à-dire que le changement oral/écrit ne jouerait pas sur ce que les signes peuvent donner à voir et à comprendre du nombre). Le terme « numération orale » étant ainsi porteur d'ambiguïté, nous proposons d'adopter celui de numération parlée. Il met l'accent sur le fait que cette numération est constituée des noms des nombres utilisés dans la langue vernaculaire (ou/et véhiculaire). C'est donc un raccourci pour « numération dans la langue vernaculaire », qui pour la France est la « numération en français ». Ceci permet de l'opposer à « numération écrite chiffrée », cette dernière expression étant un raccourci pour « numération écrite chiffrée décimale avec la graphie des chiffres dits arabes ». Nous considérons ici que le terme « chiffrée » induit que la numération est positionnelle (nous y reviendrons) et renvoie donc à une des caractéristiques de cette numération (comme « parlée » induit la suite des noms des nombres). Le mot « écrite » semble intéressant à garder pour le mettre en parallèle avec le terme « parlée » qui renvoie à l'oralité.

L'aspect décimal n'est cité dans aucune des expressions que nous employons ici pour nommer les deux numérations. En quoi ces numérations peuvent-elles être qualifiées de décimales ? Nous allons y revenir à la fin de ce texte.

⁷ Il existe aussi des numérations basées sur les gestes. Celles utilisant les parties du corps humain sont attestées dans des civilisations anciennes (Ifrah 1994).

⁸ Dans la suite de ce texte nous allons donner un emploi spécifique du terme chiffre, en lien avec les aspects positionnels d'une numération. Le terme chiffre renvoie aussi dans le langage courant au terme nombre ... qui peut renvoyer lui-même au nom du nombre (un signifiant) et non au nombre lui-même (signifié).

⁹ Il y a d'autres raisons, pour une étude plus complète de la distinction entre la numération orale parlée en France et la numération écrite chiffrée, voir la première partie de la thèse (Mounier 2010), en particulier les pages 99 à 113.

Dénombrer¹⁰

Dans sa thèse El Bouazzaoui¹¹, citée par Conne (1989), distingue deux raisons d'utiliser un signifiant du cardinal d'une collection : la mesure d'une quantité (indiquer le nombre d'objets contenus dans un sac) et la production d'une collection (par exemple à partir de l'oral « trente-deux » ou de l'écrit « 32 », mettre dans un sac ce nombre d'objets).

Le dénombrement est, pour nous, un processus dont le but est de relier une désignation du cardinal d'une collection avec la collection elle-même : il s'agit soit de désigner le cardinal d'une collection, soit de constituer une collection (d'objets) dont le cardinal est donné par une désignation. Le dénombrement s'effectue par quelque moyen que ce soit et met en jeu une désignation quelle qu'elle soit. En particulier elle peut être plus ou moins contextualisée, comme « trois boîtes de douze et deux jetons » ou « trois dizaines et huit unités » (numération en unités).

Compter, Comptage, Comptine

Compter est pour nous une stratégie de dénombrement. Elle consiste à utiliser un compteur, une suite d'items différents deux à deux, utilisés toujours dans le même ordre. Il s'agit d'associer à l'énumération des objets de la collection (Briand 1999), les items du compteur. Le dernier item utilisé est une désignation du cardinal de la collection.

Une comptine numérique des désignations parlées est un compteur. De manière usuelle, la comptine utilisée dans une langue est appelée par ses utilisateurs « la » comptine numérique. « La » comptine numérique change donc selon les langues. Une comptine numérique permet de compter « un par un ». Elle est alors particulièrement adaptée à la perception du nombre dans son aspect ordinal (voir la définition du nombre donnée ci-dessus) : il s'agit de passer les éléments en revue un à un. Il y a les éléments déjà considérés (comptés) et les autres.

Il est aussi possible de compter par paquets, en énumérant par exemple en français deux, quatre, six ou encore dix, vingt, trente, etc. Lorsque les paquets sont importants, il est difficile de les constituer sans compteur. Un nouveau dénombrement est alors nécessaire pour constituer ces paquets.

On peut aussi dire (en français) un paquet de deux, deux paquets de deux, etc., au lieu de deux, quatre, six, ou bien encore, une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, etc., au lieu de dix, vingt, trente. Ce type de comptage consiste à considérer des paquets de même cardinal et à ne pas transcrire le cardinal de la collection dénombrée au fur et à mesure dans la désignation parlée. C'est donc un « comptage en unités » car il utilise une unité de mesure.

Notons aussi qu'il existe des stratégies de surcomptage¹², c'est-à-dire de comptage à partir d'un nombre donné.

Tous les dénombrements ne sont pas obtenus par des stratégies de comptage, en particulier quand il s'agit d'obtenir une écriture du nombre : nous y revenons dans le paragraphe 4.

1.3. Les noms des nombres supports à une numération parlée

Dans ce paragraphe et le suivant nous exposons certains des résultats de l'analyse des numérations à partir des signes. Ils permettent d'indiquer les différents principes mathématiques que nous retenons.

¹⁰ Conne (1989) a proposé des définitions différentes de celles que nous proposons. La définition qu'il indique pour le verbe dénombrer est proche de celle que nous avons prise pour compter. Dénombrer est pour nous plus général, et va dans le sens de Dominique Valentin (Découvrir le monde avec les mathématiques, Situations pour la petite et moyenne section. Situations pour la grande section. Hatier 2004-2005).

¹¹ El Bouazzaoui (1982) Etude des situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension, l'apprentissage de ces notions. Thèse de 3^{ème} cycle, université de Bordeaux 1.

¹² Ou encore de « sous-comptage ».

Dans une numération parlée ce sont le plus souvent des irrégularités dans la formation des noms des nombres qui sont relevées, ces dernières étant mises en évidence en se référant à des modèles normatifs de numération. En recherchant une rationalité dans la syntaxe qui organise les numérations dans les langues indo-européennes en système, nous avons exhibé quatre modèles. Ils ne sont pas nécessairement incarnés de manière parfaite dans les langues existantes. Dit autrement, il y a une certaine distance entre le modèle et l'existant. Pour présenter ces modèles au lecteur de langue française, nous les illustrons avec des exemples fictifs qui donnent à voir cette distance en n'utilisant que les mots : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, octante, nonante. Ces modèles sont adaptés aux numérations indo-européennes, ils concernent ici les nombres inférieurs à cent¹³.

Un premier modèle peut être pertinent pour comprendre certaines numérations asiatiques. Traduit en français, il serait incarné de manière archétypale par la suite : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, **un dix**, un dix un, un dix deux, ..., un dix neuf, **deux dix**, deux dix un, deux dix deux, ..., deux dix neuf, **trois dix**, trois dix un, **trois dix deux**, etc. Des principes mathématiques multiplicatifs peuvent sous-tendre la rationalité de la syntaxe : « trois dix deux » est relié à l'opération « trois fois dix plus deux ». Ce point de vue permet d'envisager une interprétation multiplicative de la numération. Nous appellerons la suite illustrant ce modèle « numération archétype régulière A ».

Le fait que dans la plupart des numérations parlées employées (Ifrah 1994) les noms des nombres, tout au moins des premiers, ne semblent pas avoir de lien entre eux fournit un autre modèle. Les principes strictement ordinaux peuvent alors être avancés pour sous-tendre la rationalité de la syntaxe : le n^{ème} mot désigne le n^{ème} nombre. Des opérations arithmétiques ne sont donc pas convoquées. L'archétype en français serait : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, dixun, dixdeux, ..., dixneuf, vingt, vingtun, vingtdeux, ..., vingtneuf, trente, trenteun, trentedeux, etc. Nous appellerons la suite illustrant ce modèle « numération archétype C ».

Un troisième modèle va permettre de prendre en compte le fait que dans beaucoup de langues européennes (français, italien, allemand, anglais, espagnol, etc.), des mots nouveaux apparaissent (assez) régulièrement de dix en dix. Traduite en français, la suite orale archétypale est la suivante : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, **dix**, dix un, dix deux, ..., dix neuf, **vingt**, vingt un, vingt deux, ..., vingt neuf, **trente**, trente un, **trente deux**, etc. A l'instar du premier modèle ce point de vue peut conduire à concevoir une interprétation additive de la numération : « trente deux » est relié à l'opération « trente plus deux ». Nous appellerons donc la suite illustrant ce modèle « numération archétype régulière B ».

En considérant la suite orale précédente, il est aussi possible d'y voir des principes ordinaux, comme l'a fait Cauty (1984, 1986, 1988) pour l'analyse de certaines numérations orales. Deux suites structurent alors la numération : la suite composée de ce que nous appelons des comptants (la suite un, deux, ..., neuf) et la suite des repérants (dix, vingt, trente, etc.). Ainsi, « trente-deux » est compris comme « deux après trente ». A notre connaissance, une telle interprétation, ordinaire avec repérants, de la numération parlée n'est pas souvent prise en compte par les chercheurs. Pourtant elle peut servir à analyser les procédures des jeunes élèves quand ils commencent à prendre conscience d'une certaine structure de la comptine numérique, tout en ne mobilisant pas des principes arithmétiques.

¹³ Les modèles peuvent être utilisés pour analyser la constitution des noms des nombres plus grands, la pertinence de certains (en particulier les modèles ordinaux) sera cependant moins grande (Mounier 2012).

A notre connaissance, même transposée dans les mots d'une autre langue, aucune numération parlée existante ne « suit » les deux formes régulières, ni au-delà d'une certaine borne la numération archétype C. Il y a donc une certaine distance entre les archétypes et les numérations existantes. Par exemple, formellement, le thaïlandais est proche du type A mais comporte des irrégularités, comme le fait de dire « dix » (sip) et non pas « un dix » (« neung sip »), bien que soit employé « trois dix » (saam sip)¹⁴.

La description des trois numérations archétypales permet donc d'illustrer quatre modèles de numération : deux avec des principes arithmétiques, deux avec des principes ordinaux. Pour celui qui analyse les numérations avec la méthode que nous proposons, l'interprétation d'une numération consiste à la confronter à tel ou tel modèle et à apprécier la distance avec ce dernier. Ceci conduit alors le plus souvent à mettre en évidence des irrégularités par rapport au modèle adopté. C'est en quoi le modèle peut être qualifié de plus ou moins pertinent.

1.4. Le système positionnel des écritures chiffrées

Comme dans ce qui précède, le modèle que nous allons donner du fonctionnement des écritures chiffrées n'a pas pour but de dire comment celles-ci sont produites en classe (ni comment elles ont été produites par l'humanité). Comme précédemment, il va nous servir de référence pour comprendre les procédures en regardant le savoir mathématique en jeu, via des procédés modèles que nous indiquons ultérieurement.

L'analyse que nous proposons se fait à partir des signes (la succession des chiffres) : on cherche une rationalité dans le fonctionnement du système. Nous avons convoqué la théorie mathématique des langages. L'originalité de notre analyse est de mettre en perspective les particularités d'un processus parmi ceux envisageables dans la théorie des langages. Ses résultats convergent avec ceux obtenus par d'autres recherches.

Une échelle de numération est une suite strictement croissante $(d_n)_{n \geq 0}$ d'entiers, de premier

terme 1. Ainsi tout entier naturel admet un développement du type $\sum_{i=0}^n a_i d_i$, où les a_i sont des

entiers positifs ou nuls. Certains développements sont de la forme $\sum_{i=0}^n a_i d^i$. La décomposition

est unique dès qu'on impose aux coefficients a_i d'être strictement inférieurs à d . Ce sont des échelles de numération en base d , dites polynomiales. Pour d valant dix la décomposition est en base dix. Ce choix (la base dix) est le seul pouvant rendre compte de la logique de la syntaxe des écritures chiffrées que l'on emploie. Sachant que d'autres mises en signes sont possibles (voir annexe), le système positionnel des écritures chiffrées peut alors être compris comme un processus particulier de mise en signes du nombre à partir de cette décomposition. Les coefficients a_i sont codés par des signes distincts deux à deux et de graphie conventionnelle : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Une suite de ces signes permet de désigner un nombre. Il s'agit cependant d'indiquer l'association coefficient/puissance de dix. La disposition linéaire des signes permet de prendre en compte leur position. C'est l'utilisation de cette ressource pour faire cette association qui permet de qualifier le système de positionnel : les signes ainsi utilisés acquièrent un statut de chiffre. De manière conventionnelle dans le système que nous utilisons le chiffre le plus à droite correspond à la puissance de dix la plus petite (dix puissance zéro), le deuxième le plus à droite à dix puissance un, ainsi de suite.

¹⁴ « yii-sip » correspond à 20, mais « yii » ne signifie pas 2. Par ailleurs, entre deux dizaines on a bien une structure de type 1, sauf pour le premier nombre après chaque dizaine : « sip-et », « yii-sip-et » et « saam-sip-et » pour 11, 21 et 31, alors que « un » se dit « neung » et non pas « et ».

Cette description est notre référence théorique pour les écritures chiffrées. Bien entendu, comme pour les modèles de numérations présentées ci-avant, il serait faux de considérer qu'historiquement le système des écritures chiffrées ait été ainsi élaboré. Notre analyse nous renseigne cependant sur les relations qu'il entretient avec le nombre quand on recherche une rationalité dans le fonctionnement du système.

2. Des exemples de procédés modèles d'obtention du cardinal d'une collection

Les procédés modèles ne sont pas issus de procédures observées. Ce sont des programmes de dénombrement dont la marche à suivre est guidée par les logiques des modèles théoriques ci-avant. Ils vont servir d'intermédiaires pour analyser les procédures des élèves. Dans le premier sous-paragraphe (2.1) nous précisons cette démarche. Dans les autres nous indiquons des exemples de procédés modèles.

2.1. Le point de vue adopté : le choix et l'utilisation de procédés modèles

La comptine numérique pour dénombrer un à un : incontournable pour les petites quantités

Dans les deux procédures de notre exemple initial (cf. introduction) la procédure consistant à énumérer les éléments d'une collection un à un, tout en énonçant les mots de la comptine numérique parlée, est mobilisée, au moins jusqu'à dix. Elle est apprise dès le plus jeune âge. Elle a été l'objet de l'attention de nombreux chercheurs, en particulier dans le cas du dénombrement de petites quantités. Rappelons brièvement quelques-uns de ces apports.

Briand décrit la procédure de comptage un à un ainsi (Briand & al. 1999-2000) :

- 1- Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un élément d'une collection.
- 3- Enoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
- 4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
- 5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.
- 6- Recommencer 2-3-4-5 (pour la collection des objets non encore choisis) tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- 7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 8- Enoncer le dernier mot nombre.

Il met en exergue une tâche spécifique, l'inventaire, constitué des étapes 1, 2, 4, 5, 6, 7, « au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule » (Ibid.). Elle nécessite une connaissance « pré-numérique », l'énumération. Cette dernière est mobilisée dans différents contextes lorsqu'il s'agit de sélectionner et séparer les objets considérés de ceux qui ne le sont pas¹⁵. Briand relève que l'énumération n'est pas objet d'enseignement puisqu'elle n'est pas identifiée comme telle par l'institution, elle semble pourtant nécessaire pour compter¹⁶.

¹⁵ Le fait que la collection soit manipulable ou non est une des variables. Mais ce n'est pas la seule, on peut penser par exemple à l'organisation de l'espace qui facilite ou non l'énumération.

¹⁶ Avec Marie-Hélène Salin et Martine Loubet, il propose des séquences d'apprentissage aux enseignants de classe maternelle qui prennent en compte l'énumération. Voir par exemple le CD Rom édité chez Hatier en 2003.

En outre, le fait de « savoir » qu'un mot de la comptine puisse indiquer le cardinal d'une collection (donc composée d'une pluralité d'entités) nécessite un apprentissage spécifique. A ce sujet la place de la comptine numérique dans cet apprentissage est encore une question débattue par les chercheurs. Par exemple Brissiaud (2007) rappelle qu'aborder systématiquement le nombre avec le comptage un à un peut mettre certains élèves en difficulté à l'école maternelle (élèves âgés de 3-6 ans). En effet rien n'assure qu'une bonne maîtrise du comptage un à un, dans le sens où la procédure conduit à l'expression correcte du nombre dans les situations les plus courantes, témoigne d'une compréhension suffisante du nombre. Il donne en exemple le fait que des élèves comptent un à un des collections inférieures ou égales à trois alors qu'une reconnaissance globale permet directement de dire la quantité. Ces élèves ne savent donc pas nécessairement que le comptage n'est qu'un des moyens pour accéder à une désignation du nombre. Par ailleurs, le rapport entre la réussite des élèves aux épreuves de conservation (le fait que le nombre d'objets d'une collection reste affirmé quelles que soient les modifications perceptives de l'agencement des objets, travail initié par Piaget et Szeminska dès 1941) est une question complexe que nous n'abordons pas mais que nous devons signaler quand il s'agit de dénombrement. Nous renvoyons le lecteur aux synthèses instructives faites par Fayol (1990) ou plus récemment par Bideaud, Lehalle & Vilette (2004). Nous retenons que les élèves âgés de 7 ou 8 ans réussissent le plus souvent à certains exercices de conservation mais pas nécessairement à tous. En ce sens, les élèves de primaire peuvent ne pas tous concevoir les désignations orales comme indiquant le cardinal d'une collection. DeBlois (1995) observe quant à elle, chez un élève scolarisé âgé de huit ans et sept mois, des difficultés relatives à la conception d'un groupement comme objet unitaire (donc « comptable ») ainsi qu'à la conception d'une autre désignation que la désignation orale comme pouvant désigner le cardinal d'une collection (par exemple une désignation écrite chiffrée ou une désignation en termes de dizaines et unités).

L'objectif de l'article n'est pas de revenir sur le rôle de la comptine numérique dans la conceptualisation du nombre chez les jeunes élèves. Cependant, nous retenons que savoir comment l'élève procède pour obtenir une désignation du nombre aide à mieux comprendre la conception qu'il en a, même si cela n'est pas tout. En outre, la comptine numérique telle que nous l'avons décrite ici fait écho à un emploi de la numération parlée dans une interprétation strictement ordinale. Ceci justifie la pertinence d'étudier ce qu'il en est pour des procédures plus complexes, en particulier pour de plus grands nombres, comme c'est le cas des deux procédures que nous avons prises en exemple.

Etablir des procédés modèles faisant écho à chaque numération

En nous référant en particulier à la théorie des champs conceptuels, l'hypothèse que nous admettons est que, dans les résolutions de problèmes, les élèves utilisent des propriétés en acte. Pour résoudre des tâches de dénombrement ils utilisent les ressources propres aux numérations dont ils disposent. Notre méthode consiste alors à élaborer des procédés utilisant les propriétés de chaque modèle exposé précédemment (ce sont les procédés modèles) puis de comparer avec les procédures effectivement employées par les élèves. Les procédés modèles rendent compte des moyens théoriques de dénombrement que ces dernières permettent *a priori*. Il ne s'agit donc pas ici de décrire des procédures observées mais de fournir des modèles utiles à l'analyse. Comme ce sont des algorithmes permettant d'obtenir une expression du cardinal d'une collection utilisant les ressources des numérations, la description des procédés modèles va consister à donner l'organisation de la collection obtenue au fur et à mesure des mots prononcés ou des signes écrits. Nous avons vu le rôle que peuvent jouer les groupements, en écho à la spécificité de certains noms de nombre, c'est pourquoi nous recourons aux notations suivantes pour la description de tous les procédés modèles¹⁷ :

¹⁷ Pour simplifier la lecture, nous utilisons ici une écriture chiffrée pour indiquer le nombre qu'il désigne.

α_1 est un groupement dont le cardinal est 10,
 α_2 est un groupement dont le cardinal est 20,
 α_3 est un groupement dont le cardinal est 30,
 α_4 est un groupement dont le cardinal est 40,
 α_5 est un groupement dont le cardinal est 50,
 α_6 est un groupement dont le cardinal est 60,
 α_7 est un groupement dont le cardinal est 70,
 α_8 est un groupement dont le cardinal est 80,
 α_9 est un groupement dont le cardinal est 90.

Nous distinguons ainsi $(\alpha_1 ; \alpha_1)$ de α_2 : les points virgules qui séparent les différents groupements indiquent que les groupements sont disjoints.

2.2. Procédés modèles pour obtenir le nom du cardinal d'une collection

Rappelons que nous faisons appel aux ressources de chacune des numérations prises séparément. Ainsi, dans ce sous-paragraphe consacré aux numérations parlées nous n'utilisons pas les écritures chiffrées. **Nous nous basons sur les quatre modélisations précédentes en les illustrant avec les mots utilisés dans les trois numérations archétypes indiquées précédemment.** Nous donnons ici des exemples pour illustrer la méthodologie d'analyse mais des variantes sont envisageables, selon les mots prononcés ou selon que certaines spécificités de telle ou telle numération parlée sont prises en compte. Prenons l'exemple du modèle ordinal avec repérants pour les noms des nombres dans la numération parlée en français de France. Il est possible de prendre la suite des repérants (dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre vingts, quatre-vingt-dix) ou (vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent) et suivant le cas l'une ou l'autre des suites de comptants entre deux repérants (un,..., neuf) ou (un, ..., dix-neuf). Pour la numération parlée en français de Suisse ou Belgique, la distance est moins grande entre les mots utilisés (vingt, trente, ..., septante, octante, nonante) et une numération archétypale régulière. Dans la suite de ce texte nous reviendrons sur l'intérêt d'exhiber de manière exhaustive les différents procédés modèles pour analyser des procédures observées.

Exemple de procédé modèle basé sur une interprétation strictement ordinale

Le modèle ordinal nous fournit un 1^e procédé modèle d'obtention du cardinal d'une collection.

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un	Les éléments déjà considérés ; le reste de la collection
deux	Les éléments déjà considérés ; le reste de la collection
...	Les éléments déjà considérés ; le reste de la collection
dixun	Les éléments déjà considérés ; le reste de la collection
...	Les éléments déjà considérés ; le reste de la collection
nonanteneuf	Toute la collection

Ce premier procédé modèle fait écho aux recherches que nous avons citées sur la comptine numérique qui l'envisagent comme un compteur, une suite de mots qu'il faut utiliser de manière immuable pour accéder à une désignation orale du nombre culturellement partagée.

Exemple de procédé modèle basé sur une interprétation ordinale avec repérants

Le modèle ordinal avec repérants nous fournit un 2^e procédé modèle d'obtention du cardinal d'une collection.

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix ,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, vingt ,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, trente ,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quarante ,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, cinquante ,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, soixante ,	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, septante ,	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, octante ,	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, nonante ,	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, nonante neuf	Toute la collection

Une prise en compte d'une décomposition du nom en plusieurs autres noms se traduit par des arrêts marqués à chaque repérant. Parallèlement l'organisation des objets de la collection marque elle aussi des étapes. Une des variantes consiste en la répétition du dernier repérant atteint, ce qui donne : un, deux, ..., neuf, dix, dix un, dix deux, etc. On retrouve la suite des noms des nombres d'une des numérations archétypales régulières.

Exemple de procédé modèle basé sur une interprétation arithmétique additive

Le procédé issu d'une interprétation arithmétique additive prend en compte le fait d'ajouter dix à une collection déjà constituée.

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, vingt	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, trente	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, quarante	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, cinquante	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, soixante	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, septante	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, octante	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, nonante	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, nonante neuf	α_9 ; le reste de la collection

A la différence du précédent procédé modèle, on constitue des groupements de dix qu'on réunit aux éléments déjà considérés. Cependant, à la différence du procédé suivant, on ne compte pas le nombre de ces groupements.

Exemples de procédé modèle basés sur une interprétation arithmétique multiplicative

Le procédé issu d'une interprétation arithmétique multiplicative prend en compte le fait de constituer des groupements de dix et de déterminer leur nombre.

Une première variante consiste à un comptage des groupes de dix à la fin de l'organisation, qui doit alors rester visible :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$ le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$ le reste de la collection
un, deux, ..., neuf,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
Comptage des groupements et des éléments restants : neuf dix neuf	

Le type de groupement est désigné par le mot qui indique son cardinal, « dix ». « Dix » est donc synonyme de « dizaine ».

Une autre variante consiste à effectuer le comptage des dizaines au fur et à mesure, il est alors inutile de garder les groupes de dix visibles :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, un dix	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, deux dix	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, trois dix	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, quatre dix	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, cinq dix	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, six dix	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, sept dix	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, huit dix	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, neuf dix	α_9 ; le reste de la collection
Comptage des éléments restants : neuf dix neuf	

2.3. Procédés modèles pour obtenir l'écrite chiffrée du cardinal d'une collection

Nous utilisons l'unique modèle retenu. La numération parlée n'est pas nécessairement convoquée pour constituer des groupements de dix puisqu'il est possible d'utiliser d'autres compteurs comme un système de bâtons.

Procédé modèle basé sur l'interprétation de l'écriture chiffrée

L'organisation de la collection
α_1 ; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$ le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$ le reste de la collection
$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection

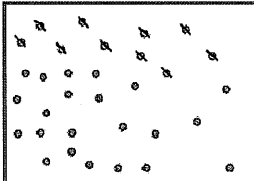
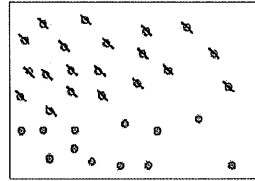
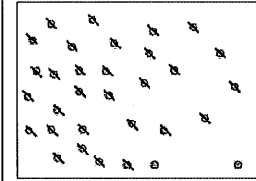
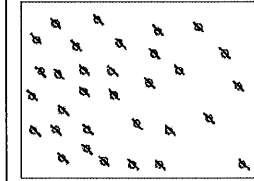
Le processus se termine par le codage du nombre d'éléments non groupés restant (par un premier chiffre) et du nombre de groupements de dix (par un deuxième). Les deux chiffres sont alors alignés. Ce qui est un choix de mise en signes propre à la numération écrite chiffrée, d'autres choix étant possibles (voir annexe). Un ordre est nécessaire : le chiffre indiquant le nombre d'éléments non groupés est inscrit à droite : 32¹⁸.

A la différence du modèle précédent, c'est l'organisation finale qui est codée. Les actions visent à obtenir une organisation spécifique puis à en rendre compte avec des chiffres disposés sur une ligne selon un certain ordre. Le procédé est donc en deux temps.

3. Exemple d'analyse

Nous pouvons maintenant analyser les deux procédures présentées dans l'introduction afin de montrer comment exploiter les outils construits précédemment. Il s'agit d'écrire le nombre de points d'une collection dessinés sur une feuille. Dans les deux cas l'énumération a été réussie en cochant au fur et mesure les éléments considérés. Nous analysons les organisations obtenues coordonnées avec les mots prononcés et finalement les écritures produites.

3.1. Analyse de la procédure 1

				
Ce qui est dit	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix, vingt	Un, deux, ..., neuf, dix, trente	Un, deux, trente deux
Ce qui est écrit				32

¹⁸ Ces opérations ne se font pas forcément dans un ordre déterminé. Les chiffres sont alignés dans un certain ordre, mais on peut commencer par compter le nombre d'éléments non groupés et écrire le chiffre qui correspond à leur nombre puis s'occuper des éléments non groupés, ou inversement.

Du fait que dix est prononcé à chaque fois, un procédé modèle additif peut être proposé pour analyser cette procédure. Cependant, la non matérialisation des groupements de dix et l'énumération un à un renvoie à des principes ordinaux (avec repérants).

3.2. Analyse de la procédure 2

Ce qui est dit	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix	Un, deux, ..., neuf, dix	Dix, vingt, trente
Ce qui est écrit				Un, deux
				32

Pour analyser cette procédure il semble pertinent de convoquer un procédé modèle correspondant à une interprétation ordinale avec repérants puisque les deux séries ordinales sont employées (celle des comptants, celles des repérants). Dans cette logique, on peut penser que l'élève accède au nom du nombre en énumérant les dizaines avec la comptine dix, vingt, trente. Cependant, les groupements de dix ont été constitués sans que les noms dix, vingt, trente n'aient été prononcés au fur et à mesure. Il est possible que l'élève ait pensé ces noms sans les dire, sinon c'est un procédé modèle additif qui pourrait être plus pertinent pour comprendre la procédure. En effet, on peut interpréter le fait de dire « vingt », « trente » comme le résultat d'une somme (matérialisée par la réunion de deux collections) : même si ce n'est pas visible, c'est bien alors (α_1 ; le reste de la collection) puis (α_2 ; le reste de la collection) et enfin (α_3 ; le reste de la collection) qui sont considérés. Par ailleurs, le fait de coder l'organisation finale comme c'est le cas ici (et non d'obtenir le nom du cardinal des éléments comptés au fur et à mesure) renvoie à une des caractéristiques du procédé modèle de la numération écrite chiffrée que nous avons exhibé. Néanmoins dire « dix, vingt, trente », au lieu de « un, deux, trois » indique vraisemblablement que l'écriture chiffrée a été transcrite de l'oral « trente-deux ». Les deux numérations seraient donc ici aussi dans un rapport oral/écrit, dans le sens où la tâche redéfinie par l'élève aurait été de chercher le nom du nombre dans la numération parlée, puis ensuite de déterminer son écriture chiffrée à partir de ce dernier. Le travail mathématique dans la première partie de la tâche (exprimer le nom du nombre dans la langue parlée), n'est pas du même ordre que dans la seconde (chercher à écrire un mot donné oralement)¹⁹. La tâche ainsi redéfinie n'est pas équivalente à celle qui consiste à obtenir l'écriture chiffrée sans passer par le nom du nombre. En outre, puisque manifestement les groupements de dix n'ont pas été comptés (l'élève n'a pas dit « un, deux, trois », mais « dix, vingt, trente »), l'utilisation d'un modèle multiplicatif de la numération parlée pour analyser la procédure semble moins pertinente.

¹⁹ Il pourrait s'agir de chercher les chiffres pour écrire un son (correspondant au nom du nombre) comme on cherche des lettres pour écrire un mot de la langue orale. Cette comparaison a cependant des limites car il s'agit ici de chiffres qui vont constituer un système sémiotique propre ainsi que de mots qui sont à considérer parmi l'ensemble de ceux de la numération parlée.

3.3. Discussion

Que retenir de l'analyse précédente ?

En ce qui concerne la première procédure, rien ne permet d'être sûr que l'élève fait le lien avec un problème de la structure additive (Vergnaud 1991), surtout s'il a peu fréquenté ces problèmes, comme c'est le cas en CP d'après les programmes scolaires. Cependant, s'il ne se dit peut-être pas « dix plus dix, vingt », « vingt plus dix trente », pour autant il prononce à chaque fois dix et ne s'arrête pas à neuf ou dix-neuf (comme dans le procédé modèle avec repérants). Bien qu'il y ait une énumération un à un et des groupements qui n'ont pas été matérialisés, ceci est pour nous un indice que l'élève va d'une certaine manière au-delà d'un emploi de la numération dans une interprétation ordinale, fût-elle avec repérants (auquel cas on s'attendrait à ce qu'il utilise une comptine entre deux repérants). En effet, il s'assure qu'il a bien dix dans chaque groupement, ce qui n'est pas manifeste quand on énonce la comptine numérique entre deux repérants (un à neuf ou bien un à dix-neuf en français de France). C'est cette distinction qu'il nous semble intéressant de relever. Dans la seconde procédure, plusieurs modèles pourraient aussi être utilisés pour l'analyse, mais, là encore, pas celui strictement ordinal. La notion de groupements semble plus affirmée que précédemment puisqu'ils sont matérialisés. Le fait que ces derniers ne sont pas comptés n'engage cependant pas à rendre le modèle multiplicatif le plus pertinent pour l'analyse.

Qu'est-ce qui distingue alors réellement ces deux procédures ? La réponse est pour nous dans l'emploi de l'écriture chiffrée. Il est vrai que, dans les deux cas, il nous semble probable qu'elle constitue la version écrite de la numération parlée : c'est le son « trente-deux » qui est tout d'abord obtenu, puis il est transcrit par « 32 » (même si on n'a pas ici accès à ce passage). Cependant, contrairement à la première procédure, l'analyse que nous faisons de la deuxième entraîne qu'au moins une propriété de la numération écrite chiffrée (qui est apparue dans le procédé modèle exhibé) est utilisée en-acte : le fait de procéder en deux temps, organiser la collection puis chercher ensuite à exprimer une désignation du cardinal à partir de cette organisation.

Que penser si la procédure 2 se terminait non pas par « dix, vingt, trente ; un, deux ; 32 », mais par « dix, vingt, trente, trente-et-un, trente-deux ; 32 » ? L'analyse serait encore plus complexe car il est possible que plusieurs procédés modèles puissent être convoqués successivement pour l'analyser. Des éléments manquent pour mieux comprendre les procédures. Ceci fait la transition avec ce qui suit.

Pour aller plus loin

Quel peut être le (ou les) modèle(s) à convoquer pour l'analyse ? Ces choix renseignent sur la relation entre les théorèmes utilisés (en-actes) et ceux des différents modèles des numérations. Les différences sont très fines entre les différents procédés modèles et une procédure semble pouvoir être proche de plusieurs d'entre eux à la fois. Des indicateurs supplémentaires nous semblent nécessaires pour l'analyse de procédures. Tout d'abord l'observation précise des gestes et des mots prononcés peut donner des informations. On peut par exemple voir si l'élève utilise un comptage sur ses doigts pour les dizaines. Mais il n'en reste pas moins que ce ne sont que des indicateurs accompagnant un processus mental qui n'est donc pas observable en lui-même. Questionner l'élève peut s'avérer alors intéressant. Cependant, la nécessité de produire un discours sur ce qu'il a fait peut l'engager à ne pas décrire la procédure réellement utilisée ou encore à avancer des justifications *a posteriori*. Pour aller plus loin, il nous semble nécessaire d'observer ce que font les élèves quand certaines variables changent dans la tâche donnée. Comment va réagir l'élève si on lui propose une collection déjà organisée avec des groupements non tous de dix ? Va-t-il encore utiliser la comptine des dizaines avec ceux-ci ? Si les objets sont manipulables, va-t-il les cumuler pour former des

groupements, de combien ? Que se passe-t-il pour des collections plus importantes ? Va-t-il changer de procédure par exemple du fait qu'il ne connaît plus le nom des nombres ? Des informations supplémentaires peuvent aussi s'obtenir en proposant d'autres contextes²⁰ et d'autres tâches (par exemple comparer le cardinal de deux collections), mais aussi en étant informé de certaines connaissances anciennes selon les nombres en jeu²¹. En supposant un comportement rationnel du sujet agissant, on peut alors inférer qu'il utilise en-acte certaines propriétés de la numération écrite chiffrée ou parlée telles que nous les avons définies, ce qui déterminerait un certain profil (Mounier & Pfaff 2012). Déterminer ce profil permet de mieux comprendre la conception du nombre que l'élève a.

4. Des définitions

Avant de conclure sur ce qu'apportent les considérations précédentes sur l'apprentissage de « la » numération au CP, nous proposons de compléter le vocabulaire couramment employé dans l'enseignement concernant le nombre (entier). Il s'agit en particulier de préciser une stratégie de dénombrement qui est reliée à l'écriture chiffrée telle que nous l'avons analysée, mais aussi de revenir sur l'emploi du qualificatif « décimal » pour les deux numérations.

La numération

La numération (sans qualificatif) s'oppose à une numération. Elle renvoie à la fonction d'une numération, celle de désigner les nombres. C'est le cas par exemple dans les programmes scolaires dans la locution « la numération au CP ». Cet emploi ne met pas l'accent sur le fait que dans l'institution scolaire deux systèmes de numération peuvent être distingués pour les nombres entiers.

Organiser/configurer pour désigner

Cette stratégie est adaptée à la numération écrite chiffrée telle que nous l'avons définie dans le cadre d'analyse que nous proposons. La distinguer procure un outil nouveau que nous proposons pour comprendre les procédures des élèves.

Dans un comptage, la collection est scindée en deux : d'un côté les objets déjà considérés (comptés), de l'autre ceux qui ne le sont pas. La stratégie « organiser/configurer pour désigner » nécessite quant à elle de distinguer les éléments qui sont organisés (en groupes) des autres tandis que leur cardinal n'est pas signifié au fur et à mesure du processus. A la différence d'un comptage, il ne s'agit donc pas de désigner au fur et à mesure les cardinaux de sous-collections. En outre, dans certains comptages, comme des comptages en unités, les paquets constitués au fur et à mesure peuvent rejoindre les éléments de la collection déjà considérés, l'organisation n'étant alors pas nécessairement conservée : ce n'est pas le cas pour une stratégie « organiser/configurer pour désigner ». Nous utilisons ici le terme configuration pour désigner une structure obtenue en suivant des règles et dont on considère le résultat final et non le processus d'organisation qui l'a produit (qui peut être n'importe lequel, en particulier qui n'est pas nécessairement lié à tel ou tel système de numération parlée).

La stratégie se déroule en deux étapes distinctes : la première consiste à organiser/configurer sans chercher à nommer au fur et à mesure le nombre des éléments organisés, la deuxième à désigner cette organisation par un code. Ce code sert alors à désigner le cardinal de la

²⁰ Par exemple une tâche type « mise de couverts » : demander à un élève d'apporter autant de verres que d'assiettes (qui sont posées sur une table), les assiettes et les verres n'étant pas visibles simultanément. Il faut apporter juste ce qu'il faut de verres et en un seul voyage. Le dénombrement est pertinent, si ce n'est nécessaire, pour réaliser la tâche.

²¹ Comme les connaissances concernant les habilités de comptage, ou encore celles consistant à être capable de dire le nom du nombre à partir de son écriture chiffrée et inversement écrire avec des chiffres un nom de nombre.

collection globale. Ce code constitue ainsi une désignation du nombre d'éléments. Cette stratégie peut mener à produire différents codes de l'organisation qui peuvent constituer différentes désignations du nombre : l'écriture chiffrée « 32 », une désignation du type « trois dizaines et deux unités » ou encore la désignation parlée (en comptant dix, vingt, trente ; un, deux ; trente-deux), etc.

Une stratégie de dénombrement spécifique à la numération écrite chiffrée

D'après ce qui a été exposé, une stratégie en deux temps peut être définie pour obtenir l'écriture chiffrée du cardinal d'une collection. Précisons- la.

1^e temps. Elle commence par une stratégie « organiser/configurer » pour dénombrer. Pour les collections de cardinal inférieur à cent, la configuration à obtenir consiste en des groupes de dix et des éléments non groupés (en nombre strictement inférieur à dix). Pour des cardinaux supérieurs, des groupements de groupements sont à considérer (toujours par dix). Ils sont toujours à constituer de manière maximale.

2^e temps. Ensuite, il s'agit de coder cette configuration. Plusieurs solutions sont envisageables (voir annexe 1). En ce qui concerne l'écriture chiffrée, il s'agit d'indiquer un nombre d'objets de chaque type de groupement par un signe, la position de ce signe par rapport aux autres doit permettre de le relier sans ambiguïté au type de groupement auquel il se réfère. Le fait d'écrire les signes les uns après les autres sur une ligne induit un ordre, c'est donc un moyen d'indiquer ce lien. Cela nécessite de disposer d'un signe pour une absence d'un certain type de groupement. Les nombres pour lesquels il est nécessaire d'avoir un signe sont ceux inférieurs à neuf. Ils le sont par un signe de graphie conventionnelle : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. L'absence d'un certain type de groupement est marquée par le signe 0 qui prend lui aussi le statut de nombre. Ces dix signes peuvent donc être disposés de manière linéaire pour indiquer un nombre : ils acquièrent ainsi le statut de chiffre. De manière conventionnelle le signe le plus à droite correspond au nombre d'éléments non groupés, le suivant au nombre de groupes de dix, puis de groupements de dix groupements de dix, etc.

Cette stratégie est spécifique à la numération écrite chiffrée dans le sens où elle fait écho à l'analyse que nous avons faite de cette dernière. Elle est spécifique aussi car les procédés modèles pour obtenir le nom du nombre (donc ceux concernant la numération parlée) ne sont pas nécessairement en deux temps. Elle est spécifique enfin car elle ne fait pas intervenir la numération parlée (sauf éventuellement comme compteur jusqu'à dix, ce que peut faire aussi un système de bâtons).

Numération « décimale » ?

En considérant les procédures des élèves, nous pensons qu'« organiser/configurer pour désigner » est une stratégie dans laquelle peut être mis en jeu le caractère décimal de « la » numération au CP. En particulier, lorsque cette stratégie est suivie dans un deuxième temps par un codage menant à l'écriture chiffrée, cela peut être l'occasion de questionner la nécessité ou non de constituer des groupes de cardinaux identiques, tous de dix, et en nombre maximum. Dans cette mise en signes se trouvent mises à l'épreuve les caractéristiques d'une numération telle que nous l'avons définie : non redondance (deux signes différents ne peuvent désigner un même nombre), non ambiguïté (un même signe ne peut désigner deux nombres différents) et exhaustivité (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, *a minima* tous les nombres entiers inférieurs à une certaine borne).

Dans le cadre de notre recherche, ne pas faire apparaître le mot décimal ni dans le terme « numération parlée », ni dans celui « numération écrite chiffrée » procède de raisons différentes : pour le premier c'est parce que la numération n'est pas nécessairement décimale et pour le deuxième c'est justement parce qu'elle l'est nécessairement (le terme « numération

écrite chiffrée » étant estimé suffisamment évocateur pour renvoyer au système d'écriture chiffrée utilisé usuellement dans le monde entier). L'explicitation de ces choix est pour nous une façon d'engager une discussion sur la décimalité des numérations et ainsi de mettre à jour les choix en ce qui concerne le savoir pris en référence.

5. Conclusion : Limites et intérêt d'une analyse prenant en compte les spécificités de deux numérations

La méthode d'analyse que nous proposons nécessite des analyses de procédures dans des situations variées. En outre il y a lieu d'exhiber des procédés modèles. Certains procédés modèles se ressemblent et les procédures des élèves semblent pouvoir être analysées avec pertinence à l'aune de différents procédés modèles. Mais des différences peuvent être mises en évidence. Ainsi, certaines caractéristiques nous semblent pouvoir apparaître de manière récurrente chez tel ou tel élève (groupements ou non, de dix ou non, maximaux ou non, utilisation de repérants ou non, traduction de l'oral vers l'écrit ou non). La méthode nous semble donc pouvoir fournir des indications pour établir certains profils. L'intérêt par rapport à d'autres types d'analyses et de permettre de distinguer finement dans les procédures des élèves ce qui serait proche ou non des propriétés relatives aux écritures chiffrées (par exemple le fait de procéder en deux temps : organiser toute la collection afin de chercher à désigner le cardinal à l'aide de chiffres en tenant compte de l'organisation). Cela peut renseigner sur les connaissances et conceptions que les élèves ont des écritures chiffrées, en particulier de leur aspect positionnel et décimal.

En outre, il pourrait être profitable aux élèves de connaître la stratégie signalée ci-avant pour obtenir une écriture chiffrée du cardinal d'une collection : une première étape « organiser/configurer » visant une deuxième, le codage, dans laquelle peuvent apparaître plus clairement les aspects positionnels et décimaux. C'est un moyen de rendre disponible aux élèves une ressource liée à des aspects spécifiques de la numération écrite chiffrée, ce qui est, selon nous, un des enjeux de l'enseignement de « la » numération (considérée comme moyen de désignation donc de compréhension du nombre). Un certain jeu pourrait ainsi s'instaurer entre différentes possibilités d'exprimer le nombre. Par exemple, une addition peut être résolue en employant au choix, soit le calcul mental qui utilise des propriétés de la numération parlée (trente-trois plus dix-neuf c'est trente plus dix donc quarante, trois plus neuf égale douze, quarante plus douze est égal à cinquante-deux), soit les chiffres des écritures chiffrées (l'algorithme usuel d'une somme telle que $33+19$)²². Pour nous, distinguer plusieurs désignations du nombre contribue à sa conceptualisation : le nombre ce n'est pas sa désignation, cette distinction nous semble moins perceptible si « la » numération est perçue comme unique avec une forme orale et écrite. En extrapolant, les élèves pourraient ainsi mieux comprendre qu'une écriture décimale ou une écriture fractionnaire n'est qu'une façon (issue d'un système) pour exprimer un même nombre (pas nécessairement entier). Ils pourraient alors être préparés au fait que $\frac{10}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{3}$, π , « x », peuvent désigner un nombre, sans que ne soit utilisée *a priori* une écriture chiffrée (avec virgule ou non) ni même un système de numération.

²² Comme l'envisage Christine Chambris dans ce même cahier, il nous semble profitable que l'élève ait aussi à sa disposition les ressources liées aux unités de numérations (cinquante plus trente, c'est cinq dizaines et trois dizaines, c'est cinq et trois, huit, qui font huit dizaines, soit quatre-vingts). Notre approche nous a conduit à identifier deux systèmes de numération qui peuvent être repérés comme enjeu d'apprentissage dès le CP. Ceci met l'accent sur un des rôles possibles qu'une numération en unités peut jouer dans les apprentissages : un moyen de mieux comprendre le nombre, en permettant entre autres de faire des liens entre les deux numérations ou/et d'éclairer certaines des propriétés d'une d'entre elles.

Cependant, jouer sur les possibilités sémiotiques offertes par les systèmes de numération n'assure pas que les mots ou écritures utilisés par les élèves constituent des signifiants du nombre. En effet, comme c'est le cas pour les désignations parlées du nombre, rien n'assure *a priori* que l'écriture chiffrée obtenue en codant une organisation soit comprise par un élève de CP comme une désignation de la quantité globale. En particulier, avec la stratégie que nous avons mise en exergue il se peut que ce dernier perçoive une écriture chiffrée comme une indication d'un type d'organisation et non comme une désignation du nombre d'éléments d'une collection. Selon nous, et en suivant en cela la théorie des champs conceptuels, donner du sens aux désignations nécessite d'employer les nombres dans différentes situations relevant de différentes classes de problèmes dans lesquelles ces désignations sont mobilisées. En outre, en nous référant cette fois-ci à la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998), l'apprentissage passe par la résolution de problèmes. Il ne nous semble donc pas pertinent de réduire l'apprentissage à la mémorisation de procédures mécaniques, même si elle a son utilité, y compris pour obtenir une écriture chiffrée via la stratégie « organiser/configurer pour dénombrer » suivie d'un codage. Cependant, il n'est pas aisé de trouver des situations fondamentales (au sens de Brousseau) au service de l'enseignement de la numération écrite chiffrée au CP car les écritures chiffrées n'y ont pas facilement un caractère de nécessité. En effet, si écrire peut apparaître nécessaire pour se souvenir ou communiquer, d'autres systèmes que celui de la numération écrite chiffrée sont envisageables et ont été utilisés par les hommes (Ifrah 1994, voir aussi annexe). Cette dernière devient réellement performante lorsque sont requis des grands nombres et des calculs complexes (plus complexes que de « simples » additions et soustractions). Or les élèves de CP abordent les aspects positionnels des écritures chiffrées avec des petits nombres et des opérations « simples ». Néanmoins, envisager notre système chiffré comme un code d'une certaine organisation d'une collection permet de questionner un certain nombre de choix. Certains ont un caractère conventionnel (graphie des chiffres), d'autres peuvent se percevoir parmi un éventail de possibles (base dix au lieu d'une autre, écriture positionnelle pour coder l'organisation).

Cette connaissance des spécificités de la numération écrite chiffrée par rapport à la numération parlée nous semble pouvoir contribuer à enrichir la palette d'outils professionnels du professeur enseignant les mathématiques.

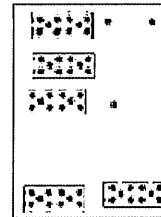
Références

- Atlas des Mathématiques* (1997), de REINHARDT F. et SOEDER H, Le Livre de Poche, Paris : Librairie générale française,. Edition originale : *Atlas zur Mathematik* (1974), Munich : Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG.
- BIDEAUD J., LEHALLE H. & VILETTE B. (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Paris : Presses universitaires du Septentrion.
- BRIAND J., LACAVE LUCIANI M-J., HARVOUËT M., BEDERE D., GOUA DE BAIX V. (1999-2000) Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, **66**, 7-22 (voir aussi Grand N Spécial maternelle : Approche du nombre. T. 1. Enseigner l'énumération en moyenne section. p. 123-138. Grenoble, 2001)
- BRISSIAUD R. (2007) *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Paris : Retz.
- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

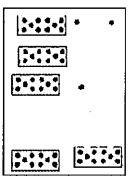
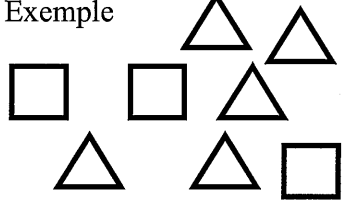
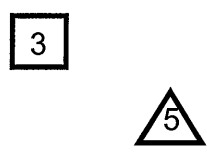
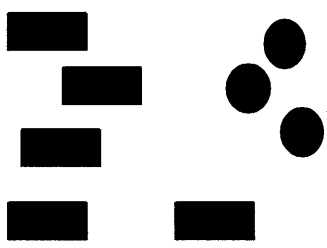
- CAUTY A. (1984, 1986) Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées, *Amérindia* **9** et **11**. Disponible en ligne.
- CAUTY A. (1988) Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale, *Amérindia* **13**. Disponible en ligne.
- CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)
- CONNE F. (1989) Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9.1**, 74-115.
- DEBLOIS L. (1995) Le développement de l'écriture des nombres chez Christine. *Revue des sciences de l'éducation* **XXI.2**, 331-351.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- FENICHEL M. & PFAFF N. (2005) *Donner du sens aux Mathématiques*, tome 2. Paris : Bordas.
- IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.
- MOUNIER E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP : vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7). Disponible en ligne. Voir une présentation dans les actes du séminaire national de didactiques des mathématiques **2011**. 229-244. Paris : Irem de Paris 7.
- MOUNIER E. (2012) Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **17**, 27-58.
- MOUNIER E. & PFAFF N. (2012) Quoi de neuf dans la numération au CP ? *Actes du XXXVIII Colloque Copirelem – Dijon 2011*.
- ROBERT A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **27.3**, 271-312.
- VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2/3**, 133-169.

Annexe : différentes façon de coder l'organisation d'une collection de cardinal inférieur à cent (organisée en dizaines et unités)

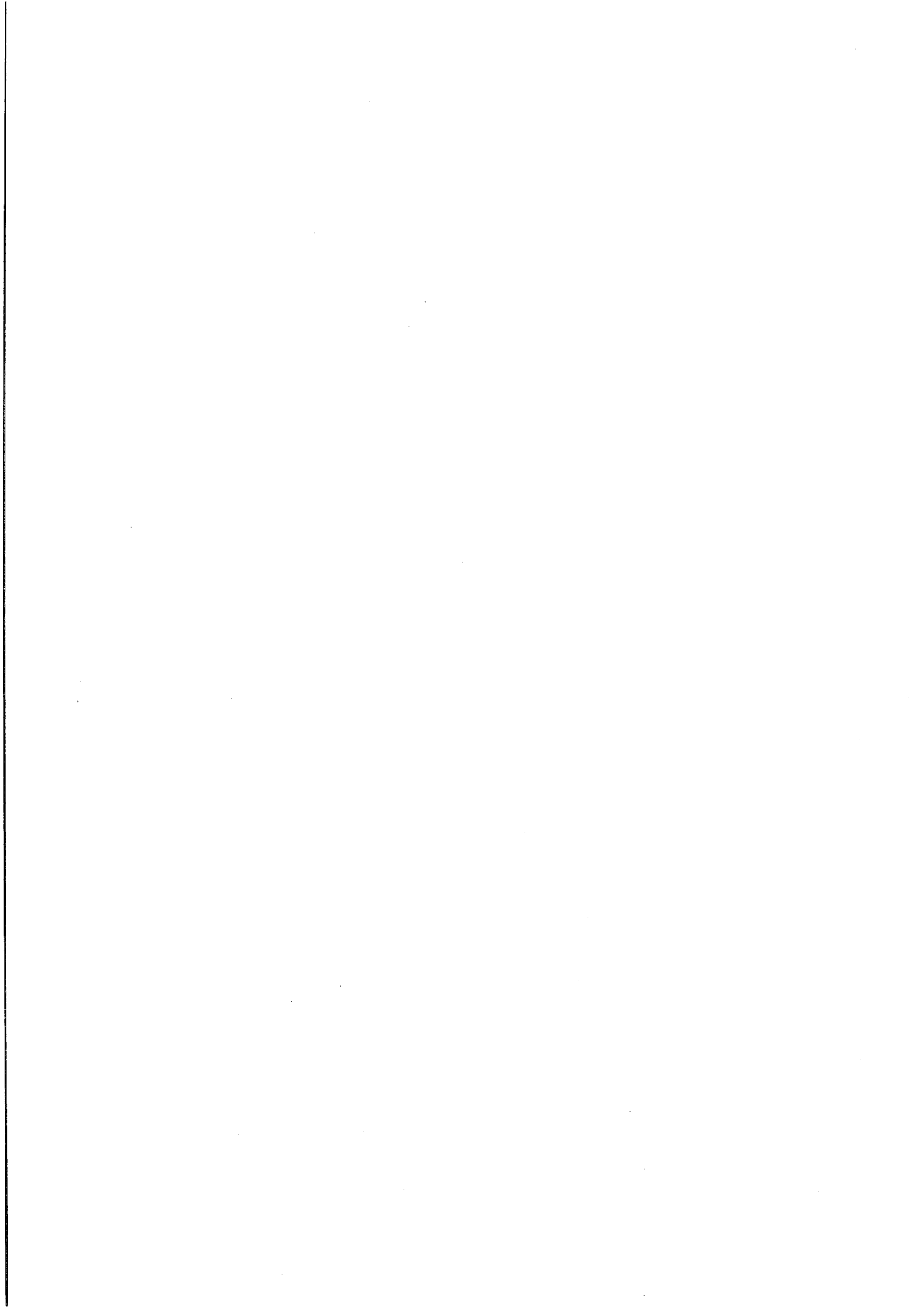
Supposons une collection de ronds organisée comme suit de manière maximale (tous les groupements de dix ont été faits, il reste moins de dix ronds non groupés en dizaines) :



Voici une typologie des codes écrits possibles :

	Type 1	Type 2	Type 3
	<p>Exemple</p> 	<p>Exemple</p> 	<p>Exemple</p> <p>5 3</p>
Principes	Un symbole par catégorie de groupement, on reproduit autant de symboles qu'il le faut.	Un symbole par catégorie de groupement, on indique par un chiffre le nombre de symboles qu'il faut.	Pas de symbole pour indiquer la catégorie de groupement. Elle est connue grâce à la position du chiffre dans l'écriture. Le chiffre indique alors le nombre de groupements de cette catégorie.
Autres exemples	Symboles arbitraires, sans lien avec la collection initiale : X X X X X I I I	Symboles arbitraires, sans lien avec la collection initiale 5X 3I	Dispositions des chiffres, non linéaires 5 5 3 3
	Utilisation de dessins : 	Utilisation de signes proches du dessin : 3 ○ 5 □	Disposition linéaire des chiffres avec l'ordre conventionnellement adopté : 53 ou bien avec ordre inversé : 35
Connaissances requises <i>a minima</i> .	Pour comprendre le code, il faut connaître la valeur de chaque signe (c'est-à-dire la catégorie de groupement à laquelle il renvoie).	Pour comprendre le code, il faut connaître la valeur de chaque signe mais, aussi la signification de chaque chiffre (le signe « 5 » renvoie au nombre désigné par le mot « cinq »).	Pour comprendre le code, il faut savoir à quelle catégorie chaque chiffre renvoie selon sa disposition. Il faut aussi connaître la signification de chaque chiffre.

Dans le type 2, on a utilisé ici les signes graphiques usuels pour indiquer les nombres de un à neuf : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dans le type 3 s'ajoute le signe « 0 ». Ce sont des signes conventionnels.



Etude des activités numériques du manuel scolaire ivoirien de mathématiques du CP1 « *Mon cahier d'application* »

NEBOUT-ARKHURST Patricia*

Résumé :

La présente étude contribue à clarifier dans quelle mesure le manuel scolaire « *Mon cahier d'application* », livret en vigueur dans le système éducatif ivoirien offre des stratégies pertinentes pour l'apprenant en termes d'activités numériques. Les résultats dégagés montrent que les activités et les stratégies sont variées. Nous dégageons une carte conceptuelle des activités numériques qui rend compréhensibles les connections entre les différents objets d'enseignement. La variété des activités numériques ne garantit pas toujours un apprentissage numérique de qualité.

Mots- clés :

Activités numériques, manuels scolaires, carte conceptuelle, compétences.

Introduction

Cadre institutionnel et contextuel du système scolaire primaire

En Côte d'Ivoire, l'article 4 de la loi d'orientation N° 95- 696 du 7 septembre 95 stipule que « *le service de l'enseignement comprend quatre cycles : le Préscolaire, le Primaire, le secondaire et le supérieur* ». Chaque degré d'enseignement comporte des cycles d'apprentissage ayant des objectifs, des contenus, une organisation pédagogique et des modalités d'évaluation des acquis qui leur sont spécifiques. L'article 19 notifie que l'enseignement préscolaire et primaire « *est accessible aux enfants dès l'âge de trois (3) ans* ». Ce degré d'enseignement se subdivise en cycles préscolaire et primaire.

Les missions du cycle préscolaire visent le développement global et harmonieux du jeune apprenant en relation avec son environnement, sa socialisation et sa préparation en vue d'aborder le cycle primaire. Le cycle primaire vise l'intégration de l'enfant dans son environnement social,

* Ecole Normale Supérieure d'Abidjan (Côte d'Ivoire). *Département des sciences de l'éducation*
Email : nebout_arkhurst@hotmail.com

culturel et économique, à la formation morale, civique, culturelle et pratique ; il le prépare à aborder le cycle secondaire.

Le cycle préscolaire comprend trois niveaux qui sont la petite, la moyenne et la grande section. Quant au cycle primaire, il en comprend six qui sont le Cours Préparatoire 1^{ère} année (CP1), le Cours Préparatoire 2^{ème} année (CP2), le Cours Élémentaire 1^{ère} année (CE1), le Cours Élémentaire 2^{ème} année (CE2), le Cours Moyen 1^{ère} année (CM1), le Cours Moyen 2^{ème} année (CM2).

Notre étude pose la problématique de l'enseignement des activités numériques à ce stade de la scolarisation. Nous nous référons aux apports des travaux de Piaget (1979) et de Fayol, Camos et Roussel (2000). La carte conceptuelle est un outil didactique mis au point par Novak (1990) servant à organiser et à représenter des connaissances à différents niveaux d'abstraction selon une structure hiérarchique. Notre démarche méthodologique nous conduit dans un premier temps à la présentation de la carte conceptuelle des contenus mathématiques du livret du CP1. Dans un deuxième temps, nous décrirons les stratégies mises en jeu pour la catégorisation des connaissances.

I- PROBLEMATIQUE

La pédagogie par objectifs (PPO) était en vigueur dans le système scolaire primaire jusqu'en 2003. Depuis 2004, l'Approche Par Compétences (APC) est en application.

Les instructions officielles définissent l'Approche Par Compétences comme un modèle de formation qui repose sur l'acquisition de compétences composées de capacités et d'habiletés déclinées en savoirs, savoir-faire et savoir-être scolaires.

Ces instructions officielles indiquent aussi que la compétence va au-delà de ces trois types de savoirs scolaires et est proposée comme une clé pour résoudre les problèmes de la vie courante.

La compétence se compose :

- de capacités : savoir-faire moyennement complexes intégrant des habiletés cognitives, psychomotrices et sociales et des connaissances (contenus d'enseignement disciplinaires) ;
- d'habiletés : savoir-faire simples intégrant des connaissances d'ordre affectif, cognitif, social ou psychomoteur.

La seule compétence disciplinaire proposée en mathématiques s'intitule « résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des mathématiques ». Les instructions officielles la déclinent en cinq capacités comme l'indique le tableau ci-après :

Compétence Disciplinaire	Capacités
Résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des mathématiques	1-Décoder les éléments de la situation problème
	2-Modéliser la situation problème
	3-Mettre en œuvre une stratégie de résolution de la situation problème
	4-Valider sa solution
	5-Objectiver la démarche de résolution de la situation problème

Tableau 1 : Déclinaison de la compétence disciplinaire en capacités

A titre d'exemple, la capacité 1: « décoder les éléments de la situation problème » se décline à son tour en habiletés comme le montre le tableau suivant :

Capacités	Habiletés
Décoder les éléments de la situation problème	1-Identifier le sens des termes et des symboles mathématiques
	2-Dégager l'information contenue dans un diagramme, un tableau, un schéma, un texte
	3-Distinguer les données pertinentes des données non pertinentes
	4-Dégager la tâche à réaliser

Tableau 2 : Un exemple de déclinaison d'une capacité en habiletés

Au regard de ces orientations de l'Approche Par Compétences, le curriculum devrait faire l'objet d'un consensus entre tous les acteurs du système éducatif.

Le recadrage curriculaire de l'Approche Par Compétences en Côte d'Ivoire devient une nécessité car les instructions officielles de cette Approche Par Compétences exigent désormais que les contenus à enseigner au CP1 soient traités en référence à des situations concrètes, contextualisées, traduites dans un langage accessible dans le manuel de sorte que ce dernier soit un outil permettant à l'élève de CP1 d'apprendre les mathématiques en jouant à travers la

découverte des nombres, leur construction, la réalisation des opérations, la découverte des figures planes et des mesures de longueur.

Les stratégies d'intervention dans la construction des situations d'apprentissage et des activités dans l'Approche Par Compétences dans le système éducatif ivoirien interdit de proposer à l'élève des activités qui ne sont pas conformes à ces exigences.

Il nous semble important de rappeler que l'apprentissage est un processus actif. Plus les connaissances de l'élève sont organisées, reliées entre elles, plus elles sont significatives et réutilisables fonctionnellement dans son milieu.

Dans l'application de l'Approche Par Compétences, l'enseignant est sans cesse confronté à la difficulté de choisir les activités, les démarches et les situations qui amèneront l'élève à réellement apprendre. L'enseignant ne devrait pas se comporter comme un technicien dont l'ensemble des actions est précisé et ordonné de l'extérieur. Le manuel sur lequel porte notre étude est un produit curriculaire de la mise en œuvre de l'approche Par Compétences. Dans quelle mesure ce document curriculaire en vigueur au Cours Préparatoire Première année offre-t-il des **activités numériques enrichissantes pour l'élève ?**

L'enseignant ne doit pas se laisser guider servilement par des manuels scolaires et les séquences qu'ils prescrivent.

Nous soutenons avec Berbaum (1984), que si « penser » signifie « opérer », le problème didactique consiste à concevoir ou à adapter une situation qui va entraîner l'activité de l'élève.

II - CADRE CONCEPTUEL ET METHODOLOGIQUE

1. Cadre Conceptuel

1.1. De l'exercice scolaire à la situation- problème

Un exercice scolaire, selon Zakhartchouk (1999), est un texte injonctif, qui demande de la part de l'élève de procéder à une ou des actions précises pour aboutir au résultat souhaité.

Cela permet de vérifier :

- que l'élève a acquis une ou des connaissance(s) ;
- que l'élève maîtrise un ou des savoir-faire qu'il est capable de transférer dans une situation nouvelle.

Un très grand nombre de tâches présentées régulièrement à l'élève ne correspondent en rien à de réelles activités de résolution de problèmes. Fréquemment, il n'y a aucun problème à résoudre pour l'élève, il n'y a que des algorithmes à appliquer d'une façon répétitive et mécanique dans un exercice.

Dans un algorithme, la demande cognitive est toujours la même pour l'élève. Celui-ci n'a pas de stratégies à rechercher, à déterminer. Il n'est pas dans un contexte où il doit s'interroger sur les moyens à apprendre, cela n'est pas nécessaire pour bien réaliser l'activité.

Lorsque l'élève doit, dans une situation donnée, réorganiser ses ressources cognitives pour franchir des obstacles, il fait face à une situation problème.

Selon Astolfi (1993), une situation problème est organisée autour du franchissement d'un obstacle par la classe, obstacle préalablement bien identifié. Cette situation a un caractère concret qui permet effectivement à l'élève de formuler des hypothèses et des conjectures. Les élèves perçoivent ce qui leur est proposé comme une véritable énigme dans laquelle ils sont en mesure de s'investir. Les contraintes ou les obstacles à surmonter exigent une réorganisation des connaissances antérieures qui amènent l'élève à faire des efforts, donc à faire des apprentissages.

La situation problème doit donc être signifiante, c'est à dire elle a un sens pour l'élève parce qu'elle fait appel à quelque chose qu'il connaît et qui est en lien avec sa réalité.

Les élèves ne disposent pas au départ des moyens pour la solution recherchée en raison de l'existence de l'obstacle qu'ils doivent franchir pour y parvenir. C'est le besoin de résoudre qui conduit les élèves à élaborer des stratégies ou à s'approprier les instruments qui seront nécessaires à la construction d'une solution.

La situation doit offrir une résistance suffisante, amenant l'élève à y investir ses connaissances antérieures disponibles ainsi que ses représentations, de façon à ce qu'elles conduisent à leur remise en cause et à l'élaboration de nouvelles idées. La solution ne doit pas pourtant être perçue hors d'atteinte pour les élèves. Pour Meirieu (1987), dans la situation problème, le sujet est orienté par la tâche et l'obstacle dont le franchissement doit représenter un palier dans le développement cognitif de ce sujet apprenant.

L'enseignant traite l'information à des fins d'enseignement. L'apprenant, lui, choisit des stratégies appropriées pour réussir la tâche demandée tout en se basant sur les connaissances « intégrées » et potentiellement disponibles.

La situation problème a un double avantage. D'une part, elle permet aux élèves de faire de réels apprentissages en les plaçant au cœur de processus d'apprentissage. D'autre part, elle sollicite l'engagement des élèves qui deviennent davantage acteurs.

1.2. Types de connaissances et construction du savoir.

Les connaissances antérieures exercent un rôle primordial dans l'apprentissage car elles constituent les pré-requis fondamentaux utiles aux nouvelles connaissances. Cependant, l'acquisition de ce répertoire de connaissances ne peut prospérer réellement sans la mise en place de démarches ou de stratégies cognitives appropriées. Ainsi, les démarches déployées seront fonction des types de connaissances (déclaratives, procédurales, conditionnelles) :

- les connaissances déclaratives sont des connaissances théoriques constituées de faits, de règles, de lois et de principes. Exemples : la définition d'un quadrilatère, la connaissance des tables de multiplication.....
- les connaissances procédurales relèvent « du comment faire ? », des procédures liées aux savoir-faire. Exemples : résoudre une série de problèmes de multiplication, effectuer l'addition $45 + 39 = \dots\dots\dots$
- les connaissances conditionnelles correspondent essentiellement « au quand » et « au pourquoi » en référence aux classifications (classes) et aux catégorisations (catégories). Exemples : distinguer un carré d'un triangle, estimer l'exactitude d'une réponse en mathématiques.

Tardif (1992) soutient que lorsque l'élève est en présence d'une activité, il doit, par rapport aux facteurs cognitifs, explorer les contours de la tâche et les stratégies à l'aide desquelles il peut la réaliser adéquatement selon ses ressources disponibles.

1.3. La construction du nombre chez l'enfant

La construction du nombre est un processus dynamique selon Piaget (1979). Cet auteur, à travers plusieurs expériences, a montré que le nombre n'est pas « stable » chez l'enfant dès les premiers moments. C'est au stade des opérations concrètes (7 à 12 ans) que le concept du nombre commence à se stabiliser. Bien avant cela, les apprentissages numériques débutent avec la reconnaissance, la description, la comparaison, le rangement, le classement, le tri des objets selon leurs qualités et leurs usages.

A partir de cette étape, les noms des nombres connus sont associés à leur écriture chiffrée. L'étude s'organise alors autour de deux aspects, l'aspect cardinal (relatif à la quantité) et l'aspect ordinal (position d'un objet dans une série).

L'aspect cardinal se construit à travers l'utilisation des nombres pour garder la mémoire d'une quantité en vue de la reproduire, de la communiquer et de la comparer à une autre quantité. C'est cet aspect qui débouche sur l'activité de dénombrement dont la maîtrise dépend de cinq principes :

- le principe d'adéquation unique (un objet = un mot) ;
- le principe d'ordre stable (comptine numérique énoncée sans erreurs) ;
- le principe cardinal (le dernier mot de la liste suffit pour mémoriser la quantité) ;
- le principe d'abstraction (on peut compter des objets différents dans une même collection) ;
- le principe de non pertinence de l'ordre des éléments comptés (le dénombrement est indépendant de la position des objets).

L'aspect ordinal se construit autour de la mémorisation et de la souvenance de la position d'un objet pour pouvoir le retrouver ou le mettre à sa place dans une suite totalement ordonnée. Ce qui suppose qu'on numérote les objets en suivant la suite des nombres en même temps que les objets sont identifiés.

Selon Gelman (1983), pour compter, les enfants doivent mettre en œuvre tous les cinq principes simultanément, de façon coordonnée. C'est la prise en compte de ces principes qui assure à l'enfant la capacité de comprendre à terme la conservation du nombre. Pour enrichir ce principe de conservation du nombre dont parle Piaget (1979), Fayol et al. (2000) pensent que c'est par la verbalisation du nombre que les « conduites numériques » deviennent possibles et font accéder l'enfant à des aptitudes de construction numérique plus pointues. L'on peut retenir que la construction du nombre obéit à la prise en compte d'un certain nombre d'étapes, de principes et d'activités. Le langage, à travers la verbalisation, y joue un rôle important.

2. Cadre méthodologique

2.1. Description du document curriculaire :

2.1.1 Structure transversale et verticale

Le livret qui fait l'objet de notre étude est dénommé « *Mon cahier d'application* ». Ce livret qui est conforme aux curricula axés sur l'Approche par compétences (APC), est un document autorisé par l'Etat et qui est utilisé en association avec un autre livret officiel dénommé « *Mathématique CP1* ». Il s'adresse aux élèves du cours préparatoire première année (CP1) du cycle primaire du système éducatif ivoirien. Il est en usage depuis 2006. Il contient des exercices de français et des exercices de mathématiques.

La finalité de ce cahier d'application est d'entraîner les élèves à l'apprentissage du français et des mathématiques au moyen des exercices. Le critère de variabilité des exercices est-il observé ? Le choix des exercices est d'une extrême importance. Le choix des exemples que véhiculent les exercices par leur variété et leur nombre permet à l'élève de décontextualiser ses apprentissages et de transférer ses connaissances d'une situation à une autre, d'un contexte à un autre.

Le trait distinctif d'un transfert est le passage d'une connaissance à une autre, d'une situation à une autre, d'un contexte à un autre. La nature des opérations est la même.

Le livret comporte 109 pages d'activités et 3 pages blanches configurées en doubles lignes permettant à l'apprenant de prolonger ses exercices.

Les activités de mathématiques sont configurées comme suit :

- une ligne pour la date du jour à écrire avec ou non mention de la semaine ;
- nom de la *discipline* ou de la *sous-discipline* (mathématiques, Education Civique et Morale, Expression Ecrite) ;
- une consigne formulée avec « je » précédée ou non d'un numéro ;
- un modèle de l'activité reproduit ou non ;
- un numéro de page précédé de la semaine.

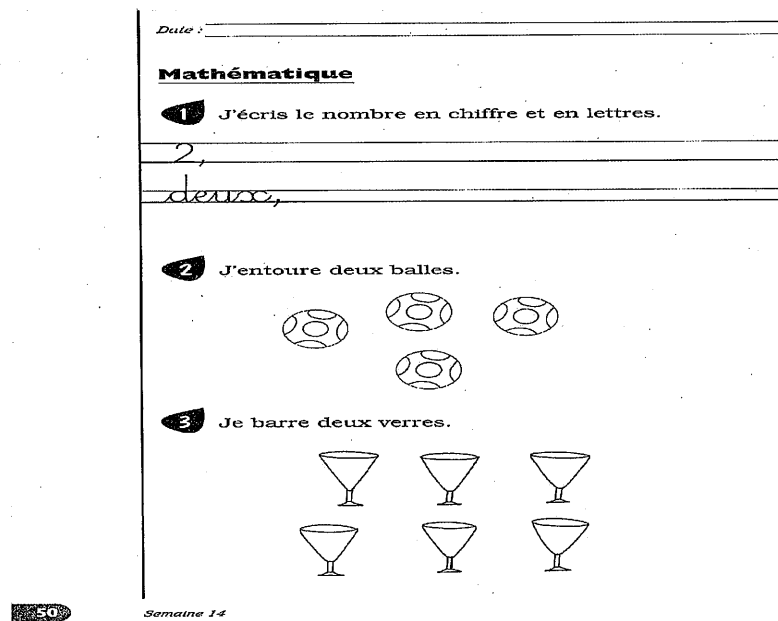


Figure 1 : Configuration d'une activité de mathématiques extraite du manuel

2.1.2 Les stratégies d'étude du nombre

Au CP1, les nombres ne s'étudient pas de manière systématique dès les premières semaines. Leur étude est précédée de celle des activités dites « *activités pré-numériques ou activités logiques* » exposées dans le manuel. Ce sont les activités de *tris, classements, sériations, rangements, rythmes, correspondances et de comparaisons* qui préparent progressivement l'enfant à l'acquisition du nombre. Leur étroite relation est telle que la recherche des types de connaissances inhérentes à l'étude des nombres doit s'accommoder avec ceux inhérents à ces activités logiques.

Ci-dessous sont répertoriés les types d'activités, les types de connaissances sous-jacentes ainsi que les stratégies utilisées pour mener les activités pré-numériques et celles liées à l'étude des nombres au CP1. Nous dégageons six types de stratégies relevant à la fois de critères mathématiques et de critères de niveau de conceptualisation des tâches.

- **les démarches de restitution** consistent à communiquer ou déclarer des informations mémorisées sans justification apparente ;
- **les démarches de mise en relation** consistent à rapprocher des objets de nature différente ou établir un lien significatif entre eux;

- *les démarches de technicité* s'appuient sur le respect d'une règle de construction, d'un sens d'exécution ou d'un principe ;
- *les démarches de reproduction* consistent à observer pour reproduire un modèle visuel ;
- *les démarches d'ordonnement* consistent à « hiérarchiser » des objets ou construire un ordre ;
- *les démarches de regroupement* consistent à former des collections partageant une propriété ou un critère donné (e).

2.2. Descriptif des données

Les données recueillies concernent les exercices sur les activités numériques.

Après un dépouillement et une analyse de ces données, nous les avons identifiées selon les différents types d'activités, reflet du programme d'enseignement, les types de connaissances et démarches d'exécution qui les sous-tendent.

Nous nous proposons de décrypter quelques-uns de ces exercices de type singulier ou composé pour chercher à montrer leur variété et la demande cognitive à mobiliser.

2.2.1 Rythmes

Ce sont des activités où l'apprenant doit observer une base rythmique qui respecte une loi précise dans son application. Toute production de l'élève en dehors du respect de cette loi est erronée.

Exercice N°1 p.36 : je colorie un triangle en vert, deux ronds en jaune et je continue.



Figure 2 : un exemple de rythme simple extrait du livret d'exercices p.36

2.2.2 Correspondances

Les algorithmes de « correspondance » sont des activités dans lesquelles il est demandé à l'élève d'établir ou de construire des liens entre des collections et leur cardinal, entre des objets et leur fonction.

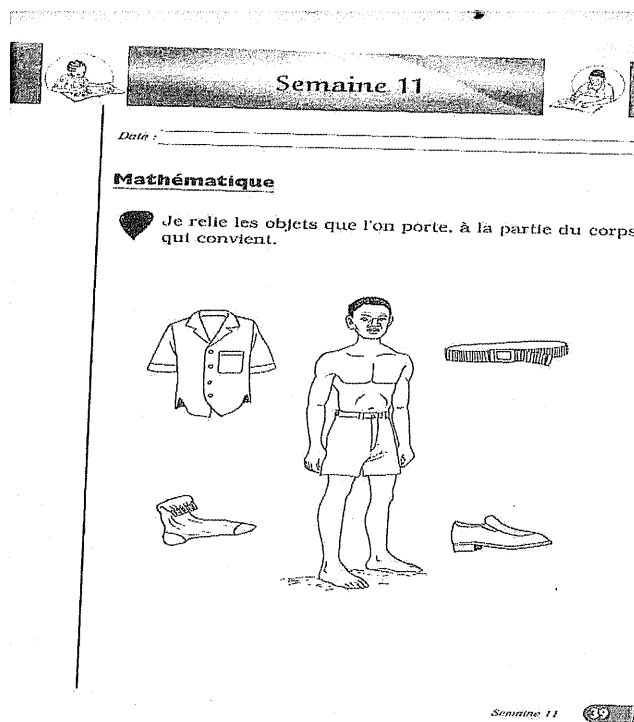


Figure 3 : un exemple d'activité de correspondance extrait du livret d'exercices p.39

Le but est d'apprendre ce qu'est une correspondance.

2.2.3 Egalité, comparaison et rangement

Cet exercice se réfère aux activités dans lesquelles l'enfant est appelé à construire des classes d'équivalence (égalité), des rangements, des comparaisons sur des objets de même nature ou de même espèce par une disposition selon leur taille ou par l'utilisation du signe « > ».

Exercice N°2 P.70 : je range les nombres de 9 à 0 du plus grand au plus petit.

Figure 4 : un exemple d'exercice de rangement visant une connaissance procédurale (P.70)

2.2.4 Codage et décodage

Dans ce type d'application, l'élève est amené principalement à faire des activités de codage et décodage des collections.

2 Je complète l'étiquette.

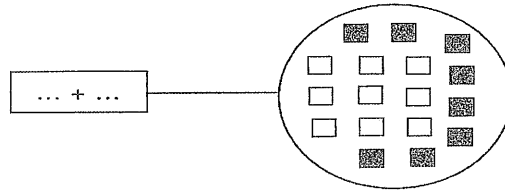


Figure 5: un exemple de codage extrait du livret d'exercices p.74

3 Je dessine la collection d'objets de l'étiquette.

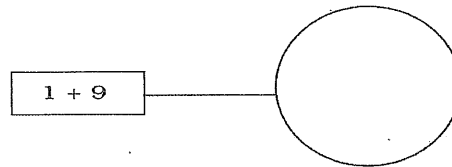


Figure 6 : un exemple de décodage extrait du livret d'exercices p.74

2.2.5 Ecriture additive

Il s'agit des activités relatives à l'écriture des nombres sous forme d'une somme à deux termes utilisant le signe « + » avec ou sans référence à des collections.

Exercice N°2 P.59 : je complète.

7+1 C'est.....

5+3 C'est.....

2.2.6 Tableau à double entrée

Cet exercice se base sur des activités à mener ou à construire dans un tableau dont la lecture peut se faire dans deux sens : l'entrée ou la lecture par la ligne ou celle par la colonne.

+	1	4	0
2		+ 2 = 2
5	5 +.....=.....		
3		3 + 4 =.....	
1			

Tableau 3 : un exemple de tableau à double entrée visant une connaissance procédurale extrait du livret

2.2.7 Application de « propriétés identiques » (tri et classement)

L'application de « propriétés » vise les activités basées sur la reconnaissance des propriétés ou attributs des objets (couleur, taille, forme) dans les activités de tri et de classement.

2 J'entoure **toutes** les filles.



Figure 7 : un exemple d'activité de tri extrait du livret d'exercices p.26

Mathématique

1 J'entoure les fruits de **même** nom.

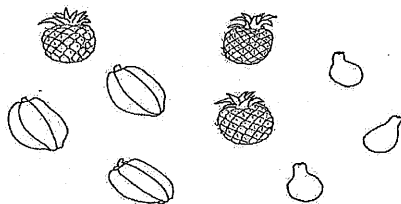


Figure 8 : un exemple d'activité de classement extrait du livret d'exercices p.26

2.2.8 Ecriture en chiffres ou en lettres

Il s'agit des exercices proposés à l'enfant pour s'entraîner à l'écriture en chiffres et en lettres des nombres dès leur découverte.

1 J'écris le nombre en chiffre et en lettres.

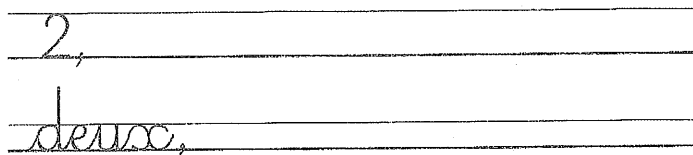


Figure 9 : un exemple d'écriture en chiffres et en lettres extrait du livret d'exercices p.50

Dans l'ensemble, notre démarche de traitement des données a consisté à dégager et à quantifier les types d'algorithmes dans un premier temps.

Dans un deuxième temps, nous avons dégagé et quantifié les types de connaissances visées par ces activités qui possèdent une demande cognitive ou non.

En dernier lieu, nous avons dégagé et quantifié les types de stratégies déployées dans l'exécution de chacun des exercices et leur effectif.

III- RESULTATS ET INTERPRETATION

L'analyse du manuel nous a permis de dégager la carte conceptuelle des contenus de mathématiques de CP1 en référence à l'approche de Piaget (1979) sur la construction du nombre chez l'enfant. Cette carte conceptuelle est une représentation graphique qui présente un ensemble de concepts reliés entre eux. *Elle donne une image de la perception qu'a un individu d'un domaine de la connaissance, car elle fait plus qu'organiser physiquement un ensemble de mots. Elle organise aussi le sens qui est véhiculé par les liens qui y sont présentés.* Le schéma peut être construit sous différentes formes. Par exemple, les concepts, *généralement un mot représentant une idée*, peuvent être notés dans des cases ou des cercles et les relations entre ces concepts indiqués au moyen de mots sur des lignes reliant les concepts les uns aux autres. Le schéma créé permet ainsi de mieux saisir le rapport qui existe entre les différents concepts évoqués de manière à rendre lisibles les connexions entre les notions et les concepts à l'étude.

Les instructions officielles recommandent de ne pas commencer par une étude systématique des nombres mais de la débiter par une phase préparatoire organisée autour d'un certain nombre d'activités dites « *activités pré-numériques* ». Cette carte conceptuelle des contenus se présente comme suit :

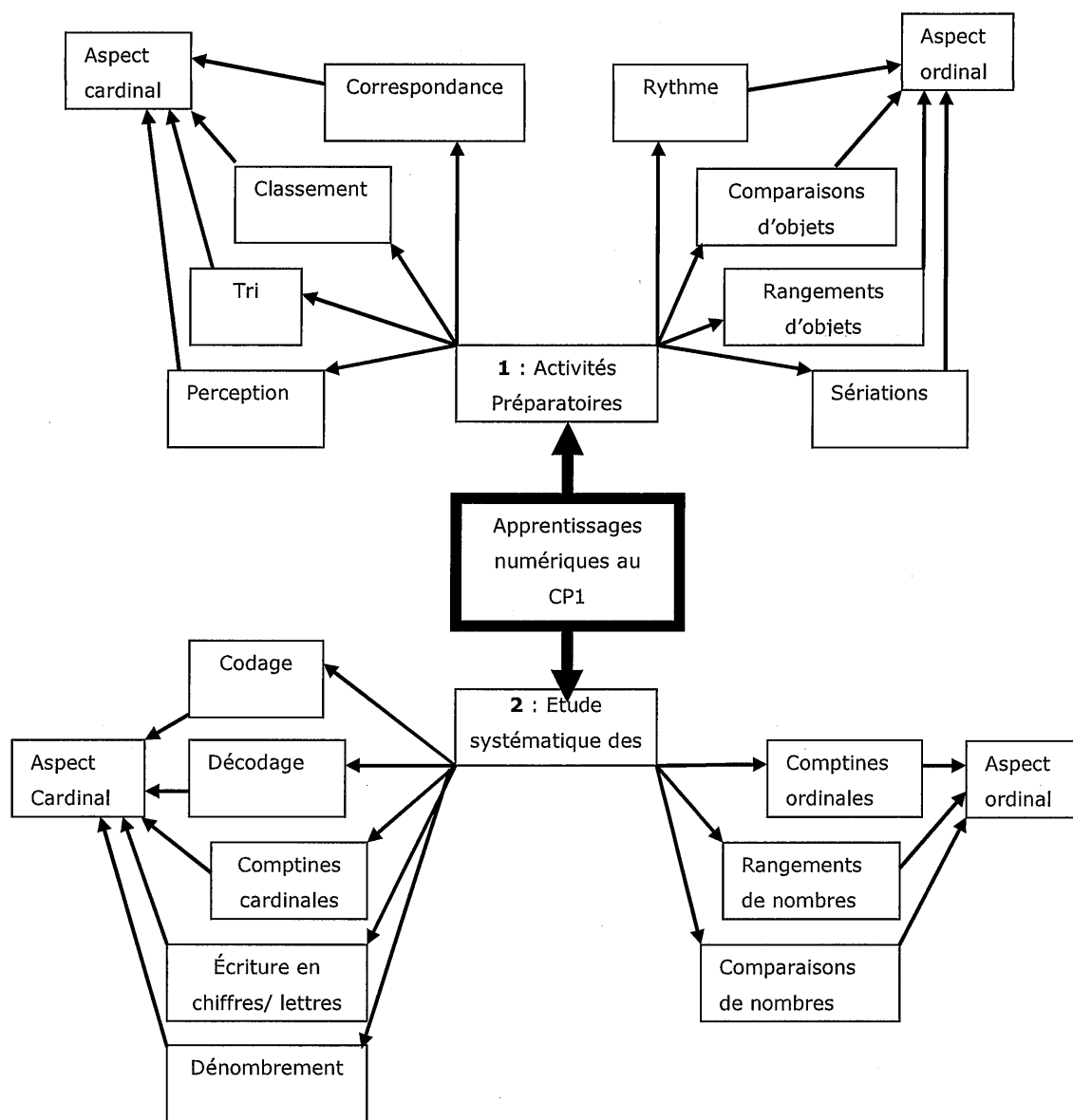


Figure 10 : Carte conceptuelle des apprentissages numériques au CP1

Les nombres étudiés au CP1 vont de 0 (zéro) à 9 (neuf). Selon les instructions officielles, leur étude systématique se fait par tranches et, en fonction de chaque tranche, chaque nombre a son mode de découverte et des activités spécifiques sont menées.

Le récapitulatif de cette organisation par tranche d'étude se présente selon la figure ci-après.

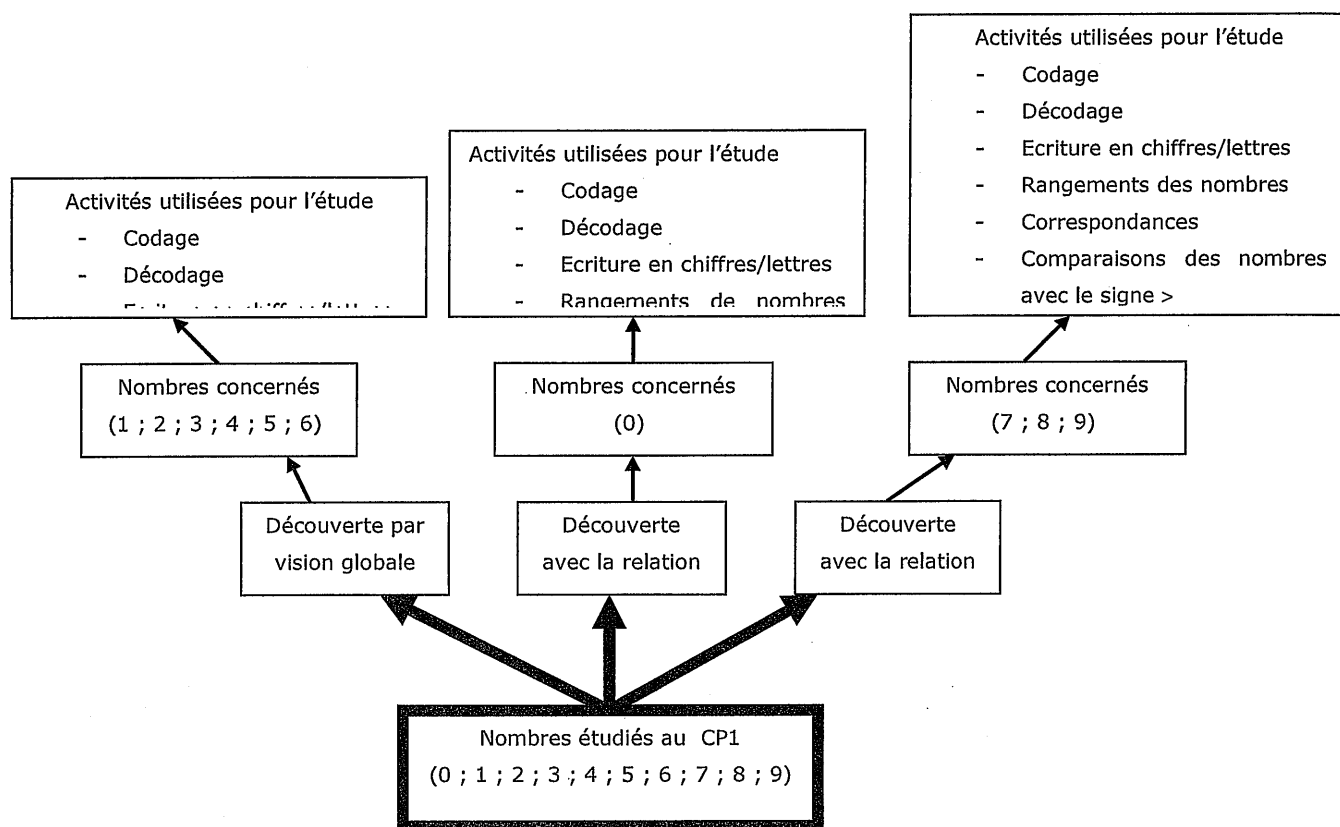


Figure 11 : Modes de découverte et d'étude des nombres du livret du CP1

Les activités proposées pour l'étude des nombres sont fonction des modes de découverte et ne se mènent pas toutes d'une tranche de nombres à une autre.

Après ce premier niveau de lisibilité des contenus à partir de ces cartes conceptuelles, nous avons fait une autre analyse du livret pour dégager la fréquence de chaque type d'activité aussi bien au niveau des activités préparatoires que de l'étude systématique.

Cette analyse du livret d'activités fait ressortir environ dix-sept types d'activités dont les effectifs sont précisés dans le tableau ci-après :

Nature de l'activité	Fréquence
Sérialisation	01
Rangement d'objets	01
Comparaison d'objets	01
Dénombrement	02
Tri	03
Correspondances terme à terme	03
Classement	04
Addition à double entrée	05
Rythme	06
Comparaison de nombres	06
Comparaison de collections	07
Addition	07
Décodage	07
Ecriture additive	09
Codage	11
Ecriture en chiffres/lettres	12
Rangement de nombres	13
Total	98

Tableau 4 : Effectifs des Activités répertoriées

On constate que le critère de variété est observé dans le choix des exercices relativement à la diversité quantitative et qualitative des activités menées dans l'étude des nombres du début à la fin de l'ouvrage. L'insuffisance des activités pré-numériques visant l'aspect ordinal semble marquée.

Les activités pré-numériques (*sérialisation, rangement et comparaison d'objets, tri, classement, correspondance*) dont le nombre s'élève à treize (13), semblent sous-représentées comparativement aux activités de l'étude systématique (*écriture additive, codage, écriture en*

chiffres et en lettres et rangement de nombres) dont les effectifs respectifs (9, 11, 12, 13) s'avèrent plus élevés.

Les activités relatives à l'étude des nombres (*dénombrement, comparaison de nombres, addition, addition à double entrée, codage, décodage, écriture en chiffres/lettres, écriture additive, rangement de nombres*) dominent quantitativement celles dites pré-numériques (*tri, classement, sériation, rangement d'objets, correspondances, comparaison d'objets, comparaison de collections, rythme*) avec un cumul de 72 contre 26).

A partir de l'analyse de ces types d'activités, nous pouvons dégager les types de connaissances sous-jacents. Dans certains cas, une même activité vise différents types de connaissances.

Par exemple, l'addition avec *un arbre de calcul* ou avec *un tableau à double entrée* mobilise des connaissances procédurales et déclaratives.

Construire un rythme nécessite la maîtrise d'une règle et de son fonctionnement à travers une certaine organisation des objets en série. D'où la mobilisation de connaissances procédurales pour construire un rythme.

Réussir l'écriture additive d'un nombre suppose la capacité pour un élève à restituer la décomposition additive intégrée plus tôt. Ce qui relève d'une connaissance déclarative.

En analysant toutes les activités répertoriées de cette manière, nous pouvons dresser un tableau des effectifs des types de connaissances sous-jacents à chacune d'elles.

Types de Connaissances	Effectif
Connaissances déclaratives	19
Connaissances procédurales	47
Connaissances conditionnelles	44
Total	100

Tableau 5 : Effectifs des types de connaissances répertoriées

Les connaissances procédurales et conditionnelles se quantifient sensiblement à un même niveau. Prises séparément ou cumulées, elles dominent les connaissances déclaratives qui apparaissent faiblement au plan quantitatif.

Chaque type d'activité mobilise un ou plusieurs types de connaissances à travers une ou plusieurs démarches cognitives qui représentent les différentes stratégies de réalisation de l'activité.

En analysant selon les types de stratégies tous les couples «types d'activités-types de connaissances», nous pouvons dresser un tableau des effectifs des types de stratégies sous-jacents à chacun de ces couples.

Types de stratégies	Effectif
Regroupement	07
Reproduction	19
Mise en relation	20
Restitution	21
Technicité	33
Ordonnancement	36
Total	136

Tableau 6 : Effectifs des types de stratégies répertoriées

Les démarches d'ordonnancement et de technicité sont celles qui sont les plus utilisées contrairement aux démarches de regroupement, faiblement utilisées. Dans certains cas, en fonction de la nature de l'activité et du type de connaissance, on note un usage concomitant de deux à trois types de démarches.

L'approche par compétences est une approche qui demande la prise en compte d'un certain nombre de données. Au terme de nos analyses, nous avons identifié dix-sept types d'activités couvrant les trois types de connaissances (déclarative, procédurale et conditionnelle) et six types de démarches (restitution, regroupement, technicité, mise en relation, reproduction et ordonnancement) qui apparaissent tous avec des effectifs variables et qui semblent en connexion. Ce qui montre que les exercices proposés satisfont au critère de variété, critère qui est une exigence de l'Approche Par Compétences. Cependant la demande cognitive ne concerne pas la grande majorité des types d'activités.

Les connaissances déclaratives sont fondamentalement des connaissances statiques plutôt que dynamiques. Elles doivent pour permettre l'action, être traduites en procédures ou en conditions, en connaissances procédurales ou conditionnelles. Ce n'est pas parce qu'un élève connaît de manière déclarative les étapes pour lire un texte informatif qu'il peut effectivement extraire les informations d'un texte de ce genre. Le même phénomène se produit quand l'élève ne connaît que de façon déclarative comment résoudre un problème écrit en mathématiques. Ces connaissances déclaratives « statiques » permettent certes à l'élève d'énoncer théoriquement les

étapes pour apporter une solution à un tel problème, mais il est loin d'être garanti qu'il puisse appliquer avec justesse et assurance ces étapes. Quelquefois, beaucoup de connaissances sont présentées à l'élève de façon déclarative alors que les intentions de l'enseignant sont de rendre cet élève apte à les utiliser fonctionnellement. Ainsi, il serait indiqué de doser rationnellement tous les types de connaissances (déclaratives, procédurales et conditionnelles) dans la construction du savoir.

Les connaissances procédurales correspondent aux étapes pour réaliser l'action à partir d'un savoir-faire adéquat permettant ladite réalisation. A ce niveau, l'élève est placé dans un contexte d'action, contexte dans lequel ces connaissances procédurales peuvent être mises en œuvre.

Il faut que l'enseignant rende l'élève « conscient » des stratégies procédurales et conditionnelles en marge de celles dites déclaratives de manière à l'outiller pour réaliser effectivement et efficacement les tâches proposées dans la résolution de problèmes. Les savoir-faire ne semblent pas être abordés comme objet d'apprentissage, le manuel se limitant à convoquer un nombre important d'activités, espérant qu'à force d'exercices, le savoir-faire serait éventuellement maîtrisé par l'élève.

En plus, les exercices comportant des savoir-faire à déployer ne sont pas bâtis sur le même modèle, ce qui pourrait l'amener à s'adapter par moments. Mais, dans certains cas, il peut en être « dérouté » s'il observe uniquement une démarche mécaniquement répétitive.

Tenant compte de tous ces aspects, nous pensons que les exercices du manuel scolaire « *Mon cahier d'application* » présentent, certes une variété d'activités organisées autour des trois types de connaissances mais que, du point de vue numérique, ces activités restent réductrices.

La cartographie de ces exercices n'est pas à notre avis une configuration qui pourrait garantir les principes de base de l'Approche Par Compétences, surtout ceux liés à l'intégration entre tous les types de savoirs. Notre interrogation trouve sa réponse à travers des tâches qualitativement insuffisantes pour correspondre à des activités didactiques enrichissantes et exigeantes en demande cognitive. Ces tâches gagneraient donc à être améliorées car selon TARDIF (1999), il n'est pas négatif en soi d'enseigner des connaissances de manière déclarative, au contraire, ce qui est profondément négatif pour l'élève, c'est de ne lui transmettre des connaissances que de cette façon et de lui demander de les utiliser de façon procédurale ou conditionnelle et d'évaluer sa performance dans cette dernière orientation.

Des consignes du type « *je complète, j'écris le nombre, ...* » sont proposées dans le traitement des exercices sans prendre en compte la caractéristique de l'Approche Par Compétences. Celle-ci demande un usage fréquent de consignes directes de travail du type « *complète les cases vides, écris les nombres en lettres,...* » qui traduisent de façon impérative les ordres de l'enseignant.

Conclusion

Notre étude intitulée « Etude des activités numériques du manuel scolaire ivoirien de mathématiques du primaire CP1 *« Mon cahier d'application »* » a mis en évidence des contradictions dans la mise en œuvre de l'Approche par compétences (APC) et la modélisation des contenus et des activités. Les résultats obtenus ont montré que le critère de variabilité des exercices est respecté.

Toutefois, la majeure partie de ces exercices configurés autour de plusieurs types d'activités n'a pas une demande cognitive exigeante alors que l'enseignement des mathématiques tel que préconisé par l'Approche Par Compétences dans le cycle primaire ambitionne de donner à l'élève des connaissances variées, des aptitudes, des attitudes et des valeurs nécessaires pour étudier correctement les nombres, construire des modèles mathématiques à travers le développement du goût de la recherche, de l'imagination, de l'esprit critique et logique.

La présente étude met en évidence une insuffisance didactique à laquelle il faut remédier pour que les exercices du livret correspondent à de réelles activités susceptibles d'aider l'enfant du CP1 à acquérir des outils numériques, lui permettre d'acquérir les compétences numériques de base telles la découverte des nombres avec les activités pré-numériques (tris, classements, sériations...) et leur construction organisée autour des activités d'écriture en chiffres et en lettres, la comparaison et le rangement.

Le cycle primaire visant l'intégration de l'apprenant, dans son environnement social, économique, culturel ainsi que sa capacité à résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des mathématiques telles qu'envisagées par l'Approche Par Compétences, ne saurait en faire l'économie.

Bibliographie

ASTOLFI J.P. (1993), *Placer les élèves en « situation- problème ? »*, Probio-Revue, volume 16, N°4.

- BERBAUM J. (1984), *Apprentissage et formation*, PUF, Paris.
- FAYOL M., CAMOS V et ROUSSEL J.L. (2000), *Acquisition et mise en œuvre de la numération par les enfants de 2 à 9 ans*, PUF, Paris.
- GAGNE E.D. (1985), *The cognitive psychology of school learning*, Little Brown and Company, Boston.
- GELMAN R. (1983). *Les cinq principes de Gelman. Documents théoriques d'appui. Formation T1 cycle 1*, Novembre 2009.
- MEIRIEU P. (1987), *Apprendre...Oui, mais comment ?* ESF, Paris.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2007), *Mathématique, Guide pédagogique CP1- CP2*, CEDA, Abidjan.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2006), *Mon cahier d'application CP1 (Nouvelle édition 2009)*, NEI, Abidjan.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2006), *Mathématique CP1*, CEDA, Abidjan.
- MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2007), *Guide pédagogique CP*, CEDA, Abidjan.
- NOVAK J.D. (1990), *La théorie qui sous-tend les cartes conceptuelles et la façon de les construire in Journal de recherche en sciences de l'éducation N°10*, Université de Cornell, pp. 937-949.
- PIAGET J. (1979), *La construction du réel chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Lausanne.
- TARDIF J. (1992), *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive*, Editions Logiques, Montréal.
- TARDIF J. (1999), *le transfert des apprentissages*, Editions Logiques, Montréal.
- ZAKHARTCHOUK J.M. (1999), *Comprendre énoncés et consignes*, CRDP, Amiens.

ÉVOLUTION DES ORGANISATIONS MATHÉMATIQUES SUR LA NUMÉRATION AU VINGTIÈME SIÈCLE EN FRANCE

Christine Chambris*

Résumé

Ce texte relatif à l'enseignement de la numération des entiers tout au long du 20^e siècle articule plusieurs études :

- une caractérisation de l'étude en termes praxéologiques,
- la mise en évidence de savoirs savants de référence,
- la mise en évidence d'effets des savoirs savants de référence sur les praxéologies à enseigner et réciproquement d'effets des praxéologies à enseigner sur les savoirs savants de référence.

Ces études reposent sur l'analyse de textes du 20^e siècle : manuels scolaires, documents pour les enseignants ou leurs formateurs.

Des générateurs de tâches sont introduits pour caractériser les praxéologies. Cet outil, praxéologique, permet de décrire, de façon générique, l'étude de la numération de position des entiers. L'étude de l'évolution des praxéologies met en évidence des reconfigurations des relations entre les types de tâches au fil du temps (fragmentations, amalgames). Les générateurs permettent de d'analyser ces reconfigurations en termes écologiques.

L'étude met en évidence des savoirs savants de référence pour la période antérieure à la réforme, savoirs que nous qualifions de savoirs savants du second ordre (Chambris 2010). Des savoirs savants de référence (du premier ordre) sont introduits au moment de la réforme ou peu après, ils se substituent progressivement aux anciens savoirs de référence. Les évolutions plus récentes des techniques à enseigner, liées à la transposition de la théorie du premier ordre, sont interprétées comme l'émergence d'une théorie mathématique (du second ordre), par ailleurs probablement inadaptée, pour des raisons écologiques, pour l'étude scolaire.

Mots clés

nombres, numération, numération parlée, numération chiffrée, unités de numération, générateur de tâches, conversions entre unités, savoirs savants du premier et du second ordres, système métrique, praxéologies de la numération, manuels scolaires, ostensifs.

1. POSITION DU PROBLÈME : ÉTUDE DE MANUELS RÉCENTS

Une étude rapide de manuels du début des années 2000 montre que numération et système métrique sont désarticulés de plusieurs points de vue, notamment celui des tâches. Par exemple, entre les deux domaines, les décompositions ne se ressemblent pas ($324 = 300 + 20 + 4$ et $324 \text{ m} = 3 \text{ hm } 2 \text{ dam } 4 \text{ m}$) ; les conversions existent en système

* Université de Cergy Pontoise, Laboratoire de Didactique André Revuz

métrique mais pas en numération. Ces premiers éléments peuvent indiquer que le travail du système métrique ne fait pas référence à ce qui se fait en numération. Par suite, les études des deux domaines pourraient ne pas se renforcer l'une l'autre.

Par ailleurs, les manuels du CE1 et du CE2 du début des années 2000 n'indiquent pas de façon systématique que 10 dizaines = 1 centaine. Pourtant l'étude des nombres de 3 chiffres y figure. L'enseignement de la numération a apparemment beaucoup plus bougé que l'enseignement du système métrique par rapport à la situation antérieure à la réforme.

Dans quelle mesure ces éléments peuvent-ils contribuer à expliquer des difficultés des élèves actuels en système métrique (Chambris 2008) et en numération (Parouty 2005) ? Que peut-on dire de la situation actuelle de l'enseignement de la numération de position ? Pour étudier cette question, nous faisons d'abord un 'pas de côté'. Il consiste en une incursion dans le passé, avant la réforme, pour mettre en évidence des praxéologies locales ou régionales, la situation actuelle semblant très éclatée. Ensuite, l'étude des continuités et ruptures dans les évolutions praxéologiques depuis la réforme devrait permettre de mieux identifier les praxéologies actuelles. Ce sont l'écologie (Artaud 1997) et les savoirs savants de référence qui nous préoccupent. Notre corpus de données est constitué par des manuels scolaires du cours élémentaire et des traités, anciens et récents. Pour limiter le champ de l'étude, nous excluons *a priori* le calcul sur les nombres de plusieurs chiffres.

2. OUTILS

1. Unités de numération – Numération en unités – Numération positionnelle généralisée

Les *unités de numération* sont les mots et expressions : unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers... La *numération en unités* est un moyen, banal mais essentiel, de désigner les nombres en utilisant ces mots : ainsi 580 (cinq huit zéro), c'est 5 centaines 8 dizaines.

Plusieurs types d'expressions avec des unités de numération peuvent être distingués :

- simple : juxtaposition d'associations nombres-unités où le nombre est compris entre un et neuf (5 centaines 8 dizaines) ;

- composition d'unités : une dizaine de centaines.

- complexes : un ou plusieurs nombres d'unités de numération (éventuellement composées) éventuellement à plusieurs chiffres 348 d, 34 c 8 d, avec chevauchement éventuels 45 c 24 d 123 u, 425 dizaines de centaines... Nous appelons l'ensemble de ces désignations

complexes (qui englobent les deux premiers types et la numération positionnelle usuelle) : *numération positionnelle généralisée*.

2. Trois grandes périodes à partir de la réforme

À partir de 1970, trois grandes périodes se succèdent. Pour le primaire, la réforme s'étend de la publication des programmes de 1970 à la fin des années 1970 : c'est la période des « bases ». Les programmes suivants dont la publication – par cours – s'étale de 1977 à 1980 marquent un premier arrêt de la réforme (même si les bases sont maintenues au CP). La première édition de la collection de l'équipe ERMEL¹ dont la publication commence en 1977 est emblématique de ce premier arrêt et elle sera largement diffusée dans les milieux de formation d'enseignants du primaire. Les programmes accompagnés d'instructions très développées ont de nombreux points communs avec cette collection. Une contre-réforme débute donc au début des années 1980. Les 'écritures' règnent alors en maître sur l'enseignement de la numération. La publication de la 2^e édition de la collection de l'équipe ERMEL qui accompagne plus ou moins celle des programmes de 1995 et 2002 marque la fin de cette période. Les 'écritures' perdent un peu de leur suprématie et les unités de numération sont plus présentes. Nous considérons qu'on est alors entré dans ce que nous appelons la période contemporaine.

3. Six générateurs de tâches pour décrire l'étude

L'étude de la numération de position des entiers dans des manuels scolaires du cours élémentaire au 20^e siècle permet d'observer un objet à la fois pérenne et instable. Ainsi, cette *pratique* présente-t-elle des variations selon les époques mais est-elle suffisamment stable pour être décrite par un unique *système de tâches* (Chevallard 1997).

Pour ce faire, nous définissons des *générateurs de tâches*. Au premier abord, un générateur de tâches ne se distingue pas d'un type de tâches. Comme les types de tâches, les générateurs permettent de découper la pratique. Un générateur de tâches est un ensemble de tâches, décrit par une tâche et des variables ou encore par un verbe d'action avec un complément. Un générateur n'est pas un type de tâches dans la mesure où il ne coïncide pas nécessairement

¹ Conformément à l'usage, nous désignons par ERMEL l'« Equipe de didactique des mathématiques » ou « Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire » de l'Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

avec la composante type de tâches d'une praxéologie enseignée. Néanmoins, il y a intersection et la coïncidence se produit parfois. Nous y reviendrons.

Plus précisément, autant que cela a un sens, un générateur de tâches est un type de tâches de l'institution « recherche en didactique des mathématiques ». Ces générateurs permettent - dans certains cas au moins - de « surplomber » les praxéologies existant dans les différentes institutions d'enseignement. Dans la TAD, en effet, ce sont les techniques qui déterminent les types de tâches par les amalgames qu'elles occasionnent. Il existe des techniques qui, pour des raisons diverses, ne sont pas enseignées dans certaines institutions. Cela peut avoir pour conséquence que les amalgames de tâches effectivement enseignés ne sont pas nécessairement ceux qui semblent optimaux sur le plan de l'analyse didactique théorique.

Indépendamment de l'époque, six générateurs englobent la pratique de la numération de position au cours élémentaire. Selon l'époque les variables ne prennent pas les mêmes valeurs (certains générateurs ont même tendance à disparaître). Ces générateurs sont emblématiques de la numération de position, en ce sens qu'ils contiennent chacun au moins une tâche emblématique de la numération de position. Les cinq premiers incluent des pratiques sociales de référence, des pratiques 'utiles pour la vie courante'. Faute de place, nous signalons dans leur présentation seulement les éléments utiles pour la suite de notre propos. Ces générateurs sont :

1. Mesurer une grandeur (la grandeur s'exprime par un nombre entier d'unités). Les variables sont notamment : l'espèce de grandeur (en particulier discret ou continu), la taille, la base (dix ou autre), la grandeur est faite ou à faire, les instruments à disposition (pour le continu) ou des groupements d'objets discrets préexistants et reconnaissables ;
2. Comparer deux nombres. Très présent dans l'enseignement actuel, l'ordre n'est pas explicitement enseigné au début du siècle mais 'repérer le plus grand de deux nombres' est explicitement nécessaire pour poser les soustractions ;
3. Compter de 1 en 1, de 10 en 10, etc. en montant, en descendant, à partir d'un nombre donné ; (par exemple, ces tâches sont parfois mobilisées comme technique pour dénombrer : on peut penser au banquier qui compte ses billets)
4. Dire un nombre écrit en chiffres et réciproquement. Cette tâche est spécifique de la base dix. En effet, il n'y a pas de numération orale 'en bases' et quand les instructions de 1970 préconisent de dire « un, deux, trois » pour « 123 », il s'agit d'une numération positionnelle oralisée. Cet élément est susceptible d'avoir un impact sur les relations entre

praxéologies impliquant les numérations orale et écrite de position au moment de la réforme et après, par voie de conséquence ;

5. Convertir au sein de la numération positionnelle généralisée ou du système métrique. Ces tâches de conversion sont bien connues en système métrique. Pour diverses raisons dont certaines sont évoquées dans ce texte, nombre de celles formulées en unités de numération sont peu répandues dans l'enseignement actuel. Sur le plan épistémologique, elles peuvent être découpées en quatre sous-ensembles :
- a) Composition d'unités de numération. Il s'agit des conversions qui sollicitent les relations entre unités (R) et non le principe de position (P). Elles présentent un chiffre significatif et une composition d'unités de numération : Combien 4 dizaines de centaines font-elles de milliers ?
 - b) Décomposer-recomposer : 1) Comment faire 903 centimes avec le moins de pièces et billets possibles ? 2) J'ai 3 billets de 100 euros et 2 pièces de 1 euro. Combien ai-je d'argent ? Nous reviendrons sur la très grande instabilité de cet ensemble de tâches qui disparaît d'ailleurs plus ou moins pendant le temps de la réforme. C'est le principe de position (P) qui est sollicité dans ces tâches. Il s'agit de faire correspondre à la numération positionnelle une ou plusieurs associations entre un nombre d'un chiffre et une unité de numération.
 - c) Ces deux premières familles de tâches se combinent dans la tâche emblématique 'le nombre de' qui correspond à une propriété de la numération de position (la troncature) : quel est le nombre de centaines dans 3400 ? réponse 34 (conversion d'unités simples en centaines).
 - d) Enfin, toutes ces tâches se généralisent dans « combien y a-t-il de milliers dans 456 c ? ». Un millier c'est une dizaine de centaines. Résoudre le problème peut donc revenir à chercher combien il y a de dizaines dans 456. Donc $456 \text{ c} = 45 \text{ dizaines de centaines } 6 \text{ c} = 45 \text{ milliers } 6 \text{ c.}^2$

Les *conversions* sont amalgamées par les technologies (R) et (P).

² Les expressions du type 3 centaines, 30 centaines, 300 centaines comme elles sont réduites (ou réductibles) à un seul ordre d'unité (respectivement, la centaine, le millier et la dizaine de milliers) sont susceptibles de jouer un rôle particulier dans l'apprentissage des relations entre unités. Ainsi, les conversions du type « combien 3 centaines font-elles de dizaines ? » ou « combien trente dizaines font-elles de centaines ? » ou « combien 30 dizaines font-elles de centaines ? » semblent être à rapprocher du sous-ensemble a) plutôt que d).

6. Changer de base : écrire $(3203)_{\text{base quatre}}$ en base dix. Au moment de la réforme, le changement de base apparaît en primaire. Il n'est pas prescrit dans le programme de 1970, néanmoins une praxéologie se développe autour de lui dans les manuels du cours élémentaire. Le changement de base n'est pas *utile pour la vie courante* mais c'est une tâche emblématique de la numération de position : il ne peut pas ne pas exister dès lors qu'on travaille « en bases » mais il n'existe plus quand on ne travaille qu'en base dix.

3. ETUDE DES SAVOIRS SAVANTS DE REFERENCE

1. Théorie classique et savoirs savants de référence

Après avoir mis en évidence le système de tâches à l'œuvre, nous en venons aux savoirs savants de référence.

Avant la réforme

Le traité d'arithmétique d'Etienne Bézout (1730-1783) et les notes sur l'arithmétique de Léonce Reynaud (1803-1880) qui viennent compléter le traité de Bézout au début du 19^e siècle (Bézout & Reynaud 1821)³ ont joué le rôle de traité pour l'enseignement primaire à la fin du 19^e siècle et au début du 20^e.⁴ Des évolutions que nous n'avons pas précisément étudiées se produisent cependant à partir de la fin des années 1940.

Ces traités présentent notamment une théorie de la numération de position des entiers formulée dans des termes élémentaires. Il s'agit d'une construction itérative de la numération. Elle ne fait pas appel à la division euclidienne (figure 1). Les nombres (jusqu'à 9999 au moins) sont générés de la façon suivante. On fabrique les dix premiers nombres en partant de "une unité" et en ajoutant successivement une unité. Ensuite, on fabrique la dizaine qui est un nouvel ordre d'unités formé par dix unités du premier ordre (discours de relation entre unités, R). Ensuite, on compte par dizaines comme on a compté par unités, c'est-à-dire qu'on compte une dizaine, deux dizaines, etc., jusqu'à dix dizaines (discours de comptage, C). Ensuite, on désigne les 9 nombres compris entre deux dizaines consécutives (discours de succession, S).

³ Le traité de Bézout est à l'usage de la marine et de l'artillerie et doit rassembler les connaissances nécessaires pour être admis au rang d'officiers de vaisseaux, la première édition date de 1764. Les notes de Reynaud sont à l'usage des candidats de l'école polytechnique et de l'école spéciale militaire.

On a ainsi désigné les 99 premiers nombres. On forme alors une centaine, l'unité du 3^e ordre, avec la collection de dix dizaines (R), etc.

La collection de neuf dizaines et de neuf unités, compose le nombre *nonante-neuf*; celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de dix dizaines, et la réunion de dix dizaines se nomme *centaine*. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour désigner les nonante-neuf nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents,, neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme *quatre cent huit*. On parvient ainsi au nombre neuf cent nonante-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines; cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité principale nommée *mille*; et de même qu'on

Figure 1. – Théorie de Reynaud sur la numération (extrait)
(Bézout & Reynaud 1821)

Le texte du savoir est construit à partir de l'ostensif *numération en unités* et de cinq familles de discours explicatifs, des technologies.

Au rang des centaines, mais la même chose se retrouve aux différents ordres, les cinq technologies autour desquelles se construit la théorie se présentent comme suit. Deux premiers discours permettent de construire les nombres. Cela se fait en utilisant la numération en unités. Il s'agit :

- du discours de comptage (C) : « On compte par centaines comme on a compté par dizaines et par unités » ;
- du discours de relations entre les unités de numération (R) : « Une centaine c'est dix dizaines ».

Le troisième discours, de succession (S), permet de construire les nombres entre deux centaines : entre deux centaines, on ajoute les 99 premiers nombres (ceux construits à l'étape précédente).

La construction itérative des désignations constitue un algorithme qui assure l'existence et l'unicité de la décomposition polynomiale d'un entier en base dix. Ce théorème reste implicite dans la théorie formulée par Reynaud.

En fait, dans les manuels du cours élémentaire du début du 20^e siècle et jusqu'aux années 40, le texte du savoir reprend la théorie. Plus précisément, le texte de la théorie est découpé puis réparti dans les leçons successives de numération des manuels tout en étant un peu réorganisé, de façon notamment à introduire simultanément les numérations orale et écrite.

⁴ Neyret (1995) emploie le terme traité pour les textes de ce type qui font la somme des connaissances sur un domaine dans une perspective de formation. C'est à propos des décimaux qu'il a identifié les textes de Bézout et

Typiquement, au rang des centaines, les manuels proposent trois étapes : la centaine, les centaines, entre deux centaines qui reprennent chacune un 'bout' de théorie. Par exemple, (Boucheny et al. 1930, CE) propose trois leçons pour les nombres de trois chiffres. La première intitulée « Centaines » (figure 2) comporte en fait deux rubriques : 'le nombre cent' avec le discours (R) puis 'centaines' avec le discours (C). Les suivantes sont : « De cent à deux cents » et « Entre deux centaines » avec le discours (S).

80. Le nombre cent. — Prenons 99 jetons :
 99 jetons correspondent à 9 piles de dix jetons et 9 jetons.
 Ajoutons 1 jeton;
 nous avons cent jetons ou une centaine de jetons (fig. 32).
 Avec cent jetons, nous pouvons former dix piles de dix jetons.

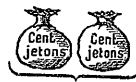


Fig. 32.

Une centaine vaut dix dizaines ou cent unités.
 Le nombre cent s'écrit 100. Le chiffre 1 qui représente une centaine s'écrit au 3^e rang à partir de la droite.

81. Centaines. — Constituons des sacs de jetons contenant chacun cent jetons.

Prenons 2 sacs (fig. 33); nous avons 2 centaines de jetons, ou deux cents, que l'on écrit 200.



200 jetons

Fig. 33.

Prenons successivement 3, 4, ... 9 sacs de cent jetons; nous obtenons ainsi :

trois centaines ou trois cents,	que l'on écrit	300,
quatre centaines ou quatre cents,	»	400,
.....		
neuf centaines ou neuf cents,	»	900.

On compte par centaines comme on compte par dizaines et par unités.

Figure 2. — 17^e leçon : Centaines (extrait) (L'arithmétique au cours élémentaire, Boucheny et al. 1930)

Deux discours (M1 et M2) seront ajoutés aux cinq discours, uniquement dans les manuels, et non dans le traité qui ne bouge pas, un peu avant les années 30 pour articuler numération et système métrique : (M1) Un hectomètre, c'est une centaine de mètres et (M2) Un hectomètre, c'est dix décamètres. (M1) assure la relation entre unités métriques et unités de numération. (M2) est un équivalent métrique du discours de relation entre unités (R).

Nous présentons les deux derniers discours (O), (P) dans un graphique (figure 3) qui intègre aussi (M1). La numération en unités est au centre et les autres systèmes de désignation des nombres (et des grandeurs mesurées) autour. On peut lire ces trois types de discours comme une médiation entre la numération en unités et les autres numérations : positionnelle, orale et métrique.

La théorie de la numération est donc formulée à l'aide des discours technologiques O, P, R et S.

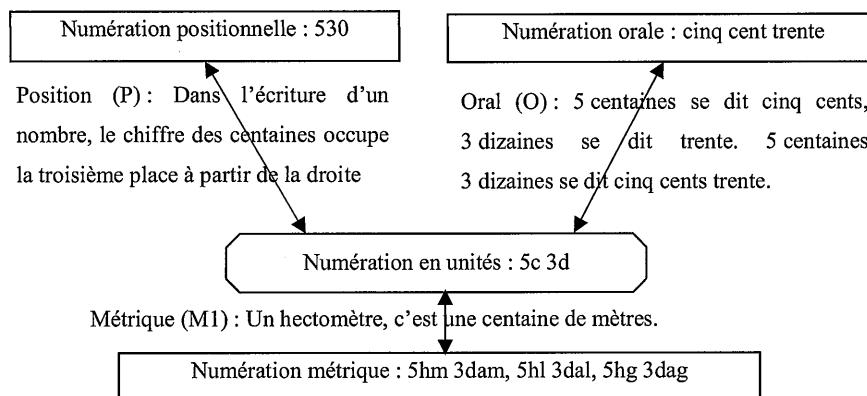


Figure 3. – Correspondances entre les numérations en unités, positionnelle, orale et métrique.

Au moment de la réforme

Vers le moment de la réforme, les unités de numération sont péjorées et une théorie savante de la numération de position exprimée par le truchement de la décomposition polynomiale d'un entier dans une base (APMEP 1967, Eiller et al. 1971 par exemple) vient concurrencer la théorie classique :

$$N = r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \dots + r_1 a^1 + r_0 a^0, N = (r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0)_{\text{base } a}$$

L'existence et l'unicité des coefficients sont justifiées en utilisant des divisions euclidiennes successives par la base. Cette théorie, savante, prend peu en charge les tâches scolaires utiles pour la 'vie courante'. En revanche elle est explicitement utilisée pour traiter les changements de base qui apparaissent, en primaire, au moment de la réforme.

Depuis la contre-réforme

Au moment de la contre-réforme, un processus de transposition didactique de la théorie savante est visible notamment dans (ERMEL 1978, CE). Par exemple $4 \times a^2 + 2 \times a^3$ devient $4 \times 10^2 + 2 \times 10^3$ ou $4 \times 100 + 2 \times 1000$ ou $100 + 100 + 100 + 100 + 1000 + 1000$ ou $400 + 2000$; mais l'expression 4 centaines 2 milliers n'apparaît pas. D'ailleurs, à une exception près (relative à la numération orale), les unités de numération sont absentes du chapitre consacré à la numération au cours élémentaire.

Même si les références explicites à la théorie savante sont peu présentes dans les manuels actuels de primaire, notre étude ne met pas en évidence la transposition d'une autre théorie. En revanche, et ce point fera l'objet d'analyses ultérieures, un certain retour des unités de numération est observé depuis la fin des années 90. Il témoigne probablement de tensions liées au phénomène de transposition didactique.

2. Techniques et technologies

Dans la théorie classique, outre le fait que les technologies permettent de formuler la théorie, elles se déclinent aussi en techniques pour traiter les tâches.

« *Mettre en chiffres un nombre énoncé* » et réciproquement, dans la théorie de Reynaud⁵

Dans la théorie de Reynaud, la technique pour écrire en chiffres un nombre énoncé (*cinq cent trente* par exemple) consiste à enchaîner deux sous-tâches : traduire le nombre de la numération orale vers la numération en unités puis traduire le nombre de la numération en unités vers la numération de position. Pour la tâche inverse, les deux discours sont utilisés dans l'ordre inverse.

Chacune de ces sous-tâches se traite alors en utilisant un des deux discours technologiques de correspondance entre les numérations (figure 3). Avec le discours pour l'oral (O), on obtient : cinq cents se traduit par 5 centaines, trente se traduit par 3 dizaines. Avec le discours de position (P), aux rangs des centaines et des dizaines, on obtient : 5 au rang des centaines est en 3^e position et 3 au rang des dizaines est en 2^e position donc 5 centaines 3 dizaines se traduit par '530' (cinq trois zéro). Donc cinq cent trente se traduit par '530'.⁶

Au moment de la contre-réforme, le processus de transposition de la théorie savante fait émerger des techniques pour la numération de position se formulant essentiellement avec des *écritures chiffrées des puissances de dix* (1, 10, 100... que nous appelons *ECPD*). Ces techniques permettent de traiter, à peu près, les types de tâches classiques. Elles concurrencent et viennent en grande partie se substituer aux techniques classiques qui disparaissent plus ou moins.

Mesurer une grandeur discrète à deux époques

Pour montrer les évolutions technico-technologiques, nous prenons l'exemple du traitement d'une tâche, avant la réforme et dans la période contemporaine : 'Quel est le nombre de cubes ?' (figure 4)

⁵ Bézout ne dit rien sur cette question. Plus précisément, il indique au début de son texte « Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde ». (Bézout 1821, §7)

⁶ Dans certains manuels (au moins), la technique pour énoncer un nombre écrit en chiffres (ou la tâche inverse) ne consiste pas exactement à enchaîner les deux sous-tâches. Pour les nombres de trois chiffres (par exemple), on utilise ce qu'on sait déjà sur les nombres de deux chiffres et on traduit uniquement le 3^e chiffre en unités de

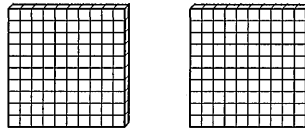


Figure 4. - « Combien y a-t-il de cubes ? » (Représentation de matériel multibase)

La réponse est attendue dans la numération de position (et non en numération orale ou en unités). Cette tâche relève du générateur ‘mesurer une grandeur’ (objets partiellement groupés en centaines ou par cent ou 100 selon l’époque). Les manuels du cours élémentaire permettent presque toujours d’inférer quelle est la technique de référence pour la traiter.

Dans la théorie classique, la technique consiste à enchaîner deux sous-tâches, la technique de chacune s’obtient par la mobilisation d’une technologie : le comptage (C), on compte des centaines comme on a compté des unités (technique : 1 centaine, 2 centaines) ; puis la position (P), le chiffre des centaines s’écrit en troisième position (technique : 2 centaines s’écrit avec un 2 en 3^e position, soit 200). La deuxième sous-tâche relève du type ‘décomposer-recomposer’, nous y reviendrons.

Dans les manuels actuels, les techniques sont plus variées. Il est souvent écrit, mais pas toujours, 2×100 (τ_1) ou $100 + 100$ (τ_2) puis 200. Une suite orale (cent, deux cents) est énoncée parallèlement à l’énumération des objets puis ‘deux cents’ est traduit dans la numération de position (τ_3). C’est l’algorithme de la suite écrite (100, 200) qui est utilisé (à l’aide d’un compteur par exemple) (τ_4). Le chiffre 2 est écrit dans la colonne « centaines » d’un tableau de numération (τ_5) et les cases vides (à droite du 2) sont complétées par des zéros.

Les justifications, lorsqu’elles sont présentes (ce qui n’est pas toujours le cas) varient selon les manuels. Pour τ_2 , une addition en colonnes ($100+100$) est posée (θ_2). Pour τ_1 , un tableau de numération est dessiné et complété, les cases vides étant occupées par des zéros (θ_1). Dans τ_5 , ce qui était la justification θ_1 devient une technique dont la justification peut être τ_1 . Une « règle des zéros » n’est pas souvent présente pour justifier τ_1 . Une telle règle apparaît plutôt lorsqu’on multiplie les nombres de plusieurs chiffres par les puissances de dix, en général après l’étude de la numération.

Ainsi, dans la période actuelle même si certains invariants se dégagent, les techniques et leurs justifications (quand elles existent) sont diverses. En particulier, le dénombrement de ‘2’ objets (les plaques de cent cubes ou les centaines) n’apparaît pas toujours (τ_2 , τ_3 et τ_4). La

numération (5 centaines) puis en numération orale (cinq cents) et on juxtapose le nom du nombre à deux chiffres

technique τ_5 dans laquelle le tableau permet directement d'obtenir le nombre est une trace de la réforme, période pendant laquelle il n'y a plus d'unités de numération. Lorsque la technique commence par une première sous-tâche qui conduit à une écriture (additive ou multiplicative) associée à la collection (τ_1 et τ_2), cette première sous-tâche est suivie d'une deuxième du type 'décomposer-recomposer'. Ces dernières techniques qui mobilisent les ECPD font écho à la technique classique dans laquelle une écriture ('2 centaines') est produite en mobilisant les unités de numération.

Par ailleurs, pour les composantes techniques et technologiques, la situation actuelle apparaît beaucoup plus hétérogène qu'avant la réforme.

3. Théorie reconstituée

De même que dans (Chambris 2010), nous avons rapproché tâches et techniques prescrites d'un savoir savant du second ordre pour les grandeurs, nous cherchons maintenant à interpréter les nouvelles techniques en ECPD dans une théorie mathématique. Pour ce faire, nous substituons dans la théorie classique, les ECPD aux unités de numération. C'est-à-dire que les objets premiers sont les signes : 1, 10, 100, 1000... et non plus les mots unités, dizaines, centaines, milliers. Ces signes sont reliés par les signes d'addition et de multiplication. Ceci produit une nouvelle théorie mathématique. Elle peut être considérée comme un savoir savant (du second ordre). Cette substitution laisse néanmoins le choix pour un certain nombre de variations qui peuvent correspondre à autant de théories.

En effet, dans la théorie classique, on compte par centaines comme on compte par unités, c'est un axiome. Dans la théorie en ECPD, ce sont des axiomes qui affirment que 200 est le résultat de 2×100 ou de $100 + 100$ (il y a des variations possibles dans le choix de l'opération, multiplication ou addition et dans la formulation de l'axiome qui donne le résultat). Nous distinguerons dans la suite deux versions de la théorie : la version multiplicative qui utilise la multiplication et l'addition, la version additive qui utilise seulement l'addition.

Cette nouvelle théorie de la numération formulée en ECPD intègre *grosso modo* l'ensemble des techniques et technologies créées depuis la contre-réforme. *Grosso modo* aussi, les technologies enseignées correspondent aux axiomes ou à des propriétés de la

(trente) qui avait été obtenu par la même technique à l'ordre précédent.

théorie. Les variations des manuels correspondent souvent à des variations dans les choix des axiomes ou de leur formulation, c'est-à-dire des variations dans les technologies.

A notre connaissance, ces théories ne sont pas publiées. Les variations dans les manuels peuvent s'interpréter comme la manifestation de cette absence.

4. Effets du changement d'ostensif sur les besoins trophiques

Les unités de numération sont donc péjorées à partir de la réforme, elles sont plus ou moins remplacées par les ECPD. Quelles sont les conséquences, dans les praxéologies, en termes de besoins trophiques, de ce double phénomène : la disparition d'un ostensif et son remplacement par un autre ?

Les techniques

Nous avons vu que pour traiter la tâche « quel est le nombre de cubes ? » une technique consiste à écrire 2×100 à la place de 2 centaines avec la théorie classique. Il faut donc disposer du signe de la multiplication.

La formulation de la théorie

La technologie qui explicite les relations entre unités de numération (R) est essentielle. Comment formuler la relation entre centaines et millier *sans* les unités de numération mais *avec* les ECPD, autrement dit sans les mots 'centaine' et 'millier' mais avec les écritures '100' et '1000' ?

Dans la théorie classique, avec les unités de numération, on a : 10 centaines = 1 millier. Dans la théorie de la numération reconstruite en ECPD, la relation 10 centaines = 1 millier se traduit diversement. Dans une version multiplicative de la théorie, elle se traduit par $10 \times 100 = 1 \times 1000$, cette égalité provient des deux axiomes : $10 \times 100 = 1000$ (définition de 1000) et $1 \times 1000 = 1000$ (1 est élément neutre). Ce faisant, les besoins trophiques s'élèvent puisqu'on a besoin du signe de multiplication et de certaines des propriétés de la multiplication pour exprimer la relation. Dans une version additive de la théorie, on a $900 + 100 = 1000$ (définition de 1000). L'avantage est qu'on abaisse ainsi les besoins trophiques puisqu'on n'a plus de multiplication. L'inconvénient est qu'on a une écriture unique, 1 suivi de trois zéros, pour désigner deux choses : 1 paquet de 1000 et 10 paquets de 100, de même une seule écriture '10' désigne 10 unités et 1 paquet de 10.

Le rôle du matériel

Dans les manuels, à partir de la réforme et après, de nombreux matériels apparaissent pour étudier la numération (figure 5). Bien sûr, ils permettent de *manipuler*, ce qui était le *credo* de la réforme, mais ils constituent aussi des substituts au discours technologique, et donc une façon de prendre en charge, dans un registre non symbolique, les besoins trophiques accrus avec les ECPD, notamment l'impossibilité, avec des discours élémentaires d'évoquer la relation entre unités : le matériel multibase pour faire les paquets successifs, pour la retenue, le compteur notamment pour les suites écrites et l'ordre, le boulier pour les noms des positions et la retenue.



Figure 5. – Matériels de numération : multibase et boulier

4. ECOLOGIE : STRUCTURATION DES TYPES DE TACHES

La marginalisation des unités de numération a aussi des effets sur les types de tâches enseignés en numération et système métrique. Nous avons vu que les tâches emblématiques sont stables ce qui n'est pas le cas de la structuration de certains types de tâches. C'est pour cela que nous avons été amenée à définir des générateurs de tâches. Ci-après trois objets particulièrement sensibles aux évolutions des ostensifs de ces 40 dernières années.

1. Le générateur de tâches 'mesurer une grandeur'

Avant la réforme, une technique pour fabriquer une collection de taille donnée est décrite sans que la tâche soit explicitement prescrite pour le discret. Cependant, le mesurage, présent avec l'étude des unités métriques, relève de ce générateur pour le continu. Par exemple lorsqu'il faut mesurer une longueur avec un décimètre gradué en mètres la technique est :

S'il [l'arpenteur] a mesuré 7 décimètres puis 6 mètres, il écrit 76 m, en plaçant le 7, qui représente les décimètres, au rang des dizaines. (Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire. CE1, Marijon et al. 1947, p.22, 8^e leçon : l'arpenteur mesure la longueur d'un champ)

Au moment de la réforme ce générateur apparaît le plus souvent « en bases » en général dans le discret, parfois dans le continu avec une adaptation de la technique antérieure à la réforme (figure 6).

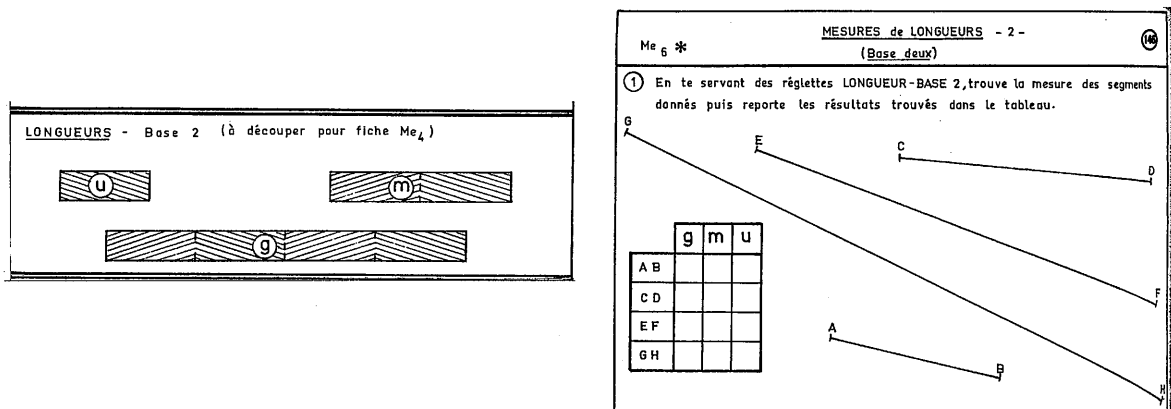


Figure 6. – (Math et Calcul CE2, Eiller et al. 1972, p.143 et p.146)

42 Les nombres de 0 à 1000 (1) N3

1 Observe la collection de plaques, de barres et de cubes.

a/ Écris le nombre de cubes :
 — dans le tableau ci-contre que tu reproduiras;
 — en toutes lettres.

b/ Représente ce même nombre sur un abaque du type ci-contre que tu reproduiras.

c	d	u

2 Observe la grille de « bataille navale » sur laquelle Guillaume a tracé une croix sur les bateaux coulés.

	1	2	3	4	5	
a						Le bateau codé vaut 100 points.
b						Le bateau codé vaut 10 points.
c						Le bateau codé vaut 1 point.
d						
e						

Écris le nombre total de points obtenus :
 — en utilisant uniquement le signe +;
 — en utilisant à la fois les signes x et +.
 Effectue, dans chaque cas, les calculs.

Figure 7. – (Math et Calcul CE2, Eiller et al. 1987, p.42)

Sur la figure 7, tirée d'un manuel caractéristique des années 1980, on observe une fragmentation du type de tâches : une première technique pour « compter des objets » (ici, des cubes) s'effectue avec le tableau. Elle est héritée de la réforme et utilise implicitement les unités de numération (elles existent par leur initiale et ne sortent pas du tableau) ; une deuxième technique pour compter des points (dans les jeux de cible par exemple) ou encore de la monnaie utilise des ECPD.

Actuellement, c'est en général une technique commune, avec des ECPD, qui permet de compter des cubes (ou du discret) et des points (ou la monnaie) (cf. ci-avant). Ces tâches de mesurage sont fréquentes. Le mesurage de longueurs existe encore aujourd'hui mais les techniques enseignées ne participent pas, le plus souvent, de l'étude de la numération.

Pour résumer, avant la réforme, le générateur de tâches coïncide avec le type de tâches : on mesure des objets isolés (discret), de la monnaie, des grandeurs continues ; les techniques utilisent soit les unités de numération, soit les unités métriques. Avec la réforme et la rupture discret / continu (Chambris 2010), le type de tâches perd peu à peu les tâches du « continu ». Les unités de numération perdent leur instrumentalité (elles restent dans le tableau, voire y sont remplacées par des désignations diverses en bases, spécifiques des objets qu'on mesure – cf. g, m, u sur la figure 6). Avec l'émergence et la juxtaposition de techniques qui dépendent des objets qu'on mesure au moment de la contre-réforme, ce qui reste du type de tâches se fragmente. On relève ainsi des techniques en ECPD et d'autres avec le tableau de numération. Aujourd'hui, il semble être à peu près réunifié pour les dimensions : « discret » et monnaie avec les techniques évoquées précédemment.

2. Le générateur de tâches 'conversions'

Structuration antérieure à la réforme : articulation avec la théorie

Avant la réforme, les *conversions* sont effectivement amalgamées en un unique type de tâches par les technologies de relation entre unités (R) et de position (P). Cette praxéologie locale contient notamment la tâche emblématique 'nombre de' et les 'décompositions-recompositions'.

Leur étude est structurée par la progression des manuels qui s'appuie sur la théorie. Avec la leçon « le millier », on explicite la relation $1 \text{ millier} = 10 \text{ centaines}$ et on peut travailler des tâches telles que : « combien faut-il ajouter de centaines à 600 pour faire 1 millier ? ». Dans la leçon « les milliers », ce sont les relations telles que $30 \text{ centaines} = 3 \text{ milliers}$ (premier sous-ensemble de conversions). Dans la leçon « entre deux milliers », il s'agit de $35 \text{ centaines} = 3 \text{ milliers } 5 \text{ centaines}$ ou encore des tâches telles que : combien de paquets de 100 enveloppes faut-il pour avoir 3500 enveloppes ? (troisième sous-ensemble)

Au moment de la réforme, la praxéologie est doublement affaiblie. D'une part elle pâtit de la péjoration des unités de numération, d'autre part elle ne se formule pas en base autre que dix.

Le 'nombre de'

Au moment de la contre-réforme, le travail des relations entre unités (ce qui concerne la technologie R) ne *survit* qu'avec la tâche emblématique « nombre de ». Par exemple, dans plusieurs manuels de la période, cette tâche n'apparaît que dans un mot croisé – et seulement dans le sens des unités vers la numération positionnelle (cf. thèse en cours de Tempier) – (figure 8) ou en calcul mental. On l'oppose alors, de façon presque rituelle, au « chiffre des ».

problème

Reproduis et complète la grille des « nombres croisés ».

		A	B	C	D	E	
HORIZONTALEMENT							VERTICALEMENT
a. Le nombre qui précède 1 100.	a						A. Le nombre qui précède 1 090.
b. $(100 + 1) \times 7$.	b						B. $(60 \times 15) + 3$.
c. 89 centaines.	c						C. 97 dizaines.
d. 9 dizaines. 3×12 .	d						D. Le nombre qui précède 9 010.
	e						E. $(9 \times 8) - 9$.

Figure 8. – (Math et Calcul CE2, Eiller et al. 1987, p.113, Ordre sur les nombres de 0 à 10000)

En 1995 dans (ERMEL CE2 1995), et plus récemment dans d'autres manuels (figure 9), on observe l'émergence d'une praxéologie plus complète autour du type de tâches 'nombre de' : calculer 3 c 21 d par exemple.

9 Calcule.

24 dizaines et 3 unités =

3 c + 21 d =

Figure 9. – (Euro Maths CE2, Peltier et al. 2003, p.25)

Ce développement d'un ensemble de tâches autre que les conversions autour de la tâche 'nombre de' a une justification écologique : il consolide l'existence du 'nombre de'. Le 'nombre de' apparaît néanmoins peu motivé encore qu'il soit nécessaire pour traiter de nouvelles tâches du type « encadrer entre les centaines les plus proches » même si cette nécessité est parfois contournée :

Encadre chaque nombre selon les exemples.

a) $4\ 700 < 4\ 784 < 4\ 800$; $24\ 096 - 37\ 483 - 19\ 781$

b) $4\ 780 < 4\ 784 < 4\ 790$; $5\ 096 - 18\ 903 - 29\ 432$

(Pour comprendre les mathématiques CE2, Blanc et al. 2002, p.115, Les nombres à partir de 10 000. Trouver un encadrement.)

Les *conversions* ont disparu de l'étude de la numération sans doute parce qu'elles ne peuvent pas exister sans la numération en unités. Néanmoins, elles sont essentielles pour l'étude de la numération, en particulier dans les technologies pour justifier les techniques opératoires (retenues et division posée justifiée par le partage des unités successives notamment), besoin que le 'nombre de' ne satisfait pas et aussi pour interpréter le système métrique comme un système de numération.

'Décomposer-recomposer'

Nous en venons au sous-ensemble de tâches 'décomposer-recomposer' de notre générateur. Les décompositions-recompositions sont nécessaires dans la plupart des techniques pour « mesurer une grandeur ». Autrefois, les tâches de la forme « chiffre des » appartenaient au type 'décomposer-recomposer'. À la question « quel est le chiffre des dizaines de 654 ? », la réponse est « le chiffre des dizaines est 5 ». Lorsqu'il s'agit de « décomposer 654 en ses unités », la réponse est 6 centaines 5 dizaines 4 unités. C'est le même type de technique dans les deux cas, c'est une adaptation de la technologie de position (P) : dans l'écriture d'un nombre, le chiffre des centaines occupe la troisième position.

Au moment de la réforme, la disparition des unités de numération entraîne celle des décompositions-recompositions. A l'époque, les nombres s'écrivent directement dans le tableau de numération (dont les colonnes sont désignées par l'évocation des matériels de numération (cf. figure 6) ou des numéros – la première portant par exemple l'intitulé « unités », la deuxième « groupement d'ordre 1 »⁷, etc.).

À partir de la contre-réforme, pour recréer un travail dans le registre symbolique, des décompositions-recompositions reviennent mais elles sont prescrites dans les ECPD (exercices 2 et 3, figure 10).

La technologie est implicite ; pour la technique on indique parfois qu'il faut « effectuer les calculs ». Un type de tâches 'chiffre des' survit. Ce n'est pas la même technique pour les deux types. La praxéologie locale 'décomposer-recomposer' existant dans une période antérieure à la réforme s'est fragmentée en au moins deux praxéologies ponctuelles. L'opposition « chiffre des / nombre de » se constitue alors en type de tâches : la technique consistant à repérer le rang de l'unité énoncée dans l'écriture du nombre, puis à lire le nombre situé dans la colonne pour le 'chiffre des' ou à lire ce qui est à gauche de ce nombre pour le 'nombre de'.

Le nouveau type de tâches est à cheval sur les anciens types de tâches 'nombre de' et 'décomposer-recomposer'. Même si les ECPD sont omniprésentes (figure 10), des unités de numération survivent (au moins dans le tableau, figure 7).

⁷ Au passage, nous soulignons que la numérotation des groupements (et non plus des ordres d'unités) et celle des rangs des chiffres à partir de la droite ne coïncident pas.


1 Trouve, parmi les trois écritures chiffrées, celle qui est correcte.

a	quatre cent quatre-vingt-sept	478	487	748
b	six cent sept	607	706	670
c	sept cent quatre-vingt-seize	776	767	796
d	neuf cent vingt-sept	972	962	927
e	six cent soixante-douze	621	612	672

2 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ $200 + 30 + 6 = 236$	b/ $245 = 200 + 40 + 5$
$600 + 50 + 7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$947 = \underline{\hspace{2cm}}$
$400 + 90 = \underline{\hspace{2cm}}$	$350 = \underline{\hspace{2cm}}$
$900 + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$904 = \underline{\hspace{2cm}}$

3 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ $(7 \times 100) + 3 = 703$		b/ $365 = (3 \times 100) + (6 \times 10) + 5$
$(6 \times 100) + (2 \times 10) = \underline{\hspace{2cm}}$		$974 = \underline{\hspace{2cm}}$
$(3 \times 100) + (7 \times 10) + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$		$793 = \underline{\hspace{2cm}}$
$(5 \times 100) + (9 \times 10) + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$		$420 = \underline{\hspace{2cm}}$
$(9 \times 100) + (0 \times 10) + 7 = \underline{\hspace{2cm}}$		$603 = \underline{\hspace{2cm}}$
$(4 \times 100) + (1 \times 10) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$		$999 = \underline{\hspace{2cm}}$

4 Recopie et complète (regarde l'exemple).

Figure 10. – (Math et calcul CE2, Eiller et al. 1987, p.43)

Dans la dernière période, des décompositions en unités de numération reviennent, en complément de celles en ECPD (figure 11). La technique pour recomposer 6 centaines 5 dizaines 4 unités en 654 semble être en ce moment : 6 centaines = 600, 5 dizaines = 50, 4 unités = 4 puis $600 + 50 + 4 = 654$.

1 Observe l'exemple, puis décompose les nombres.	2 Décompose les nombres en centaines, dizaines et unités selon l'exemple.
$648 = 600 + 40 + 8$	543 c'est 5 centaines 4 dizaines 3 unités
472 586 908 759 390	856 450 624 302 718

Figure 11. – Les nombres jusqu'à 999 (2) (extrait) (Pour comprendre les mathématiques CE2, Blanc et al. 2002, p.17)

Le type de tâches classique semble être en train de se recomposer mais la technologie a changé, elle repose sur les ECPD. Ceci redonne un peu de légitimité aux unités de numération mais elles sont assujetties aux ECPD.

Et le système métrique ?

Nous avons indiqué que le travail en numération et le travail en système métrique étaient actuellement susceptibles de ne pas se renforcer l'un l'autre. Effectivement, l'ostensif

numération en unités permet des congruences (Duval 2006) entre les tâches des deux domaines, congruences qui n'existent pas avec les ECPD.

Ainsi, $524\text{ m} = 5\text{ hm} + 2\text{ dam} + 4\text{ m}$ et $524\text{ u} = 5\text{ c} + 2\text{ d} + 4\text{ u}$ sont deux décompositions avec des formes identiques, elles relient la numération positionnelle et les unités (métrique d'une part, de la numération d'autre part). En numération, la décomposition en ECPD est : $524 = 500 + 20 + 4$; en unités métriques, il s'agit toujours de : $524\text{ m} = 5\text{ hm} + 2\text{ dam} + 4\text{ m}$. Les deux décompositions ne sont pas congruentes, même si l'écriture intermédiaire suivante est possible : $524\text{ m} = 500\text{ m} + 20\text{ m} + 4\text{ m} = 5\text{ hm} + 2\text{ dam} + 4\text{ m}$ (ce qui renvoie notamment à l'utilisation des unités dans les calculs).

Entre les deux décompositions $500\text{ m} + 20\text{ m} + 4\text{ m}$ et $5\text{ hm} + 2\text{ dam} + 4\text{ m}$ existe *a priori* sensiblement la même différence qu'entre $500 + 20 + 4$ et $5\text{ c} + 2\text{ d} + 4\text{ u}$, il s'agit de l'utilisation d'un côté d'une unité unique (le mètre ou l'unité simple), de l'autre côté de plusieurs unités (les m, dam, hm ou les unités, dizaines, centaines) pour une même espèce de grandeur. La *quasi* absence des unités de numération dans l'enseignement actuel constitue-t-elle un obstacle à l'apprentissage des unités métriques ?

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons mis en évidence un savoir savant de second ordre dans l'enseignement antérieur à la réforme : la théorie classique de la numération. Comme dans (Chambris 2010) à propos des relations entre grandeurs et nombres, nous avons interprété les praxéologies, aujourd'hui prescrites, dans des savoirs savants du second ordre. D'une certaine façon, après le grand bouleversement de la réforme et l'introduction de « mathématiques modernes », le savoir qui apparaît dans les documents pour le maître se reconstitue, lentement, en un savoir savant du second ordre qui n'est pas le savoir savant de référence.

Nous avons montré que la marginalisation de l'ostensif numération en unités et son remplacement par les écritures chiffrées des puissances de dix a des conséquences sur toutes les composantes de la praxéologie : des types de tâches à la théorie. L'absence de numération en unités crée un vide dans les tâches prescrites et dans les technologies accessibles aux élèves. Nous avons aussi noté une grande hétérogénéité des discours technologiques des manuels. Elle est peut-être imputable à l'absence de théorie explicite, admise comme référence commune. Enfin, plusieurs types de tâches se sont scindés en sous-types ou appauvris.

Nous avons fait une étude de manuels dans laquelle nous observons des variations nombreuses pour les quarante dernières années. Dans la mesure où la première fois qu'un enseignant investit un thème (c'est souvent au cours sa formation initiale ou dans les années qui la suivent immédiatement) est apparemment déterminante pour ses pratiques ultérieures (Margolinas, Canivenc, De Redon, Rivière & Wozniak 2005), une question qui se pose est alors de savoir ce qui se passe effectivement dans les classes pour l'enseignement de la numération de position. Enfin, à la lumière de ces éléments à venir, on pourra envisager de repenser des ingénieries d'apprentissage de la numération de position pour des élèves.

Une question d'ordre historique semble intéressante : la théorie classique de la numération apparaît remarquable du point de vue de la simplicité de sa formulation et de son efficacité pour traiter les tâches. Elle est déjà présente au 18^e siècle, quand et comment s'est-elle élaborée ?

REFERENCES

- APMEP COMMISSION DU DICTIONNAIRE (1967) *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent. Bibliothèque d'enseignement mathématique*. Paris : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)
- ARTAUD M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Bailleul M., Comiti C., Dorier J.L., Lagrange J.B., Parzysz B., Salin M.H. (Eds). *Actes de la 9^e école d'été de didactique des mathématiques*. 101-139. Houlgate : ARDM et IUFM de Caen.
- BEZOUT, REYNAUD (1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud. 9^e édition. consulté sur Internet le 21 décembre 2007, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)
- CHAMBRIS C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20^e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317-366.
- CHEVALLARD Y. (1997) Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3) 17-54.
- DUVAL R. (2006) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In Rauscher J.-C. (Ed.), *Actes du XXXII^{ème} colloque COPIRELEM*. Strasbourg : IREM de Strasbourg.
- MARGOLINAS C., CANIVENC B., DE REDON M.-C., RIVIERE O., WOZNIAC F. (2005) Que nous apprend pour les formation des maîtres le travail mathématique hors la classe des professeurs ? In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXI^{ème} colloque sur la formation des maîtres*. Toulouse : IREM de Toulouse.
- NEYRET R. (1995) Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier

PAROUTY V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXI^{ème} colloque sur la formation des maîtres*. Toulouse : IREM de Toulouse.

MANUELS SCOLAIRES

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2*. Paris : Hachette éducation

BOUCHENY G., GUERINET A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1^{re} et 2^e année)*. Paris : Librairie Larousse

EILLER R., BRINI R., MARTINEU M., RAVENEL R., RAVENEL S. (1987) *Math et calcul CE2*. Paris : Classiques Hachette

EILLER R., MARTINEU M. (1972) *Math et Calcul CE2* Paris : Classiques Hachette

EILLER R., MARTINEU M., BRINI R., CORNIBE R., PRADILLON F. (1971) *Math et calcul CE1. Livre du maître*. Paris : Classiques Hachette

ERMEL ÉQUIPE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES (1978) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle élémentaire. ERMEL (Équipe de recherche mathématique à l'école élémentaire) Tome 2*. Paris : SERMAP OCDL et Institut National de Recherche Pédagogique (INRP)

ERMEL ÉQUIPE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES (1995) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes Cours élémentaire, deuxième année*. Institut national de recherche pédagogique. Paris : Hatier

MARIJON A., MASSERON R., DELAUNAY E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire*. Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin

PELTIER M.-L., VERGNES D., CLAVIE C. (2003) *Euro Maths CE2*. Paris : Hatier

Epilogue : Des savoirs pour enseigner la numération

Marie-Jeanne Perrin-Glorian*

Ce cahier est loin de faire le point sur l'enseignement de la numération. Il se contente d'y apporter quelques éclairages, notamment sur la désignation des nombres, sans aborder les situations de classe. Je voudrais cependant le terminer par une petite synthèse¹ sur les savoirs qui me paraissent essentiels pour les enseignants du primaire en ce qui concerne le système d'écriture des nombres en base dix. Ce texte, volontairement bref, ne peut être exhaustif mais il tente de dégager les savoirs essentiels sur les nombres entiers à enseigner en primaire. Nous considérons ici des savoirs pour les enseignants sans discuter des éventuelles difficultés d'apprentissage des élèves qui seraient à prendre en compte, notamment en CP où la gestion des relations entre numération parlée et numération chiffrée est particulièrement délicate.

Pour expliciter ces savoirs, nous distinguerons *trois types d'écriture des nombres* :

- *l'écriture en lettres* qui correspond à la numération orale dans la langue parlée : trois cent soixante-quinze

- *l'écriture en chiffres* : 375

- *les écritures en unités de numération* : 3 centaines, 7 dizaines, 5 unités ou, en abrégé 3c 7d 5u mais aussi 37d 5 u ou 2c 17d 5u ou 2c 15d 25u. Il n'y a pas unicité. Nous appellerons écriture réduite celle où les nombres d'unités de chaque ordre sont inférieurs à dix et écriture canonique l'écriture réduite où les unités de numération sont mentionnées dans l'ordre décroissant.

Les unités de la numération permettent d'exprimer un nombre avec des mots en mettant implicitement en évidence des groupements par dix (chacune des unités est dans un rapport dix avec celle qui la précède et celle qui la suit). Le traitement de quantités dans cette écriture permet d'expliquer les techniques opératoires et de contrôler les opérations sur les quantités. Le système métrique a été créé avec des unités qui sont aussi dans un rapport dix. Il fonctionne ainsi comme le système des unités de numération.

L'écriture en chiffres repose sur un principe de numération de position en base dix.

Cela veut dire que :

1) On a *des ordres d'unités dans un rapport dix* : une dizaine vaut dix unités ; une centaine vaut dix dizaines ; un millier vaut dix centaines etc. (D)

2) Pour obtenir l'écriture chiffrée à partir de nombre d'unités de chaque ordre, on doit *réduire au maximum le nombre d'unités dans chaque ordre* en faisant les conversions nécessaires à l'aide des relations entre les unités successives (faire le maximum de groupements par dix). Cela entraîne que, pour chaque ordre on ne doit garder que des nombres inférieurs à dix. (M)

3) Dans ces conditions, on peut écrire tous les nombres en se servant seulement de dix caractères (les chiffres) moyennant une *convention sur la position des chiffres* : en partant de la droite vers la gauche, on a d'abord les unités puis les dizaines etc. Chacun des chiffres

* Laboratoire de Didactique André Revuz, Université d'Artois

¹ Cette synthèse s'appuie sur les travaux de Christine Chambris et Eric Mounier présentés plus haut et aussi sur la thèse en cours de Frédérick Tempier que je co-dirige avec Catherine Houdement.

indique le nombre d'unités d'un ordre donné quand on a fait le maximum de groupements par dix ; 0 indique l'absence d'unité d'un certain ordre. (P)

L'aspect *positionnel* (la valeur d'un chiffre dépend de sa position) et l'aspect *décimal* (la valeur d'un chiffre est dix fois supérieure à celle du même chiffre placé à sa droite immédiate – si c'est possible – et dix fois inférieure à celle du même chiffre placé à sa gauche immédiate) sont inséparables.

L'écriture en unités de numération permet

- d'exprimer des quantités dans un système mixte (chiffres et mots) quand les nombres d'unités ne sont pas réduits au maximum, par exemple : 2c 15d 25u où le nombre de groupements de certains ordres est supérieur ou égal à dix (nombre à deux chiffres, voire plus).

- d'exprimer les relations entre les différentes unités : $1c = 10d = 100u$; $1m = 10c = 100d = 1000u$... une dizaine de dizaines c'est une centaine, une dizaine de centaines c'est un millier tout comme une centaine de dizaines, une centaine de centaines c'est une dizaine de milliers...

- de faire des conversions, en particulier pour ramener le nombre d'unités de chaque ordre à un nombre à un chiffre : $2c\ 15d\ 25u = 3c\ 5d\ 25u = 3c\ 7d\ 5u$ indispensables pour le traitement de la retenue dans les techniques opératoires.

- l'ordre d'écriture n'a pas d'importance puisqu'on indique les unités : $2c\ 25u\ 15d = 2c\ 15d\ 25u$

L'écriture en chiffres donne immédiatement une écriture en unités de numération réduite, par exemple $375 = 3c\ 7d\ 5u$, c'est l'écriture que nous avons appelée canonique.

Pour passer de l'écriture en unités de numération à l'écriture en chiffres, il peut être plus économique de faire les conversions en commençant par les unités pour simplifier les calculs et ne faire que les additions nécessaires (c'est la technique opératoire de l'addition) :

par exemple 5m 25c 123d 73u (exemple qu'on ne proposerait évidemment pas à des élèves)

- il n'y a des unités isolées que dans 73 : 7d, 3u donc 3u

- 123d c'est 12c 3d ; on a donc $3d+7d$, ce qui fait 1c donc 13c ou 1m 3c

- $25c = 2m + 5c$; on avait déjà 13c ou 1m 3c donc on a 38c ou 3m 8c

Finalement on a donc 8m 8c 3u c'est-à-dire 8803.

Cet exemple est (volontairement) très compliqué. Dans la pratique on a rarement des retenues à plus de deux chiffres donc il suffit pour les élèves d'étudier les conversions des nombres à deux chiffres.

L'écriture en lettres traduit en mots écrits la numération orale. Elle rend compte des groupements par dix mais avec des irrégularités dans la première centaine (nom des nombres de onze à seize, noms des dizaines, base vingt combinée à la base dix entre soixante et quatre-vingt-dix-neuf) qui se retrouvent pour chaque centaine suivante.

Au delà de mille, apparaît une nouvelle base auxiliaire : la base mille (dix mille, cent mille) avec un nouveau mot, million, pour mille mille. Pour faciliter la lecture, les groupements par mille sont marqués dans l'écriture en chiffres par un espace.

L'écriture en unités de numération constitue un intermédiaire entre la numération orale et la numération en chiffres dans la mesure où sa forme canonique donne une numération en mots sans les irrégularités de la numération orale en français.

La propriété de troncature

Le nombre d'unités de chaque ordre se lit directement sur l'écriture du nombre par troncature. Pour connaître le nombre de dizaines, il suffit de lire le nombre jusqu'au rang des dizaines (en tronquant les unités) ; pour le nombre de centaines, il suffit de lire le nombre jusqu'au rang des centaines. Par exemple 8803 contient 880 dizaines ou 88 centaines. C'est une conséquence du principe de groupement maximal qui fait aussi qu'on retrouve tous les nombres à deux chiffres entre deux centaines "rondes" (entre cent et deux cents, entre deux cents et trois cents....), ce que nous appellerons la propriété de récurrence.

La propriété de récurrence

Les principes et propriétés se travaillent et s'étendent progressivement :

- sur les nombres à 2 chiffres dès le CP
- sur les nombres à 3 chiffres dès le CE1
- Au CE2, pour les nombres à 4 chiffres on s'appuie sur ce qu'on sait déjà sur les nombres à 3 chiffres et au CM, l'étude des grands nombres utilise et consolide ce qui a été acquis dans les classes antérieures.

Par exemple, pour le "nombre de", la troncature se justifie de proche en proche (récurrence sur le nombre de chiffres) :

Admettons qu'on ait déjà traité le problème dans les nombres à 3 chiffres. Pour connaître le nombre de dizaines de 4235, on sait que 4235 c'est $4m + 235u$; $4m$ c'est $40c$ ou $400d$ (seul élément nouveau) et dans 235 il y a $23d$ (savoir ancien) donc $400d + 23d = 423d$ (la troncature). De même, pour le nombre de centaines : $40c + 2c = 42c$. A chaque fois on n'a à ajouter que les conversions des nouvelles unités.

Des points importants à travailler à chaque niveau :

- le rapport dix entre les différentes unités de numération (principe D)
- les traductions entre les différentes écritures, notamment l'écriture en unités de numération
- le rôle du zéro qui n'est nécessaire que dans l'écriture en chiffres mais qu'on peut introduire dans l'écriture en unités de numération pour obtenir une traduction signe par signe entre l'écriture en chiffres et l'écriture canonique en unités de numération.

Les problèmes de conversion entre unités de numération jouent un rôle fondamental dans les techniques de calcul posé et mental des quatre opérations.

L'aspect décimal est mis en jeu quand une conversion est nécessaire, notamment quand on a un nombre à 2 chiffres au moins d'unités dans un rang et un nombre non nul d'unités dans le rang immédiatement supérieur (exemple écrire en chiffres $1m\ 2c\ 35d\ 4u$; en revanche pour $1m\ 35d\ 4u$, où les centaines manquent, la juxtaposition donne une réponse correcte).

TITRE :

Eclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire

AUTEUR/S :

Christine Chambris, Eric Mounier, Patricia Nebout, Marie-Jeanne Perrin-Glorian

RESUME :

Ce cahier rassemble plusieurs textes qui donnent différents éclairages sur les problèmes didactiques que pose l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire, notamment la désignation des nombres dans la langue, le système d'écriture chiffrée en base dix, les rapports entre les deux, ainsi que les rapports entre le système métrique pour la mesure des grandeurs et le système de numération en base dix, problèmes sur lesquels les textes d'Eric Mounier et de Christine Chambris apportent des éclairages complémentaires.

Eris Mounier étudie de façon approfondie les relations entre les noms des nombres jusqu'à cent en français et l'écriture chiffrée en base dix. Il en tire des outils d'analyse des procédures des élèves et de l'enseignement en CP.

Christine Chambris de son côté s'appuie sur une analyse de manuels pour étudier l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du 20^{ème} siècle. Elle dégage des théories intermédiaires qui permettent de justifier et d'expliquer la cohérence des choix faits aux différentes époques, mais aussi d'identifier les tâches qui peuvent vivre ou non dans l'enseignement selon ces choix.

Le texte de Patricia Nebout se situe dans un autre contexte : celui de la mise en place en Côte d'Ivoire de nouveaux programmes visant une approche par compétences de l'enseignement. Elle analyse de ce point de vue les exercices concernant les apprentissages pré-numériques et numériques (nombres jusqu'à 9) dans le cahier d'exercices fourni aux élèves de CP 1^{ère} année (en Côte d'Ivoire l'école primaire dure six ans et le cours préparatoire se fait sur deux ans).

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, qui a édité ce cahier, l'introduit en rappelant une situation fondamentale à laquelle répondent les nombres et le conclut en proposant une synthèse des savoirs indispensables aux enseignants du primaire pour enseigner le système d'écriture des nombres en base dix.

MOTS CLES :

Enseignement primaire - manuels scolaires - activités numériques - nombres - dénombrement - numération(s) - numération parlée - numération chiffrée - signe et nombres - unités de numération - générateur de tâche - conversions entre unités - savoirs savants du premier et du second ordres - système métrique - praxéologies de la numération - ostensifs - situation fondamentale pour les nombres entiers - procédures - compétences - carte conceptuelle.