



HAL
open science

Hauteur de l'arbre de Jacobson

Anatole Khelif, Max Lemax, Christophe Chalons

► **To cite this version:**

Anatole Khelif, Max Lemax, Christophe Chalons. Hauteur de l'arbre de Jacobson. 2019. hal-02106146

HAL Id: hal-02106146

<https://hal.science/hal-02106146>

Preprint submitted on 22 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hauteur de l'arbre de Jacobson

Anatole Khélif, Max Lemax, Christophe Chalons

1 Introduction, 22/04/2019, 16h46

Moi, auteur de ces lignes (Christophe Chalons), dinais, hier soir (21/04/2019), avec mon grand ami Anatole Khélif, dont je suis un grand admirateur. Je fais le récit de ce dîner à la dernière section. J'explique à quel moment je lui ai posé ma question et ma motivation pour la poser dans cette même dernière section.

Auparavant, ayant déjà raconté tout ça sur un forum, un jeune et prometteur mathématicien de 20 ans fréquentant le même forum, qui avait un peu de temps devant lui à l'heure du déjeuner nous a fait la surprise de transformer mon sketch de la preuve fournie par Anatole du théorème de Jacobson en fichier latex rédigé aux normes plus académiques attendues par les supports d'articles et mémoire.

Il me semble correct de reproduire d'abord cette rédaction, afin de mettre en haleine le lecteur, puis de passer à la dernière section, qui sera un verbatim du mail que j'ai envoyé aux news du CNRS afin de susciter un éventuel intérêt vers la question de la hauteur de l'arbre de Jacobson.

2 Rédaction de la preuve d'Anatole, du théorème de Jacobson (TJ), par Max Lemax

Le théorème de Jacobson est :

Soit R un anneau unitaire.

On suppose que pour tout $x \in R$, il existe $n \geq 2$ tel que $x^n = x$.

Alors R est commutatif

A noter que n est autorisé à dépendre de x . Dans la suite, je recopie telle que me l'a envoyée le rédacteur Max Lemax, une preuve élémentaire de ce résultat fournie par Anatole Khélif hier soir, lors d'un dîner dans une pizzeria.

Je signale aux experts que la preuve de Max Lemax étant bien plus respectueuse du lecteur que la mienne, elle peut disperser le lecteur expert (qui risque de vérifier bureaucratiquement que les inférences non justifiées sont bien des classiques académiques). **Mais vous disposez de DEUX descriptions.**

Selon vos compétences et vos habitudes, vous disposez de DEUX preuves. Si vous êtes expert, celle de Max est longue et analytique, donc risque de vous faire peiner de voir le fil directeur très simple. Dans ce cas, vous disposez à la dernière section, à la rubrique ASTERISQUES de la preuve dont a accouché Anatole telle quelle (je l'ai juste un peu remixée, sans la détailler, en la communiquant). Pour des experts, **elle est compréhensible en 5mn chrono sans effort**. Cela est dû à ce qu'elle utilise des acquis que vous pouvez avoir ou pas digérés. Si pas digérés, celle de Max vous conduira plus par la main.

A partir de maintenant, je laisse la plume à Max Lemax!

Le seul résultat que nous admettons est le théorème de Wedderburn :

2.1 Le théorème de Wedderburn

Soit R un anneau fini non nul dans lequel tout élément non nul a un inverse (on dit que R est un *anneau à division*). Alors R est commutatif, en particulier R est un corps.

Les preuves connues du résultat de Jacobson utilisent aussi ce résultat, notre preuve simplifie uniquement le reste de la preuve.

A ma connaissance (de Max Lemax), cette preuve n'apparaît nulle part dans la littérature.

3 La preuve

Soit R un anneau vérifiant les hypothèses du TJ. Nous notons pour tout $x \in R$ $n(x)$ un entier ≥ 2 tel que $x^{n(x)} \geq 2$; on peut par exemple choisir le plus petit mais ce n'est pas important.

3.1 Enchaînement de lemmes

Lemme : Soit $x \in R$, et soit $Ann_g(x) := \{a \in R \mid ax = 0\}$, $Ann_d(x) := \{a \in R \mid xa = 0\}$ les annulateurs à gauche et à droite de x respectivement. Alors $Ann_g(x) = Ann_d(x)$, et en particulier c'est un idéal bilatère.

Preuve

Les deux sont des idéaux à gauche et à droite respectivement, donc s'ils sont égaux il s'agit bien d'un idéal bilatère. Soit maintenant $a \in Ann_g(x)$.

Alors $(xa)^2 = 0$ donc comme $n(xa) \geq 2$ on a aussi $xa = (xa)^{n(xa)} = 0$ donc $a \in Ann_d(x)$. Par symétrie on a aussi $Ann_d(x) \subset Ann_g(x)$ donc $Ann_g(x) = Ann_d(x)$ et le résultat s'en suit.

On note désormais $Ann(x) := Ann_g(x) = Ann_d(x)$.

Grâce au lemme suivant on va réussir à se ramener au cas où R est un anneau à division.

Lemme : L'intersection des idéaux bilatères maximaux de R est nulle.

Preuve

Soit $x \in R$ et n tel que $n + 1 = n(x)$. Supposons que $x \neq 0$.

Alors $Ann(x) \neq R$ donc $Ann(x) \subset I$ pour un certain idéal bilatère maximal I (par le lemme de Zorn). Or $1 - x^n \in Ann(x) \subset I$ donc $x \notin I$; en particulier x n'est pas dans l'intersection des idéaux bilatères.

En particulier, le morphisme canonique $R \rightarrow \prod_I R/I$ est injectif, où I varie dans les idéaux bilatères maximaux de R .

Nous remarquons de plus que pour chaque I , R/I vérifie les hypothèses du théorème et est simple (n'a pas d'idéaux bilatères).

En particulier, avec $A := R/I$, si $x \in A \setminus \{0\}$, $Ann(x)$ est un idéal bilatère non égal à A , c'est donc 0. En particulier x n'est donc pas un diviseur de 0, et $x(1 - x^{n(x)-1}) = 0$, donc x est inversible : A est un anneau à division.

Donc si on sait prouver le résultat pour les anneaux à division, il est valable pour chaque R/I qui est donc commutatif, donc leur produit l'est aussi, et donc R aussi, en tant que sous-anneau du produit : il suffit donc de prouver le théorème dans le cas où R est un anneau à division : à partir de maintenant *nous supposons que R est à division*.

En utilisant l'hypothèse sur les images des entiers dans R , on en déduit que R est de caractéristique > 0 , et donc (étant à division) de caractéristique première. On note k son sous-corps premier (\mathbb{F}_p si $\text{char} R = p$).

3.2 Fin de la preuve

Preuve Soit $a \in R$, et soit $f : R \rightarrow R; x \mapsto xa$ vu en tant qu'endomorphisme du $k[a]$ -espace vectoriel R . Comme a est annulé par $X^{n(a)} - X$ sur k , donc il a un polynôme minimal P qui est irréductible car $k[a]$ est un corps.

En particulier, $k[a]$ est de dimension finie sur k , et est donc fini : soit q son cardinal. Alors $X^q - X$ annule a , et donc P divise $X^q - X$ (en tant que polynôme minimal de a), qui est scindé sur $k[a]$: donc P est scindé sur $k[a]$.

De plus k est un corps fini donc parfait, donc P est à racines simples dans $k[a]$.

Notons que de plus P est aussi le polynôme minimal de f , qui a donc un polynôme minimal scindé à racines simples : en particulier f est diagonalisable.

Soit $c \in k[a]$ une valeur propre de f et $v \in R$ un vecteur propre associé. $f(v) = cv$ se traduit par $va = cv$.

Alors pour tout n , pour tout m il existe un polynôme $Q \in k[X]$ tel que $v^n a^m = Q(a)v^n$ (on le prouve par récurrence sur n (pour tout m simultanément), en utilisant $va = cv$ et le fait que c est un polynôme en a)

En particulier, $k[a, v] = \{Q(a)S(v), Q, S \in k[X]\}$ est donc de dimension finie sur k (de dimension majorée par $n(a)n(v)$), et en particulier est fini. C'est donc un anneau intègre fini, donc un anneau à division fini.

Par le théorème de Wedderburn, il est donc commutatif, donc $va = av$, donc $c = a : P$ n'a qu'une seule racine, et donc $f(x) = ax$ pour tout $x \in R$. Donc pour tout $x \in R, ax = xa$. Ceci étant vrai pour tout a , on a que R est commutatif, et cela conclut la preuve.

Je reprends la plume à Max Lemax.

4 Origine, motivation, question

Ci-dessous, je recopie un mail, texto, que j'ai envoyé aux news du CNRS ce jour. Je voulais le faire depuis longtemps, mais je n'avais pas de preuve du TJ, donc je l'admettais ce qui me rendait moins motivé.

4.1 Copie du mail envoyé le 20/04/2019 à news

Chers camarades,

il est rarissime que je vous adresse un mail sur des maths car il y a d'autres supports.

En fait présentement, comme la seule dernière fois, je le fais quand je ne sais pas vers quelles spécialités on peut pointer, ou quand il y a un mélange.

De plus, j'ai décidé de pousser Anatole vers un magasin de chaussures en lui faisant enfler les chevilles (je plaisante).

Il y a un théorème d'algèbre qu'Anatole ne connaissait pas, hier soir (à 19h42) pendant que nous mangions une pizza napolitaine. Je le lui ai énoncé, puis nous avons parlé de plein de choses 20mn, donc il n'a pas dû pouvoir réfléchir à ça plus de 5-6mn, mais, sacré Anatole, il me l'a prouvé à 20h05 en 10 lignes. Je le connais, mais on ne s'en lasse pas pour autant.

Il s'agit du théorème qui dit la chose suivante et qui s'appelle "théorème de Jacobson" (TJ) :

Soit A un anneau unitaire (pas forcément commutatif). On suppose que pour tout élément x de A , il existe un entier $n > 1$ tel que $x^n = x$. Alors A est commutatif

Je vous mets la preuve** d'Anatole en astérisque.

En TDE (théorie des ensembles) un outil de base consiste à associer un ordinal à tout arbre bien fondé. Or depuis quelques temps déjà (je ne savais pas prouver le TJ, mais je l'admettais) je réfléchissais à la hauteur possible pour : L'ARBRE DE JACOBSON

Qu'est-ce que j'appelle ainsi ?

Soit $E := \mathbb{Z}[X, Y]$ l'anneau des polynômes formels NON COMMUTATIFS sur l'anneau des entiers relatifs \mathbb{Z} .

Soit le jeu suivant : Lea joue x_1 dans E et Bob répond par n_1 un entier naturel > 1 . Ensuite Lea joue x_2 dans E et Bob répond par n_2 , etc, etc.

La partie s'arrête et Lea gagne quand l'idéal bilatère engendré par les $x_i^{n_i} - x_i$ déjà joués contient $XY - YX$

D'après le TJ Lea a une stratégie S infaillible pour gagner contre n'importe qui à ce jeu. C'est un jeu ouvert. Il existe un ordinal et une application qui à chaque position par lesquelles passent une partie jouée par Lea suivant la strat S associe un ordinal de sorte que plus on avance plus l'ordinal est petit (ce qui "dessine" de manière flagrante que sa stratégie est infaillible puisque, les ordinaux étant bien ordonnés, ça finira par s'arrêter)

Question : quelqu'un a-t-il une idée du plus petit ordinal dans lequel on peut envoyer la garantie de gagner pour Lea ?

Je rappelle que le conflit (enfin le chemin du non commutatif vers le commutatif est passionnant (subjectif), mais surtout important en ce que plus on améliore sa compréhension, plus on approfondit les fondements quantiques, encore très mal compris.

De plus, à ma connaissance, des arbres bien fondés "intéressant et provenant des maths usuelles" ne sont pas très fréquents (enfin je veux dire des arbres où on peut jouer des entiers très grands (penser à Ramsey affrontant Lea avec une suite de chez croissant ULTRA ULTRA vite d'entiers joués)) et ici on a un rond-point entre "thème commutatif/non commutatif + ordinaux des TDistes + algèbre "de fond")

Grand merci par avance. Bisous, CC

4.2 Astérisques

1/ preuve (sketch) d'Anatole entre deux bouchées de napolitaines :

- 1.1/ $x | ax=0$ est un idéal bilatère (exo)
- 1.2/ Si $a(1 - a^p) = 0$ un idéal bilatère maximal contenant $1 - a^p$ ne contiendra pas a
- 1.3/ Si $ab \neq ba$ alors il existe un idéal bilatère maximal ne contenant donc pas $ab - ba$
- 1.4/ On peut "donc" supposer A sans idéaux bilatères (autres que A lui-même et (0))
- 1.5/ C'est un corps ($a(1 - a^p) = 0$ entraîne l'inversibilité des éléments réguliers)
- 1.6/ Il est de caractéristique finie un nb premier disons p et je note $F := F_p$

Soit a pas dans le centre de A :

- 1.7/ Le polynôme de a pas dans le centre est irréductible sur F
- 1.8/ Il est scindé sur $F[A]$ (finitude des corps)
- 1.9/ L'endomorphisme $x \mapsto xa$ est diagonalisable (l'EV est A et le corps est $F[a]$)
- 1.10/ a n'est pas sa seule valeur propre sinon pour tout $x : xa = ax$
- 1.11/ Soit c dans $F[a]$ une autre, et v tels que $cv = va$ (v vecteur propre non nul pour c)
- 1.12/ On peut faire passer a à travers v via $va = cv = \text{Poly}(a) v$
- 1.13/ Les monômes en a et v forment un ensemble fini
- 1.14/ $F[a, v]$ est un corps .. FINI
- 1.15/ il est commutatif (Wedderburn)

Contradiction !

2/ Les ordinaux :

je réécrirai cette sous-section plus poliment ultérieurement.

$\ll x$ est transitif \gg abrège $\ll x$ inclus dans $P(x)$, l'ensemble de ses parties \gg

$\ll x$ est un ordinal \gg abrège $\ll x$ est l'ensemble de ses sous-ensembles qui sont transitifs et différents de $x \gg$

Vous pouvez vérifier (pour ceux qui ne connaissent pas) que qu'aucun élément d'un ordinal ne s'appartient à lui-même (2 lignes), donc que tout ensemble non vide X d'ordinaux admet un minimum pour l'inclusion (l'intersection de ses éléments, qui est un ensemble transitif donc élément de tous les éléments de X sauf celui auquel il est égal et qu'aucun ensemble ne peut contenir tous les ordinaux. Et comme l'ensemble des ordinaux est une partie transitive de a qui n'appartient pas à a , c'est a donc a un ordinal ne contient que des ordinaux. La littérature ou internet peuvent vous raconter ça de manière moins condensée.

Si (et seulement si) une relation R incluse dans E^2 est bien fondée il existe f associant à chaque élément de E un ordinal tel que pour tous x, y (x, y) dans R implique $f(x)$ qui est un ordinal est strictement inférieur à $f(y)$ (ie inclus dans et appartient à)

On a donc UNE HAUTEUR DE JACOBSON qui me semble intéressante à déterminer. Si c'est un grand ordinal dénombrable alors ça veut dire que Wedderburn et TJ sont SUBTILES sinon, ça veut juste dire qu'on est en attente d'un futur théorème qui les trivialisera donnant probablement une CS de commutativité "étonnante" mais "évidente" une fois énoncée.

Références

[Can] Journal canadien sur la theorie des graphes 1996

[Da] M.M. Day, Oriented Systems, Duke Math. Journal, vol.11 (1944), pp.201-229

[Del] J.P. Delahaye, Libre arbitre et mécanique quantique, LOGIQUE et CALCUL, 2009

[D.R.] Diener et Reeb : Analyse non standard.

[G.P.] F. Galvin and K. Prikry, Infinitary Jonsson algebras and partition relations, *Algebra Universalis*, vol.6 (1976) 367-376

[Kan] Kanamori : Higher infinite springer verlag 1994

[Kec] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995

[Kun] Kunen 1980 : Set Theory. Springer verlag

[Joc] Structure of Rings, Nathan Jacobson Volume 37 of American Mathematical Society Colloquium publications Author Nathan Jacobson Edition 5, revised Publisher AMS Bookstore, 1964 ISBN 0821810375, 9780821810378