



HAL
open science

Sur une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients

Asma Manai

► To cite this version:

Asma Manai. Sur une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2018. Français. NNT : . hal-02105240v1

HAL Id: hal-02105240

<https://hal.science/hal-02105240v1>

Submitted on 13 May 2019 (v1), last revised 23 Jun 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Sur une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients

Asma Manai

► **To cite this version:**

Asma Manai. Sur une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2018. Français. hal-02105240

HAL Id: hal-02105240

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02105240>

Submitted on 10 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat en
mécanique

Sur une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients

Présentée par

Asma Manai

10 Février 2018

Devant le jury:

Président	Jamel Neji	Ecole nationale d'Ingénieurs de Tunis
Rapporteur	Khemais Saanouni	Université de Technologie de Troyes
Rapporteur	Raouf Fathallah	Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sousse
Examineur	Hélène Dumontet	Université Pierre et Marie Curie
Directeur de thèse	Hedi Hassis	Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Directeur de thèse	Abdelwahed Benhamida	Université Pierre et Marie Curie

Remerciements

Je tiens à exprimer mon immense gratitude envers mes directeurs de thèse pour les efforts qu'ils ont fourni en vue de me garantir des bonnes conditions de travail, pour leur écoute et leur disponibilité. Je tiens à remercier tous les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail.

A tous les professeurs qui ont su m'accueillir vivement pour répondre à mes questions et pour enrichir ma formation, je témoigne ma reconnaissance la plus distinguée.

Je remercie mes collègues de l'ENIT et de l'UPMC.

Mes vifs remerciements à ma famille, à mes amis et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

A pragmatic anisotropic Damage Fatigue Model Based on a failure criterion and its gradient

Abstract. A new practical engineering methodology for the analysis of structures under cyclic loading is proposed in this work. A new anisotropic fatigue damage model is developed. The evolution of material properties degradation depends on a failure criterion and its gradient. The anisotropic material degradation will guide the damage propagation. The propagation of damage is mainly depending on the ridges of the criterion's "surface" (zero gradients). The proposed approach can describe the initiation and propagation of the damage until the structural failure under fatigue loading. For each finite element, non-homogeneous anisotropic distributions of material properties are associated. Schematically, it seems like a material "surfing" on the criterion's "surface" and damages follow the crest of the criterion's "surface" (level and gradient). A global approach criterion, based on invariants of the stress tensor, is adopted. The reduction of material properties is assigned to a number of cycles and a global level of stresses, using an experimental Wöhler curve.

Two simplified forms of the model are proposed and results are compared with a cruciform experimental reference example and an industrial case. A mapping with Dang Van criterion is also computed to analyze the numerical results.

Une approche pragmatique de l'endommagement anisotrope par fatigue basée sur un critère de fatigue et ses gradients

Résumé. Cette thèse traite d'une approche pragmatique de l'endommagement par fatigue des structures sous un chargement cyclique. Un modèle anisotrope de dommage par fatigue a été développé. L'évolution de la dégradation des propriétés du matériau dépend d'un critère de fatigue (choisi) et de ses gradients. La dégradation du matériau anisotrope guidera la propagation des dommages. La propagation des dommages dépend principalement des crêtes de la «surface» du critère (gradients zéro). L'approche proposée décrit l'amorçage, la propagation des dommages et la rupture structurale sous un chargement multiaxial en fatigue. Pour chaque élément fini, des distributions anisotropes non homogènes des propriétés du matériau sont associées. Schématiquement, il apparaît comme un «surfer» matériel sur la «surface» du critère et les dommages suivent la crête de la «surface» du critère (niveau et gradient). Un critère d'approche globale, basé sur des invariants du tenseur des contraintes, est adopté. La réduction des propriétés des matériaux est affectée à un certain nombre de cycles et à un niveau global de contraintes, en utilisant une courbe de Wöhler expérimentale.

Deux formes simplifiées du modèle sont proposées et les résultats sont comparés avec un exemple de référence expérimental (plaque cruciforme) et un cas industriel (pale d'une éolienne d'EDF). Une cartographie avec le critère de Dang Van est également calculée pour analyser les résultats numériques.

Sommaire

Introduction	1
1 Étude bibliographique	4
1.1 Introduction	5
1.2 Notions utilisées	5
1.2.1 Classification des chargements	7
1.2.2 Courbe de Wöhler	8
1.2.3 Contrainte effective	11
1.2.4 Effet de la contrainte moyenne	12
1.3 Durée de vie en fatigue	13
1.3.1 Durée de vie en fatigue sous un chargement à amplitude constante	13
1.3.2 Durée de vie de fatigue sous chargement à amplitude variable : technique basée sur le comptage de cycles	19
1.3.3 Durée de vie de fatigue sous chargement à amplitude variable : technique sans comptage de cycles	22
1.4 Les modèles d'endommagement	29
1.4.1 Loi de Miner : un modèle d'endommagement linéaire	29
1.4.2 Les modèles d'endommagement non linéaire	30
1.5 Principe d'équivalence de déformation	38
1.6 Principe d'équivalence de contrainte	38
1.7 Principe d'équivalence d'énergie	39

1.8	Quelques résultats expérimentaux de la littérature	39
1.8.1	Données de l'exemple	40
1.8.2	Conditions générales sur les essais	41
1.8.3	Méthode de détection de l'amorçage de fissure	42
1.8.4	Résultats expérimentaux	42
2	Modélisation de l'endommagement par dégradation isotrope de la rigidité	44
2.1	Introduction	45
2.2	Construction du modèle	46
2.2.1	Les grandes étapes du modèle	46
2.2.2	Modélisation de l'endommagement et de son évolution	47
2.3	Mise en œuvre numérique du modèle.	50
2.4	Validation du modèle	54
2.4.1	Exemple 1 : fatigue en traction simple	54
2.4.2	Exemple 2 : fatigue en traction Bi-axiale	59
2.5	Conclusion	65
3	Extension : Modélisation de l'endommagement par dégradation anisotrope de la rigidité basée sur un critère de fatigue et ses gradients	67
3.1	Introduction	68
3.2	Principe d'équivalence et choix de la matrice indicateur d'endommagement ($I-D$)	68
3.3	Détermination de la matrice ($I-D$)	71
3.4	Détermination du coefficient de poisson ν	74
3.5	Validation sur des exemples académiques	75
3.5.1	Exemple 1 : plaque rectangulaire	75
3.5.2	Exemple 2 : pièce uni-axial	78
3.6	Conclusion	80

4	Version simplifiée du modèle	82
4.1	Introduction	83
4.2	Présentation du modèle	83
4.2.1	Cadre de validité du modèle	84
4.2.2	Phase d'initiation (d'amorçage) de l'endommagement	84
4.2.3	Phase de propagation de l'endommagement	84
4.2.4	Phase finale : rupture structurale	91
4.2.5	Tableau récapitulatif du modèle	91
4.3	Mise en œuvre numérique	93
4.3.1	Exemple académique : Plaque cruciforme [6]	93
4.3.2	Exemple industriel : pôle de roulement EDF	108
4.4	Conclusion	116
	Conclusion	117
	Références bibliographiques	119
	Annexe A	124
	Annexe B	127
	Annexe C	129
	Annexe D	134
	Annexe E	137

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques mécaniques du matériau	42
1.2	Essais de fatigue équi-bi-axiales : chargement à amplitude constante [6]	43
2.1	Caractéristiques mécaniques du matériau [6]	56
2.2	Caractéristiques des différents maillages utilisés et taille des problèmes résolus	58
2.3	Nombre de cycles à l’amorçage de fissure, N_0 , et nombre de cycles à rupture, N_f , calculés avec les deux interpolations et les différents maillages.	58
2.4	Longueur de la fissure sur dimension de l’éprouvette, $\frac{L_f}{L_e}$, pour les différents maillages et les différentes interpolations.	59
2.5	Les résultats de calcul sur la pièce cruciforme	62
2.6	Comparaison des résultats numériques-expérimentaux pour l’éprouvette cruciforme	66
4.1	Série statistique de déformations de la deuxième phase élastique	89
4.2	Tableau récapitulatif de l’approche : première version simplifiée	96
4.3	Tableau récapitulatif de l’approche : deuxième version simplifiée	96
4.4	Saut de cycles constant	101
4.5	Saut de cycles variables	105
4.6	Etude de sensibilité du modèle	106

Table des figures

1.1 Paramètres de chargement cyclique	6
1.2 Contrainte alternée symétrique	7
1.3 Contrainte alternée asymétrique	7
1.4 Contrainte répétée	8
1.5 Contrainte ondulée	8
1.6 Chargement à amplitude constante	8
1.7 Chargement à amplitude constante par bloc	9
1.8 Changement à amplitude variable	9
1.9 Courbe de Wöhler	10
1.10 Accommodation plastique et rochet	11
1.11 Adaptation élastique	11
1.12 Concept de la contrainte effective [22]	12
1.13 Diagramme d'Haig : Geber, Goodman et Soderberg	13
1.14 Plan Δ et les repères associés [30]	15
1.15 Surface Iso-vie dans l'espace $(\sigma_{H,a}, \sigma_{H,m}, \max T_a)$	17
1.16 Courbe de Wöhler modifiée [35]	19
1.17 Variable de comptage de cycles : contrainte normale	21
1.18 les termes qui interviennent dans E_h [10]	22
1.19 Évolution du limite d'élasticité en fonction du cumul de la déformation plastique pour un cristal [28]	24

1.20	Evolution de l'endommagement et de la limite d'élasticité pour les 3 phases de comportement du cristal [26]	26
1.21	Règle d'équivalence entre deux chargements locaux [44]	29
1.22	Exemple d'application de la loi de DCA	33
1.23	Courbe de dommgé pour une durée de vie de 10^4 et de 10^3	34
1.24	Calcul de DCA à deux niveaux	34
1.25	Conception de module de fatigue selon Hwang et Han	36
1.26	Différents types d'éprouvettes cruciformes [6]	40
1.27	Eprouvette cruciforme de section réduite au centre(circulaire) [6]	41
1.28	Structure analysée(unité mm)[6]	41
1.29	Le quart la partie étudiée [6]	42
1.30	Illustration de quelques essais expérimentaux [6]	44
2.1	Évolution de l'endommagement en fonction de σ_{eq}	50
2.2	Types des cycles de chargements	52
2.3	Organigramme de la mise en œuvre numérique	55
2.4	Structure analysée [6]	56
2.5	Cycle de chargement imposé à la structure	57
2.6	Différents maillages utilisés	57
2.7	Erreur relative à l'expérimental en fonction du nombre de degrés de liberté total.	58
2.8	Distribution de l'endommagement à N= 231 175 cycles.	59
2.9	Distribution de l'endommagement à N= 258 130 cycles.	60
2.10	Distribution de l'endommagement à N= 260 082 cycles.	60
2.11	Distribution de l'endommagement à N= 288 112 cycles.	60
2.12	Distribution de l'endommagement à N= 291 197 cycles.	60
2.13	Distribution de l'endommagement à N= 293 975 cycles.	60
2.14	Structure analysée(unité mm)[6]	61

2.15	Intensité du chargement de traction bi-axiale appliqué à l'éprouvette cruciforme	62
2.16	Distribution de l'endommagement à 3E4 cycles	63
2.17	Distribution de l'endommagement à 7.71E4 cycles	63
2.18	Distribution de l'endommagement à 1.61E5 cycles	64
2.19	Distribution de l'endommagement à 3.23E5 cycles	64
2.20	Distribution de l'endommagement à 5.31E5 cycles	65
2.21	Distribution de l'endommagement à 7.89E5 cycles	65
2.22	Les résultats des dommages par le critère de Dang-Van	66
2.23	Résultats expérimentaux : initiation, propagation de l'endommagement et rupture [6]	67
3.1	Distribution de critère du fatigue de <i>Sines</i>	78
3.2	Gradient du critère suivant X	79
3.3	Gradient du critère suivant Y	79
3.4	La distribution de $\frac{E_x^{n+1}}{E_x^n}$	80
3.5	La distribution de $\frac{E_x^{n+1}}{E_x^n}$	80
3.6	La distribution de $\frac{E_y^{n+1}}{E_y^n}$	81
3.7	La distribution de $\frac{E_y^{n+1}}{E_y^n}$	81
3.8	Les vecteurs gradient de contrainte équivalente de critère de fatigue	82
3.9	Le champs d'endommagement suivant X Dx :	83
3.10	Le champs d'endommagement suivant Y Dy :	83
4.1	Evolution de saut de cycle maximal ΔN_{max}	91
4.2	Étape i du processus d'endommagement par fatigue	93
4.3	Étape $i+1$ du processus d'endommagement par fatigue	94
4.4	Prise en compte de tous les N_{i-1} cycles	95
4.5	Étape 1 : état de la structure à $N = 2E5$ cycles	98

4.6	Étape 2 : état de la structure à $N = 3E5$ cycles	98
4.7	Étape 3 : état de la structure à $N = 4E5$ cycles	99
4.8	Étape 4 : état de la structure à $N = 5E5$ cycles	99
4.9	Étape 5 : état de la structure à $N = 6E5$ cycles	100
4.10	Étape 7 : état de la structure à $N = 7E5$ cycles	100
4.11	Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles	101
4.12	Contrainte équivalente de Sines	102
4.13	Étape 1 : $N= 3.1723E5$ cycles	103
4.14	Étape 2 : $N=4.87945E5$ cycles	103
4.15	Étape 3 : $N= 6.15975E6$ cycles	104
4.16	Étape 4 : $N=7.30185E5$ cycles	104
4.17	Étape 5 : $N= 7.87647E5$ cycles	105
4.18	Étape 2 : Pour maillage grossier	106
4.19	Étape 2 : Pour maillage fin	106
4.20	Étape 3 : Pour maillage grosseir	106
4.21	Étape 3 : Pour maillage fin	106
4.22	Étape 4 : Pour maillage grossier	107
4.23	Étape 4 : Pour maillage fin	107
4.24	Étape 6 : Pour maillage grosseir	107
4.25	Étape 6 : Pour maillage fin	107
4.26	Les axes des déphasages	108
4.27	Résultats expérimentaux de déphasages	109
4.28	Étape 2 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35) . .	109
4.29	Étape 3 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35) . .	110
4.30	Étape 4 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35) . .	110
4.31	Étape 5 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35) . .	111
4.32	Étape 6 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35) . .	111

4.33	Éolienne EDF	113
4.34	Pale de roulement EDF	113
4.35	Cycle de chargement du pôle de roulement	114
4.36	Courbe de Wöhler de l'acier utilisé	115
4.37	Étape 1 : N=1125796 cycles	116
4.38	Étape 3 : N=83878411 cycles	117
4.39	Étape 4 : N=1499696 cycles	118
4.40	Résultat du critère de Dang-Van	119
4.41	Trajet micro/macro dans la plan de cisaillement	138
4.42	Droite d'endurance du critère de Dang Van	140

Notations

- J_{2a} : Amplitude du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes
- I_m : Moyenne du premier invariant du tenseur des contraintes
- N_0 : Nombre de cycles à l'amorçage d'endommagement
- N_f : Nombre de cycles à la rupture
- N_s : Nombre de cycles de stabilisation
- N_i : Nombre de cycles à l'itération i
- ΔN_{max} : Saut de cycles maximal
- ΔN : Saut de cycles
- σ_y : La limite d'élasticité
- σ_y^i : La limite d'élasticité stabilisée à l'étape i
- σ_{sines} : Contrainte équivalente de Sines
- σ_{eq} : Contrainte équivalente
- D : Endommagement
- D_i : L'endommagement à l'étape i
- ΔD_i : Variation de l'endommagement entre l'état $i - 1$ et i
- $\bar{\epsilon}_p$: Moyenne des déformations plastiques
- ϵ_p^k : Déformations plastiques de l'élément k
- ϵ_p : Déformations plastiques
- S_{tot} : Surface totale de la structure
- S_k : Surface de l'élément k
- V : Variance
- S : Écart type
- C : Constante du modèle de Basquin
- α : Exposant du modèle de Basquin
- K : Matrice de rigidité
- \tilde{K} : Matrice de rigidité endommagée
- σ_a : Amplitude de la contrainte de traction
- f_a : Amplitude de la contrainte de flexion
- τ_a : Amplitude de la contrainte de cisaillement
- σ_m : Contrainte moyenne de traction
- f_m : Contrainte moyenne de flexion
- τ_m : Contrainte moyenne de cisaillement
- σ_{-1} : Limite d'endurance en traction alternée symétrique
- f_{-1} : Limite d'endurance en flexion alternée symétrique
- τ_{-1} : Limite d'endurance en torsion alternée symétrique
- R_m : Résistance maximale à la traction
- σ_u : Résistance maximale au cisaillement.
- τ_y : Limite d'élasticité (Morel)

Introduction

Revisiter un vieux sujet plein d'énigmes, "la fatigue des matériaux sous des chargements multiaxiaux", après divers travaux prestigieux effectués, peut paraître prétentieux, mais une modélisation pertinente peut être valeureuse si on :

- Maitrise les paramètres (à travers un critère, un concept, un modèle, . . .) résumant l'effet de fatigue d'un chargement multiaxial,
- Prédit l'initiation et la propagation de l'endommagement,
- explique les énigmes relatives à cette thématique,
- évite l'utilisation abusive de la notion de "modèle" et trouver plutôt une explication physique à ce phénomène,
- généralise l'explication du phénomène à des situations plus complexes.

Ce travail vise à proposer un modèle, une approche, pragmatique qui tente d'expliquer le phénomène physique, de généraliser la problématique à un chargement multi-axial variable dans sa direction et dans sa répartition, de bien maîtriser le phénomène d'initiation et de propagation des fissures, et de bien déterminer la durée de vie du matériau.

Rappelons que l'endommagement des matériaux sollicités en fatigue est un phénomène très complexe et fondamentalement non linéaire. Pour en rendre compte, il existe aujourd'hui des modèles, certes très sophistiqués mais, sommes toutes assez peu utilisés.

Une méthode simple et utile à l'ingénieur est ici proposée pour prédire le nombre de cycles d'amorçage d'endommagement, définir sa propagation et approximer la durée de vie d'une pièce à moindre coût.

Cette approche numérique s'appuie, d'une part, sur les méthodes de calcul de structures et d'autre part, sur les données expérimentales du matériau (à titre d'exemple la courbe de Wöhler, le critère de fatigue multiaxial, ...)

Pour bien situer le cadre de notre modélisation, commençons par rappeler que la fatigue¹ exhibe, à travers les courbes de Wöhler par exemple², trois zones de comportements distincts. Traditionnellement, le dimensionnement pour une tenue en fatigue des structures métalliques travaillant à grand nombre de cycles se faisait dans le domaine de l'endurance illimitée où le constructeur se contentait d'assurer la tenue de sa pièce à un "très" grand nombre de cycles fixé. De nos jours, avec le développement des moyens de calculs et l'optimisation croissante par les industriels des structures, cette démarche trouve ses limites. En effet pour optimiser les structures au plus juste, l'ingénieur souhaite avoir une idée plus fine du comportement de la structure au cours du chargement y compris en zone d'endurance limitée. Ce domaine qui intéressait peu de chercheurs, constitue actuellement un axe important de leurs recherches en raison de la forte demande industrielle.

Notre travail va donc s'intéresser exclusivement à cette zone. Le but de cette thèse est d'établir un modèle qui permet de schématiser à la fois l'initiation de l'endommagement,

1. terme générique traduisant l'endommagement des matériaux soumis à des contraintes variables dans le temps mais dont la valeur maximale reste inférieure à celle qui provoquerait leur rupture quasi-statique
2. courbes qui relient le nombre de cycles à rupture à la contrainte appliquée

sa propagation, et la rupture finale de la structure analysée et cela sous un chargement multiaxial. Il s'agit d'un modèle itératif et cumulatif de l'endommagement qui se base sur un critère de fatigue et développe une loi d'évolution d'endommagement discrétisée, basée sur les gradients du critère de fatigue choisi.

Il suppose que l'endommagement de la matière se crée par une dégradation (isotropiques et anisotropiques) des caractéristiques mécaniques des matériaux. La matière a donc une répartition non homogène en fonction de l'évolution du critère. Ici un critère de type approche global (se base sur les invariants du tenseur de contraintes) est adopté.

Ce rapport commence par un premier chapitre qui présente les différentes méthodes de calcul de la durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles de chargements d'amplitude constante et variable.

Sont présentées ensuite les lois d'évolution d'endommagement qui se divisent elles aussi en deux grandes familles : lois d'évolution linéaire et lois d'évolution non linéaire.

Le second chapitre est consacré à la proposition d'un modèle phénoménologique de prévision de l'initiation de la propagation de l'endommagement et de la rupture finale de la structure. Il s'agit d'une approche macroscopique qui se base sur un critère de fatigue d'approche globale. La loi d'évolution d'endommagement est présentée par une loi discrétisée qui se base sur la dégradation isotropique des propriétés mécaniques (matrice de rigidité : module d'Young, coefficient de poisson, module de cisaillement).

Le troisième chapitre présente une amélioration du modèle précédent, présenté au deuxième chapitre, en palliant la lacune de la dégradation isotrope des caractéristiques mécaniques, par la dégradation des propriétés mécaniques du matériau anisotropiquement. Cette version du modèle est validée par des calculs effectués sur une plaque rectangulaire soumise à des forces de flexion et un exemple d'une pièce en traction uniaxiale.

Vu la complexité d'un développement spécifique pour pouvoir implémenter et tester le modèle dans sa version complète (anisotrope), deux formes simplifiées ont été proposées en chapitre 4.

Le modèle simplifié se fonde sur la courbe de Whöler et des calculs élastiques bi-linéaires. La variable indicatrice de dommage choisie est la déformation cumulée de la deuxième phase élastique.

L'implémentation de ce modèle a été effectuée sous Cast3M. Ce modèle est testé sur deux exemples dont l'un est académique, "plaque cruciforme", l'autre est industriel, une "pale de roulement EDF".

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Introduction

Ce chapitre bibliographique a pour objectif de présenter les notions essentielles utilisées et les différents travaux relatifs à l'endommagement par fatigue, notamment ceux développés dans la zone d'endurance limitée, objet de cette thèse.

Comme notions essentielles, on peut citer principalement : la courbe de Wöhler, le diagramme de Haig, les lois d'évolution d'endommagement (linéaire et non linéaire), les différents principes d'équivalence (contrainte, déformation, énergie),...

Ce chapitre sera aussi l'occasion de présenter les différents critères de fatigue et les modèles de prévision de la durée de vie des structures et cela sous des chargements d'amplitude constante ou variable.

1.2 Notions utilisées

Les chargements appliqués sont caractérisés par l'amplitude de contraintes σ_a , donnée par l'équation (1.1) et la contrainte moyenne σ_m donnée par l'équation (1.2).

La figure 1.1 schématise l'amplitude et la moyenne de contrainte pour un cycle de chargement

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (1.1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (1.2)$$

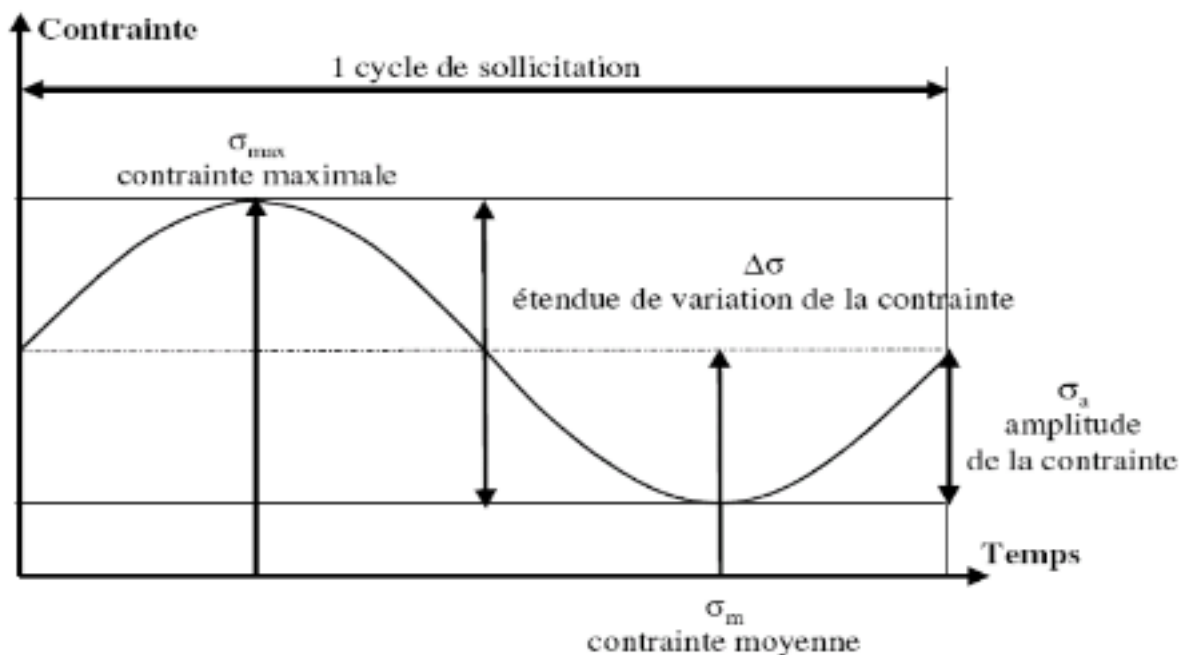


FIGURE 1.1: Paramètres de chargement cyclique

avec :

* σ_{max} : La contrainte maximale du cycle de chargement

* σ_{min} : La contrainte minimale du cycle de chargement

En plus de ces deux caractéristiques du cycle de chargement, on utilise aussi le rapport entre la contrainte maximale et la contrainte minimale du cycle de chargement, noté généralement par R , qui s'écrit sous la forme suivante :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (1.3)$$

On peut classer les chargements, suivant le signe du rapport R

* $R = -1$: Contrainte alternée symétrique

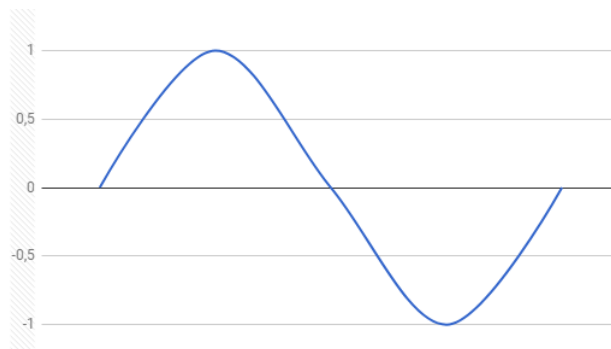


FIGURE 1.2: Contrainte alternée symétrique

* $-1 < R < 0$: Contrainte alternée asymétrique

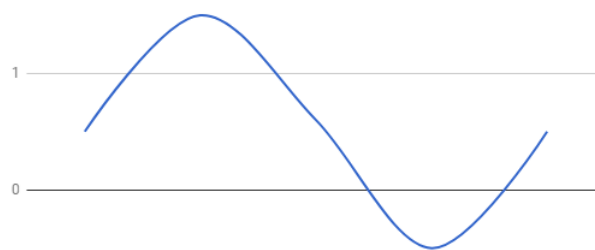


FIGURE 1.3: Contrainte alternée asymétrique

* $R = 0$: Contrainte répétée.

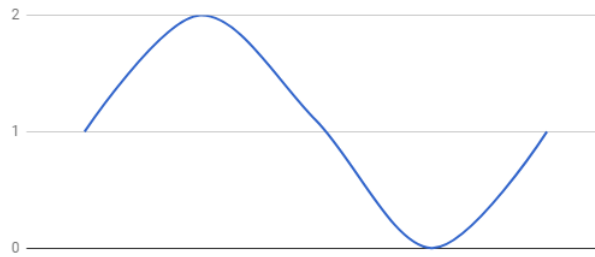


FIGURE 1.4: Contrainte répétée

* $R > 0$: Contrainte ondulée.

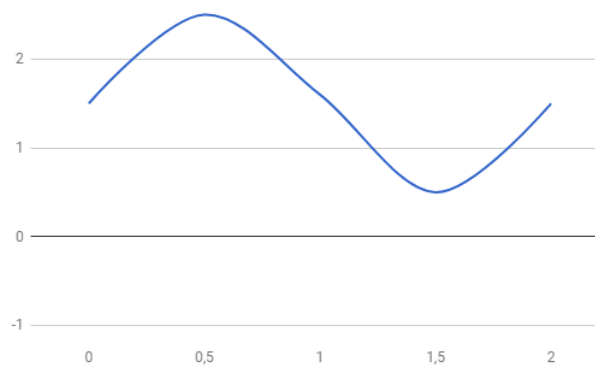


FIGURE 1.5: Contrainte ondulée

1.2.1 Classification des chargements

On peut classer les chargements cycliques, qui sont les chargements les plus utilisés en fatigue, en trois grandes familles :

* **Chargement à amplitude constante** : l'amplitude du cycle du chargement appliqué est constante. C'est avec ce type de chargement qu'on trace la courbe de Wöhler (voir annexe) : première présentation de fatigue. La figure 1.6 présente ce type de chargements.



FIGURE 1.6: Chargement à amplitude constante

* Chargement à amplitude constante par bloc. La figure 1.7 présente ce type de chargements.

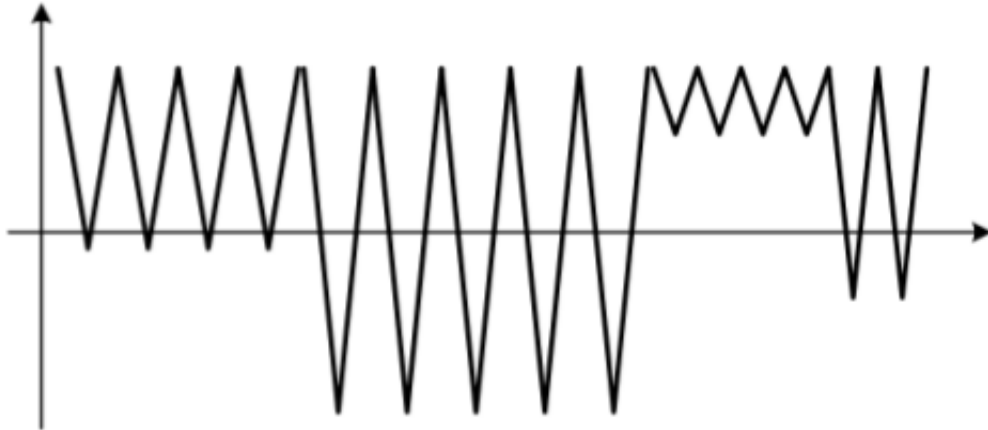


FIGURE 1.7: Chargement à amplitude constante par bloc

* Chargement à amplitude variable.

Ce type de chargements traduit les chargements réels de service. On ne choisit ni l'amplitude ni la fréquence du chargement appliqué. Il s'agit d'une variable aléatoire. La figure 1.8 présente ce type de chargements.



FIGURE 1.8: Chargement à amplitude variable

1.2.2 Courbe de Wöhler

La plus ancienne présentation de la fatigue est définie par la courbe de Wöhler. Cette courbe met en relation la contrainte appliquée σ et le nombre de cycles à la rupture N_f . des essais expérimentaux sont nécessaire pour tracer cette courbe. Ces essais consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement

constant σ_a . Pour chaque essai, on note le nombre de cycles à l'amorçage de fissure N_0 . Ces essais sont effectués pour différentes valeurs d'amplitude de contrainte. La diversité de ces essais fait intervenir le caractère probabiliste.

Le nombre de cycles à la rupture N_f et la contrainte appliquée σ_a correspondent à un pourcentage P% de rupture observée. Généralement la courbe de Wöhler est tracée pour une probabilité de rupture de 50%.

La figure 1.9 présente un exemple de courbe de Wöhler.

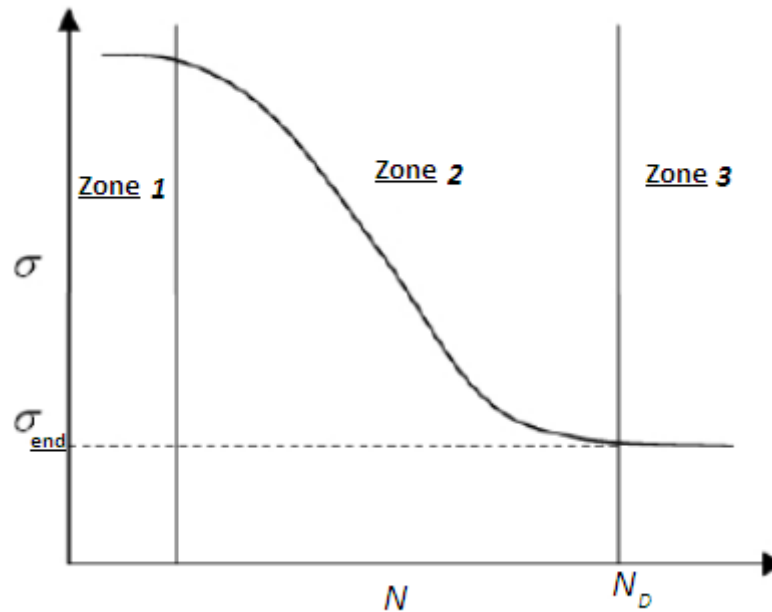


FIGURE 1.9: Courbe de Wöhler

— Zone oligo-cyclique (Zone 1) : $N < 1E4$ cycles

Ce domaine correspond aux contraintes élevées (plus grandes que la limite d'élasticité macroscopique du matériau). Il est limité par :

- Une contrainte minimale qui correspond à la limite d'adaptation macroscopique
- Une contrainte maximale qui correspond aux charges de rupture statiques.

Dans cette zone, la rupture se produit suite à une déformation plastique notable à un faible nombre de cycles. Pour chaque cycle, la déformation plastique élémentaire est liée au nombre des cycles N_f par l'équation (1.4) de Coffin

$$\frac{\Delta \epsilon^p}{2} = A(N_f)^\alpha \tag{1.4}$$

Avec

α et A : deux constantes caractéristiques du matériau.

ϵ^p : déformation plastique élémentaire.

L'éprouvette atteint un état d'accommodation plastique ou un rochet élasto-plastique (phénomènes présentés à la figure 1.10)

- La déformation plastique périodique provoque le phénomène d'accommodation.
- Lorsque la déformation plastique croît sans cesse, le phénomène de rochet se produit.

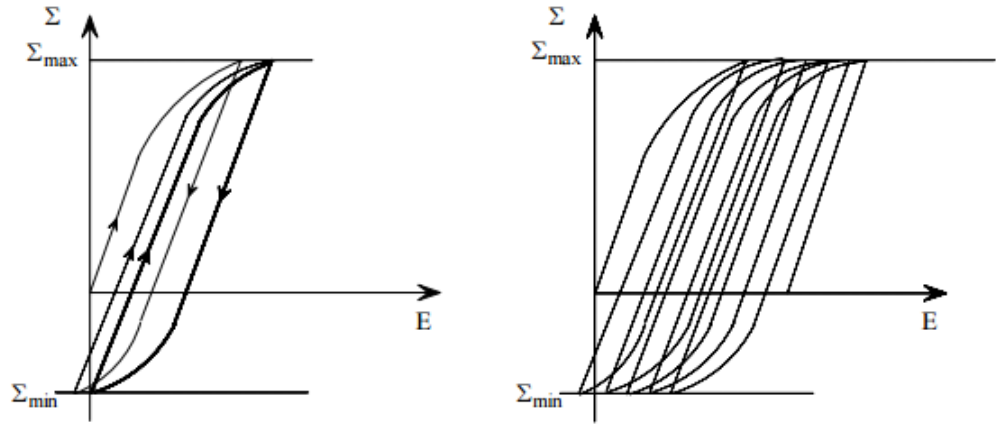


FIGURE 1.10: Accommodation plastique et rochet

- Zone 2 d'endurance limitée (Zone 2) $1E4 \text{ cycles} < N < 1E7 \text{ cycles}$:
La déformation plastique est non mesurable dans cette zone. On a un régime d'adaptation élastique. La relation de Basquin (1.5) relie l'amplitude de cycle de chargement σ_a au nombre de cycles à la rupture N_f

$$N_f \sigma_a^\beta = C \tag{1.5}$$

avec

β et C : deux constantes caractéristiques du matériau.

La déformation plastique se produit durant les premiers cycles. Elle reste constante à partir d'un nombre de cycles appelé nombre de cycles de stabilisation. La figure 1.11 présente l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation durant ce phénomène.

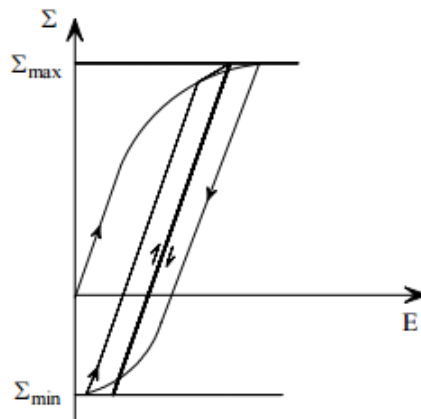


FIGURE 1.11: Adaptation élastique

— Zone d'endurance illimitée (Zone 3) $N > 1E7$ cycles :

Cette zone correspond à des niveaux de contraintes les plus faibles. Ces contraintes sont majorées par la limite d'endurance de fatigue notée σ_D . La rupture dans ce cas est impossible quelque soit le nombre des cycles appliqués sur l'éprouvette. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux).

1.2.3 Contrainte effective

L'endommagement est lié à la création et à la propagation des microdécohésions (micro-fissures, microvides) qui engendrent une diminution de la résistance du matériau donnant l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Kachanov [22] et Rabotnov [43] ont introduit une approche qui permet de mesurer indirectement l'endommagement et son influence sur la résistance à la déformation. Cela se fait à travers la définition d'une contrainte effective : c'est la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge pour obtenir la même déformation que celle provoquée par la contrainte appliquée à l'élément de volume endommagé. La figure 1.12 montre une comparaison entre un matériau endommagé et un matériau vierge.

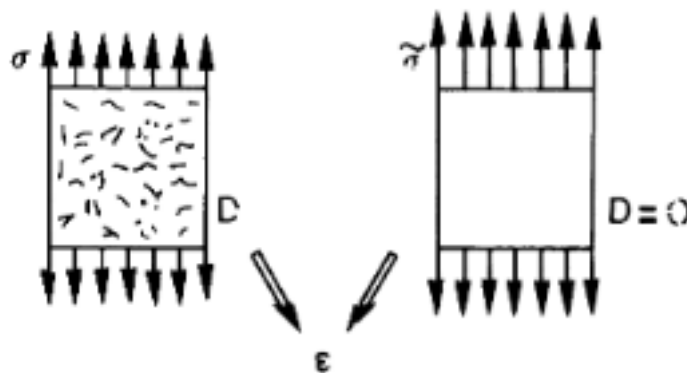


FIGURE 1.12: Concept de la contrainte effective [22]

L'endommagement est relié à la contrainte effective par l'équation suivante

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \tag{1.6}$$

Dans le cas de comportement élastique linéaire, la relation (1.6) conduit à la relation (1.7), entre le module d'Young du matériau endommagé et le module d'Young du matériau vierge. :

$$\tilde{E} = E(1 - D) \tag{1.7}$$

1.2.4 Effet de la contrainte moyenne

La courbe de Wöhler est généralement tracée pour une contrainte moyenne nulle, alors qu'en réalité les chargements appliqués ont des contraintes moyennes non nulles. Plusieurs travaux ont été développés (référence à ajouter) pour mettre en œuvre l'effet de ce facteur dans la prédiction de la tenue en fatigue. Dans la figure 1.13, qui présente le diagramme d'Haig, on montre les différents travaux qui donnent l'effet de la contrainte moyenne en fonction de l'amplitude de contrainte.

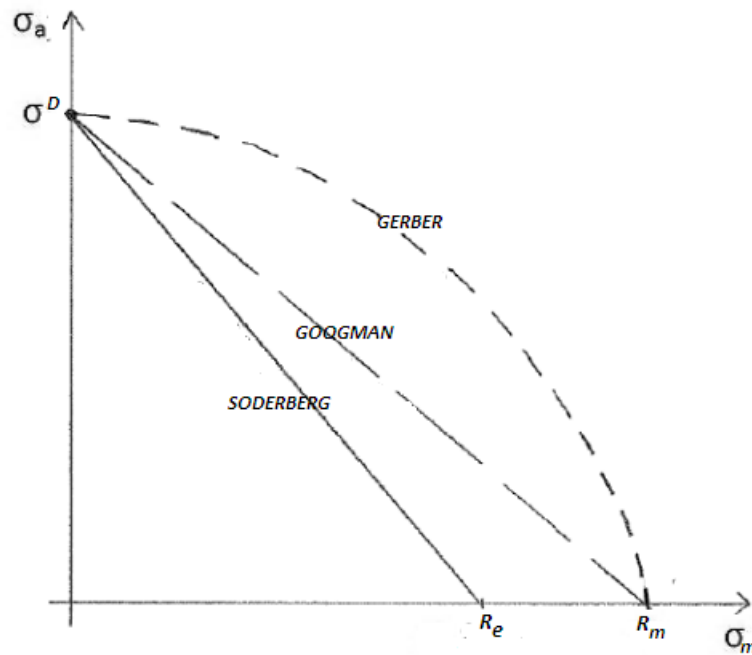


FIGURE 1.13: Diagramme d'Haig : Geber, Goodman et Soderberg

Deux points importants se présentent dans le diagramme :

1. Le point d'abscisse zéro et d'ordonnée σ^D (la limite d'endurance en sollicitation purement alternée)
2. Le point d'ordonnée zéro et d'abscisse R_m (la contrainte de rupture du matériau pour un essai statique).

— La droite de Goodman dont l'équation est donnée par

$$\sigma_a = \sigma^D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) \tag{1.8}$$

— La droite de Soderberg dont l'équation est donnée par

$$\sigma_a = \sigma^D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_e}\right) \tag{1.9}$$

— Le parabole de Gerber d'équation dont l'équation est donnée par

$$\sigma_a = \sigma^D \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right) \quad (1.10)$$

avec

σ^D : l'amplitude de contrainte moyenne nulle (S-N) correspondent à une durée de vie de N cycles.

R_e : La limite d'élasticité de matériau

R_m : La résistance à la traction

1.3 Durée de vie en fatigue

1.3.1 Durée de vie en fatigue sous un chargement à amplitude constante

1.3.1.1 Méthode de Papadopoulos

Une partie des travaux de Papadopoulos a été consacrée à l'étude de la fatigue dans la zone d'endurance illimitée ([27], [28], [29]). Après il a étudié la durée de vie en fatigue dans la zone d'endurance limitée [30]. Il a étendu ces travaux pour proposer un modèle qui prédit la durée de vie en fatigue sous chargement multiaxial d'amplitude constante dans la zone d'endurance limitée en se limitant par une certaine hypothèse. L'idée de son modèle est de définir une courbe de Wöhler multiaxial en exprimant la durée de vie en fonction d'une contrainte équivalente définie par l'auteur qui relie l'amplitude de la scission généralisée T_a , la valeur moyenne $\sigma_{H,m}$ et l'amplitude $\sigma_{H,a}$ de la pression hydrostatique.

L'auteur se base dans son modèle sur une définition du plan critique qui présente la limite entre le domaine endommagé et celui non endommagé. Cette définition de plan se traduit par l'équation suivante :

$$\max T_a + \alpha_\infty \sigma_{H,max} \leq \beta_\infty \quad (1.11)$$

Avec

- α_∞ et β_∞ : deux paramètres liés au matériau
- $\sigma_{H,max}$: La pression hydrostatique maximale associée à un plan physique (noté Δ)
- T_a : l'amplitude de la scission généralisée à ce même plan physique Δ
- ∞ : indique que le critère délimite le domaine de fatigue de durée de vie illimitée

Maintenant, il reste à définir le plan et l'expression de l'amplitude de la scission généralisée T_a .

Ce plan est défini dans le trièdre (Oxyz) par les coordonnées sphériques θ et ϕ de son vecteur normal où la scission généralisée $T_a(\theta, \phi)$ est maximale $\max T_a = \max_{\theta, \phi} T_a(\theta, \phi)$, ce qui a permis à l'auteur de donner la condition d'endurance par l'équation (1.11).

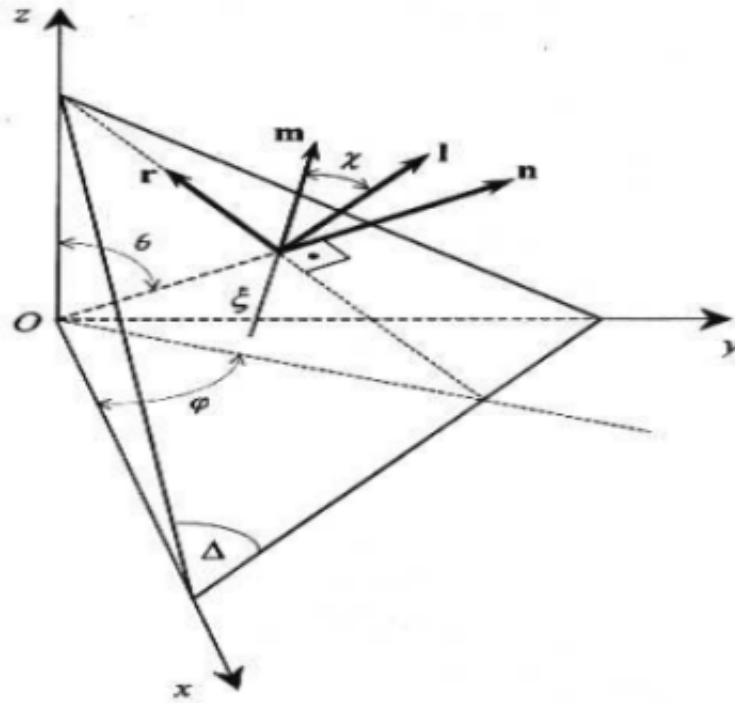


FIGURE 1.14: Plan Δ et les repères associés [30]

Pour calculer T_a , l'auteur a défini un trièdre orthonormé, comme le montre la figure 1.14, (l, n, m) . En connaissant l'amplitude de la scission résolue agissant sur toutes les directions d'un plan Δ (θ, ϕ fixés : bien définis), on peut définir l'évolution de T_a . La scission obtenue présente la composante tangentielle du vecteur contrainte ($\underline{\sigma}_n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$) sur une direction d de vecteur unitaire m . Alors, une déduction de τ est explicitée par l'expression $\tau = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{m}$. Notant α l'angle qui fait la direction du plan d avec le vecteur unitaire l . Alors, on peut projeter τ sur la base de trièdre (l, n, m) et l'exprimer en fonction θ et ϕ α

On peut expliciter la scission agissant sur un plan Δ suivant l'angle d définissant la normale pour une période de chargement d'amplitude variable par l'équation suivante :

$$\tau_a(\theta, \phi, d) = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in P} \tau(\theta, \phi, d, t) - \min_{t \in P} \tau(\theta, \phi, d, t) \right] \quad (1.12)$$

Où P est un la période du chargement à amplitude variable.

A partir de cette expression de scission, on peut déterminer l'expression de T_a correspondant au plan donné Δ par l'équation (1.13)

$$T_a(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{d=0}^{2\pi} \tau_a^2(\theta, \phi, d) dd} \quad (1.13)$$

Pour l'identification des calages α_∞ et β_∞ de ce modèle, l'auteur a utilisé les limites de fatigue en torsion et en flexion alternées (τ_{-1} , f_{-1}) aboutissant les expressions suivantes :

$$\alpha_\infty = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.14)$$

$$\beta_\infty = \tau_{-1} \quad (1.15)$$

Papadopoulos prédit avec l'équation du critère (1.11) sur une surface de durée de vie infinie séparant le domaine celui sûr de celui n'est pas sûr. Pour la définition de la durée de vie finie, l'auteur suppose que tous les lieux géométriques de toutes les durées de vie finie peuvent être représentés par une surface similaire à celle pour ($N=\infty$) en se limitant à certaines hypothèses.

En se basant sur l'équation

$$\sigma_{H,max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a}$$

alors le critère de fatigue qui est explicité dans l'équation (1.11) s'écrit

$$maxT_a + \alpha_\infty \sigma_{H,m} + \alpha_\infty \sigma_{H,a} \leq \beta_\infty$$

.

Le critère représente une surface dite iso-vie correspondant à ($N=\infty$). L'équation de cette surface est :

$$maxT_a + \alpha_\infty \sigma_{H,m} + \alpha_\infty \sigma_{H,a} = \beta_\infty \quad (1.16)$$

En se fondant sur le même concept, l'auteur considère que le lieu géométrique de l'ensemble des points représentatifs de l'état de contrainte ayant une même durée de vie finie, comme étant la surface satisfaisant les propriétés suivantes :

- La surface du trièdre ($\sigma_{H,m}$, $\sigma_{H,a}$, $maxT_a$) représente le lieu géométrique des points représentatifs de l'état de contrainte ayant la même durée de vie (figure 1.15)

- Le point $\sigma_{H,m} = \frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}$ représente le point d'intersection de toutes les surfaces de même durée de vie avec l'axe $\sigma_{H,m}$ (figure 1.15)
- L'intersection de la surface ($N=\infty$) avec le plan ($\sigma_{H,a}, \max T_a$) est parallèle à l'intersection de toute surface de durée de vie finie avec le même plan (figure 1.15).

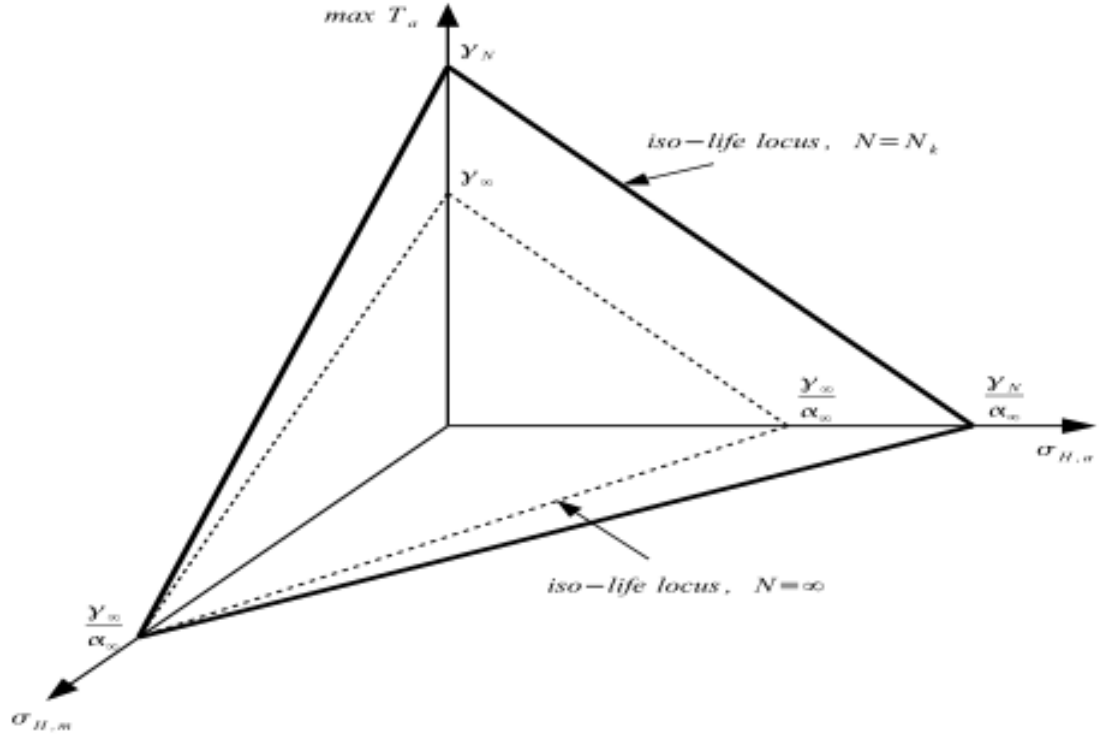


FIGURE 1.15: Surface Iso-vie dans l'espace ($\sigma_{H,a}, \sigma_{H,m}, \max T_a$)

L'équation de toute surface de durée de vie finie s'écrit dans l'équation suivante en satisfaisant les propriétés citées auparavant :

$$\max T_a = \beta_N - \alpha_\infty \frac{\beta_N}{\beta_\infty} \sigma_{H,m} - \alpha_\infty \sigma_{H,a} \quad (1.17)$$

Avec

β_N représente le point d'intersection de cette surface avec l'axe $\max T_a$.

En remplaçant l'équation (1.14) et (1.15) dans l'expression (1.17) on trouve l'expression de β_N sous la forme suivante.

$$\beta_N = \frac{\max T_a + 3 \left(\frac{\tau-1}{f-1} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,a}}{1 - \frac{3}{\tau-1} \left(\frac{\tau-1}{f-1} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,m}} \quad (1.18)$$

En appliquant l'équation (1.18) à un essai de torsion purement alternée, l'expression de l'équation $maxT_a$ est obtenue dans l'équation (1.19)

$$maxT_a = \beta_N = \sigma_{yz} \quad (1.19)$$

Alors, on peut déduire que β_N représente l'amplitude de la scission dans un essai de torsion alternée, et qu'il est lié au nombre de cycles à l'amorçage N par la courbe de Wöhler.

En adoptant une loi de puissance en fonction de nombre de cycles pour la courbe de Wöhler de torsion purement alternée, l'auteur établit la courbe de Wöhler multiaxial. Aucune forme de courbe de Wöhler n'est imposée par ce modèle. c'est au chercheur de désigner la forme qui décrit les données expérimentales uni-axiales. L'équation de la courbe de Wöhler multiaxiales est donnée par :

$$\frac{maxT_a + 3\left(\frac{\tau-1}{f-1} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{H,a}}{1 - \frac{3}{\tau-1}\left(\frac{\tau-1}{f-1} - \frac{1}{2}\right)\sigma_{H,m}} = \beta_N = \sigma_{yz} = \frac{\tau-1}{1 - kN^{-m}} \quad (1.20)$$

Avec k, m deux constantes identifiées par la courbe de Wöhler en torsion alternée.

1.3.1.2 Méthode de Susmel et Petrone [35]

Il s'agit d'un modèle microscopique de l'endommagement par fatigue multiaxiale à amplitude constante valable pour les matériaux homogènes isotropes.

C'est un modèle de prévision de la durée de vie en fatigue dans la zone d'endurance limitée en se basant sur une courbe de Wöhler modifiée et sur la notion du plan critique. Les auteurs se basent sur la valeur maximale de l'amplitude de scission et la contrainte normale maximale qui agissent sur le plan de cisaillement maximal.

L'essai de base pour définir ce modèle est effectué sur une éprouvette cylindrique soumise à un chargement multiaxial d'amplitude constante.

On définit le plan de cisaillement maximal par leur position (ϕ^*, θ^*) . Les auteurs définissent un rapport des contraintes dans le plan critique noté ρ et explicité comme suit :

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}(\phi^*, \theta^*)}{\tau_a} \quad (1.21)$$

Une fois qu'on a déterminé le plan critique et sa position (ϕ^*, θ^*) , il y a recours à la courbe de Wöhler modifiée où on trace dans un repère logarithmes le nombre de cycles à la rupture en fonction de l'amplitude de la contrainte de scission calculée sur le plan critique.

L'expression de ρ prend en compte l'effet de la contrainte moyenne par l'intermédiaire

de la contrainte normale maximal $\sigma_{n,max}$. La courbe de Wöhler modifiée pour différentes valeurs de ρ est tracée par la figure 1.16.

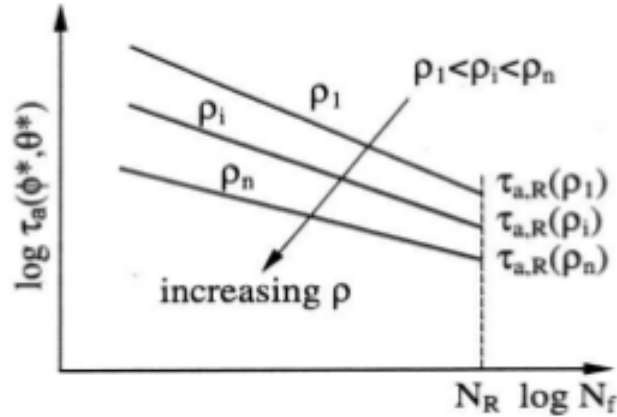


FIGURE 1.16: Courbe de Wöhler modifiée [35]

La détermination de chaque courbe est effectuée par la valeur inverse de la pente, $K_\tau(\rho)$ et la référence de l'amplitude de scission $\tau_{a,R}(\rho)$ correspond à N_f (2E6 cycles).

Pour la prévision de la durée de vie en fatigue sous un chargement multiaxial d'amplitude constante les auteurs proposent l'équation suivante :

$$N_f = \left[\frac{\tau_{a,R}(\rho)}{\tau_a(\phi^*, \theta^*)} \right]^{k_\tau(\rho)} N_f \quad (1.22)$$

avec

- $k_\tau(\rho)$: L'inverse de la pente de la courbe de Wöhler
- $\tau_{a,R}(\rho)$: La valeur référence de l'amplitude de scission
- N_f : Le nombre de cycles qui est habituellement de 2E6 cycles

Les auteurs mettent en relation linéaire $k_\tau(\rho)$ et $\tau_{a,R}(\rho)$ à partir de la courbe de Wöhler modifiée en flexion ($\rho = 1$) et torsion ($\rho = 0$). Cette relation est montrée dans les équations (1.23) et (1.24).

$$\tau_{a,R}(\rho) = \tau_{a,R}(\rho = 0) + \left[\tau_{a,R}(\rho = 1) - \tau_{a,R}(\rho = 0) \right] \rho \quad (1.23)$$

$$k_\tau(\rho) = k_\tau(\rho = 0) + \left[k_\tau(\rho = 1) - k_\tau(\rho = 0) \right] \rho \quad (1.24)$$

1.3.2 Durée de vie de fatigue sous chargement à amplitude variable : technique basée sur le comptage de cycles

1.3.2.1 Méthode de Wang et Brown

Le modèle de Brown ([5], [37] [40], [39]) a pour but la prédiction de la durée de vie en fatigue multiaxiale. L'auteur propose l'équation (1.25) pour prédire la durée de vie.

$$\frac{\gamma_a + S\Delta\epsilon_n}{1 + \nu' + S(1 - \nu')} = \frac{\sigma'_f - 2\bar{\sigma}_n}{E}(2N_f)^b + \epsilon'_f(2N_f)^c \quad (1.25)$$

avec

- $\Delta\epsilon_n$: L'étendue de la déformation normale sur le plan de cisaillement maximum
- γ_a : L'amplitude de la déformation de cisaillement
- S : Constante de matériau
- ν' : Coefficient de poisson effectif
- $\bar{\sigma}_n$: Contrainte moyenne normale au plan de cisaillement maximum
- E : Module d'Young
- σ'_f , b : sont la résistance à la fatigue et son exposant
- ϵ'_f , c : Coefficient de ductilité et son exposant

Il s'agit d'un critère en contrainte et en déformation basé sur les travaux de Brown et Miller ([39], [38]) et en utilisant la courbe de Manson-coffin-basquin en traction ($R_\sigma = -1$)[5]. Il s'agit d'un modèle type plan critique : il est défini comme le plan supportant la distorsion maximale.

1.3.2.2 Méthode de Robert et ses dérivées

La première version de la méthode de Robert [16] pour la prévision de durée de vie a connu plusieurs évolutions. La dernière formulation se base sur le concept de dommage plan qui était réalisée par Weber ([41], [42], [14], [10]). Cette méthode a pour objectif d'écrire le dommage à l'échelle de plan où il devient directionnel, c'est-à-dire dépendant de l'orientation du plan considéré passant par point de la structure où est réalisé le calcul de fatigue.

Dans leur estimation de la durée de vie à la fatigue sous chargement multiaxial d'amplitude variable, les auteurs se basent sur une méthode classique de comptage de cycles et la loi de miner.

La détermination de cycle de chargement variable nécessite selon les auteurs une variable de comptage de cycles particuliers : c'est la contrainte normale σ_{h_0, h_0} défini par le plan π_0 ($\phi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$); figure 1.17.

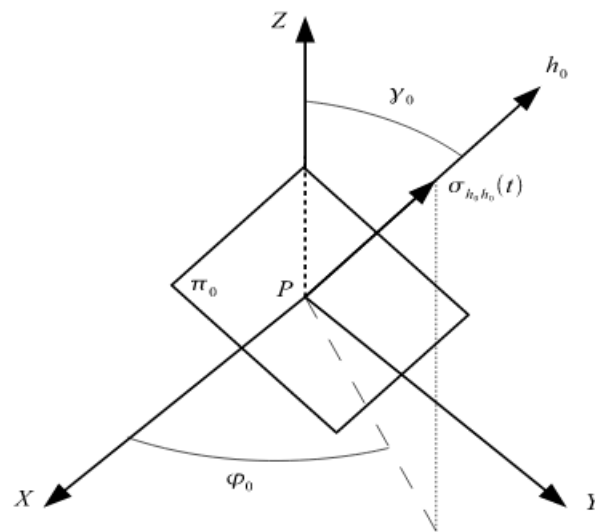


FIGURE 1.17: Variable de comptage de cycles : contrainte normale

Robert a défini l'indicateur d'endommagement E_h pour l'estimation de la durée de vie par facette dans l'équation (1.26).

$$E_h = \max_t \left(\frac{\tau_{ha}(t) + \alpha(N_f) \cdot \sigma_{hha}(t) + \beta(N_f) \cdot \sigma_{hhm}}{\gamma(N_f)} \right) \quad (1.26)$$

La figure suivante présente les termes qui interviennent dans la formulation de l'indicateur de l'endommagement E_h .

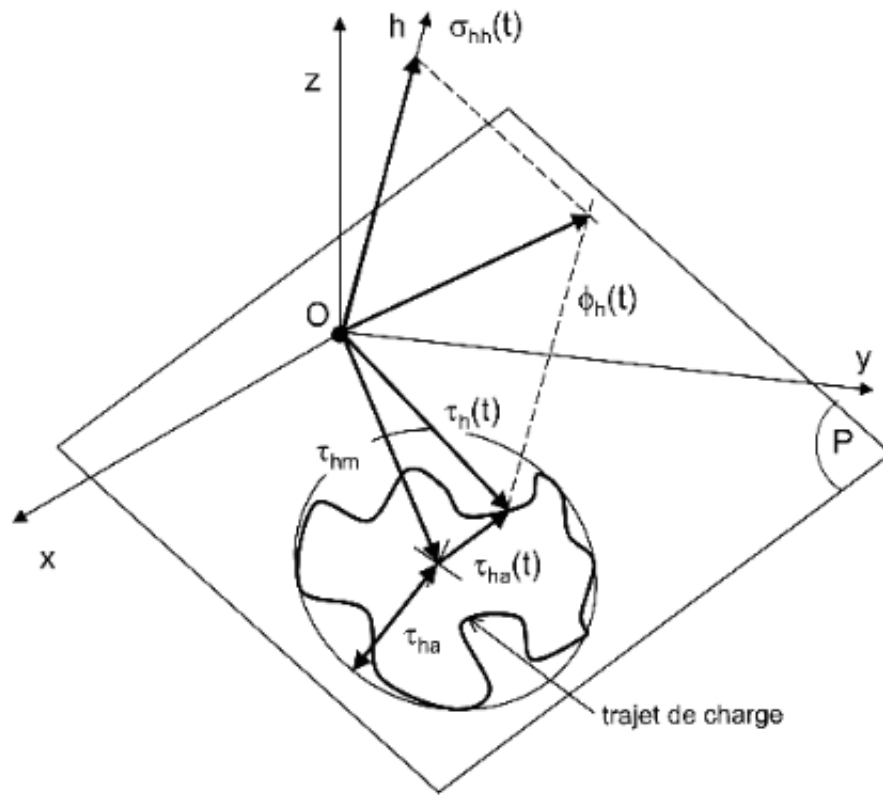


FIGURE 1.18: les termes qui interviennent dans E_h [10]

avec

$$\gamma(N_f) = \tau_{-1}(N_f) \sqrt{\alpha^2(N_f) + 1} \quad (1.27)$$

$$\alpha(N_f) = \frac{\frac{\tau_{-1}(N_f)}{\sigma_{-1}(N_f)} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\tau_{-1}(N_f)}{\sigma_{-1}(N_f)} \left(1 - \frac{\tau_{-1}(N_f)}{\sigma_{-1}(N_f)}\right)}} \quad (1.28)$$

$$\beta(N_f) = 2 \frac{\gamma(N_f)}{\sigma_0(N_f)} - \frac{\sigma_0(N_f)}{8\gamma(N_f)} - \alpha(N_f) \quad (1.29)$$

Les conditions de validité de ce modèle sont :

- $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}(N_f)}{\sigma_{-1}(N_f)} < 1$
- $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_0(N_f)}{\sigma_{-1}(N_f)} < 1$

1.3.3 Durée de vie de fatigue sous chargement à amplitude variable : technique sans comptage de cycles

1.3.3.1 Papadopoulos

Papadopoulos [28] a développé une loi d'endommagement qui permet de déterminer le nombre de cycles à l'amorçage de microfissure par fatigue sous chargement d'amplitude variable. L'auteur se base sur l'approche mésoscopique de Dang-Van([1], [2]) pour déterminer la déformation plastique mésoscopique cumulée qui présente l'indicateur de l'endommagement dans son modèle. L'auteur a pris les hypothèses suivantes pour définir son modèle :

- **H1** : Le comportement de cristal a trois phases : durcissement, saturation et adoucissement.
- **H2** : On adopte le critère de von Mises comme critère de plasticité
- **H3** : Valable que pour des chargements proportionnels
- **H4** : A l'échelle macroscopique l'éprouvette est globalement homogène, isotrope et reste élastique dans son ensemble au cours d'un essai de fatigue à grand nombre de cycles.
- **H5** : L'amorçage de fissure se traduit par une contrainte équivalente qui s'exprime en fonction du second invariant de tenseur de contrainte J_2 et de la pression hydrostatique macroscopique P_H

Le critère de non-nucléation de fissure est présenté par l'inéquation (1.30)

$$J_2 < \frac{J_2 - \alpha \bar{P} + \beta}{P_a \alpha + \frac{J_2}{P_a}} = k_{lim} \quad (1.30)$$

où

- α, β : Deux paramètres du matériau
- \bar{P} : La valeur moyenne de la pression hydrostatique
- P_a : l'amplitude de la pression hydrostatique
- k_{lim} : Contrainte de la limite d'endurance généralisée

En se basant sur l'hypothèse **H1**, l'écroissage d'un cristal est modélisé par 3 phases : durcissement, saturation et adoucissement. Alors la limite d'élasticité du matériau évolue de sa valeur initiale k_0 lorsque $D=0$ à $k_s = k_{lim}$ lorsque $D=1$ dans la phase de saturation. La fonction de charge est définie selon l'hypothèse **H2** (par le critère de plasticité de von Mises) par l'équation (1.31)

$$f(\sigma) = \frac{1}{2}(s - \mathbf{a}) : (s - \mathbf{a}) - k^2 \leq 0 \quad (1.31)$$

avec $\mathbf{a} = c e^P$

L'évolution de la limite d'élasticité k pendant les trois phases de cristal en fonction de la déformation plastique mésoscopique ϵ^p est présentée à la figure 1.19.

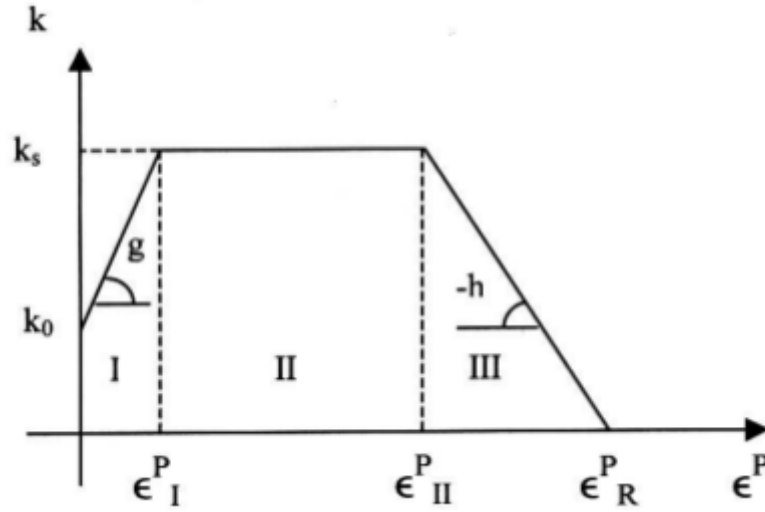


FIGURE 1.19: Évolution du limite d'élasticité en fonction du cumul de la déformation plastique pour un cristal [28]

Phase I durcissement

$$\dot{k} = g\sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{s}}{A} \quad (1.32)$$

Avec $g > 0$

$$A = c + 2\mu + g\sqrt{2}$$

Phase II saturation

$$\dot{k} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{s}}{C} \quad (1.33)$$

avec $C = c + 2\mu$

Phase III Adoucissement

$$\dot{k} = -h\sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{s}}{B} \quad (1.34)$$

Avec $B = c + 2\mu - h\sqrt{2}$

Où

c : le module d'écrouissage cinématique

μ : le module de cisaillement macroscopique

g : le module de durcissement

h : le module d'adoucissement

D'après Papadopoulos, la loi d'évolution d'endommagement est définie en fonction de la déformation plastique cumulée par l'équation (1.35).

$$\dot{D} = \sqrt{\dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} \quad (1.35)$$

La déformation plastique mésoscopique cumulée est obtenue analytiquement pour une structure soumise à un chargement cyclique proportionnel inférieur à la limite d'endurance, en fonction des paramètres du chargement macroscopique et des nombres de cycle appliqués.

Le nombre de cycles à la nucléation s'exprime, selon l'auteur, par l'équation (1.36).

$$N_f = p \ln \left[\frac{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right] + q \frac{k_{lim}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - \frac{r}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}} \quad (1.36)$$

Avec

$$- p = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right)$$

$$- q = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{1}{l}$$

$$- r = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{k_0}{g}$$

- l : est un coefficient qui relie la déformations plastique cumulée à rupture ϵ_R^p et k_{lim} par l'expression suivante $\epsilon_R^p = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \frac{1}{h} \right) k_{lim} - \frac{k_0}{g}$

Papadopoulos s'intéresse uniquement à la succession de deux chargements multi-axiaux proportionnels pour lesquelles il obtient des solutions analytiques.

Ce modèle nécessite l'identification de six paramètres dont deux sont constant α et β et les autres sont identifiables à partir de la courbe de Wöhler et d'un essai de cumul particulier.

L'auteur s'intéresse uniquement aux chargements proportionnels dont l'amplitude est égal ou inférieure à la limite d'endurance du matériau, où il dispose de solution analytique (**H3**, **H5**)

1.3.3.2 Modèle de Morel

Morel ([24], [25]) a proposé une approche qui utilise les travaux de Papadopoulos. Il s'agit d'une approche mésoscopique du type plan critique qui étudie la durée de vie dans la zone d'endurance limitée. L'auteur étudie l'évolution de l'endommagement dans les 3 phases

de matériau : durcissement, saturation et adoucissement. L'indicateur d'endommagement adopté par l'auteur est la déformation plastique mésoscopique. C'est le cumul de la déformation plastique qui juge l'endommagement. Tant que la déformation plastique cumulée est inférieure à une déformation plastique seuil alors on n'a pas d'amorçage de fissures. Le critère de plasticité utilisé par l'auteur est du type Schmid avec un écrouissage isotrope et cinématique ([25], [26]). La figure 1.20 montre l'évolution de l'endommagement pendant les 3 phases du comportement du cristal.

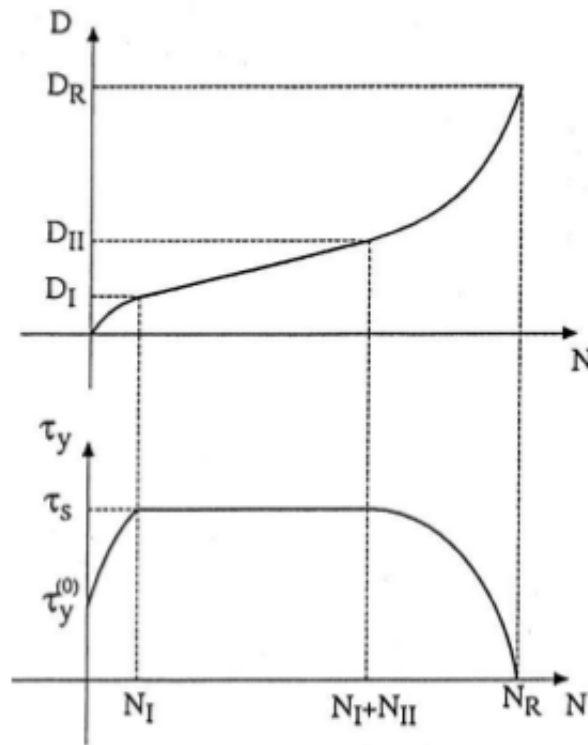


FIGURE 1.20: Evolution de l'endommagement et de la limite d'élasticité pour les 3 phases de comportement du cristal [26]

L'auteur propose l'équation (1.37) pour déterminer le nombre de cycles à l'amorçage de fissure tout en suivant la description du dommage selon les trois phases du comportement du cristal.

$$N_a = p \ln\left(\frac{C_A}{C_A - \tau_s}\right) + q\left(\frac{\tau_s}{C_A - \tau_s}\right) - \frac{r}{C_A} \quad (1.37)$$

avec

- C_A : l'amplitude maximale de la scission résolue macroscopique dans une direction fixe dans un plan critique (P_c) de mesure T_σ maximale.

— τ_s : La limite d'élasticité du cristal dans la phase de saturation

$$\tau_s = \frac{-\alpha P_m + \beta}{\alpha \frac{P_a}{C_A} + H}$$

Avec

P_a, P_m : l'amplitude et la valeur moyenne de la pression hydrostatique.

H : Le coefficient de déphasage

α et β : Les paramètres du matériau.

$$\alpha = \sqrt{\pi} \left(3 \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{-1}^D} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\beta = \tau_{-1}^D \sqrt{\pi}$$

— p, q et r : sont des paramètres identifiables à l'aide de la courbe de Wöhler.

La détermination du nombre de cycles à l'amorçage de fissures pour un chargement multi-axial d'amplitude variable selon l'auteur est décrite en 4 étapes :

1. Détermination et repérage du plan critique P_c à l'aide de $T_{\Sigma_{RMS}}$
2. Détermination du déphasage H

$$H = \frac{T_{\Sigma_{RMS}}}{C_{RMS}} \quad (1.38)$$

avec

$$\tau_{RMS}(\theta, \phi, \psi) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2} \quad (1.39)$$

$$T_{\sigma_{RMS}}(\theta, \phi) = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tau_{RMS}^2(\theta, \phi, \psi) d\psi} \quad (1.40)$$

où le plan critique P_c sur le quel $T_{\sigma_{RMS}}$ est défini par θ_0 et ϕ_0 . Les τ_i sont les extrema du signal de scission résolue macroscopique $\tau(t)$, N est leur nombre et $\bar{\tau}$ est leur moyenne arithmétique.

On utilise ses deux dernières équations pour trouver les termes de l'équation du déphasage

$$T_{\Sigma_{RMS}} = T_{\sigma_{RMS}}(\theta_0, \phi_0)$$

et

$$C_{RMS} = \max_{\psi} [\tau_{RMS}(\theta_0, \phi_0, \psi)]$$

où

3. Sur chaque direction (m) du plan critique P_c
 - Détermination de l'évolution de la pression hydrostatique macroscopique $P(t)$ et de la scission résolue macroscopique $\tau(t)$

- Détermination de l'évolution de seuil de saturation τ_s
 - Calcul de la déformation plastique mésoscopique cumulée en suivant l'évolution de la limite d'élasticité mésoscopique τ_y pour les trois phases : durcissement, saturation et adoucissement.
 - Calcul du nombre de séquences qui permet d'atteindre la déformation plastique cumulée seuil qui engendre l'amorçage de fissure.
4. Estimation du nombre de séquences à l'amorçage sur la direction de dommage maximal (m^*)

La méthode de Morel décrit le phénomène de fatigue dans la zone d'endurance limitée en choisissant la déformation plastique mésoscopique cumulée comme indicateur d'endommagement. Dans sa formulation pour la détermination de la durée de vie, il prend en compte les principaux facteurs influant : pression hydrostatique et le déphasage. Cette méthode relativement compliquée : recherche de plan critique P_c et de cumul de dommage sur chaque direction dans ce plan. L'application de ce cette méthode pour des chargements d'amplitude variable nécessite la détermination de plusieurs paramètres.

1.3.3.3 Méthode de Zarka-Karaoui

L'approche développée par ZARKA et KARAOUNI ([44], [15]) est une approche mésoscopique à l'échelle du volume élémentaire (VER). Cette approche est valable pour des chargements d'amplitude variables. L'idée de base de la détermination de l'endommagement est fondée sur une mesure discriminatoire du chargement réel (amplitude variable). Selon les auteurs, on traduit le chargement réel d'amplitude variable en se basant sur une règle d'équivalence entre deux chargements locaux, après on définit un chargement cyclique affine et simple, équivalent en terme de dommage aux chargements réels d'amplitude variable.

L'indicateur des chargements variables est la déformation plastique cumulée local ϵ_{pc} . Les auteurs supposent qu'à l'amorçage de fissure la déformation plastique cumulée atteint une certaine valeur critique caractéristique du matériau.

Suivant les auteurs, deux chargements locaux sont équivalents vis-à-vis du dommage par fatigue si

- Ils donnent la même déformation plastique cumulée locale afin de conserver les mêmes mécanismes d'endommagement
- Ils ont le même centre C_f
- Le chargement équivalent a une fluctuation supérieure ou égale à F_σ et inférieur à deux fois la limite d'élasticité macroscopique du matériaux

Pour tout chargement unidimensionnel, on définit à l'échelle locale son centre C_f et sa fluctuation F_σ en fonction Σ_{max} et Σ_{min} qui sont les contraintes maximales et minimales

de ce chargement.

Les deux équations (1.41) et (1.42) présentent leurs expressions.

$$C_f = \frac{1}{2}(\Sigma_{max} + \Sigma_{min}) \tag{1.41}$$

$$F_\sigma = \frac{1}{2}(\Sigma_{max} - \Sigma_{min}) \tag{1.42}$$

L'auteur suppose l'accommodation à l'échelle mésoscopique pour l'évaluation plastique cumulée locale ϵ_{pc} .

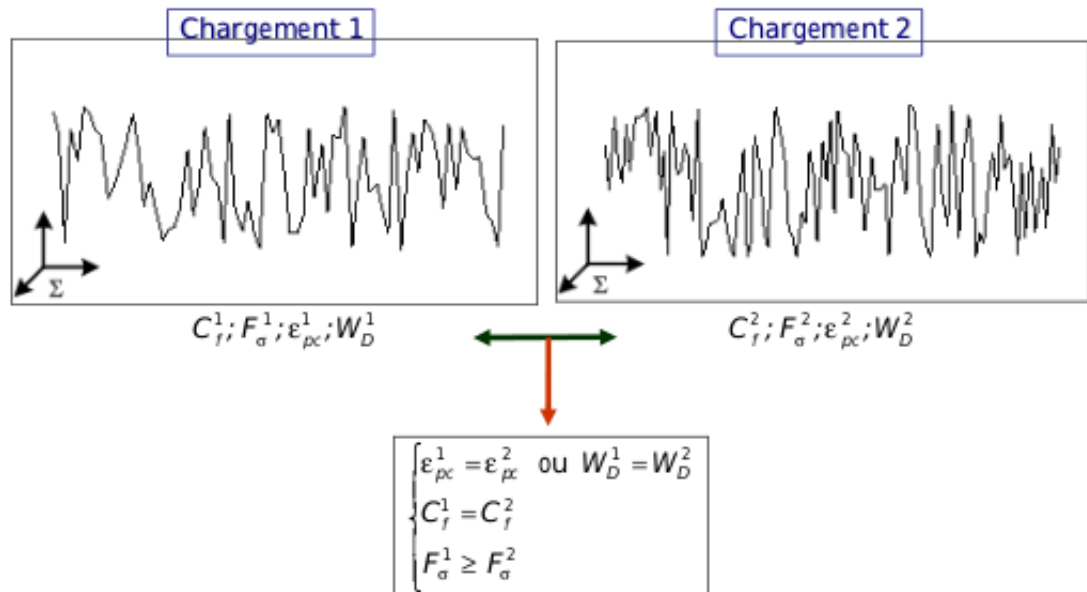


FIGURE 1.21: Règle d'équivalence entre deux chargements locaux [44]

Les auteurs choisissent la mesure de la déformation plastique cumulée à l'échelle locale comme indicatrice d'endommagement.

Une modélisation de volume élémentaire représentatif (VER) par un système d'un seul degré de liberté (représentant le matériau à écrouissage cinématique) est adoptée par les auteurs. Pour bien définir ce modèle, les auteurs définissent les paramètres suivants :

- k_e : module d'élasticité à l'échelle mésoscopique
- h : module d'écrouissage linéaire à l'échelle mésoscopique
- S : limite d'élasticité mésoscopique

et mettent les hypothèses suivantes :

- le module d'élasticité à l'échelle mésoscopique k_e et le module d'Young E sont égaux

- le module d'écroutissage mésoscopique h et macroscopique H sont égales
- La limite d'élasticité mésoscopique et macroscopique sont égales

Pour un chargement uni-axial d'amplitude variable, on suppose qu'on a bien défini son centre C_f et sa fluctuation F_σ . On l'injecte après à un volume élémentaire représentatif qui présente pour les auteurs un système à un degré de liberté :

- Détermination de la déformation plastique cumulée, du centre et de la fluctuation d'un bloc de chargement à amplitude variable (réelle)
- Évaluation de la famille des chargements cycliques équivalents associés $(\Delta\Sigma^{eq}, N^{eq})$
- Choix d'un chargement équivalent $(C_f^{eq}, \Delta\Sigma^{eq}, N^{eq})$
- Détermination de nombre de cycles à amplitude constante N_f en s'appuyant sur l'expression analytique de la courbe de Wöhler
- Détermination de nombre de blocs à l'initiation du dommage $N = \frac{N_f}{N^{eq}}$

Cette méthode est une nouvelle approche dans sa manière d'aborder le problème de fatigue en endurance limitée. Elle s'affranchit d'une technique fine de comptage de cycles. A son stade actuel, elle ne prend pas en compte l'effet des cycles d'amplitude inférieur à la limite d'endurance de matériau.

1.4 Les modèles d'endommagement

Après la détermination de la durée de vie du matériau relatif à chaque cycle, on adopte une loi qui fournit un paramètre d'endommagement, noté D . Cette loi de cumul de dommage ([31], [4], [3]) permet de calculer l'endommagement correspondant et d'en faire le cumul.

Pour les chargements cycliques, cette variable d'endommagement est déterminée à partir des caractéristiques d'un cycle de chargement tel que l'amplitude de contrainte, la contrainte moyenne et la contrainte maximale.

L'endommagement cumulé pour chaque cycle traité permet d'estimer la durée de vie du matériau en termes de nombre de répétitions de la séquence à l'amorçage d'une fissure macroscopique. On distingue deux processus :

- Le processus A où l'évolution du dommage augmente de façon linéaire avec le nombre de cycles appliqués ou fraction de vie.
- Le processus B et C où l'évolution du dommage augmente de façon non linéaire.

1.4.1 Loi de Miner : un modèle d'endommagement linéaire

La loi de Miner [23] est sans doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'études du fait de sa simplicité. Il s'agit d'une loi linéaire de cumul d'endommagement dont la

variable est supposée égale à la fraction de vie définie par :

$$D = \frac{n}{N_f} \quad (1.43)$$

avec

- n : est le nombre de cycles effectué
- N_f : est le nombre de cycles à rupture pour le chargement considéré.

Si une sollicitation est composée de P niveaux de chargement la loi de miner s'exprime par l'équation (1.44)

$$D = \sum_i^p D_i = \sum_i^p \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (1.44)$$

- i : indice de niveau de chargement
- n_i : nombre de cycles effectués au i ème niveau de sollicitation
- D_i représente l'endommagement consommé par le niveau de chargement i
- N_{fi} : nombre de cycles nécessaires pour rompre l'éprouvette au i ème chargement

La rupture est supposée lorsque la valeur de l'endommagement $D=1$. On peut constater que la loi de miner ne prend pas en compte l'ordre de chargement et l'interaction entre les cycles.

1.4.2 Les modèles d'endommagement non linéaire

1.4.2.1 Loi de Henry

L'auteur se base dans le développement de sa loi d'évolution d'endommagement sur la limite endurance. Il suppose les deux conditions suivantes :

- état initial $\sigma_D = \sigma_{D0}$
- état de rupture $\sigma_D = 0$

Avec σ_{D0} représente la limite d'endurance initiale

Selon l'auteur on a :

- Une représentation de la courbe de Wöhler du matériau, pour un type de sollicitation, est donnée par l'équation suivante

$$N_f = \frac{C}{\sigma - \sigma_D}$$

avec C une constante du matériau. Si le matériau est vierge, elle est donnée par :

$$N_0 = \frac{C_0}{\sigma - \sigma_{D0}}$$

- On considère le point qui a le dommage le plus élevé comme l'effet d'une entaille de coefficient de concentration k_t

$$N_f = \frac{C}{\sigma - \sigma_D} = \frac{C_0}{k_t(\sigma - \sigma_{D0})}$$

Avec C_0 et σ_{D0} sont les caractéristiques du matériau vierge.

- L'endommagement est donné par l'expression suivante

$$D_i = \frac{\sigma_{D0} - \sigma_{Di}}{\sigma_{D0}} \quad (1.45)$$

L'expression de la limite d'endurance instantanée est

$$\sigma_{Di} = \frac{\sigma(1-r)}{\left(\frac{\sigma-\sigma_{D0}}{\sigma_{D0}}\right) + (1-r)} = \frac{\sigma(1-r)}{\gamma-r} \quad (1.46)$$

avec

- $r = \frac{n}{N_r}$

- $\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_{D0}}$

Alors d'après Henry, l'expression de dommage créé par n_i cycles de niveau σ_i est

$$D_i = \frac{r_i(\gamma_i - 1)}{\gamma_i - r_i} \quad (1.47)$$

Le dommage total vaut l'unité à la rupture de l'éprouvette. L'application de la loi de Henry est simple car elle ne nécessite pas des paramètres particuliers à déterminer et elle considère la limite d'endurance comme variable d'endommagement. Par contre on ne peut pas appliqué la loi de Henry pour des contraintes de niveau inférieur à celui de la limite d'endurance.

1.4.2.2 Loi de curve (DCA) Monson-Halford

Monson et Halford ([33], [34]) ont développé leur idée sur le concept que chaque chargement correspond à une courbe d'évolution peut-être tracée dans le diagramme $D-N_f$. Cette courbe met en relation l'évolution du dommage en fonction de la fraction de la durée de vie pour chaque niveau de chargement. La figure 1.22 présente un exemple de ces courbes en fonction de leur durée de vie à la rupture.

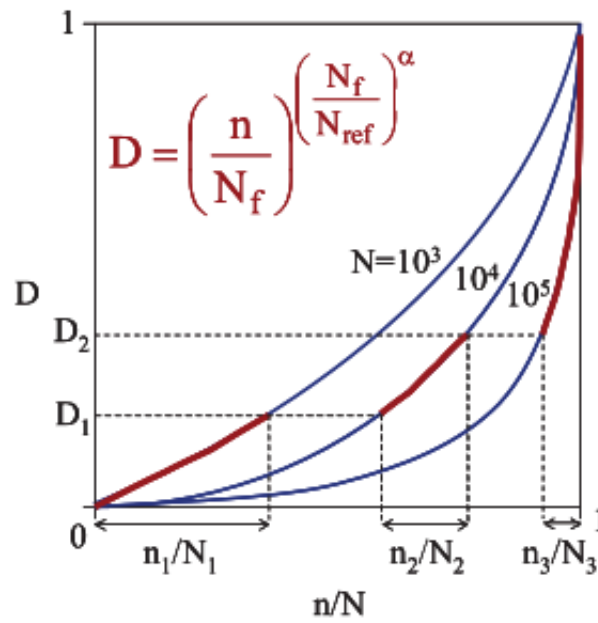


FIGURE 1.22: Exemple d'application de la loi de DCA

La ligne rouge montre l'endommagement correspond à chaque bloc $\frac{n}{N_f}$ d'un certain niveau de chargement.

Comme le montre la figure 1.22 l'évolution de l'endommagement change lorsque le niveau de chargement change, en suivant la courbe correspondant au chargement étudié. La construction de la courbe $D-\frac{n}{N}$ est basée sur une loi de propagation de fissure proposée par les auteurs, d'une longueur de fissure fictive (a_0) à une longueur de fissure maximale acceptable a_f

$$a = a_0 + (a_f - a_0) \left(\frac{n_a}{N_f} \right)^{\alpha_f} \quad (1.48)$$

avec

- n_a : nombre de cycles engendrant une fissure de taille a .
- N_f : nombre de cycles à la rupture pour une fissure de taille a_f
- α_f : paramètre empirique fixé par les auteurs $\alpha_f = \frac{2}{3} N_f^{0.4}$

De cette équation d'évolution de fissure, les auteurs ont déterminé la loi d'évolution d'endommagement par l'équation 1.49 :

$$D = \frac{1}{0.18} \left(a_0 + (0.18 - a_0) \left(\frac{n}{N_f} \right)^{\frac{2}{3} (N_f)^{0.4}} \right) \quad (1.49)$$

Les auteurs ont simplifié l'évolution de l'endommagement dans l'équation suivante

$$D_i = \left(\frac{n_i}{N_{fi}} \right) \left(\frac{N_{fi}}{N_{ref}} \right)^\alpha \quad (1.50)$$

avec

$$\alpha = 0.4$$

N_{ref} : durée de vie de référence.

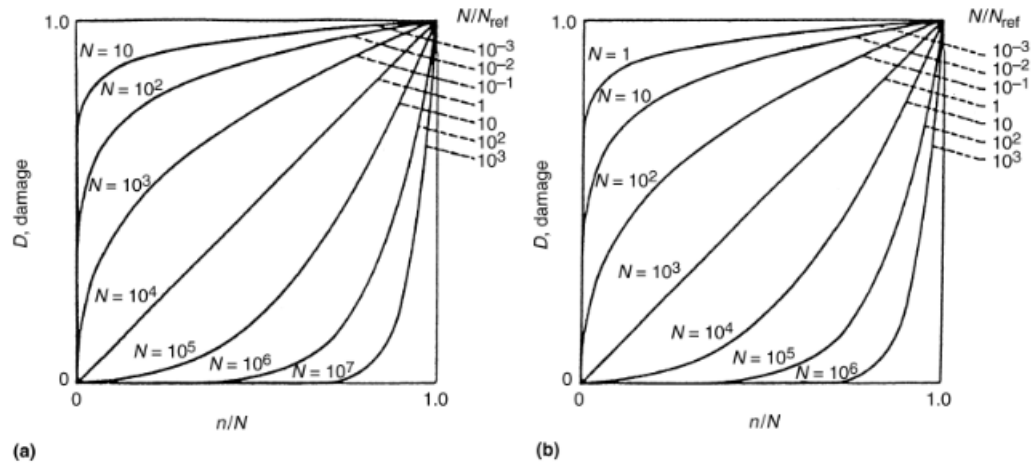


FIGURE 1.23: Courbe de dommage pour une durée de vie de 10^4 et de 10^3

Pour un chargement à deux niveaux de contrainte σ_1 et σ_2 et un nombre de cycles appliqué n_1 et n_2 on choisi $N_{ref} = N_{f1}$

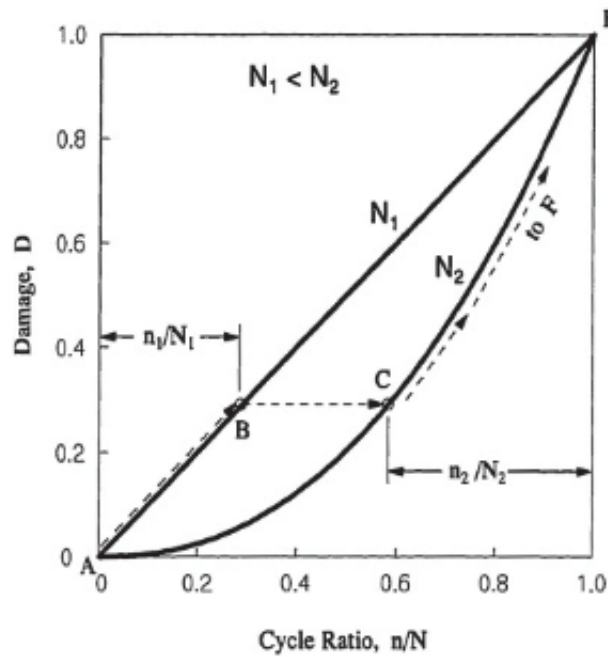


FIGURE 1.24: Calcul de DCA à deux niveaux

$$D_1 = \frac{n_1}{N_{ref}} = \frac{n_1}{N_{f1}} \tag{1.51}$$

$$D_2 = \left(\frac{n_2}{N_{f2}} \right) \left(\frac{N_{f2}}{N_{ref}} \right)^{0.4} \quad (1.52)$$

$$D = D_1 + D_2 = \frac{n_1}{N_{f1}} + \left(\frac{n_2}{N_{f2}} \right) \left(\frac{N_{f2}}{N_{ref}} \right)^{0.4} = 1 \quad (1.53)$$

Cette loi d'évolution du dommage est basée sur une loi d'évolution de fissure, ce qui nous permet de prendre en compte l'histoire de séquence. L'application de cette loi a besoin juste du coefficient 0.4 qui est applicable à tous les matériaux : point restant à prouver.

1.4.2.3 Loi de Hwang-Han

Les auteurs [36] ont développé cette loi pour déterminer la durée de vie de matériaux composites. Ils définissent le dommage à partir de la déformation appliquée sous certaines hypothèses :

- H1 : La déformation cumulée est proportionnelle au nombre de cycles
- H2 : Il existe un nouveau paramètre \mathbf{F} qui est un module de fatigue ressemble au module d'Young. L'équation (1.54) exprime ce module de fatigue.

$$F(n, r) = \frac{\sigma}{\epsilon(n)} = \sigma_u \frac{r}{\epsilon(n)} \quad (1.54)$$

avec

- σ_u : contrainte ultime
- $r = \frac{\sigma}{\sigma_u}$

La figure montre la conception du module de fatigue selon Hwang et Han.

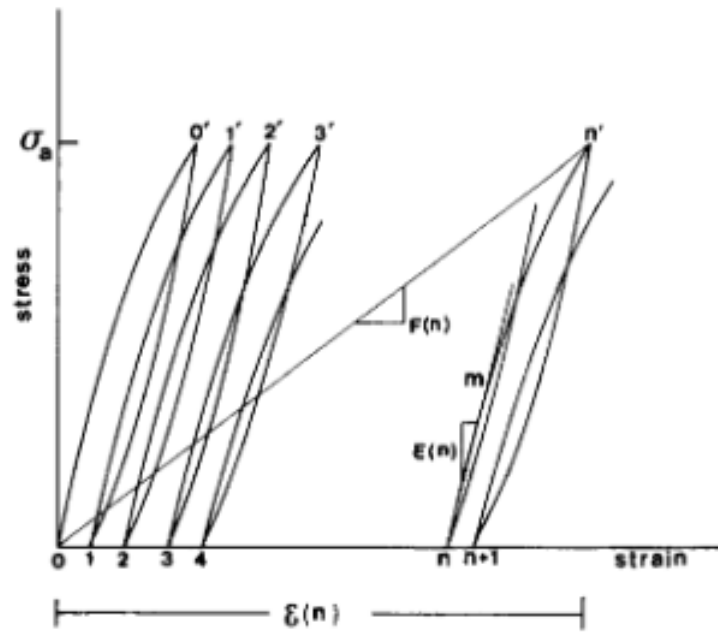


FIGURE 1.25: Conception de module de fatigue selon Hwang et Han

A l'état initial $F_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} \approx E$

A la rupture $F = \frac{\sigma}{\epsilon_f}$

L'incrément de F est $\frac{dF}{dn} = -A.c.n^{c-1}$

où A et c sont deux constantes du matériau.

L'intégral de l'incrément entre n_1 et n_2 est donnée par l'équation suivante :

$$F(n_2) - F(n_1) = -A(n_2^c - n_1^c) \tag{1.55}$$

Si on pose $n_1 = 0$ et $n_2 = n$, l'équation (1.55) devient

$$F(n) - F(0) = -An^c \tag{1.56}$$

à la rupture $n = N_f$

$$F_f - F_0 = -AN_f^c \tag{1.57}$$

Alors la durée de vie à la rupture est

$$N_f = \left[B \left(1 - \frac{F_f}{F_0} \right) \right]^{\frac{1}{c}} \tag{1.58}$$

Avec $B = \frac{F_0}{A}$

Pour la simplification de l'écriture, on note $r = \frac{F_f}{F_0}$.

Alors l'expression de la durée de vie se réécrite

$$N_f = \left[B(1-r) \right]^{\frac{1}{c}} \quad (1.59)$$

pour deux niveaux de contrainte

$$n_2 = \left[B \left(1 - (r_2 - r_1) \left(1 - \frac{n_1^c}{B} \right) \right) \right]^{\frac{1}{c}} \quad (1.60)$$

La loi de Hwang et Han modélise la non-linéarité de l'endommagement en introduisant le module de fatigue F. Cependant les constantes B et c restent à déterminer par des essais de fatigue.

1.4.2.4 Loi de Miller-Zachariah

Les auteurs ([13], [11] [12], [17]) se basent dans leur modèle sur la séparation de la phase d'initiation et la phase de propagation des fissures. Une séparation d'accumulation de dommage a été proposée et elle se résume en quatre phases :

- Initiation des fissures
- Propagation des fissures stage I
- Propagation des fissures stage II (grand fissure)
- La rupture

Les auteurs expriment la vitesse d'endommagement dans la phase qui concerne les petites fissures par l'équation suivante :

$$\frac{da}{dN} = A(\delta\gamma)^\alpha (d-a) \quad (1.61)$$

où

- a : La longueur de la petite fissure
- $\delta\gamma$: L'étendue de cisaillement appliqué
- A et α : sont deux constantes qui caractérisent le matériau
- d : la longueur de fissure

Dans la deuxième phase de propagation, la vitesse de propagation de l'endommagement est donnée selon les deux auteurs par l'expression suivante :

$$\frac{da}{dN} = B(\delta\gamma)^\beta a - C \quad (1.62)$$

où

β et B : deux constantes caractéristiques du matériau.

C : constante qui présente le seuil de propagation.

La longueur de fissure présente l'indicateur de l'endommagement selon Miller. Elle est mesurable et accessible mais le problème de ce modèle est qu'il a des paramètres et des coefficients à déterminer ([21], [19], [18]).

1.4.2.5 Loi de Lemaitre-Chaboche

Les auteurs se basent pour la définition de leur loi d'évolution d'endommagement ([20], [21], [18]) sur la transformation non linéaire des paramètres d'endommagement en fonction de nombre des cycles. La détermination de la durée de vie d'une structure donnée N_f sous un chargement multi-axial nécessite l'utilisation d'un critère de fatigue mutli-axial élémentaire et par là-même de définir le cycle de sollicitation uni-axiale comme par exemple $\sigma_{-1}(N)$ qui lui est équivalente.

En se basant sur cette loi d'équivalence, on peut étendre l'utilisation de loi de Lemaitre et Chaboche dans le cadre de fatigue sous sollicitation multi-axiale.

Cette loi met en relation la différentielle d'endommagement par rapport au nombre de cycles sous l'expression suivante :

$$dD = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha} \left[\frac{\sigma_{ai}}{M_0(1 - b\sigma_{mi})(1 - D)}\right]^{\beta} dN \quad (1.63)$$

avec

$$\alpha = 1 - a \left(\frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{ai} - \sigma_{mi}}\right) \quad (1.64)$$

$$\sigma_A(\sigma_{mi}) = \sigma_D(1 - b.\sigma_{mi}) \quad (1.65)$$

Avec

- $\sigma_A(\sigma_m)$: est l'amplitude du cycle d'endurance de contrainte moyenne σ_m
- α peut prendre deux valeurs selon que le cycle est d'amplitude supérieure ou inférieure à $\sigma_A(\sigma_{mi})$:
 - Cas d'un grand nombre de cycles : $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$, la valeur de α est donnée par l'équation précédente
 - Cas d'un petit nombres de cycles : $\sigma_{ai} < \sigma_A(\sigma_{mi})$ la valeur de α vaut 1
- β , a et M_0 : sont des coefficients propres au matériau
- R_m : est la résistance maximale à la traction du matériau
- σ_D : est la limite d'endurance du matériau (en traction alternée symétrique)
- b : est un paramètre du matériau représentant l'influence de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue.

L'intérêt relevé de cette loi tient de sa traduction de l'effet de séquence (ordre d'apparition des cycles), sa prise en compte systématique de l'influence de tous les cycles appliqués, y compris les petits cycles dès que le dommage est initié et enfin son évolution non linéaire du dommage, qui traduit mieux certaines observations faites en métallurgie.

1.5 Principe d'équivalence de déformation

Ce principe [7] se base sur le fait qu'on a la même déformation pour le matériau sain équivalent et le matériau endommagé en appliquant la contrainte effective au lieu de la contrainte réelle

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \tilde{\mathbf{K}} : \epsilon & \text{matériau endommagé} \\ \tilde{\sigma} = \mathbf{K} : \epsilon & \text{matériau sain équivalent} \end{cases}$$

On suppose que la contrainte réelle et la contrainte effective sont liées par une équation linéaire (1.66).

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1} : \sigma \quad (1.66)$$

avec

- \mathbf{M} : Tenseur d'ordre 4
- $I-D$: Endommagement

Une déduction de l'équation (1.66) entre la matrice de rigidité endommagée et celle de la rigidité initiale est donné par l'expression suivante :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{K} \quad (1.67)$$

1.6 Principe d'équivalence de contrainte

En appliquant la même contrainte effective pour un matériau sain et un matériau endommagé, on trouve des déformations différentes. Il s'agit du dual de l'équation (1.5)

$$\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \tilde{\mathbf{K}} : \epsilon & \text{matériau endommagé} \\ \sigma = \mathbf{K} : \tilde{\epsilon} & \text{matériau sain équivalent} \end{cases}$$

On suppose aussi qu'on a une relation linéaire entre la déformation de matériau endommagé et celui de matériau sain donné par l'équation suivante

$$\tilde{\epsilon} = \mathbf{M}(D) : \epsilon \quad (1.68)$$

Cette déduction nous permet d'obtenir la même relation entre la rigidité endommagée et la rigidité saine.

1.7 Principe d'équivalence d'énergie

Même philosophie que les deux premiers principes, celle qui considère qu'on a la même énergie élastique du matériau endommagé et du matériau sain équivalent :

$$\frac{1}{2}\sigma : \epsilon = \frac{1}{2}\tilde{\sigma} : \tilde{\epsilon} \quad (1.69)$$

En introduisant les équations des principes d'équivalence de contrainte (1.5) et celui de déformation (1.6) on trouve la relation entre la rigidité endommagée et la rigidité du matériau sain dans l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^t : \mathbf{K} : (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \quad (1.70)$$

1.8 Quelques résultats expérimentaux de la littérature

Les éprouvettes pour les essais de fatigue multi-axiaux peuvent avoir des géométries variées : plaque cruciforme : avec un rayon, avec une encoche sur patte et éprouvette avec section réduite au centre. La figure 1.26 montre les différents types d'éprouvettes cruciformes.

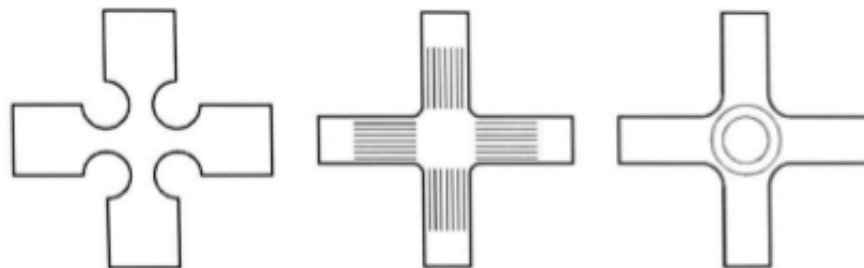


FIGURE 1.26: Différents types d'éprouvettes cruciformes [6]

Classiquement, les éprouvettes de section réduite au centre sont les plus utilisées. Elles peuvent avoir différentes formes au niveau de la section centrale : circulaire, carrée ou losange. Les plus utilisées sont les éprouvettes de section centrale circulaire qui présentent des zones de congés au niveau des bras comme montre la figure 1.27.

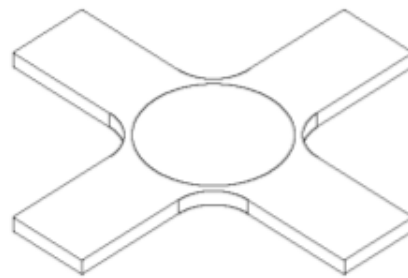


FIGURE 1.27: Epreuve criciforme de section réduite au centre(circulaire) [6]

Shen Chen [6] s'est intéressé lors de ses travaux de thèse, dans une étude expérimentales a fait dans sa thèse une partie expérimentale, à la détermination de la durée de vie d'une pièce criciforme de section centrale réduite et circulaire.

1.8.1 Données de l'exemple

Soit la structure représentée par la figure ci-dessous. Elle est composée d'une partie circulaire centrale d'épaisseur variable différente des ailes. La figure (2.14) montre la géométrie de cette éprouvette.

Les dimensions de l'exemple numérique sont choisies afin de comparer les résultats numériques aux résultats des essais présentés dans la référence .

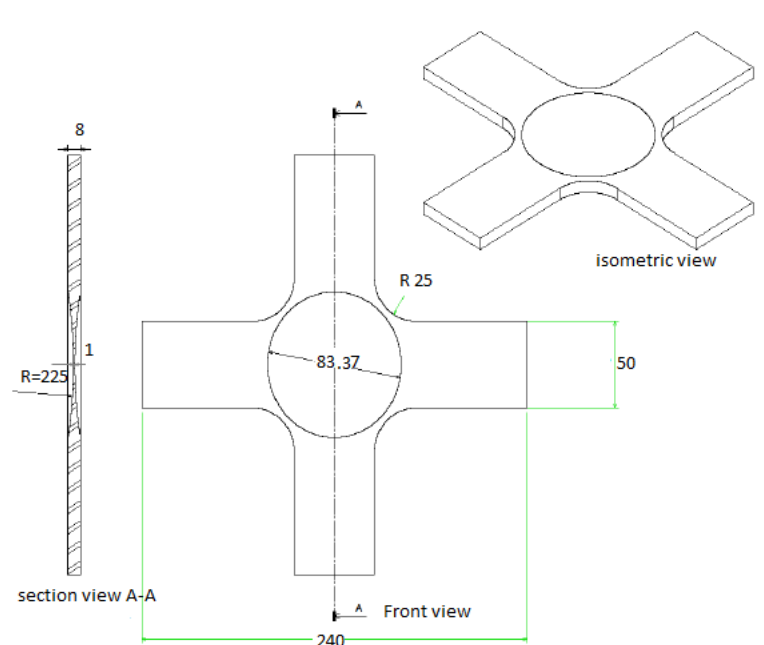


FIGURE 1.28: Structure analysée(unité mm)[6]

La structure soumise à un chargement bi-axial. Dans cette analyse, seul le $\frac{1}{4}$ (figure 1.29) de la structure est étudié en imposant les conditions de symétrie appropriées.

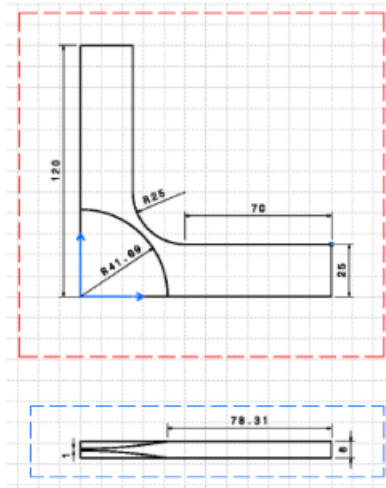


FIGURE 1.29: Le quart la partie étudiée [6]

Données générales de l'essai

Les éprouvettes cruciformes sont issues de l'alliage d'aluminium AL-6082-T6. Les propriétés mécaniques de l'alliage d'aluminium sont illustrées dans le tableau 1.1.

	E(GPa)	Re(Mpa)	Rm(Mpa)	HV	K	n
essais	72.5	290	337	11.5	440	0.08

TABLE 1.1: Caractéristiques mécaniques du matériau

Avec :

- E : Module d'Young
- Re : Contrainte limite d'élasticité
- Rm : Résistance maximale à l'extension
- Ar : Allongement à la charge maximale
- Hv : Dureté Vickers
- K : Coefficient d'écrouissage
- n : Exposant d'écrouissage

1.8.2 Conditions générales sur les essais

Les conditions générales des essais réalisés sont :

- Le chargement bi-axial est en phase,
- La fréquence est de 5Hz.
- La loi de comportement est élastique plastique à écrouissage cinématique

- Le chargement est à amplitude constante : traction pure
- $R = \frac{F_{min}}{F_{max}} = 0.1$ (cycle de chargement)

1.8.3 Méthode de détection de l'amorçage de fissure

Dans ces travaux expérimentaux, la rupture de l'éprouvette est notée dès qu'on détecte l'amorçage de fissure.

Puisqu'on a prévu le lieu d'amorçage de fissure au centre de l'éprouvette, une caméra numérique a été focalisée à cet endroit pour détecter l'amorçage de fissure. Dès qu'une fissure est détectée, le nombre de cycles de chargement appliqués est noté, puis on suit l'essai complet jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

1.8.4 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux de ces essais sont résumés dans le tableau 2.2 et la figure 1.30.

Numéro de l'essai	F _x (KN)	F _y (KN)	σ_{lim}	N_f
E5	36	36	227.74	607416
E6	36	36	214.88	1200000
E7	40	40	212.33	1380088
E8	43	43	253.57	172630
E9	40	40	230.18	536348
E10	43	43	249.53	208397
E11	40	40	225.09	675545
E12	43	43	249.53	127514
E13	40	40	255.09	160984
E14	40	40	219.14	953281
E15	45	45	258.15	140039
E16	36	36	232.67	472644
E17	40	40	222.72	788626
E18	36	36	210.41	1534476

TABLE 1.2: Essais de fatigue équi-bi-axiales : chargement à amplitude constante [6]

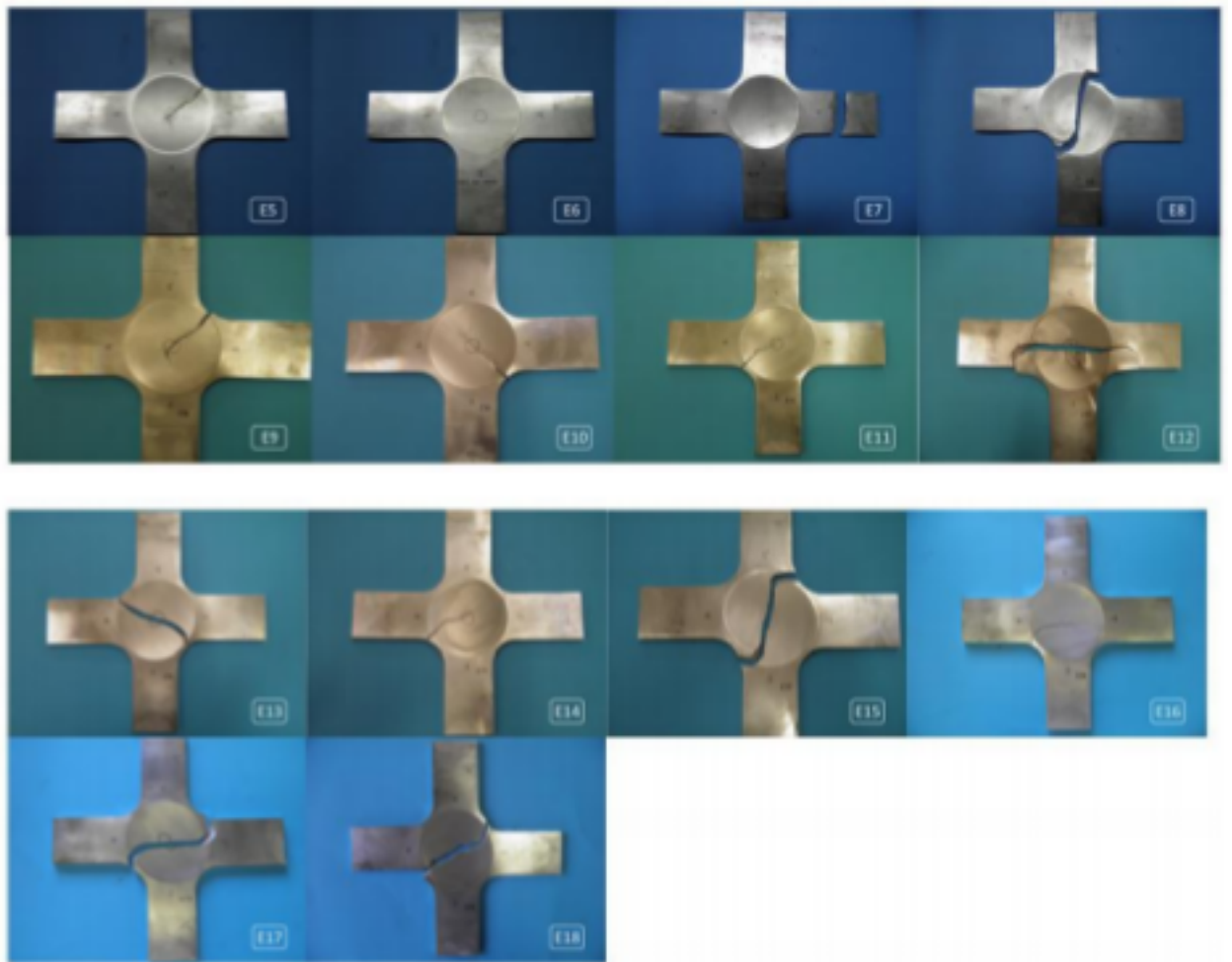


FIGURE 1.30: Illustration de quelques essais expérimentaux [6]

Chapitre 2

Modélisation de l'endommagement par dégradation isotrope de la rigidité

2.1 Introduction

L'endommagement subi par les matériaux sollicités en fatigue est un phénomène très complexe, fondamentalement non linéaire. Pour en rendre compte, il existe aujourd'hui des modèles, certes très sophistiqués mais, somme toute assez peu utilisés. Dans ce travail, nous allons proposer une méthode simple et utile à l'ingénieur, pour qu'il puisse approximer la durée de vie d'une pièce à moindre coût.

Cette approche numérique s'appuie, d'une part, sur les méthodes de calcul de structures linéaires et d'autre part, sur les données expérimentales du matériau comme la courbe de Wöhler, un critère de fatigue multiaxial qui nous permettra d'envisager les chargements complexes et une loi d'évolution de l'endommagement.

Pour bien situer le cadre de notre modélisation, commençons par rappeler que la fatigue (terme générique traduisant l'endommagement des matériaux soumis à des contraintes variables dans le temps mais dont la valeur maximale reste inférieure à celle qui provoquerait leur rupture quasi-statique) exhibe, à travers les courbes de Wöhler par exemple (courbes qui relient le nombre de cycles à rupture à la contrainte appliquée), trois zones de comportements distincts.

- Une première zone de rupture à faible nombre de cycles, dite zone de **fatigue oligocyclique**. Dans cette zone, la contrainte appliquée est supérieure à la limite d'élasticité du matériau. Au cours des chargements, le matériau suit un comportement non élastique.
- Une seconde zone de rupture à grand nombre de cycles, qualifiée de zone d'**endurance limitée**. Dans cette zone, la rupture se produit sans déformation plastique macroscopique et pour un nombre de cycles élevé.
- Enfin, une troisième zone dite d'**endurance illimitée**. Dans cette zone, la contrainte maximale appliquée est suffisamment faible pour ne pas provoquer de rupture, même après un très grand nombre de cycles. Conventionnellement, on définit une contrainte limite de fatigue σ_{end} .

Traditionnellement, le dimensionnement pour une tenue en fatigue des structures métalliques travaillant à grand nombre de cycles se faisait dans le domaine de l'endurance illimitée où le constructeur se contentait d'assurer la tenue de sa pièce à un «très» grand nombre de cycles fixé. De nos jours, avec le développement des moyens de calculs et l'optimisation croissante par les industriels des structures, cette démarche trouve ses limites. En effet pour optimiser les structures au plus juste, l'ingénieur souhaite avoir une idée plus fine du comportement de la structure au cours du chargement y compris en zone d'endurance limitée. Ce domaine qui intéressait peu de chercheurs, constitue actuellement un axe important de leurs recherches en raison de la forte demande industrielle.

Notre travail va donc s'intéresser exclusivement à cette zone. Cette première hypothèse constitue une simplification puisque nos calculs vont se dérouler dans le domaine élastique.

Une deuxième hypothèse émise dans ce chapitre est l'isotropie de l'endommagement. Nous consacrerons le chapitre suivant au cas de l'endommagement anisotrope.

2.2 Construction du modèle

Le modèle que nous présentons ici est une méthodologie incrémentale pour l'ingénieur permettant de suivre l'endommagement à l'échelle macroscopique.

En voici les grandes lignes :

2.2.1 Les grandes étapes du modèle

Comme nous venons de le signaler, on s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation de l'endommagement isotrope et à son évolution en zone d'endurance limitée. Etant donnée une structure soumise à un chargement cyclique donné, la modélisation numérique de son endommagement va se dérouler de la manière suivante :

2.2.1.1 Phase d'initiation de l'endommagement

La modélisation de la structure est faite par discrétisation spatiale à l'aide de la méthode des éléments finis, par exemple. Un cycle de chargements lui est alors imposé et un calcul de structure élastique linéaire, à l'aide de la méthode des éléments finis, est effectué.

Le champ de contraintes issu de ce calcul est alors utilisé avec un critère de fatigue multiaxial, Sines par exemple, pour déterminer le champ de contraintes équivalent qui règne dans la structure $\sigma_{eq}^{(1)}$. Rappelons que ce champ est constant par éléments (dans le cas d'une interpolation de degrés 1). La valeur maximale de ce champ va permettre à l'aide de la courbe de Wölher de déterminer le *nombre de cycles à l'initiation de l'endommagement*, N_1 . La localisation de cette valeur maximale va nous informer sur le ou les éléments les plus endommagés ; notons les P_1 . A l'aide d'une loi d'endommagement, que nous expliciterons plus loin, on détermine le champ d'endommagement, D , ainsi que le champ de la nouvelle rigidité de chaque élément. Notons au passage que désormais la structure est fortement hétérogène.

2.2.1.2 Phase de suivi incrémental de l'endommagement

Il s'agit d'un processus itératif qui consiste en une succession d'étapes, i , similaires et identiques à l'étape d'initiation précédente, (1).

En amont de chacune de ces étapes, un calcul de structure est effectué sur le domaine,

maintenant hétérogène par élément. Ce domaine est soumis à un cycle de charge. Comme à l'étape précédente, le champ de contraintes calculé est transformé, à l'aide d'un critère multiaxial, à un champ de contraintes équivalentes appliquées, σ_{eq}^i . Comme à l'étape précédente, la valeur maximale de ce champ va permettre à l'aide de la courbe de Wölher de déterminer le nombre de cycles pour l'incrément d'endommagement, N_i .

Ce champ de contraintes équivalentes que nous venons de calculer permet de déterminer, à l'aide de notre modèle d'endommagement, le champ d'endommagement au présent incrément, $D^{(i)}$.

Une fois le champ d'endommagement dans la pièce déterminé, on procède à la réactualisation du champ des rigidités en le multipliant par le facteur $(1 - D^{(i)}(x))$. Soit,

$$K^{(i)} = K^{(0)}(1 - D^{(i)}(x))$$

Remarquons que les éléments saturés en endommagement ($D = 1$), auront une rigidité nulle et cessent par suite de jouer tout rôle structurant.

C'est ainsi que la fissure se met en place numériquement et que, de proche en proche et au fil des itérations, elle chemine dans la structure. Ce cheminement en temps et en espace est calculé et consigné.

2.2.1.3 Rupture finale ou durée de vie de la structure

La dernière étape est celle où une succession de points ou d'éléments, de rigidité nulle, se met en place pour traverser la pièce de bout en bout. L'équilibre de la structure n'est plus alors assuré et le problème de structure cesse d'être bien posé. Numériquement cela se traduit par une matrice de rigidité non inversible et les calculs s'arrêtent. On note alors le nombre de cycles à rupture calculé à l'étape précédente comme étant le nombre de cycle à rupture de la pièce, N_f .

2.2.2 Modélisation de l'endommagement et de son évolution

Comme nous venons de l'exposer, au cours du processus itératif le comportement en chaque point va évoluer pour tenir compte de son histoire et de celle de ses voisins. Ainsi le chargement et non seulement hétérogène en espace (contrainte appliquée fonction de point x) mais aussi en temps (la contrainte appliquée en un point évolue avec le temps). Même si les cycles imposés à la structure (chargement macroscopique) sont reproduits fidèlement, un élément donné verra, au cours du processus itératif, son chargement propre (mésoscopique) s'intensifier entre deux incréments. Cette augmentation de la contrainte équivalente imposée à l'élément est une conséquence de son endommagement, ainsi que

celui de ses voisins proches. Inversement, plus un élément est chargé plus fortement il sera endommagé. Ainsi, endommagement et chargement local paraissent intimement liés et s'alimentent l'un l'autre.

C'est une loi de maillon faible couplé à un effet boule de neige qui se met en place. La ruine de l'élément le plus faible va précipiter ses voisins vers la même destinée tant que le chargement est maintenu. De proche en proche c'est l'intégrité de la structure qui est remise en cause.

Pour évaluer l'endommagement d'un élément, à un instant donné, il donc naturel d'émettre l'hypothèse simple qu'il est fonction affine de la contrainte qui lui est appliquée, à cet instant. Cet endommagement est nul tant que la contrainte appliquée, σ_{eq} , est inférieure ou égale à la limite d'endurance, σ_{end} , et il atteint sa valeur maximale, 1, quand la contrainte appliquée, σ_{eq} , atteint la valeur limite de l'élasticité, σ_e (Figure 2.1).

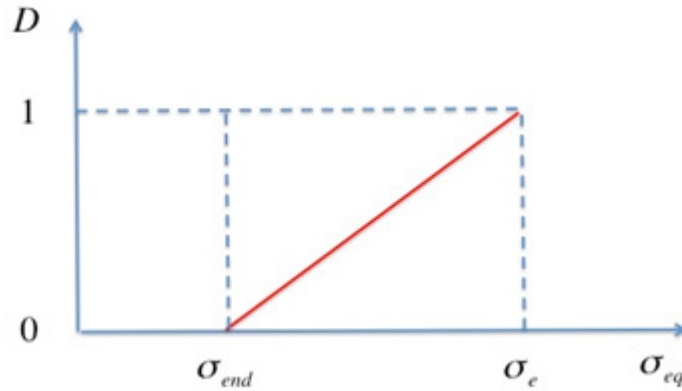


FIGURE 2.1: Évolution de l'endommagement en fonction de σ_{eq}

ainsi l'endommagement s'écrit :

$$D = \frac{1}{\sigma_e - \sigma_{end}} \cdot \sigma_{eq} - \frac{\sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} = \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} \quad (2.1)$$

Où σ_{eq} désigne la contrainte équivalente appliquée, σ_e la contrainte limite d'élasticité et σ_{end} la contrainte limite d'endurance.

Ainsi

$$D = \begin{cases} 0 & \sigma_{eq} \leq \sigma_{end} \\ \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} & \sigma_{end} < \sigma_{eq} < \sigma_e \\ 1 & \sigma_{eq} \geq \sigma_e \end{cases} \quad (2.2)$$

On peut interpréter aussi ce module d'endommagement, D , comme le rapport d'une homothétie réductrice de la zone d'endurance limitée ou une baisse de la limite d'élasticité, en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\sigma_{eq} - \sigma_{end} = D(\sigma_e - \sigma_{end})$$

On peut aussi interpréter cette modélisation en termes de modules de Young, en utilisant la loi de comportement unidimensionnelle :

$$\begin{cases} \sigma_{eq} = E\epsilon & \sigma_{end} < \sigma_{eq} \\ \sigma_{eq} = E^0\epsilon & \sigma_{eq} = \sigma_{end} \\ \sigma_{eq} = 0 & \sigma_{eq} > \sigma_e \quad E = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On retrouve alors la relation classique pour définir l'endommagement :

$$D = \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} = \frac{E\epsilon - E^0\epsilon}{0 - E^0\epsilon} = 1 - \frac{E\epsilon}{E^0\epsilon}$$

C'est ainsi que l'endommagement est défini dans notre modèle. Son évolution est alors l'affaire du processus incrémental. A chaque incrément, i , la structure, de comportement K^i , est chargée et le champ de contraintes équivalentes (ou appliquées), σ_{eq}^i , est déterminé ainsi que le champ d'endommagement,

$$D^i = 1 - \frac{E^i}{E^0} = \frac{\sigma_{eq}^i - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}}$$

Ce champ d'endommagement nous permet alors de déterminer la matrice de rigidité du matériau (endommagé) de la structure, à charger au prochain incrément, par la relation :

$$K^i = K^0(1 - D^i)$$

C'est de cette manière incrémentale que nous suivrons, au fil des itérations, l'évolution de l'endommagement dans la structure. Notons au passage que l'incrément d'endommagement entre l'itération $i-1$ et i , d^i , s'écrit aussi comme suit :

$$\begin{cases} D^{i-1} = \frac{\sigma_{eq}^{i-1} - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} \\ D^i = \frac{\sigma_{eq}^i - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} \end{cases} \quad (2.4)$$

Alors

$$d^i = D^i - D^{i-1} = \frac{\sigma_{eq}^i - \sigma_{eq}^{i-1}}{\sigma_e - \sigma_{end}} = \frac{E^{i-1} - E^i}{E^0}$$

2.3 Mise en œuvre numérique du modèle.

Le modèle que nous venons de présenter a été implémenté sous MATLAB ®. Cependant, il peut être implémenté sous tout code de calculs éléments fins qui permet la définition des rigidités élément par élément. Étant donné une structure occupant un domaine, soumise à un chargement cyclique, en efforts. On suppose les caractéristiques matériaux connues y compris la courbe de Wölher. Nous présentons ici les grandes étapes de calcul. Voir aussi l’organigramme de notre implémentation, donné en Figure 2.3.

1. *Maillage.*

Comme tout calcul de structure par éléments finis, la première étape est le maillage du domaine. Ce maillage, et en absence d’informations sur l’initiation de l’endommagement, peut être dans une première phase très grossier. Il permettra, à travers un premier calcul, de localiser les zones les plus sollicitées et donc celles à mailler finement.

2. *Calcul de structure élastique linéaire sur un cycle de chargement.*

Passé l’étape de maillage, on lance un premier calcul de structure classique en élasticité linéaire, avec le matériau étudié, supposé de comportement élastique, linéaire et isotrope, le cycle de chargements imposé ainsi que les conditions aux limites données.

On rappelle que le cycle de sollicitations est caractérisé par les paramètres, $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$: amplitude du chargement, $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$, contrainte moyenne du chargement et le rapport de charge, $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

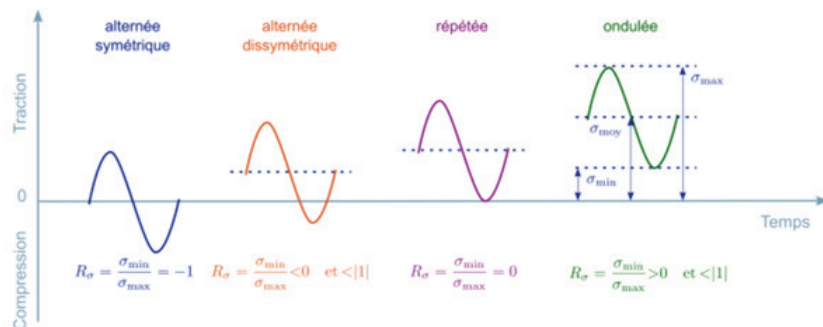


FIGURE 2.2: Types des cycles de chargements

3. *Calcul des contraintes.*

Une fois le calcul de structure effectué, sur un cycle, on détermine le champ de contraintes solution qui règne dans la structure, au cours de ce cycle de chargement.

4. *Contraintes équivalentes de Sines.*

Les invariants du champ de contraintes que nous venons de calculer nous permettent de déterminer, à l'aide du critère de Sines, la contrainte équivalente dans chaque élément de la structure σ_{eq}^i .

5. *Contrainte équivalente maximale.*

A ce stade, nous sommes en mesure de déterminer la valeur maximale de la contrainte équivalente,

$$\Sigma_{eq}^1 = \max_{j=1, \text{ nombre éléments}} \sigma_{eq}^i(j)$$

et de localiser l'élément, ou les éléments, où cette valeur est atteinte.

6. *Éventuellement, correction de l'effet de la contrainte moyenne par Goodman.*

Remarquons que si on ne dispose pas de la courbe de Wölher associée à la contrainte moyenne de notre chargement macroscopique, σ_m , on procède à la transformation de Σ_{eq}^1 , à l'aide de la loi de Goodman, par exemple, pour corriger l'effet de la contrainte moyenne. Dans la suite, nous garderons la même notation, Σ_{eq}^1 , pour désigner la contrainte équivalente maximale corrigée par Goodman.

7. *Calcul du nombre de cycle à l'initiation ou à l'accroissement de l'endommagement à l'aide de la loi de Basquin.*

Comme nous travaillons en endurance limitée, à cette contrainte équivalente maximale on associe, à l'aide la loi de Basquin, le «nombre de cycles à rupture», N_1 . Rappelons que la loi de Basquin relie la contrainte appliquée à la structure, qui dans notre cas ici est la contrainte équivalente σ_{eq}^1 , au nombre de cycles à rupture N_1 , de la manière suivante :

$$\sigma_{eq}^1 = CN_1^\alpha$$

avec C et α sont des constantes caractéristiques du matériau.

Ce nombre de cycle à rupture pour la courbe de Wöhler, N_1 , ne signale en réalité qu'une rupture locale. C'est pour nous, l'annonce de l'initiation de l'endommagement dans la structure et plus précisément dans les éléments où la contrainte équivalente maximale, Σ_{eq}^1 , a été localisée.

8. *Calcul du champ d'endommagement dans la structure.*

La connaissance du champ de contraintes équivalent, σ_{eq}^1 , nous permet de déterminer le champ d'endommagement induit à ce stade dans la structure, $D^1 = \frac{\sigma_{eq}^1 - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}}$.

9. *Calcul de la rigidité modifiée dans chaque élément.*

Le champ d'endommagement étant déterminé, on calcule le nouveau comportement de chaque élément par la relation : $K^1 = K^0(1 - D^1)$

10. *Suivi incrémental de l'endommagement.*

Une fois les nouvelles rigidités calculées, on procède de nouveau à un calcul de structure, fortement hétérogène cette fois. Les étapes 2) à 9) sont alors répétées successivement en changeant l'indice 1, qui indiquait le numéro de l'incrément dans les relations, par l'incrément i . A chaque incrément i , on note le nombre de cycles, N_i , associé à l'endommagement D^i . Les éléments de la structure où l'endommagement a pris la valeur maximale 1, localisent la fissure. Cette procédure incrémentale se poursuit jusqu'à l'incrément, $n + 1$ où le système devient non inversible et les calculs s'arrêtent. Le nombre de cycles N_n indique alors la durée de vie recherchée de la structure.

Ainsi notre modèle, à l'aide de quelques calculs de structure linéaire, détermine la durée de vie d'une structure et indique les zones de rupture.

l'organigramme suivant (figure 2.3) récapitule la mise en oeuvre numérique de ce modèle.

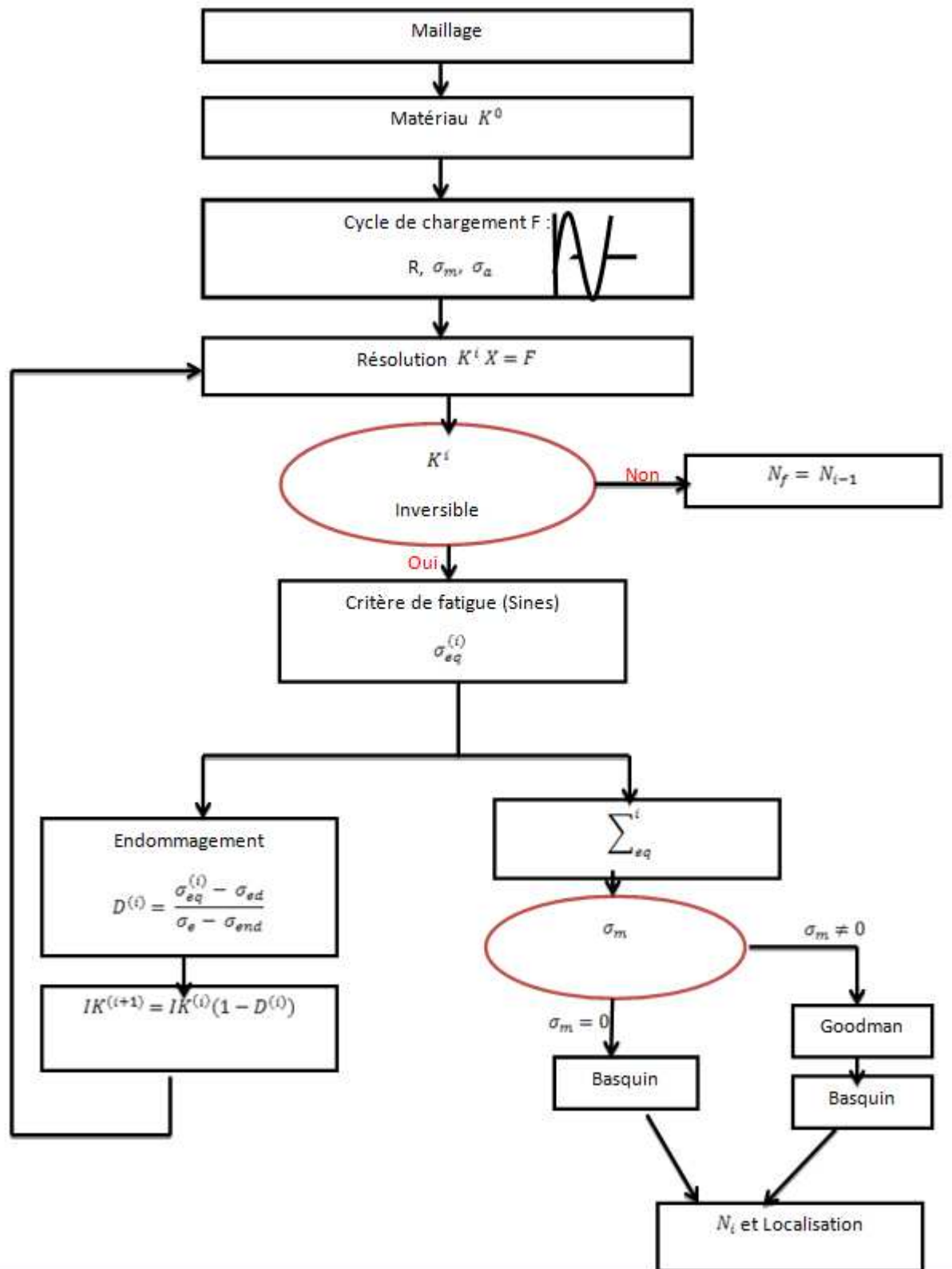


FIGURE 2.3: Organigramme de la mise en œuvre numérique

2.4 Validation du modèle

2.4.1 Exemple 1 : fatigue en traction simple

La figure suivante présente les dimensions de la structure étudiée (Figure 2.4). Il s'agit d'une éprouvette pour l'essai de fatigue en traction uniaxiale. Une simulation éléments finis à l'aide de notre code développé sous Matlab a été effectuée. En raison des symétries du problème, nous avons choisi de mailler seulement le quart de cette éprouvette. Le maillage a été effectué soit à l'aide d'éléments linéaires ou quadratiques. Les conditions aux limites appliquées à cette éprouvette sont celles issues de la symétrie. Le matériau utilisé est l'alliage d'aluminium AL-6082-T6, dont les caractéristiques sont données au tableau, Table 2.1, ci-dessous.

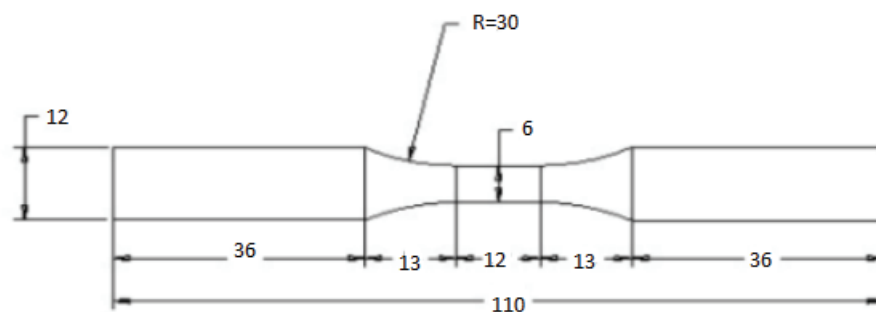


FIGURE 2.4: Structure analysée [6]

b	E(GPa)	Re(Mpa)	Rm(Mpa)	HV	K	n
essais	72.5	290	337	11.5	440	0.08

TABLE 2.1: Caractéristiques mécaniques du matériau [6]

Avec :

- E : Module d'Young
- Re : Contrainte limite d'élasticité
- Rm : Résistance maximale à l'extension
- Hv : Dureté Vickers
- K : Coefficient d'écrouissage
- n : Exposant d'écrouissage

Le chargement appliqué (Figure 2.5) est un cycle de traction simple, de contrainte maximale $\sigma_{max} = 241MPa$. et de contrainte minimale $\sigma_{min} = 24.1MPa$., ce qui correspond à un rapport $R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 0.1$.

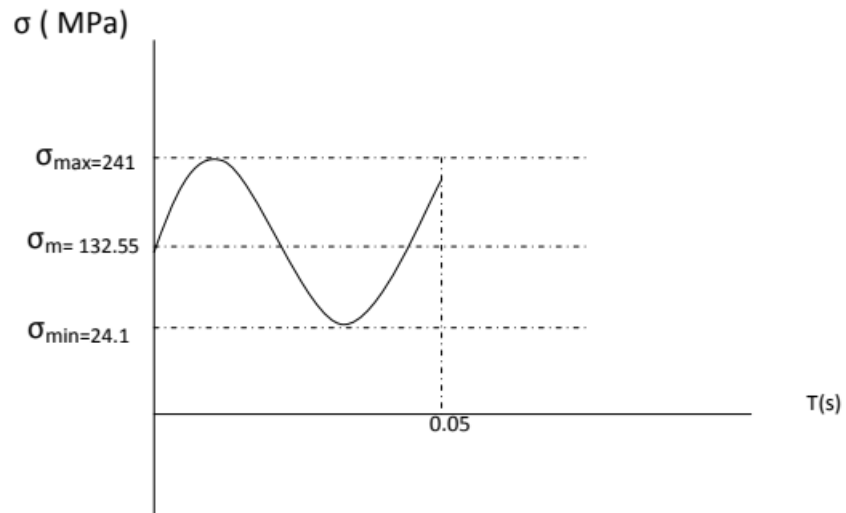


FIGURE 2.5: Cycle de chargement imposé à la structure

Pour ce test, on dispose de données expérimentales en fatigue, fournie par [6]. Ces données sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Nombre de cycles à l'amorçage de fissure :} & N_0 = 261112 \\ \text{Nombre de cycles à la rupture :} & N_f = 311245 \end{array} \right.$$

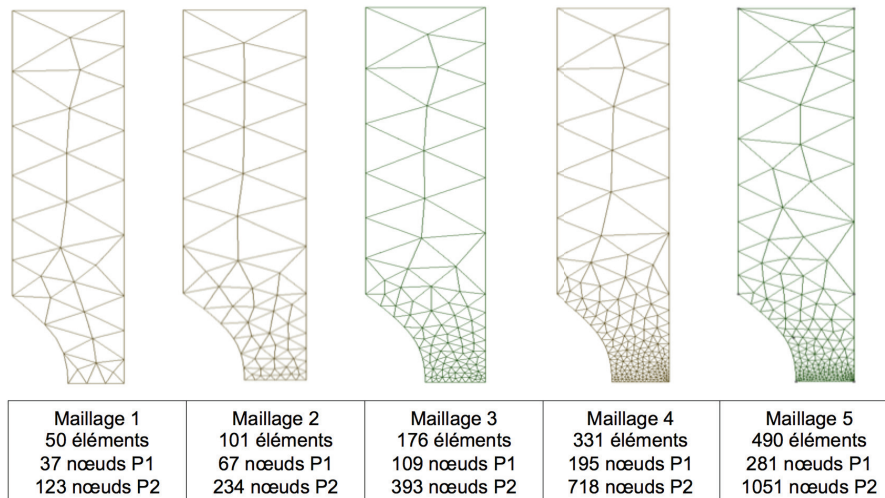


FIGURE 2.6: Différents maillages utilisés

Les calculs ont été effectués sur cinq maillages de tailles différentes (Figure 2.6). Deux interpolations, linéaire et quadratique, ont été testées. Les résultats obtenus ainsi que les caractéristiques des maillages utilisés sont résumés dans les tableaux 2.2, ci-dessous.

Maillage	Nombre éléments	Nombre de DDL en P1	Nombre de DDL en P2
1	50	74	246
2	101	134	468
3	176	218	786
4	331	390	1436
5	490	562	2102

TABLE 2.2: Caractéristiques des différents maillages utilisés et taille des problèmes résolus

Comme nous nous y attendons, et à l’instar de la méthode des éléments finis, notre modèle numérique est sensible au degré de raffinement du maillage et de l’interpolation. Cependant, les calculs convergent rapidement vers les valeurs expérimentales. Nous résumons dans le tableau 2.3, ci-dessous, les différents résultats de calculs obtenus.

Maillage	N_0 en P1	N_f en P1	N_0 en P2	N_f en P2
1	17601	25540	18518	73154
2	187304	251863	190204	265722
3	197813	278251	200731	283377
4	207583	286377	211077	291366
5	227381	290196	231175	293975

TABLE 2.3: Nombre de cycles à l’amorçage de fissure, N_0 , et nombre de cycles à rupture, N_f , calculés avec les deux interpolations et les différents maillages.

À la figure 2.7, nous avons porté l’écart relatif aux mesures expérimentales en fonction du nombre de degrés de liberté.

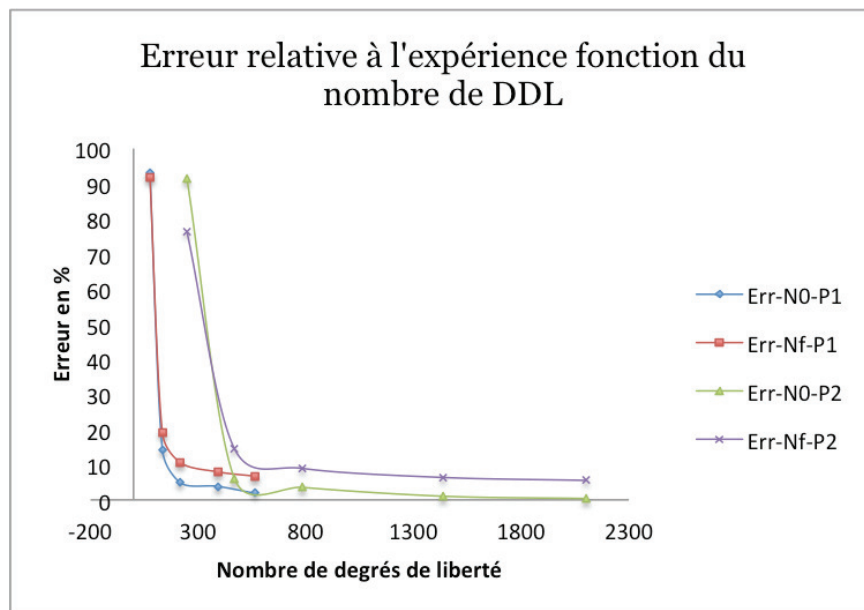


FIGURE 2.7: Erreur relative à l’expérimental en fonction du nombre de degrés de liberté total.

On remarque sur ces courbes que l'erreur décroît rapidement pour prendre des valeurs proches des 5% dès qu'on raffine le maillage. Cette constatation est vérifiée aussi bien pour une interpolation linéaire que pour une interpolation quadratique. Bien entendu l'erreur commise avec une interpolation quadratique est meilleure que celle commise avec une interpolation linéaire. Cette amélioration a un coût qu'on peut se demander légitimement si l'enjeu en vaut la peine puisque les résultats en linéaire sont largement satisfaisants. Remarquons enfin que l'erreur de calcul commise sur le nombre de cycles à l'amorçage de la fissure est meilleure que celle commise sur le nombre de cycle à la rupture. Ceci peut s'expliquer par le fait que numériquement on n'accède pas à la valeur réelle du nombre de cycles à la rupture. En effet, au dernier incrément, quand le système devient non inversible et on déclare la ruine de la structure, on prend comme valeur de nombre de cycles à la rupture la valeur du nombre de cycles endommageants calculée à l'incrément précédent. A cet incrément la pièce n'est pas encore complètement rompue et la fissure n'est toujours pas traversante. Ce qui peut expliquer ce léger écart que nous avons avec l'expérience. Ce propos, est confirmé par les données du tableau 2.4, présenté ci-dessous. Dans ce tableau, nous avons reporté le rapport longueur de la fissure au dernier incrément (avant rupture et divergence des calculs) sur longueur de l'éprouvette, $\frac{L_f}{L_e}$. Ces données montrent qu'à la fin des calculs, la fissure n'est pas encore aboutie. Ce qui prouve que le N_f calculé n'est pas réellement le nombre de cycles à rupture du modèle. Ce dernier étant inaccessible.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4	Maillage 5
P1	0.6	0.777	0.818	0.857	0.894
P2	0.6	0.777	0.81818	0.92	0.94

TABLE 2.4: Longueur de la fissure sur dimension de l'éprouvette, $\frac{L_f}{L_e}$, pour les différents maillages et les différentes interpolations.

De toutes manières, et au regard de la dispersion des mesures expérimentales, on peut estimer faible l'écart mesuré par rapport à l'expérimental. Cet écart est, rappelons le de l'ordre de l'erreur de calcul, soit 5%. Enfin, nous présentons aux figures suivantes (Figures 2.8 à 2.13) la répartition de l'endommagement dans la structure et son évolution à différents nombres de cycles de chargement, pour le maillage fin (M5).

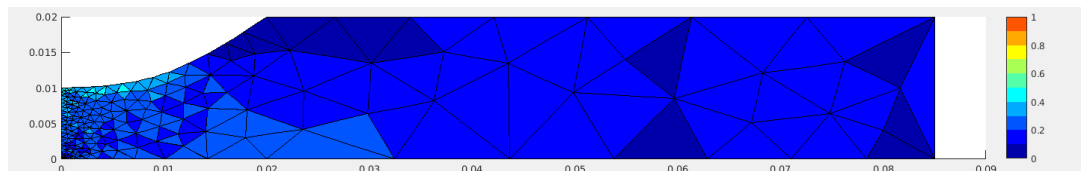


FIGURE 2.8: Distribution de l'endommagement à N= 231 175 cycles.

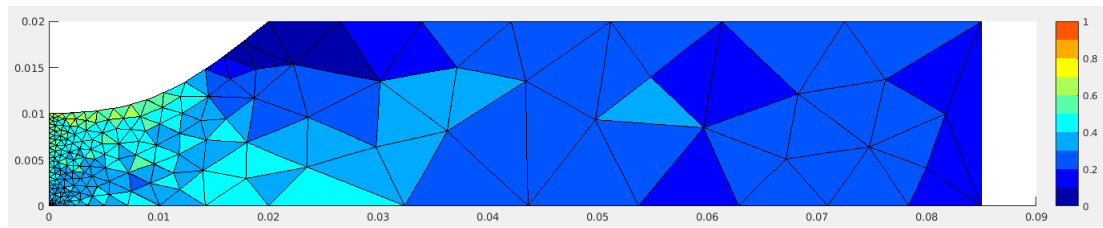


FIGURE 2.9: Distribution de l'endommagement à $N= 258\ 130$ cycles.

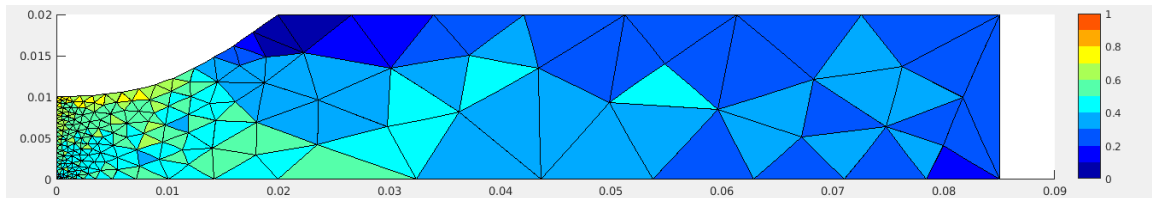


FIGURE 2.10: Distribution de l'endommagement à $N= 260\ 082$ cycles.

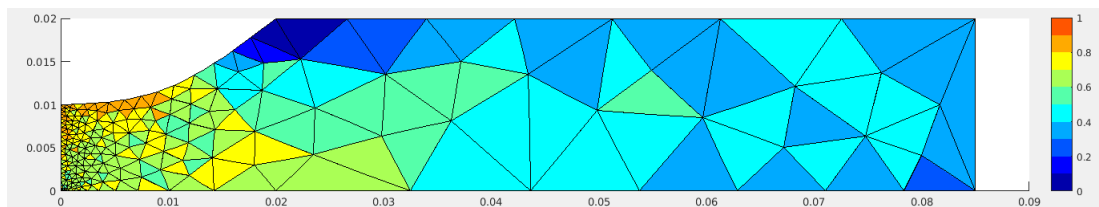


FIGURE 2.11: Distribution de l'endommagement à $N= 288\ 112$ cycles.

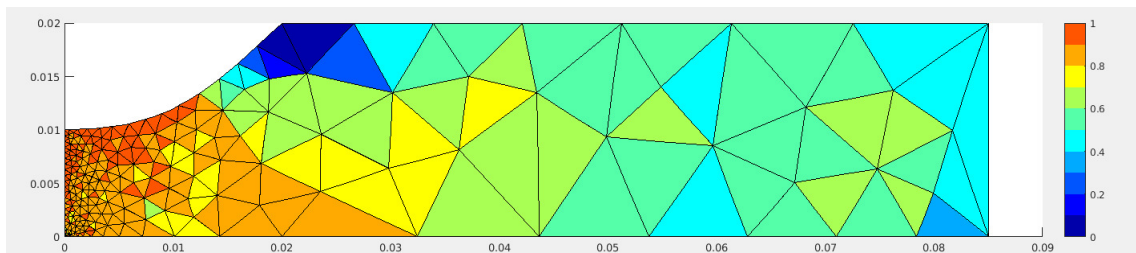


FIGURE 2.12: Distribution de l'endommagement à $N= 291\ 197$ cycles.

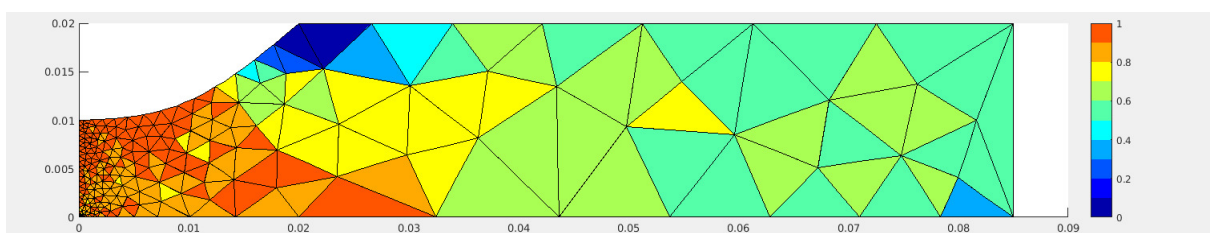


FIGURE 2.13: Distribution de l'endommagement à $N= 293\ 975$ cycles.

2.4.2 Exemple 2 : fatigue en traction Bi-axiale

Afin de conforter notre modèle, nous proposons de le tester sur un deuxième exemple. Il s'agit, de l'exemple de la pièce cruciforme comportant en son centre une empreinte sphérique et soumise à un chargement cyclique de traction bi-axiale. Cet exemple emprunté à la littérature, [6], à été présenté au chapitre 1 (paragraphe 1.8). Nous renvoyons donc le lecteur à cette partie du document pour tous les détails concernant cet essai.

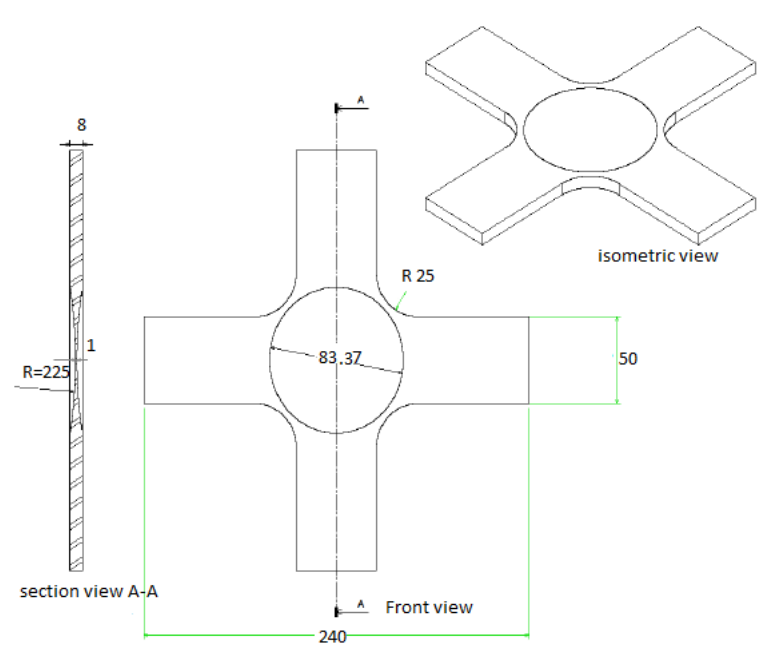


FIGURE 2.14: Structure analysée(unité mm)[6]

Comme à l'exemple précédent, nous avons exploité les symétries matérielles que présente cette éprouvette pour réduire la taille des problèmes à résoudre. Cependant, comme le code éléments finis que nous avons développé sous Matlab est limité pour l'instant aux problèmes bidimensionnels, les calculs ont donc été effectués en contraintes planes sur le quart du plan moyen de cette pièce tridimensionnelle.

Le maillage du quart de la pièce a été effectué avec 234 éléments et 526 nœuds soit 1578 degrés de libertés en interpolation P_1 .

Le chargement appliqué à cette éprouvette est présenté à la figure 2.15 ci-dessous.

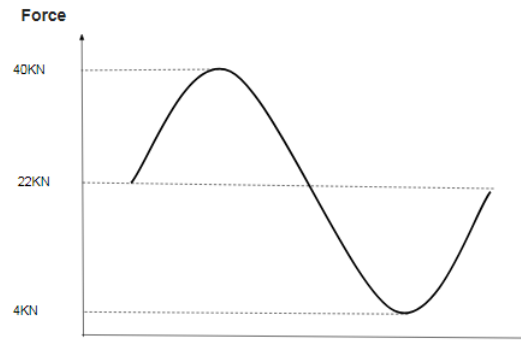


FIGURE 2.15: Intensité du chargement de traction bi-axiale appliqué à l'éprouvette cruciforme

Pour cet essai, notre modèle numérique a nécessité la résolution de six problèmes d'élasticité linéaires pour calculer la durée de vie de la structure. Les nombres de cycles ainsi que l'état de la pièce à chacune de ces six itérations sont résumés dans le tableau (2.5) ci-dessous. En particulier, l'amorçage de la fissure a été déterminé à la troisième itération qui correspond à $1.61E5$ cycles et la durée de vie de la structure, calculée par notre modèle à la sixième itération, est de l'ordre de $7.89E5$ cycles.

Numéro de l'itération	Nombre de cycles	État de l'endommagement
1	$3E4$	Initiation ($0 < D < 1$)
2	$7.71E4$	Propagation ($0 < D < 1$)
3	$1.61E5$	Initiation de la fissure ($D = 1$)
4	$3.23E5$	Propagation de la fissure
5	$5.31E5$	Propagation de la fissure
6	$7.89E5$	Rupture de la pièce

TABLE 2.5: Les résultats de calcul sur la pièce cruciforme

Les figures ci-dessous, Figures 2.16 à 2.21, visualisent le champ d'endommagement qui règne dans notre structure à chacune des six itérations effectuées.

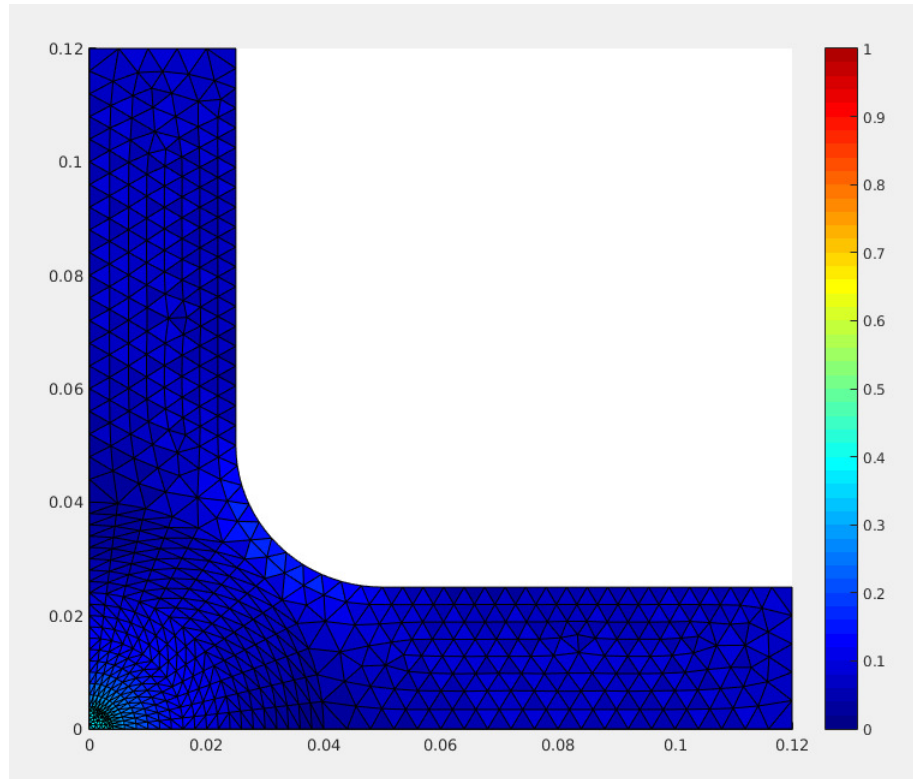


FIGURE 2.16: Distribution de l'endommagement à 3E4 cycles

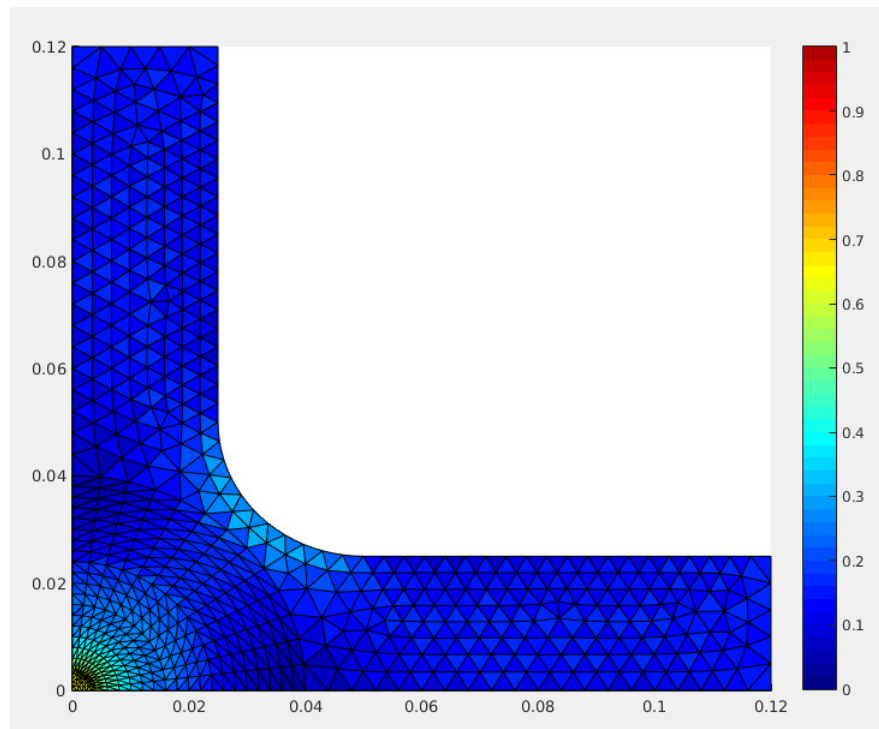


FIGURE 2.17: Distribution de l'endommagement à 7.71E4 cycles

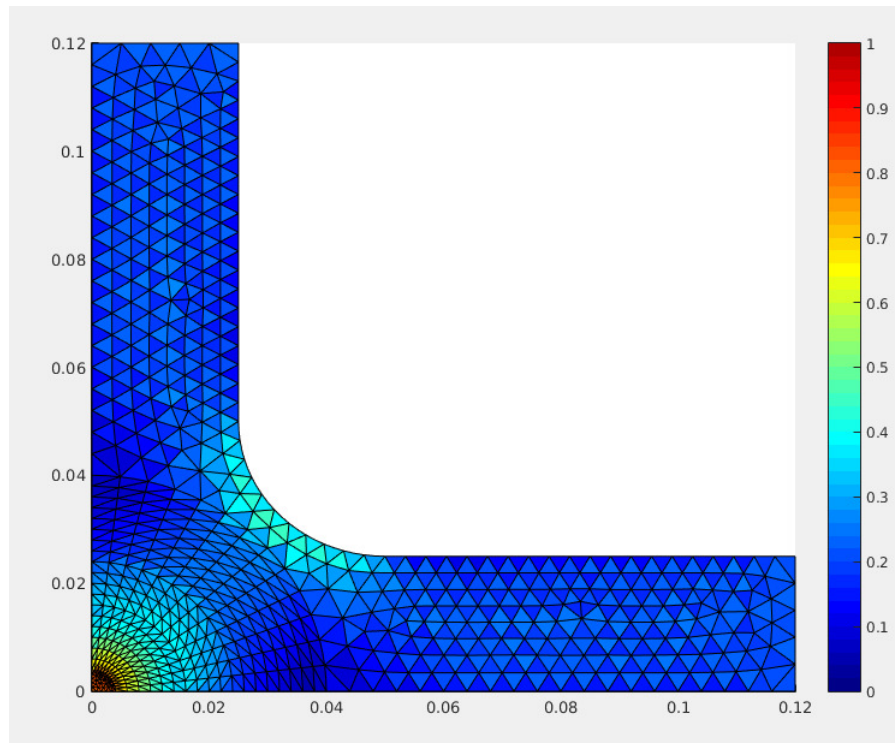


FIGURE 2.18: Distribution de l'endommagement à $1.61E5$ cycles

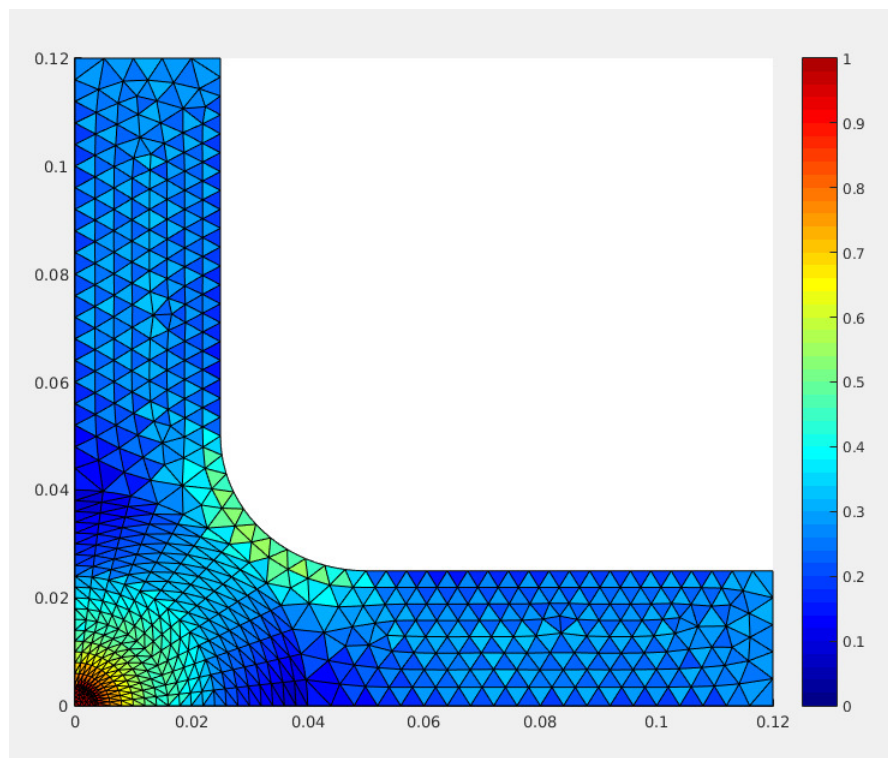


FIGURE 2.19: Distribution de l'endommagement à $3.23E5$ cycles

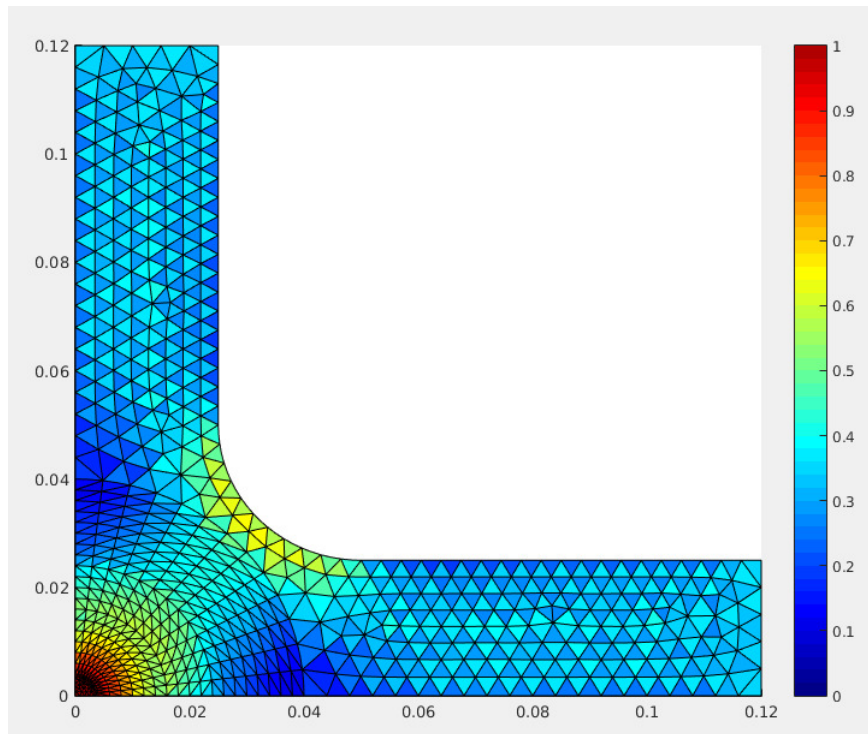


FIGURE 2.20: Distribution de l'endommagement à 5.31E5 cycles

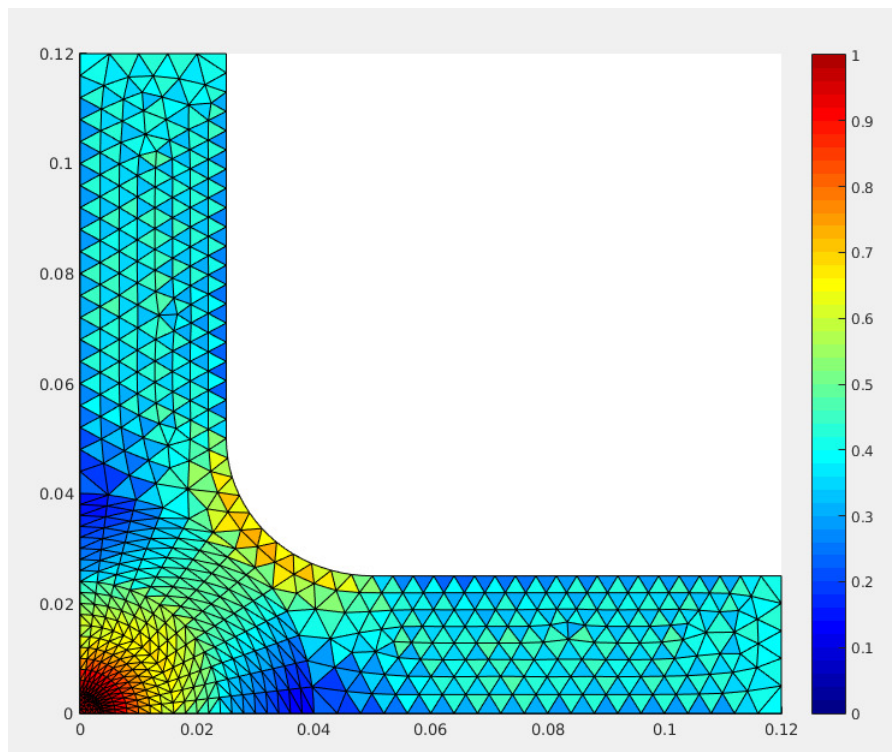


FIGURE 2.21: Distribution de l'endommagement à 7.89E5 cycles

Comparaison avec le critère de Dang-Van :

En quête de comparaison pour validation de ces résultats, nous avons étudié la fatigue de notre éprouvette à l'aide du code de calcul VPS (logiciel de ESI-Group). Ce code utilise le critère de Dang-Van, critère couramment utilisé en bureaux d'études pour déterminer la durée de vie des structures. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 2.22. Ils montrent que la rupture structurale se produit avant 1E7 cycles et que l'endommagement se propage entre la zone centrale et la zone de congé sans indication sur la zone d'initiation de l'endommagement ni sur le nombre de cycles correspondant.

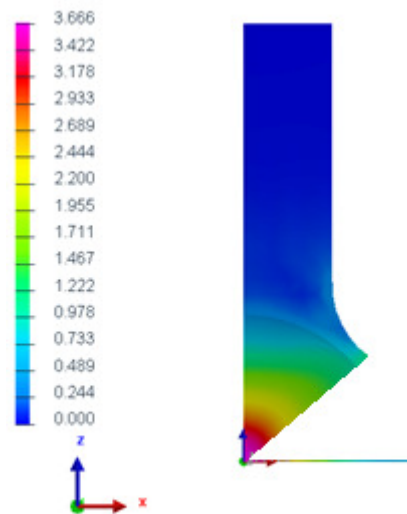


FIGURE 2.22: Les résultats des dommages par le critère de Dang-Van

Confrontation aux essais :

La comparaison des résultats de notre modèle numérique avec ceux des essais expérimentaux, conduits par Shen Chen, est présentée au tableau 2.6 ci-dessous.

	Numérique	Expérimental
Amorçage N_0	1.8E5 cycles	1.6E5 cycles
Rupture N_f	7.49145E5 cycles	7.89E5 cycles
Localisation fissure	Une des diagonales principales reliant le centre à la zone de congé (Figure 2.23)	Les diagonales principales reliant le centre à la zone de congé

TABLE 2.6: Comparaison des résultats numériques-expérimentaux pour l'éprouvette cruciforme

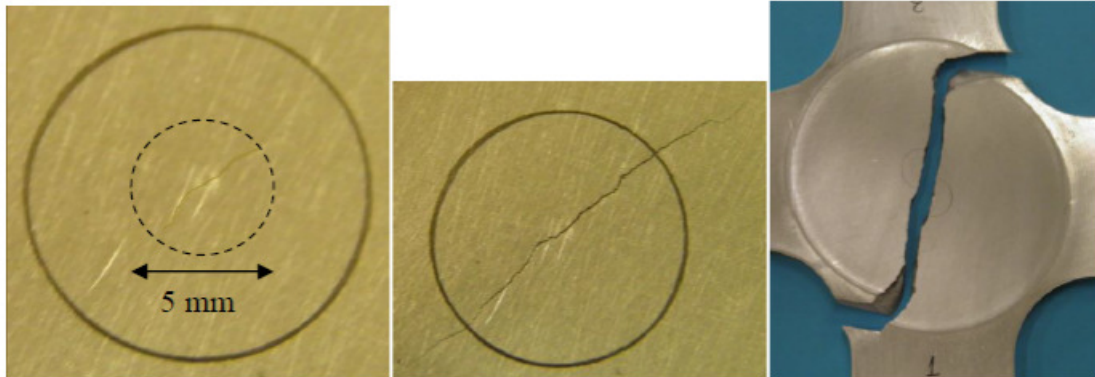


FIGURE 2.23: Résultats expérimentaux : initiation, propagation de l'endommagement et rupture [6]

La figure 2.23 montre les résultats expérimentaux de l'initiation, la propagation de l'endommagement et la rupture structurale. Cette comparaison (Figure 2.23 et Tableau 2.6) montre la bonne correspondance des valeurs numériques et expérimentales.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons modélisé la fatigue des structures en zone d'endurance limitée en utilisant un critère de fatigue multiaxial couplé à un modèle d'endommagement simple. Ce modèle d'endommagement relie contrainte équivalente et endommagement de manière linéaire. Il permet de déterminer pour un chargement donné le champ d'endommagement dans la structure. Le maximum de ce champ est alors utilisé dans une courbe de Wölher du matériau pour déterminer le nombre de cycles conduisant à cet état.

En traduisant l'endommagement enregistré dans le matériau par un affaiblissement des ses caractéristiques mécaniques et en usant de manière itérative de ce calcul de structure, on débouche rapidement sur la ruine finale de la structure.

Ce modèle numérique, couplé à la méthode éléments finis, a été implémenté dans le code de calcul Matlab et testé sur deux essais empruntés à la littérature. Il nous a permis de déterminer la durée de vie d'une structure et de suivre sa dégradation progressive simplement en résolvant un nombre fini et petit de problèmes d'élasticité linéaire. Pour les cas tests étudiés, cinq à six problèmes ont été résolus. Les résultats obtenus coïncident avec les résultats expérimentaux. Ils fournissent en plus un suivi topologique et temporel de la fissure depuis sa naissance jusqu'à son ultime dessin.

Ce modèle représente, à notre avis, une méthode simple, efficace et pas couteuse pour aider les ingénieurs des bureaux d'études dans le dimensionnement des structures travaillant

en fatigue. Au regard des coûts habituels des essais de fatigues comme des simulations numériques, ce modèle représente un outil supplémentaire très abordable et prometteur pour l'avenir.

Chapitre 3

Extension : Modélisation de l'endommagement par dégradation anisotrope de la rigidité basée sur un critère de fatigue et ses gradients

3.1 Introduction

En chapitre 2, l'endommagement par fatigue a été modélisé par une dégradation isotrope des caractéristiques mécaniques des matériaux. Sa modélisation se traduisait par un scalaire. Rappelons que la majorité des structures réelles sont complexes et soumises à des chargements multi-axiaux. L'endommagement et la dégradation des caractéristiques mécaniques sont généralement anisotropes et les caractéristiques mécaniques deviennent donc anisotropes, même si le matériau est au départ isotrope. Ce chapitre présente un modèle d'endommagement anisotrope dont les directions de l'anisotropie sont définies par les gradients du critère. Le niveau de la dégradation est relié ainsi au critère et à son gradient.

3.2 Principe d'équivalence et choix de la matrice indicateur d'endommagement ($I-D$)

Avant d'introduire le modèle dans sa version anisotrope, on rappelle les principes d'équivalence de contrainte, de déformation et d'énergie sur lesquelles on se base pour définir ce modèle. Le principe d'équivalence de contrainte se base sur le fait de considérer qu'un matériau sain est soumis à la même contrainte effective qu'un matériau endommagé.

$$\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \tilde{\mathbf{K}} : \epsilon \\ \sigma = \mathbf{K} : \tilde{\epsilon} \end{cases}$$

En supposant une dégradation linéaire, la déformation effective en fonction de la déformation de matériau non endommagé s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{\epsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \epsilon \tag{3.1}$$

où \mathbf{D} est le tenseur d'endommagement.

En appliquant le principe d'équivalence de déformation, qui est le dual du principe d'équivalence de contrainte, le tenseur de rigidité effective (endommagée) peut être déterminé.

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \tilde{\mathbf{K}} : \epsilon & \text{matériau endommagé} \\ \tilde{\sigma} = \mathbf{K} : \epsilon & \text{matériau sain équivalent} \end{cases}$$

Ceci est obtenu en supposant qu'on a la même déformation sous la contrainte réelle et la contrainte effective et que relation entre la contrainte effective et la contrainte réelle est

linéaire :

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \sigma \quad (3.2)$$

où $(\mathbf{I} - \mathbf{D})$ est un tenseur d'ordre 4 dépend de l'endommagement D .

L'équation (3.2) permet de déduire la relation entre la rigidité initiale et la rigidité endommagée :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}) = \tilde{\mathbf{K}} : \mathbf{K}^{-1} \quad (3.3)$$

Le principe d'équivalence d'énergie considère que l'énergie élastique du matériau endommagé et celle du matériau sain équivalent sont égaux :

$$\frac{1}{2} \sigma : \epsilon = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \tilde{\epsilon} \quad (3.4)$$

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \sigma$$

$$\tilde{\epsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \epsilon$$

En remplaçant les deux équations précédentes dans l'équation (3.4) on trouve :

$$\sigma : \mathbf{K}^{-1} : \sigma = \sigma : (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \tilde{\mathbf{K}}^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-T} : \sigma$$

Soit $\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{S}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-T} : \mathbf{S} : (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{K} : (\mathbf{I} - \mathbf{D})^T \quad (3.6)$$

avec

- \mathbf{S} : matrice de souplesse
- \mathbf{K} : matrice de rigidité
- $\mathbf{I} - \mathbf{D}$: Tenseur d'endommagement.

Cette écriture, qui est basée sur le principe d'équivalence d'énergie, garantit la symétrie du tenseur de souplesse endommagé $\tilde{\mathbf{S}}$.

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{E}_x} & \frac{-\tilde{\nu}_{xy}}{\tilde{E}_x} & \frac{-\tilde{\nu}_{xz}}{\tilde{E}_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{\nu}_{yx}}{\tilde{E}_y} & \frac{1}{\tilde{E}_y} & \frac{-\tilde{\nu}_{yz}}{\tilde{E}_y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{\nu}_{zx}}{\tilde{E}_z} & \frac{-\tilde{\nu}_{zy}}{\tilde{E}_z} & \frac{1}{\tilde{E}_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{zy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{G}_{yx}} \end{bmatrix}$$

On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation anisotrope de l'endommagement et de son évolution dans la zone d'endurance limitée. Pour des structures soumises à un chargement cyclique donné, la modélisation de l'endommagement sera la même que dans la version du modèle présentée en chapitre 2 mais en suivant une loi anisotrope d'évolution de la rigidité du matériau.

Au niveau de la phase incrémentale d'endommagement du chapitre 2, chaque itération est muni d'un calcul élastique. On détermine le champ de contrainte équivalente σ_{eq}^i qui va nous servir à la détermination de l'évolution du dommage. Dans cette version du modèle on s'intéresse au champ de contrainte équivalente et de son gradient qui va jouer un rôle important dans la détermination de l'évolution anisotrope de l'endommagement. Introduire une loi d'évolution anisotrope d'endommagement nous permet de passer de la modélisation de l'endommagement d'un scalaire à un tenseur ($\mathbf{I-D}$).

D'après le principe d'équivalence de contrainte et de déformation, on peut écrire la matrice ($\mathbf{I-D}$) en fonction de la rigidité endommagée et celle du matériau sain sous la forme suivante :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}) = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \quad (3.7)$$

$$I-D = \begin{bmatrix} 1 - D_{xx} & D_{xxyy} & D_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ D_{xxyy} & 1 - D_{yy} & D_{yyzz} & 0 & 0 & 0 \\ D_{xxzz} & D_{yyzz} & 1 - D_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - D_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - D_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - D_{xy} \end{bmatrix}$$

Les mêmes principes Les mêmes principes d'équivalences (énergie, contrainte et déformation) peuvent être appliqués entre deux états successifs avec un état de référence (correspondant à l'état «sain») et un état endommagé (correspondant à un état plus endommagé). La matrice ($\mathbf{I-D}$) sera entre l'état endommagé de la structure à l'itération $i-1$ et l'état endommagé de la structure à l'itération i . On se retrouve ainsi à chaque itération dans la première étape du modèle qui est la détermination de l'initiation d'endommagement ; il s'agit de l'initiation de l'endommagement à l'état actuelle i par rapport à l'état précédente $i-1$.

On peut simplifier l'équation (3.7) en supposant que $(I-D)_{ij}$ pour $i \neq j$ sont négligeables devant les $(1 - D)_{ii}$. ($\mathbf{I-D}$) sera réécrit par une matrice diagonale.

$$\mathbf{M}(D) = \begin{bmatrix} M_{xx}(D) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{yy}(D) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{zz}(D) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{yz}(D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xz}(D) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xy}(D) \end{bmatrix}$$

D'après le principe d'équivalence d'énergie, et en intégrant la forme simplifié de $(\mathbf{I}-\mathbf{D})$, la matrice de souplesse endommagée devient :

$$\tilde{\mathbf{S}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-\mathbf{T}} : \mathbf{S} : (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_x(I-D)_{xx}^2} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x(I-D)_{xx}(I-D)_{yy}} & \frac{-\nu_{xz}}{E_x(I-D)_{xx}(I-D)_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_y(I-D)_{xx}(I-D)_{yy}} & \frac{1}{E_y(I-D)_{yy}^2} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y(I-D)_{yy}(I-D)_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_z(I-D)_{zz}(I-D)_{xx}} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z(I-D)_{zz}(I-D)_{yy}} & \frac{1}{E_z(I-D)_{zz}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zy}(I-D)_{zy}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}(I-D)_{zx}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}(I-D)_{xy}^2} \end{bmatrix}$$

3.3 Détermination de la matrice $(\mathbf{I}-\mathbf{D})$

soit $\mathbf{I}-\mathbf{D} = \mathbf{M}(D)$

Détermination de M_{xx} , M_{yy} et M_{zz}

On améliorant l'approche du chapitre 2, qui est basé sur la dégradation du module de Young, les termes de la matrice d'endommagement, M_{xx} , M_{yy} et M_{zz} seront déterminés.

On prend par exemple la dégradation de la rigidité suivant la direction \mathbf{X} et on note $\overline{\nabla\sigma_{eqx}} = \overline{\nabla\sigma_{eq}} * \overrightarrow{i}$

\overrightarrow{i} est un vecteur de direction X.

Le module d'Young vérifie les conditions suivantes :

pour un élément donné à l'itération 1 :

Si la composante suivant une direction donnée du vecteur gradient de 'contrainte équivalente du critère' est égale à la norme de vecteur de 'contrainte équivalente du critère', alors on a :

$$\lim_{\nabla\sigma_{eqx} \rightarrow \|\nabla\sigma\|} E_x^1(\sigma) = E^0 \quad (3.8)$$

Si la composante suivant une direction donnée du vecteur gradient de 'contrainte équivalente du critère' est égale à zéro, alors on a :

$$\lim_{\nabla\sigma_{eqx} \rightarrow 0} E_x^1(\sigma) = E^0 \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^1 - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} \right) \quad (3.9)$$

On trouve l'expression de la rigidité endommagée suivant la direction \mathbf{X} :

$$E_x^1 = E^0 \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^1 - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}^1} \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1}\|} \right) \right) \quad (3.10)$$

$$E_x^1 = E^0 \left(1 - f(\sigma_{eq}^1, \sigma_e, \sigma_{end}) \left(\frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1}\|} \right) \right) = E^0 \left(1 - f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^1}\|} \right) \right) \quad (3.11)$$

avec $f = \frac{\sigma_{eq}^i - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}}$

Pour deux itérations successives n et $n+1$ la dégradation de la rigidité suivant la direction \mathbf{X} suit la loi suivante :

$$E_x^{n+1} = E_x^n \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^n - \sigma_{end}}{\sigma_e - \sigma_{end}} \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|} \right) \right) \quad (3.12)$$

$$E_x^{n+1} = E_x^n \left(1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|} \right) \right) \quad (3.13)$$

D'où par identification

$$(I - D)_{xx} = \sqrt{\left(1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|} \right) \right)} \quad (3.14)$$

De la même manière on détermine l'évolution de la rigidité suivant la direction \mathbf{Y} et \mathbf{Z} qui prennent les expressions suivantes

$$E_y^{n+1} = E_y^n \left(1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{j}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|} \right) \right) \quad (3.15)$$

$$E_z^{n+1} = E_z^n \left(1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n}\|} \right) \right) \quad (3.16)$$

On détermine de la même manière $(I - D)_{yy}$ et on a l'équation (3.17)

$$(I - D)_{yy} = \sqrt{1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{j}}{\|\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n}\|} \right)} \quad (3.17)$$

et $(I - D)_{yy}$ dans l'équation (3.18)

$$(I - D)_{zz} = \sqrt{1 - f(\sigma_{eq}^n, \sigma_e, \sigma_{end}) * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n}\|} \right)} \quad (3.18)$$

Détermination de $(I - D)_{xy}$, $(I - D)_{yz}$ et $(I - D)_{xz}$

L'endommagement D_{xy} suivant la direction xy dépend forcément de l'endommagement D_{xx} et D_{yy} , respectivement suivant x et y.

On note :

$$d_{xx} = f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n}\|} \right)$$

$$d_{yy} = f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{j}}{\|\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n}\|} \right)$$

Si l'endommagement est totalement suivant x alors :

$$\begin{cases} d_{xx} = 1 \\ d_{yy} = 0 \\ M_{xx} = 0 \\ M_{xy} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

En cas d'endommagement totale suivant y, on a :

$$\begin{cases} d_{yy} = 1 \\ d_{xx} = 0 \\ M_{yy} = 0 \\ M_{xy} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Si on n'a pas d'endommagement ni suivant x et ni suivant y :

$$\begin{cases} d_{xx} = 0 \\ d_{yy} = 0 \\ M_{yy} = 1 \\ M_{xx} = 1 \\ M_{xy} = 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

En utilisant ses conditions, on peut écrire les équations de $M_{xy}(D)$:

$$M_{xy}(D) = (I - D)_{xy} = \sqrt{(1 - d_{xx})^{0.5}(1 - d_{yy})^{0.5}} \quad (3.22)$$

De la même manière on détermine $M_{xz}(D)$ et $M_{yz}(D)$

— suivant xz :

$$M_{xz}(D) = (I - D)_{xz} = \sqrt{(1 - d_{xx})^{0.5}(1 - d_{zz})^{0.5}} \quad (3.23)$$

— suivant yz :

$$M_{yz}(D) = (I - D)_{yz} = \sqrt{(1 - d_{yy})^{0.5}(1 - d_{zz})^{0.5}} \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned} d_{xx} &= f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|}\right) \\ d_{yy} &= f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{j}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|}\right) \\ d_{zz} &= f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{\nabla\sigma_{eq}^n}\|}\right) \end{aligned}$$

3.4 Détermination du coefficient de poisson ν

En explicitant les termes de matrice M(D) on peut déterminer l'expression du coefficient de poisson.

Pour deux étapes successives n et $n+1$ on trouve

$$\nu_{xy}^{n+1} = \nu_{xy}^n * \frac{M_{xx}}{M_{yy}}$$

$$\nu_{xy}^{n+1} = \nu_{xy}^n \sqrt{\frac{1 - d_{xx}}{1 - d_{yy}}} \quad (3.25)$$

$$\nu_{zy}^{n+1} = \nu_{zy}^n \sqrt{\frac{1 - d_{zz}}{1 - d_{yy}}} \quad (3.26)$$

$$\nu_{zx}^{n+1} = \nu_{zx}^n \sqrt{\frac{1 - d_{zz}}{1 - d_{xx}}} \quad (3.27)$$

Détermination de nombre de cycle Vu que seulement la loi d'évolution de l'endommagement qui va changer par rapport à la version isotrope, la manière de la détermination de nombre de cycles de l'itération i reste in-changeable par rapport au chapitre précédent.

3.5 Validation sur des exemples académiques

3.5.1 Exemple 1 : plaque rectangulaire

On a implémenté cette version du modèle sous Matlab et on l'a testé sur un exemple démonstratif : c'est une plaque rectangulaire (de dimensions 5mm*10mm), simplement appuyée et soumise à une force de flexion.

Le critère de fatigue choisi est celui de Sines. La figure 3.1 montre la distribution de critère de Sines.

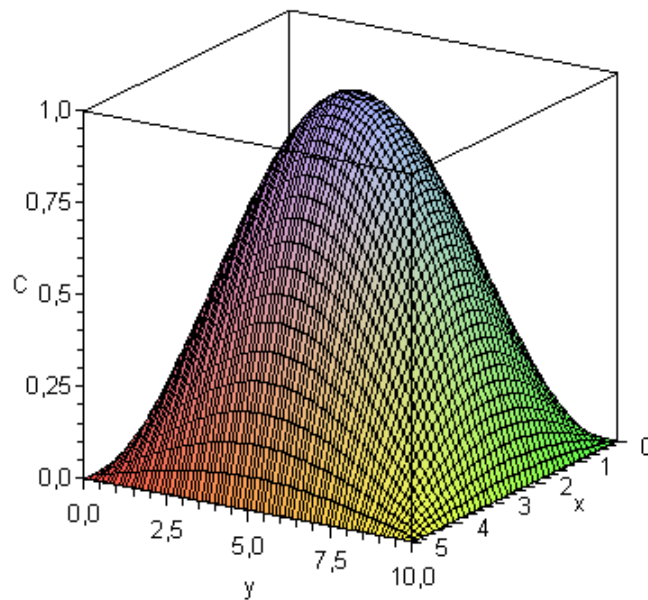


FIGURE 3.1: Distribution de critère du fatigue de *Sines*

La distribution de gradient de critère de fatigue suivant X est représentée en figure 3.2 et suivant Y en 3.3

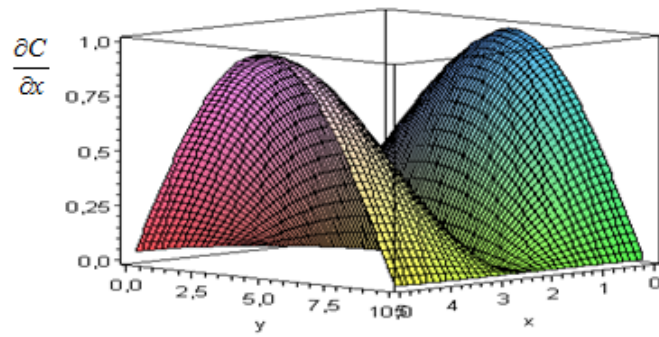


FIGURE 3.2: Gradient du critère suivant X

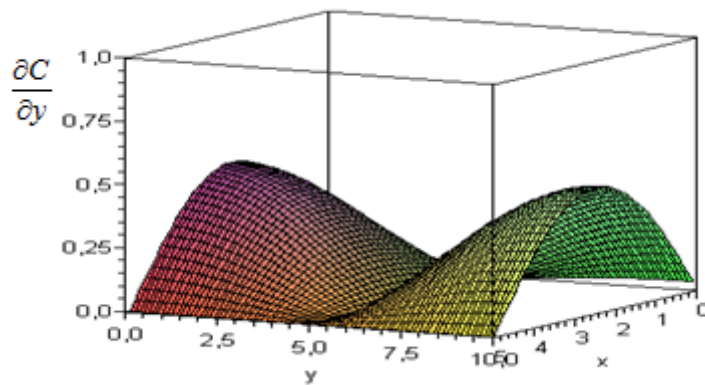


FIGURE 3.3: Gradient du critère suivant Y

Pour l'évolution des propriétés mécaniques de ce modèle, on trace dans les figures suivantes l'évolution du module d'Young. Les figures 3.5 et 3.4 montrent l'évolution du module d'Young suivant la direction X.

Les figures 3.6 et 3.7 présentent l'évolution du module d'Young suivant la direction Y.

Comme montre les figures suivantes, le critère de fatigue est maximal(constante C=1) dans la partie centrale de pièce alors que le gradient de critère dans cette partie est nul, ce qui explique son endommagement en premier.

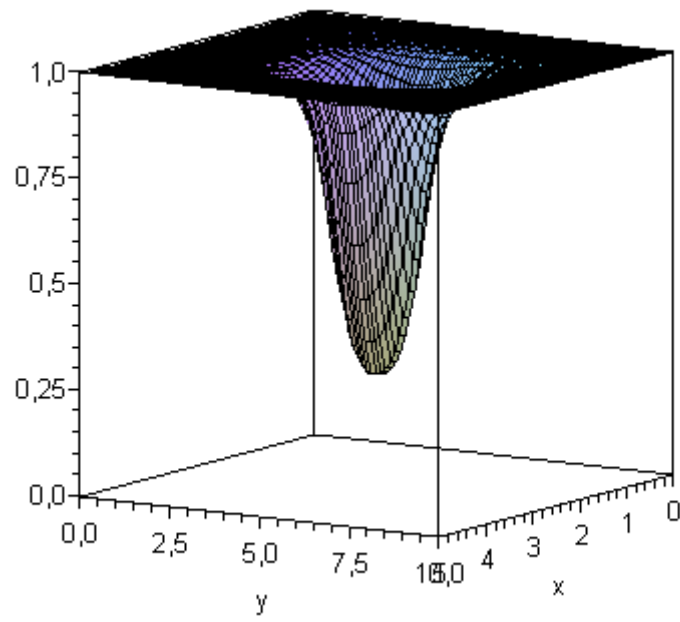


FIGURE 3.4: La distribution de $\frac{E_x^{n+1}}{E_x^n}$

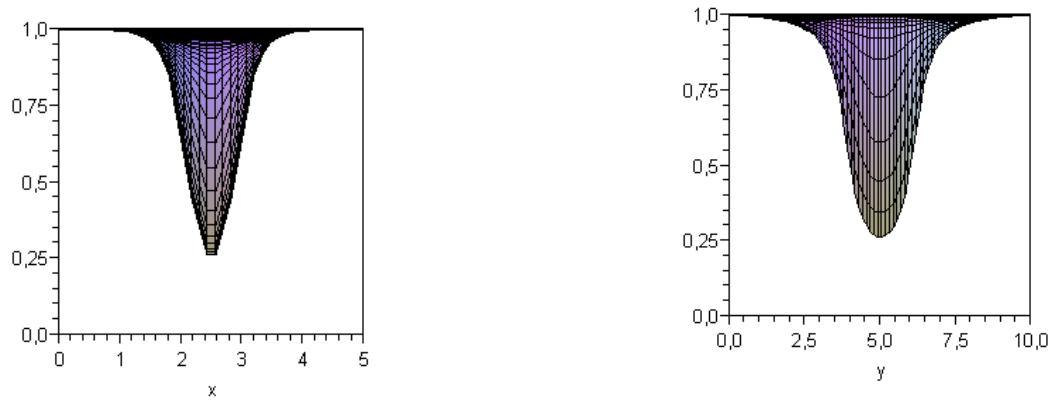


FIGURE 3.5: La distribution de $\frac{E_x^{n+1}}{E_x^n}$

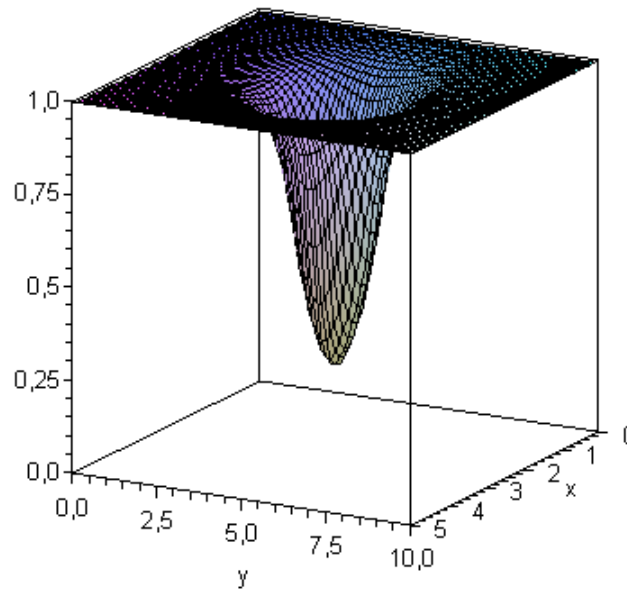


FIGURE 3.6: La distribution de $\frac{E_y^{n+1}}{E_y^n}$

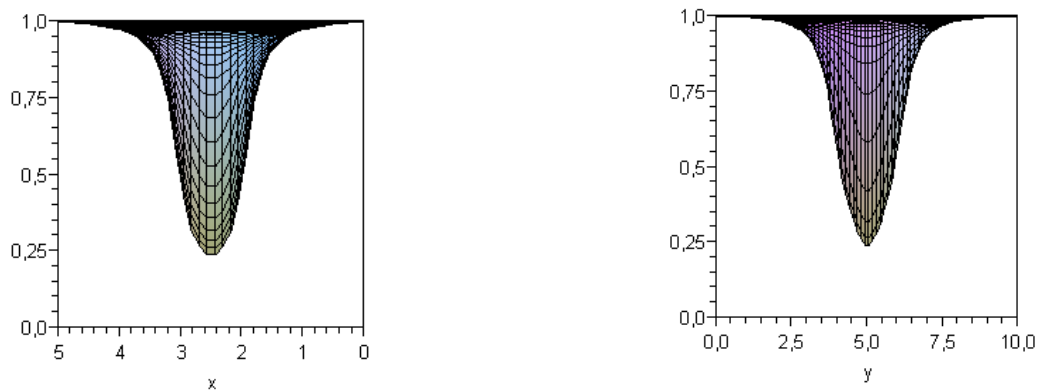


FIGURE 3.7: La distribution de $\frac{E_y^{n+1}}{E_y^n}$

3.5.2 Exemple 2 : pièce uni-axial

La structure étudiée est la pièce uni-axiale du chapitre 2 (pièce de fatigue en traction). Une simulation par éléments finis, et à l'aide de notre code développé sur Matlab, a été effectuée sur le quart de la pièce en raison de la symétrie du problème. Comme on a déduit dans le chapitre précédent que notre modèle est sensible au raffinement du maillage et de l'interpolation, on a testé cet exemple en adoptant un maillage fin et un degré d'interpolation P2.

Les résultats ainsi trouvés sont présentés dans les figures suivantes où on a tracé la carte de distribution de l'endommagement D_{xx} et D_{yy} de la dernière itération de calcul, ainsi que les vecteurs gradients de contraintes équivalentes pour prouver le sens de propagation

de l'endommagement.

On trouve que la durée de vie de la structure est proche de celle déterminée expérimentalement et celle trouvée avec une dégradation isotrope. Selon les champs du gradient de contrainte explicités par la figure 3.8 le gradient de contrainte est maximum dans la zone centrale et presque nul dans le reste de la structure.

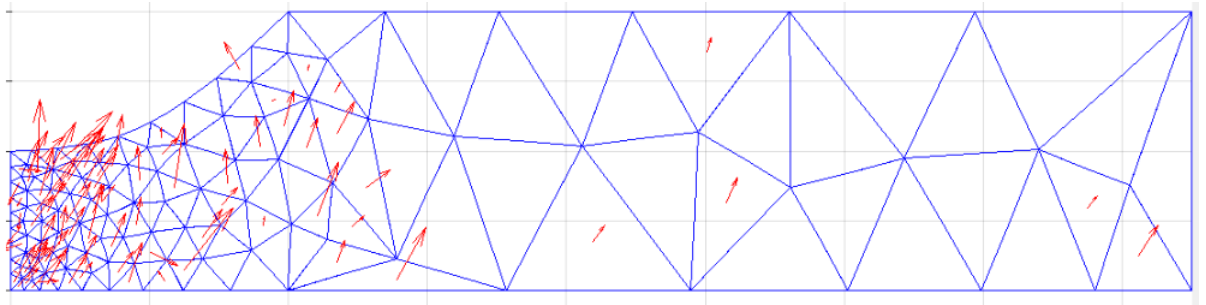
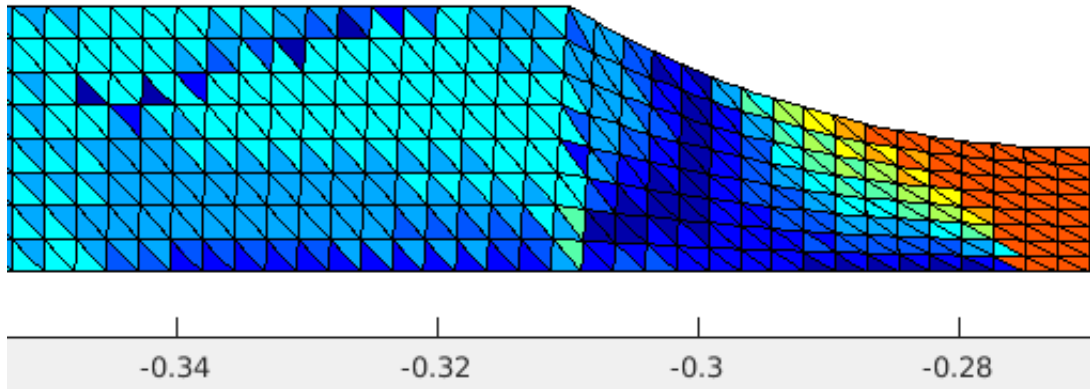
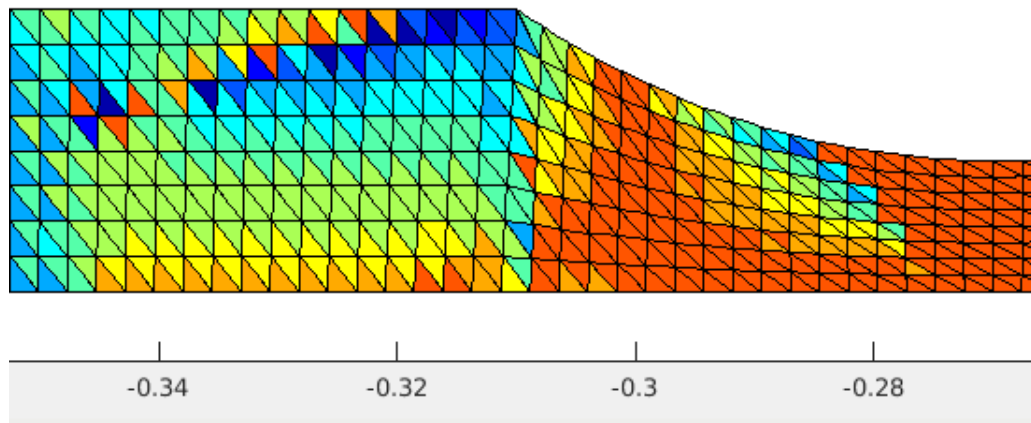


FIGURE 3.8: Les vecteurs gradient de contrainte équivalente de civière de fatigue

FIGURE 3.9: Le champs d'endommagement suivant X D_x :FIGURE 3.10: Le champs d'endommagement suivant Y D_y :

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de l'endommagement par fatigue se limite à la phase de l'endurance limitée et pour les structures soumises aux chargements multi-axiaux à amplitude constante. Les critères des fatigues, comme ceux de Dang Van Papadopoulos, sines,... se sont révélées pratiques pour la détermination de l'état de la pièce à chaque cycle. En se basant sur ces critères, et même s'ils sont définies durant la phase de l'endurance illimitée, et en utilisant la courbe de Wöhler, une approche pragmatique à l'échelle macroscopique a été proposée et cela pour :

- Le nombre de cycles d'amorçage de l'endommagement.
- Les directions de la propagation de l'endommagement.
- La durée de vie de la structure

Dans cette approche, l'endommagement se manifeste par une dégradation des caractéristiques mécaniques locales. Elle comporte 3 étapes :

- phase 1 : Détermination l'amorçage de l'endommagement
 - Détection de la zone d'initiation de l'endommagement.
 - la détermination du nombre de cycles d'initiation.
- Phase 2 : Détermination des directions de la propagation d'endommagement
- Phase 3 : Détection de la rupture structurale : durée de vie de la structure.

L'approche a été appliquée sur deux exemples sur :

- une éprouvette en traction uni-axiale avec un chargement à amplitude constante, issu de la littérature. Comparés aux résultats expérimentaux, ceux issus de cette approche sont satisfaisants durant les 3 phases de l'analyse.
- une plaque rectangulaire soumise à des cycles de chargement en flexion à amplitudes constante. Même si l'exemple a un caractère académique, les résultats analytiques connus de l'endommagement d'une telle structure ont été retrouvés.

Chapitre 4

Version simplifiée du modèle

4.1 Introduction

Vu la complexité d'un développement spécifique pour pouvoir tester l'approche présentée en chapitre 3 sur des applications industrielles, deux formes simplifiées ont été proposées. Elles n'utilisent que des outils existants, tout en gardant l'esprit de l'approche (dégradation locale des caractéristiques mécaniques).

La première forme de cette approche consiste à éliminer les éléments endommagés, assurant une répartition des contraintes et une propagation locale des dommages.

La deuxième forme consiste à modéliser l'endommagement par une diminution brutale des caractéristiques mécaniques. Une loi de comportement bi-linaire élastique a été adoptée.

La contrainte limite de la première phase élastique est dictée par la courbe de Wöhler. Les deux formes simplifiées, ici présentées, permettent de proposer pour l'ingénieur une méthodologie de prévision de la durée de vie des structures et cela dès la phase de conception. En effet, elles déterminent notamment :

- les zones affectées,
- le nombre de cycles à l'amorçage de l'endommagement,
- l'orientation de la propagation de l'endommagement,
- le nombre de cycles pour atteindre la rupture finale.

Les résultats issus des deux formes simplifiées sont comparés aux essais expérimentaux et aux autres-modèles existants.

4.2 Présentation du modèle

Le processus de la fatigue est un phénomène progressif à 3 phases : initiation de la dégradation, propagation de cette dernière et la rupture finale.

Pour caractériser le comportement en fatigue, des courbes d'endurance (Wöhler) sont tracées pour déterminer les limites de la fatigue sous des chargements alternés (traction, cisaillement, flexion, torsion). Sous un chargement multi-axial et même variable dans sa répartition spatiale, l'approche détaillée ci-dessous permet de schématiser à la fois l'initiation de l'endommagement, sa propagation et la rupture finale de la structure analysée. C'est une approche itérative et cumulative de l'endommagement. Cette approche suppose que l'endommagement de la matière est fonction de la réparation de la fonction surface défini par un critère. La dégradation de la matière a donc une répartition non homogène en fonction de l'évolution du critère adopté. Dans le cas de l'endommagement par fatigue, un critère de type approche globale (se basent sur les invariants du tenseur de contraintes) est adopté.

4.2.1 Cadre de validité du modèle

Le présent modèle est valable sous les hypothèses suivantes :

- L'endommagement est engendré par la contrainte de cisaillement : on calcule une contrainte équivalente de cisaillement de chaque élément en se basant sur un critère de fatigue choisi. Les éléments qui dépassent la limite définie du cisaillement critique sont considérés comme endommagés.
- La contrainte limite de la première phase élastique du matériau endommagé est approximée par la limite d'élasticité stabilisée du matériau.
- La validité de ce modèle est dans la zone d'endurance limitée.
- Un calcul élément fini avec une loi de comportement bi-linéaire élastique est choisi

4.2.2 Phase d'initiation (d'amorçage) de l'endommagement

L'objectif de cette étape est la prédiction de la zone d'initiation de l'endommagement et du nombre de cycles nécessaire. Un critère d'endommagement basé sur la contrainte de cisaillement est adopté pour définir l'initiation de cette étape.

L'endommagement est schématisé par une diminution des caractéristiques mécaniques de la zone endommagée. Un comportement élastique bi-linéaire est adopté. La limite de la première branche est définie par le critère. Après un calcul élastique sous l'effet d'un cycle de chargement, un post-traitement permet de fournir le champ de contraintes et la répartition de la fonction "critère de fatigue". Dans ce qui suit, la contrainte équivalente de Sines ($\sigma = \sqrt{J_2} + \alpha I_m$) est choisie.

La zone d'amorçage et le nombre de cycles nécessaires à l'amorçage sont définies à travers les éléments qui ont les fortes valeurs de la fonction critère. Le nombre de cycles à l'amorçage de l'endommagement est le nombre de cycles qui correspondent à la projection de la contrainte maximale sur la courbe de Wöhler du cisaillement de matériaux utilisés N_0 . La zone où cette contrainte est maximale correspond à la zone d'amorçage de fissure.

4.2.3 Phase de propagation de l'endommagement

Après avoir déterminé le nombre de cycles de l'amorçage d'endommagement N_0 , on cherche à définir l'orientation de la propagation de l'endommagement.

Vu que le calcul est itératif, et que le cumul de l'endommagement est non linéaire, il est important de bien choisir les paramètres permettant de définir l'étape suivante.

4.2.3.1 Saut de cycle

La méthode proposée pour définir les paramètres itératifs consiste à définir une série statistique guidée par une fonction et un effectif. Pour l'endommagement par fatigue, cette fonction est la déformation élastique cumulée de la seconde phase élastique et l'effectif correspond aux surfaces des éléments.

Le moment d'ordre 1 (la valeur moyenne) de la série statistique et le moment d'ordre 2 (l'écart-type) jouent un rôle important dans la détermination de saut de cycles.

ϵ_p	ϵ_{p1}	ϵ_{p2}	...	ϵ_{pn}
surface	S_1	S_2	...	S_n

TABLE 4.1: Série statistique de déformations de la deuxième phase élastique

La valeur moyenne de la déformation de la deuxième phase élastique est donnée par l'expression (4.1)

$$\bar{\epsilon}_p = \sum_{j=1}^n \frac{S_j * \epsilon_{pj}}{S_{tot}} \quad (4.1)$$

Dans un premier temps on définit la variance de la série statistique dont l'expression est donnée par l'équation (4.2) :

$$V = \sum_{j=1}^n \frac{S_j * (\epsilon_{pj} - \bar{\epsilon})^2}{S_{tot}} \quad (4.2)$$

De cette équation (4.2), on peut déduire l'expression de l'écart-type qui est exprimé par l'équation (4.3).

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{S_j * (\epsilon_{pj} - \bar{\epsilon})^2}{S_{tot}}} \quad (4.3)$$

L'écart-type donne une information sur la distribution de la déformation de la deuxième phase élastique autour de la valeur moyenne. Il se découle de la variance.

Dans un premier temps si l'écart-type est proche de 0 alors les valeurs sont toutes proches de la valeur moyenne.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Delta N = \Delta N_{max} \quad (4.4)$$

Si l'écart-type est grand (proche de la moitié de la valeur moyenne) les valeurs ne sont pas homogènes.

$$\lim_{s \rightarrow \bar{\epsilon}/2} \Delta N = 1 \quad (4.5)$$

Alors à partir de deux équations (4.4) et (4.5) on peut déterminer l'expression du saut de cycles sous la forme suivante

$$\Delta N = \frac{1 - \Delta N_{max}}{\bar{\epsilon}} * s + \Delta N_{max} \quad (4.6)$$

La détermination de ΔN_{max}

Le nombre de cycles à l'amorçage de fissure est N_0 . Dans la zone d'endurance limitée, ΔN_{max} peut être exprimé par :

$$\Delta N_{max} = \frac{(1E7 - N_0)}{4}$$

Chaque étape endommagée "i" est considérée comme un état sain pour l'étape "i+1". L'évolution de ΔN_{max} en fonction du nombre de cycles est définie par l'équation (4.7)

$$\Delta N_{max} = \frac{1E7 - N_i}{4} \quad (4.7)$$

Cette équation est valable entre [0 ; 1E7] on

$$\Delta N_{max} = \min\left(\frac{1E7 - N_i}{4}, NN\right) \quad (4.8)$$

avec NN : le nombre de cycles qui engendre un $\Delta D < D_c$

D_c est l'endommagement critique.

Détermination de NN

En se limitant à la zone d'endurance limitée, et en adoptant le modèle de Basquin (à titre d'exemple) la contrainte peut être écrite en fonction du nombre de cycles sous la forme suivante :

$$\sigma = CN^\alpha$$

L'évolution de la contrainte effective peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sigma(N + \Delta N) = \sigma(N)(1 - \Delta D) \quad (4.9)$$

$$\Delta D = 1 - \frac{\sigma^{N+\Delta N}}{\sigma^N} \quad (4.10)$$

On trouve l'équation suivante

$$\Delta D = 1 - \frac{C(N + \Delta N)^\alpha}{C(N)^\alpha} \quad (4.11)$$

$$1 - \Delta D = \frac{C(N + \Delta N)^\alpha}{C(N)^\alpha} \quad (4.12)$$

$$\Delta N = N \left((1 - \Delta D)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) \quad (4.13)$$

En analysant des exemples, on a constaté qu'à chaque itération, la fonction ΔN_{max} décroît en fonction du nombre de cycles. La convergence vers la durée de vie expérimentale est pilotée donc par la diminution de la valeur de saut de cycle maximal ΔN_{max} . La figure 4.1 montre l'évolution du saut de cycle maximal ΔN_{max} .

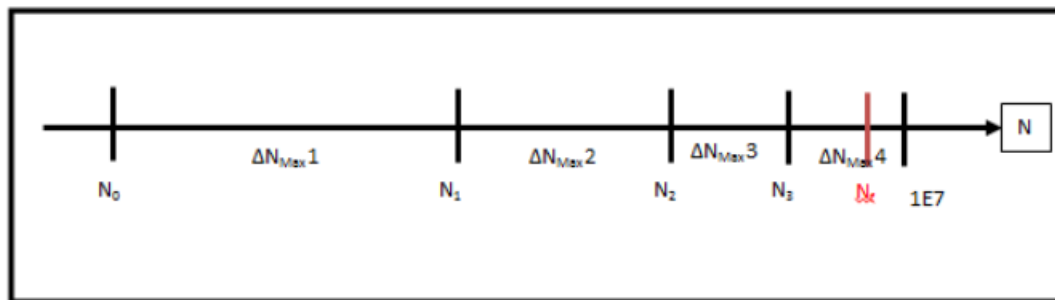


FIGURE 4.1: Evolution de saut de cycle maximal ΔN_{max}

Cette modélisation de saut de cycle nous permet de constater que le nombre d'itérations dépend de la distribution de la déformation de la deuxième phase élastique. Plus que l'écart-type du champ de déformation de la deuxième phase élastique est grand, plus la valeur de saut de cycle est petite.

Définir un saut de cycles est équivalent à définir le nombre de cycles d'une itération. On projette ce nombre de cycles déterminé sur la courbe de Wöhler de traction alternée du matériau. De cette manière, on obtient la contrainte limite de la première phase élastique de matériaux à cette étape "nombre de cycles". Cette approximation est basée sur la définition de la courbe de Wöhler dans la zone d'endurance limitée. La contrainte équivalente engendrée par la courbe de Wöhler est engendrée par une déformation de la deuxième phase élastique d'un cycle d'itération (caractérisé par un nombre de cycles de chargement).

Le choix de cette approximation de la dégradation de la contrainte limite de la première

phase élastique est justifié par un développement de Taylor d'ordre 1.

Dans la zone d'endurance limitée de la courbe de Wöhler, la contrainte s'exprime en fonction de nombre de cycles sous l'expression (4.14)

$$\sigma = \sigma_y = CN^\alpha \quad (4.14)$$

Le lien entre deux contraintes limites successives de la 1^{er} phase élastique est :

$$\sigma_y^{i+1} = \sigma_y^i + \Delta\sigma_y$$

$$\sigma_y^{i+1} = \sigma_y^i + (\sigma_y^i - \sigma_y^{i+1})$$

La validité de ce modèle dans la zone d'endurance limitée nous permet de remplacer la contrainte par son expression en fonction de nombre de cycles (formule de Basquin (4.14)).

$$\sigma_y^{i+1} = \sigma_y^i + \frac{\sigma_y(N^i) - \sigma_y(N^i + \Delta N_i)}{\Delta N_i} \Delta N_i \quad (4.15)$$

$$\sigma_y^{i+1} = \sigma_y^i + \left. \frac{d\sigma_y}{dN} \right|_{N^i} \Delta N_i \quad (4.16)$$

$$\sigma_y(N_{i+1}) = \sigma_y(N_i) + \sigma_y'(N_i)(N_{i+1} - N_i) \quad (4.17)$$

En surfant sur la limite du critère, défini par la courbe de Wöhler, la représentation de l'endommagement par fatigue est la déformation de la deuxième phase élastique. La contrainte limite de la première phase élastique est donc choisie comme la limite par fatigue de la courbe de Wöhler. A chaque itération qui correspond à un saut de cycle ΔN , on diminue la contrainte limite de la première phase élastique (en suivant la courbe de Wöhler, avec un saut de cycle calculé) et on charge la structure par la déformation de la deuxième phase élastique, en plus du cycle de chargement. Les deux figures suivantes 4.2 et 4.3 représentent une schématisation du modèle : itération du processus de l'endommagement, de la répartition des contraintes et de la propagation de l'endommagement.

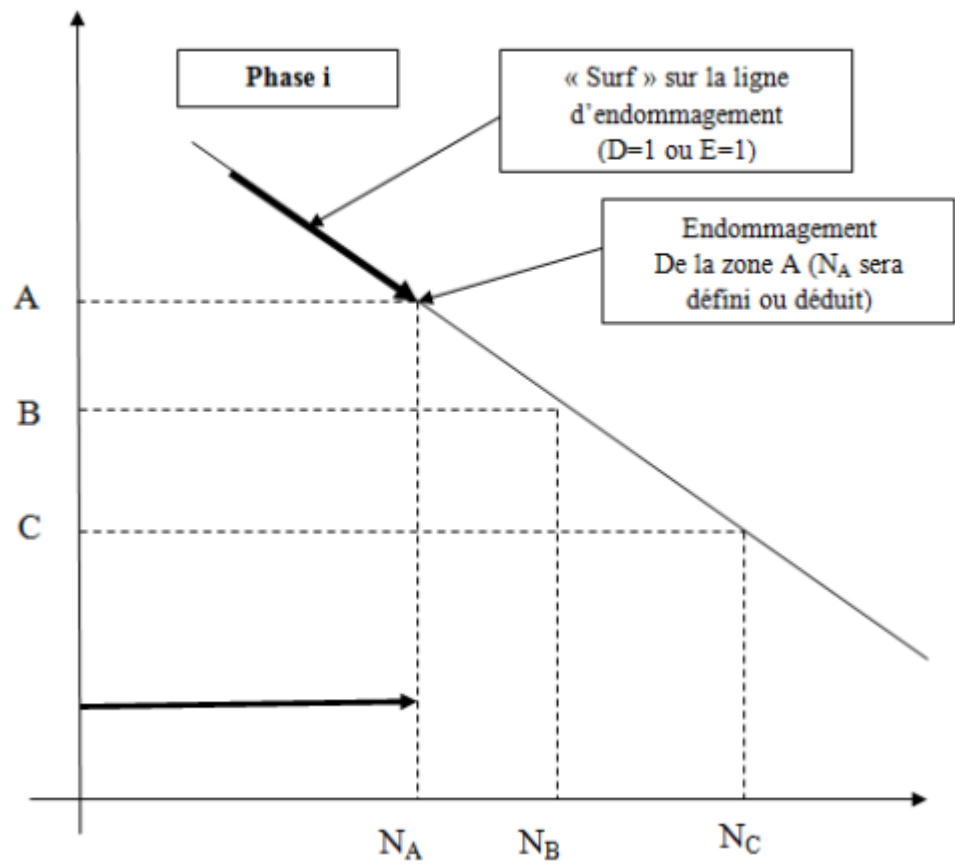


FIGURE 4.2: Étape i du processus d'endommagement par fatigue

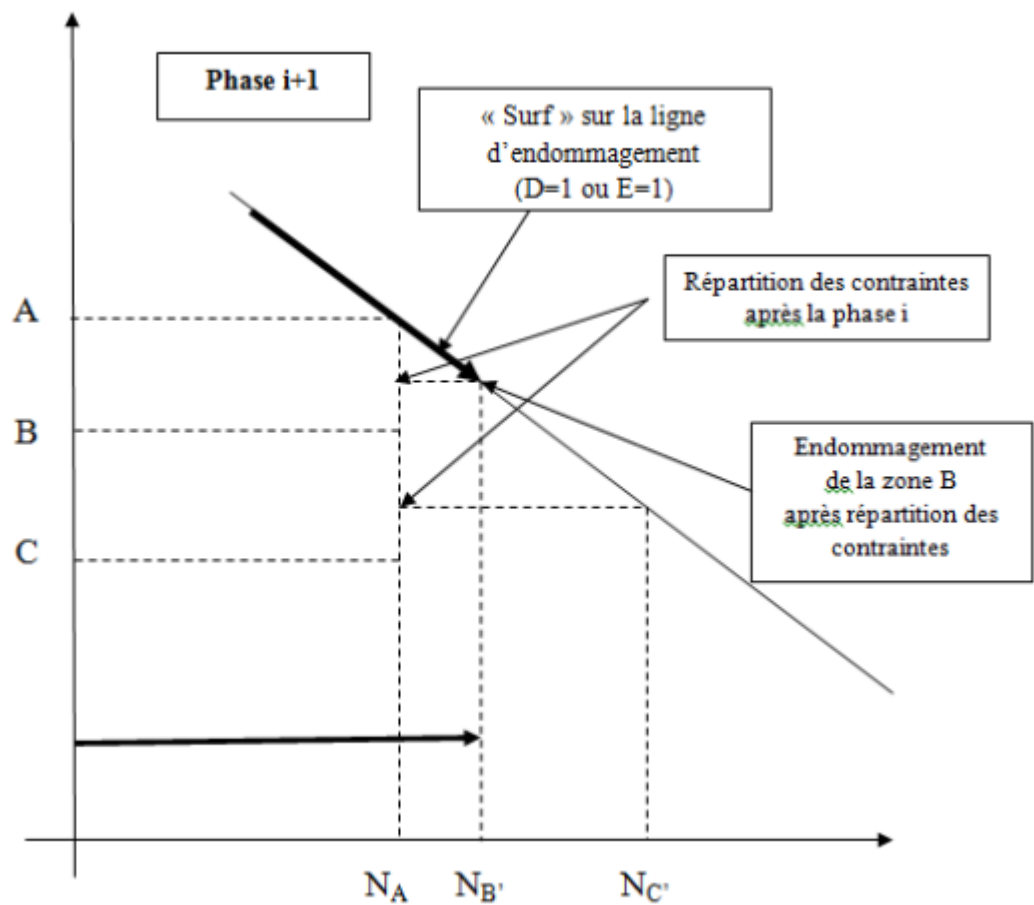
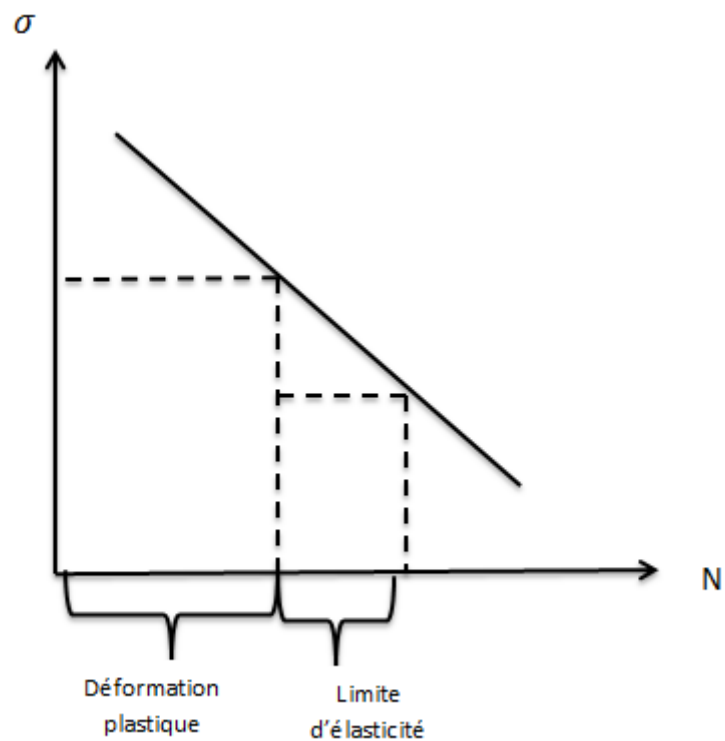


FIGURE 4.3: Étape $i+1$ du processus d'endommagement par fatigue

Ce modèle itératif prend en compte tout l'historique de l'endommagement.

Pour une durée de vie de N_i cycles on a :

- de 0 à N_{i-1} : les déformations de la deuxième phase élastique cumulées
 - de N_{i-1} à N_i : la dégradation de la contrainte limite de la première phase élastique.
- la figure 4.4 montre l'idée citée ci-dessus de la division de nombre de cycles

FIGURE 4.4: Prise en compte de tous les N_{i-1} cycles

Avec ce modèle les deux variables d'états choisis sont la déformation de la deuxième phase élastique entre 0 et N_{i-1} et la contrainte limite de la première phase élastique du matériau entre N_{i-1} et N_i .

4.2.4 Phase finale : rupture structurale

La rupture structurale est définie par des difficultés numériques de convergence dues à la diminution successive des caractéristiques mécaniques d'une zone de la structure.

4.2.5 Tableau récapitulatif du modèle

Pour bien présenter ce modèle itératif, on le schématise dans le tableau 4.3.

Étape initiale :
<p>*** Choix du critère de fatigue</p> <p>*** Détermination de l'état de contrainte initial σ_0</p> <p>*** Détermination des cycles nécessaire pour introduire l'endommagement par fatigue N_0 en utilisant la courbe de Wöhler</p>
Phase de propagation
<p>*** La contrainte limite de la première phase élastique suivra la courbe de Wöhler et va suivre, avec les itérations, sa descente.</p> <p>Ceci représente l'endommagement du matériau</p> <p>*** Un calcul bi-linéaire élastique est mené pour un cycle de chargement</p> <p>*** La déformation de la deuxième phase élastique est déterminée et elle sera un chargement pour l'itération suivante.</p> <p>*** La contrainte limite de la première phase élastique de l'étape suivante diminue en suivant la courbe de Wöhler ; la déformation de la deuxième phase élastique sera un chargement, en plus du chargement cyclique.</p> <p>La redistribution des efforts sera faite d'une façon naturelle.</p>
Phase de rupture
<p>La rupture structurale est définie par une défaillance de la rigidité de la structure.</p> <p>Le calcul sera arrêté automatiquement.</p>

TABLE 4.2: Tableau récapitulatif de l'approche : première version simplifiée

La deuxième version simplifiée du modèle est présenté dans le tableau suivant.

Étape initiale :
<p>*** Choix du critère de fatigue</p> <p>*** Détermination de l'état de contrainte initial σ_0</p> <p>*** Détermination des cycles nécessaire pour introduire l'endommagement par fatigue N_0 en utilisant la courbe de Wöhler</p>
Phase de propagation
<p>*** En partant de l'état de contrainte de l'itération précédente σ_{i-1} et du nombre de cycles nécessaires pour introduire le dommage par fatigue N^{i-1} , La répartition des dommages est définie en utilisant le critère de dommage choisi D^{i-1}</p> <p>*** La zone avec un indice d'endommagement $D^{i-1} > 1$ est éliminée en utilisant une loi cumulative de dommage</p> <p>*** La nouvelle répartition des contraintes est définie et l'état des contraintes pour l'itération suivante est déterminée : σ_i</p> <p>*** La propagation des dommages est définie par la propagation de la zone endommagée</p>
Phase de rupture
<p>La rupture structurale est définie par une défaillance de la rigidité de la structure.</p> <p>Le calcul sera arrêté automatiquement.</p>

TABLE 4.3: Tableau récapitulatif de l'approche : deuxième version simplifiée

4.3 Mise en œuvre numérique

Pour analyser la pertinence de ce modèle, deux tests ont été choisis :

- un exemple académique de référence : c'est une plaque cruciforme en traction equi-bi-axial
- un autre exemple industriel : c'est une pôle de roulement éolien de EDF.

4.3.1 Exemple académique : Plaque cruciforme [6]

C'est un exemple de référence choisi dans la littérature et présenté dans le premier chapitre bibliographie. Cet exemple montre la pertinence de l'approche pour aboutir à la détection du début, puis l'évolution de l'endommagement par fatigue jusqu'à la rupture structurale. Pour les résultats numériques, le logiciel de développement et de recherche Cast3M et le logiciel VPS développé par la société industrielle ESI Group ont été utilisés pour tester le présent modèle.

4.3.1.1 Saut de cycle fixe : 1E5 cycles

Ce modèle a été implémenté sur le code GIBIENE Cast3M : un comportement bi-linaire élastique a été adopté et des éléments finis triangulaires ont été choisis. Le maillage a été affiné dans la partie centrale de l'éprouvette.

Interprétation des résultats

La carte de déformations de la deuxième phase élastique montre que la zone centrale s'endommage plus rapidement (c'est la zone où on a la plus faible épaisseur) en premier temps puis à une autre zone d'endommagement qui apparaît dans la zone de congé (entre les bras). La ligne de propagation de l'endommagement est entre ces deux zones : la propagation de fissure se fait de la zone de centrale vers la zone de congé. La rupture structurale a lieu lorsque les deux zones endommagées se rejoignent.

Les résultats obtenus avec le présent modèle sont conformes à ceux des essais. Les figures 4.22, 4.23 et 4.10 montrent l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles (résultats numériques issus du modèle).

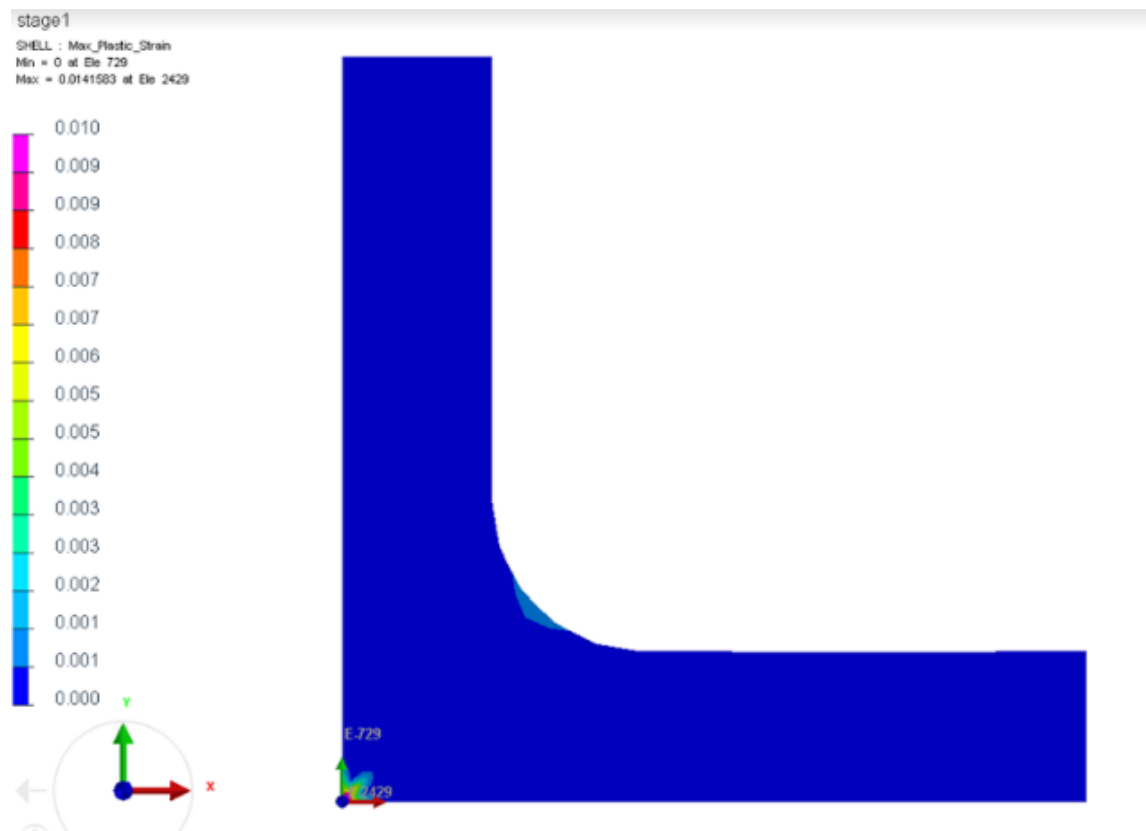


FIGURE 4.5: Étape 1 : état de la structure à $N = 2E5$ cycles

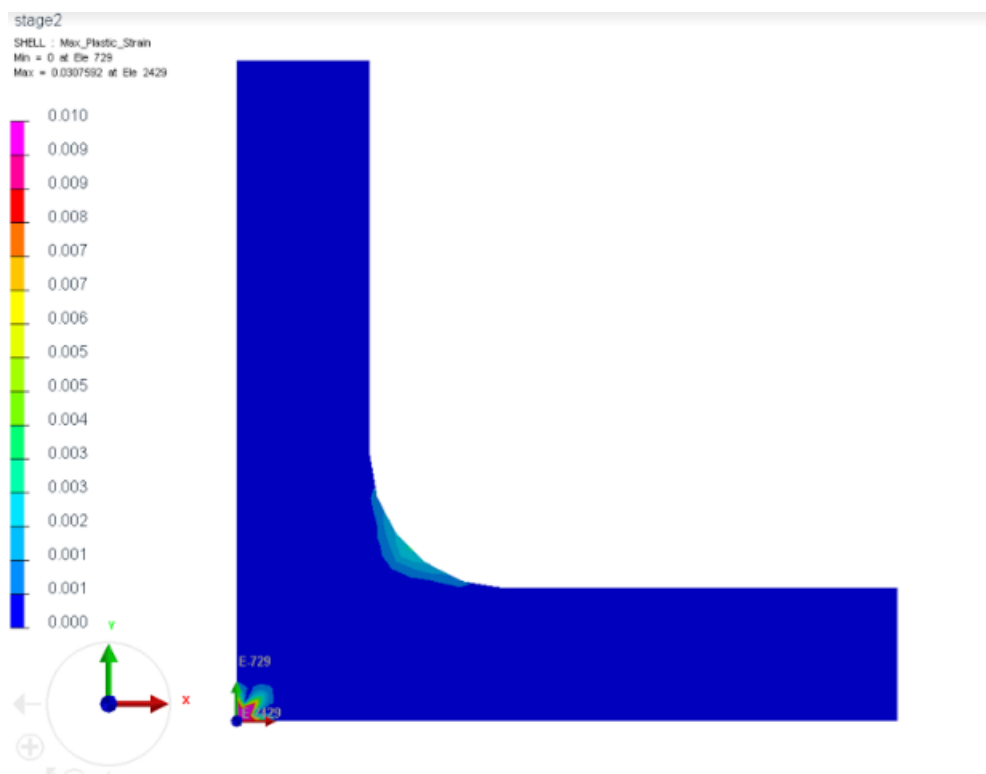


FIGURE 4.6: Étape 2 : état de la structure à $N = 3E5$ cycles

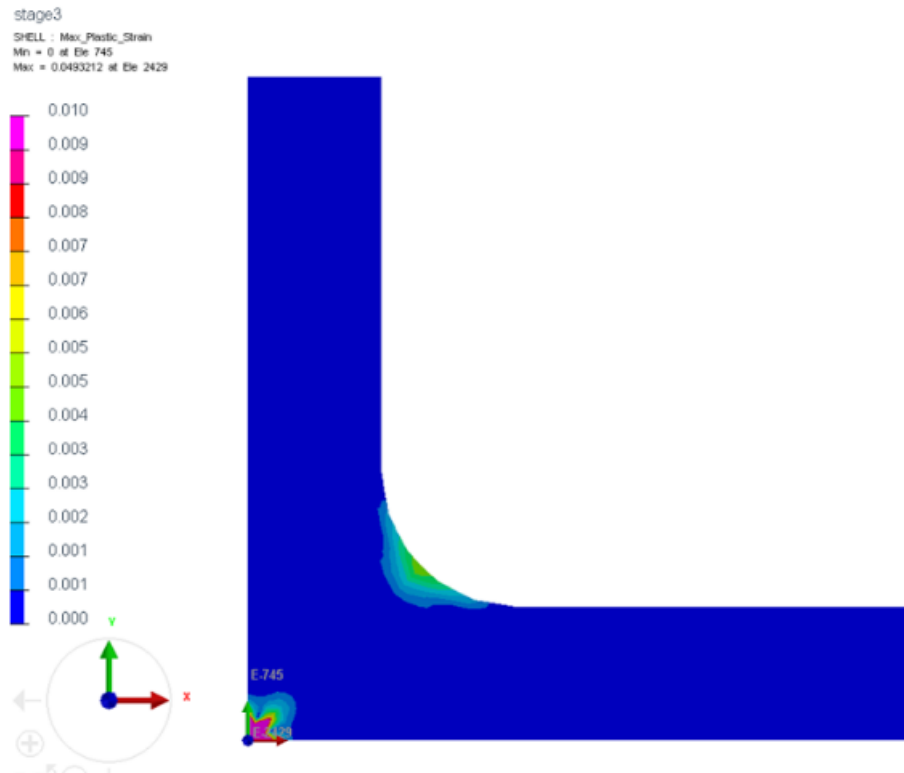


FIGURE 4.7: Étape 3 : état de la structure à $N = 4E5$ cycles

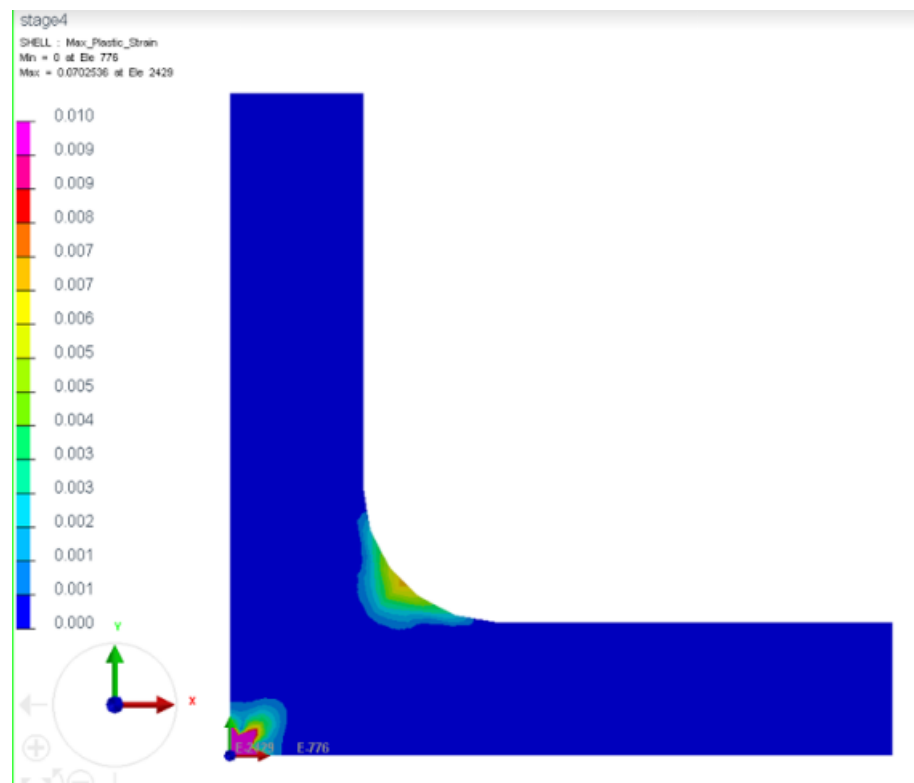


FIGURE 4.8: Étape 4 : état de la structure à $N = 5E5$ cycles

Vu la symétrie de la pièce, seulement $\frac{1}{8}$ de la structure a été considérée.

L'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de simulations effectuées en fonction du saut de cycles est donnée par la figure 4.11 et le tableau 4.3.1.1 montre l'erreur relative pour quelques sauts de cycles. Entre un saut 1E5 cycles et de 1E4 cycles, le nombre de simulation est multiplié par 70 ; sachant que le calcul est un calcul bi-élastique coûteux en temps de calcul et en espace mémoire mais la précision sur la durée de vie est meilleure.

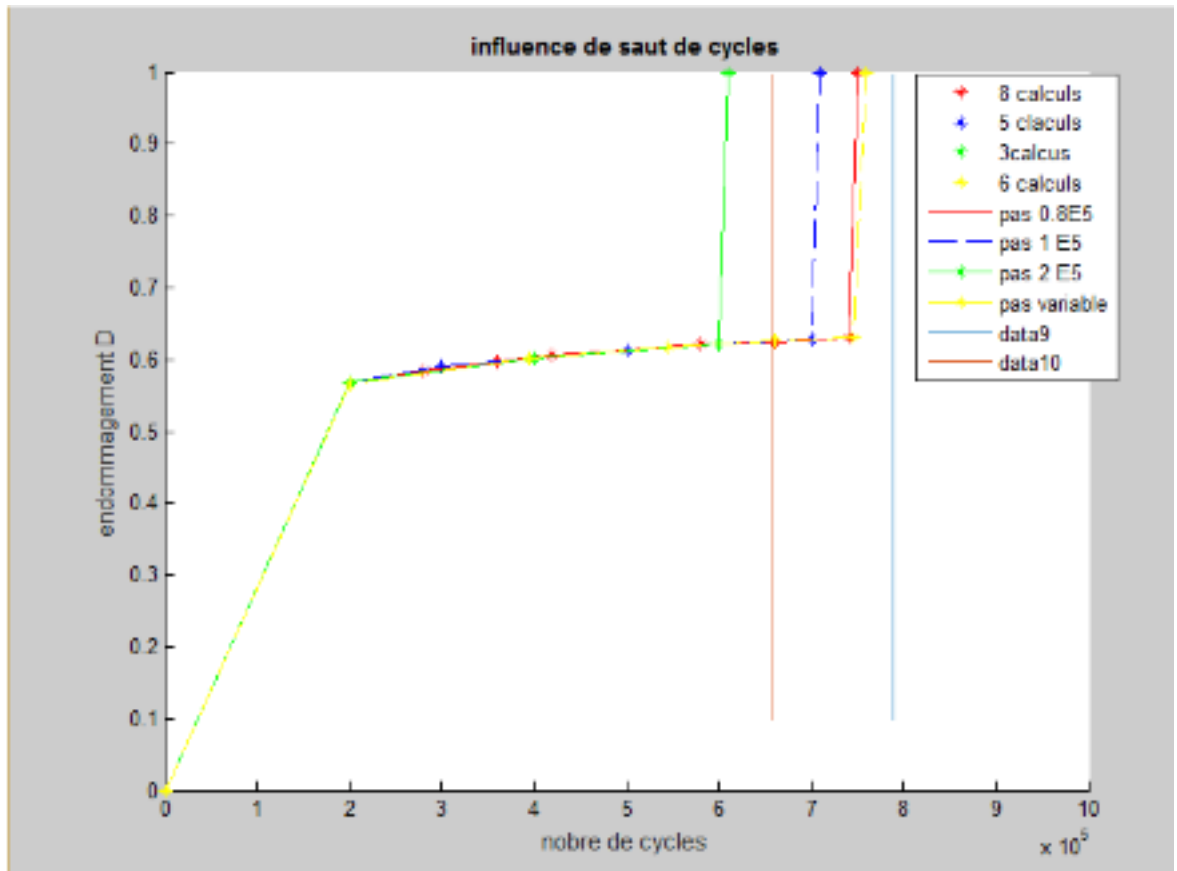


FIGURE 4.11: Évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles

Saut de cycles	0.8E5	1E5	2E5
Nombre de cycles	8	5	3
erreur relative	5.2	5.3	24

TABLE 4.4: Saut de cycles constant

Le très grand nombre de simulations nécessaires pour avoir des bons résultats nous a incité à tester un saut non constant.

4.3.1.2 Saut de cycles variables

Le même exemple a été mené avec un calcul éléments finis sous Cast3M en adoptant un saut de cycles variable. On retrouve les mêmes résultants associés aux zones d'amorçage et aux sens de propagation de l'endommagement. Au niveau du nombre de cycles de chaque phase (amorçage, propagation et rupture), il y a une légère différence récapitulée dans les figures suivantes.

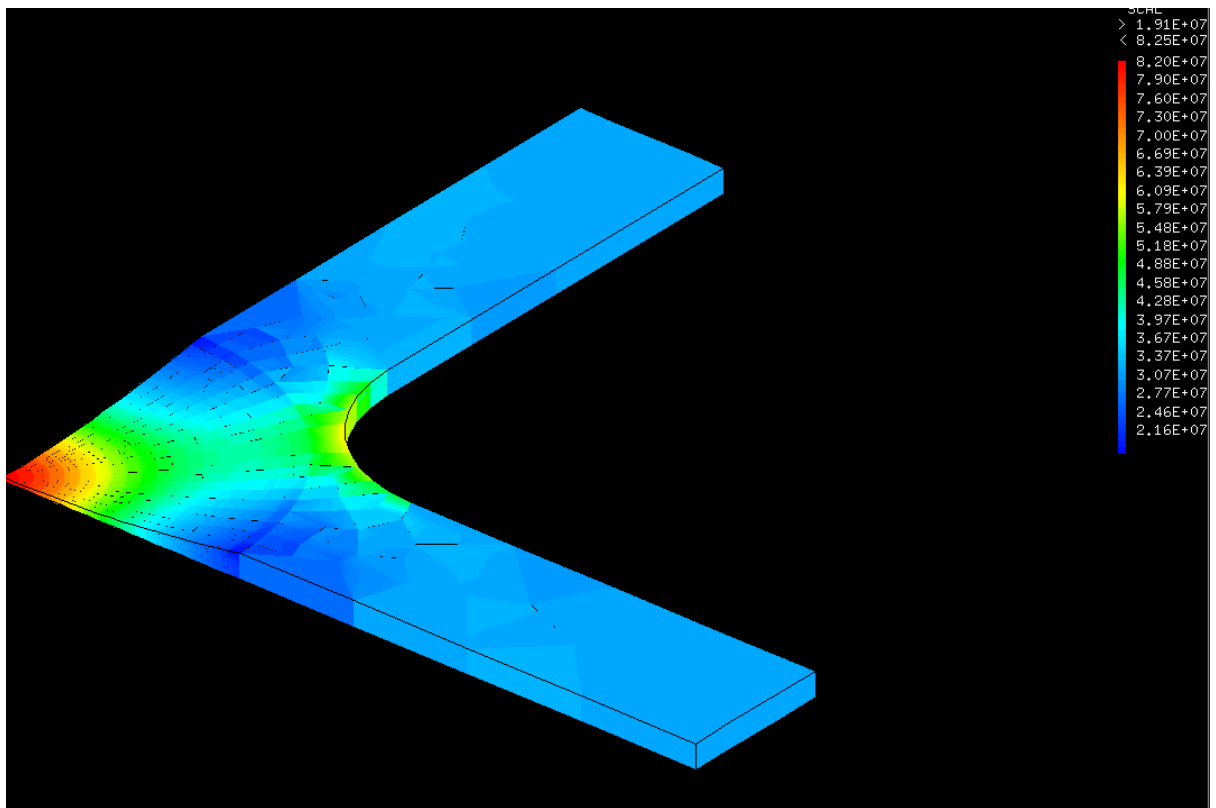


FIGURE 4.12: Contrainte équivalente de Sines

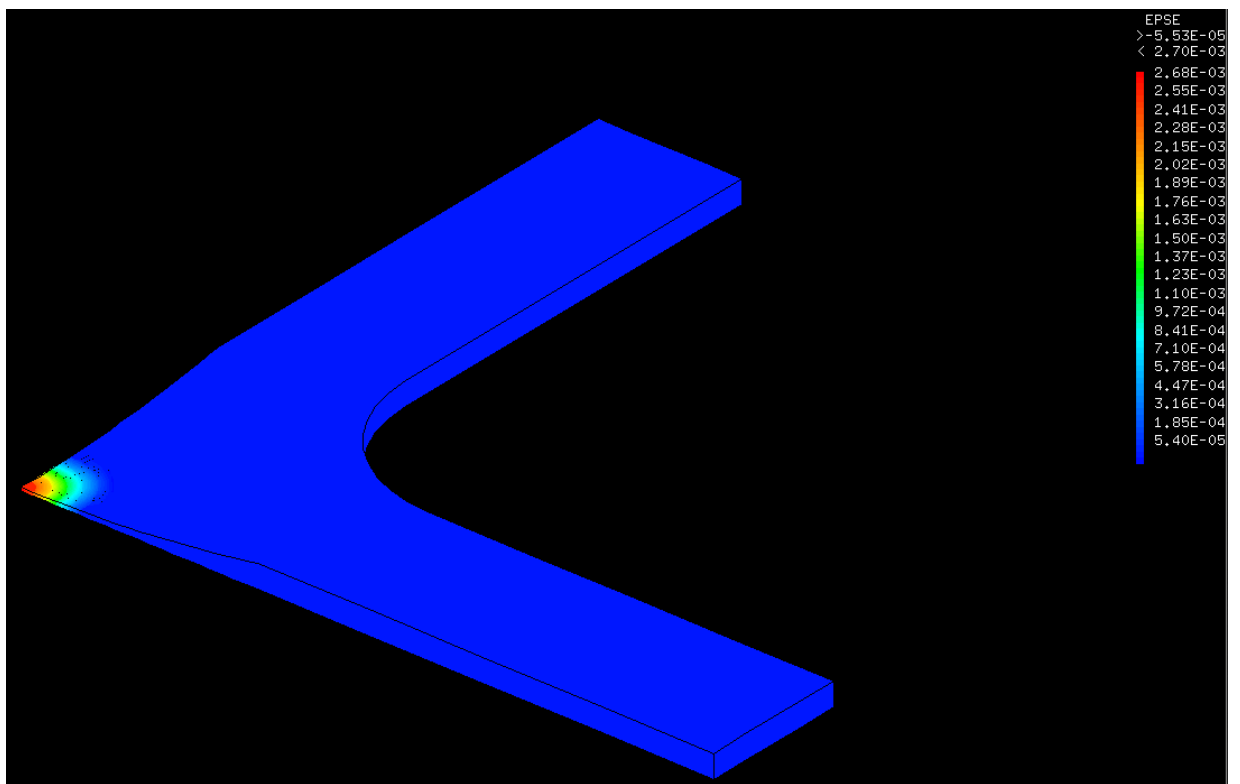


FIGURE 4.13: Étape 1 : $N=3.1723E5$ cycles

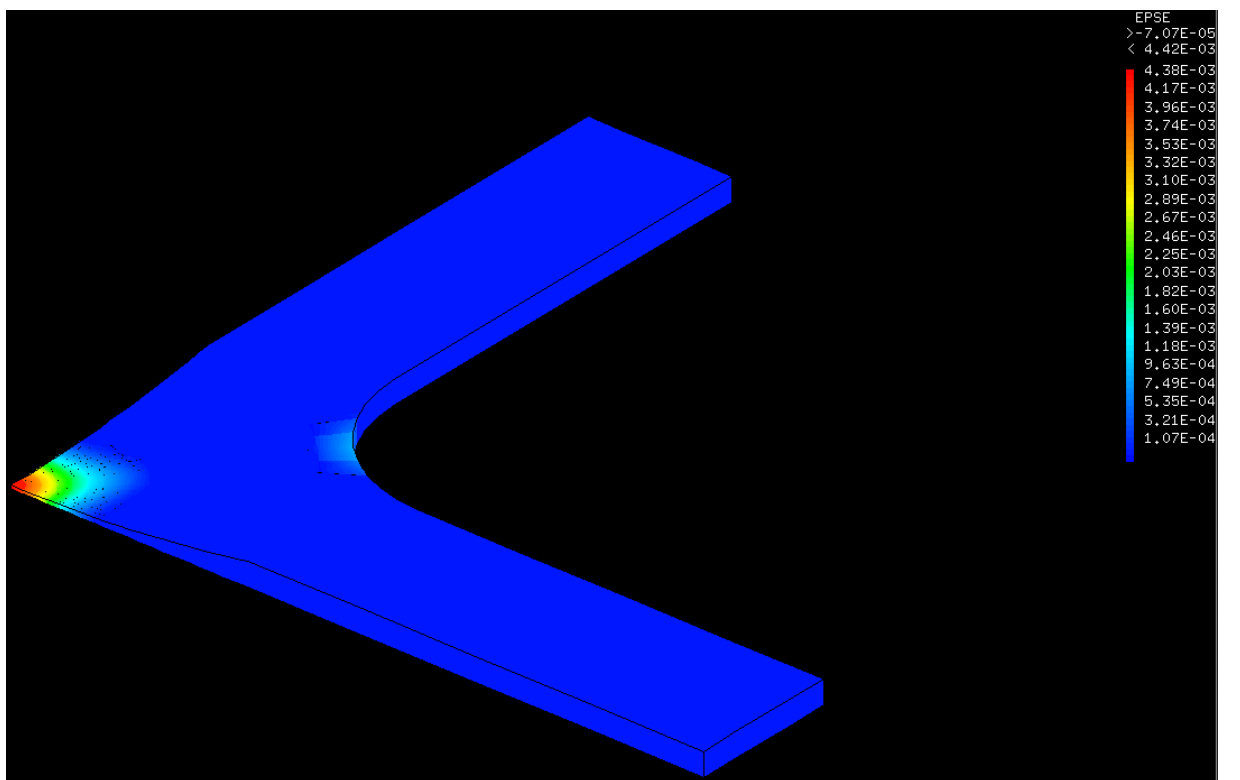


FIGURE 4.14: Étape 2 : $N=4.87945E5$ cycles

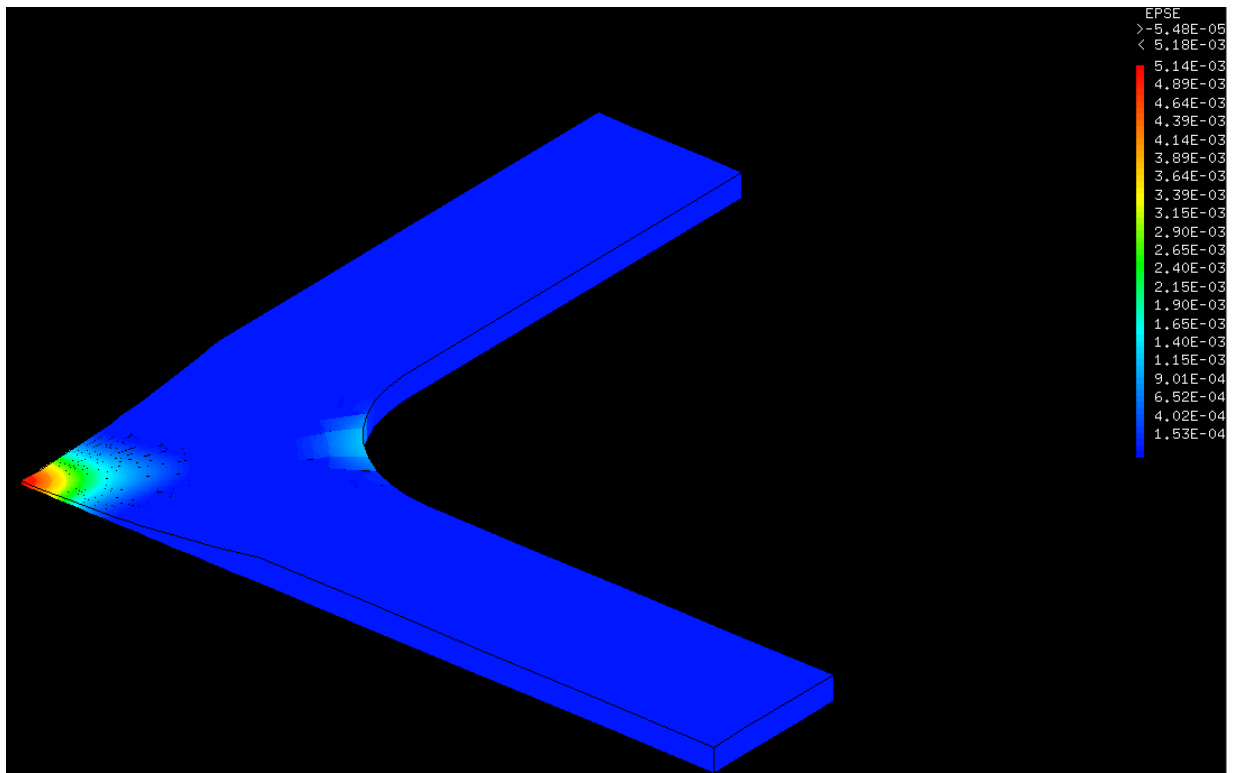


FIGURE 4.15: Étape 3 : N= 6.15975E6 cycles

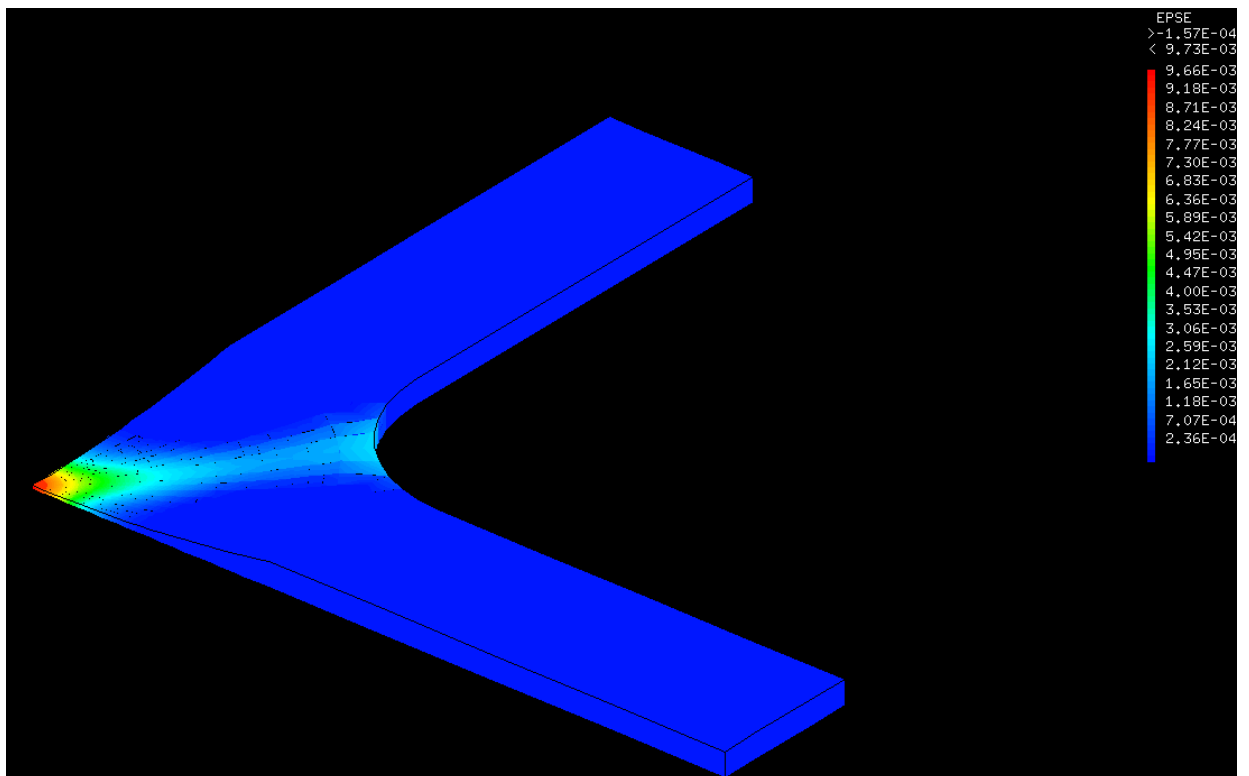


FIGURE 4.16: Étape 4 : N=7.30185E5 cycles

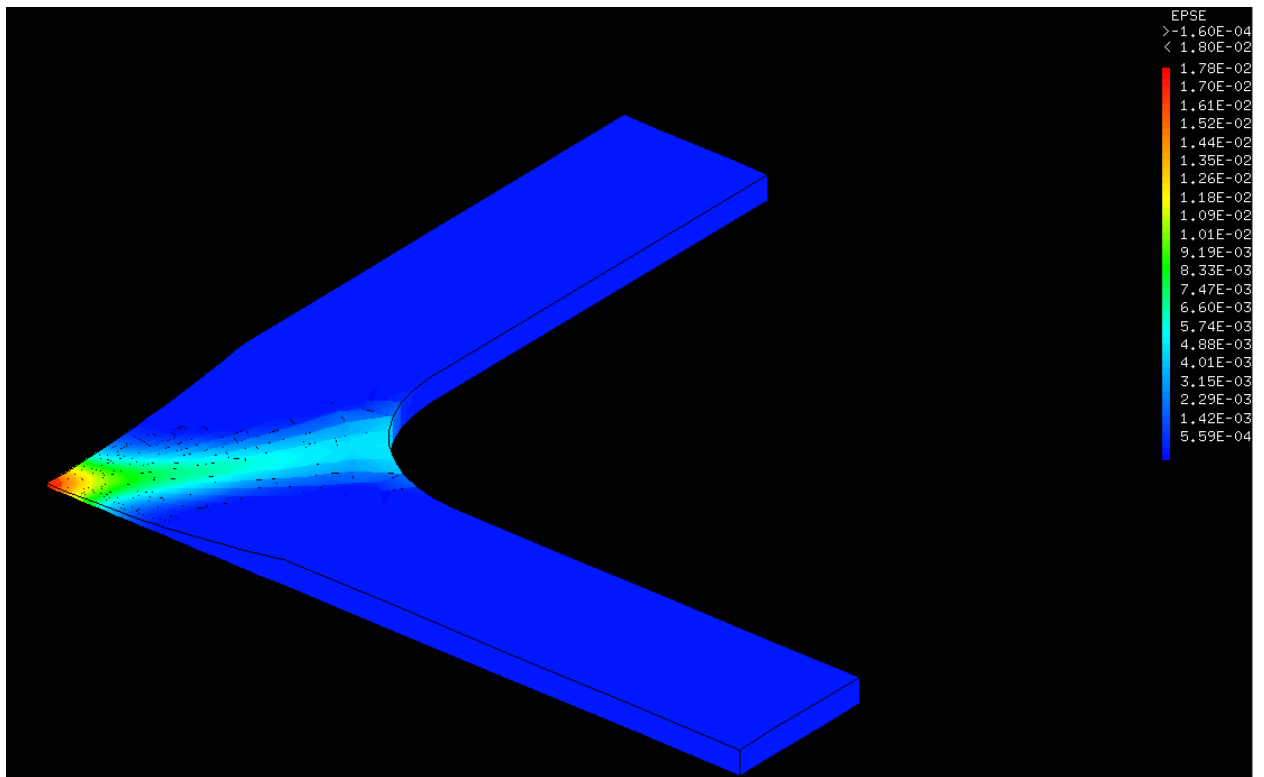


FIGURE 4.17: Étape 5 : $N = 7.87647E5$ cycles

Le tableau 4.5 résume les sauts des cycles de cet exemples.

Saut de cycles	2.132525E5	1.59932E5	1.19932E5	89954	57462
Nombre de cycles	3.60357E5	5.20288E5	6.40232E5	7.30185E5	7.87647E5

TABLE 4.5: Saut de cycles variables

Discussion Le modèle développé considère que la dégradation des caractéristiques mécaniques est uniforme sur toute la structure alors qu’il y a des zones qui sont plus endommagées que d’autres. L’objectif est de trouver une loi des dégradations des caractéristiques mécaniques de façon à ce qu’elle prenne en compte la distribution de l’endommagement dans toute la structure.

On a pu montrer par l’intermédiaire de cet exemple que le saut de cycles variables qui se base sur la distribution de la déformation de la deuxième phase élastique, est plus précis qu’un saut constante de cycles .

4.3.1.3 Influence du maillage

L’approche développée du critère d’endommagement impose un maillage raffiné dans les zones à forte dégradation. Un maillage non-uniforme est donc adapté après un calcul

sommaire.

A fin de bien mettre en évidence la taille de maillage, on a gardé la même régularité du maillage, mais on a changé sa taille. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6.

Les résultats de la pièce cruciforme dont on a doublé le maillage au niveau de la zone centrale et au niveau de la zone de congé sont présentés dans les figures suivantes.

Maillages	N_0	N_f
Cubiques 8 nœuds	1.47105E5	7.87647E5
Cubiques 20 nœuds	1.39839E5	7.09686E5

TABLE 4.6: Etude de sensibilité du modèle

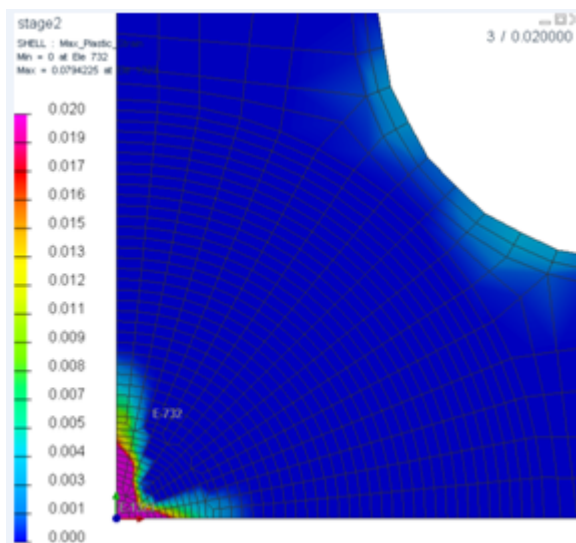


FIGURE 4.18: Étape 2 : Pour maillage grossier

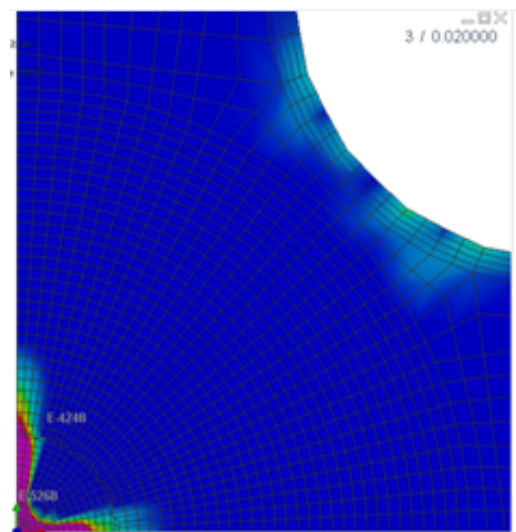


FIGURE 4.19: Étape 2 : Pour maillage fin

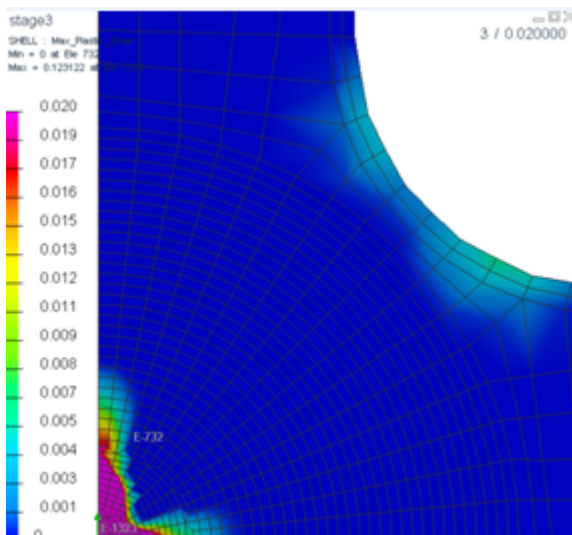


FIGURE 4.20: Étape 3 : Pour maillage grossier

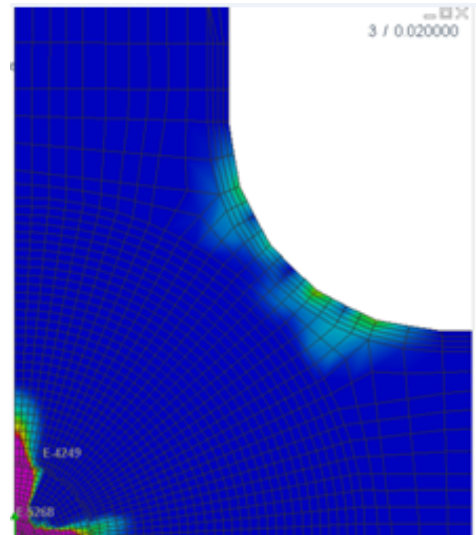


FIGURE 4.21: Étape 3 : Pour maillage fin

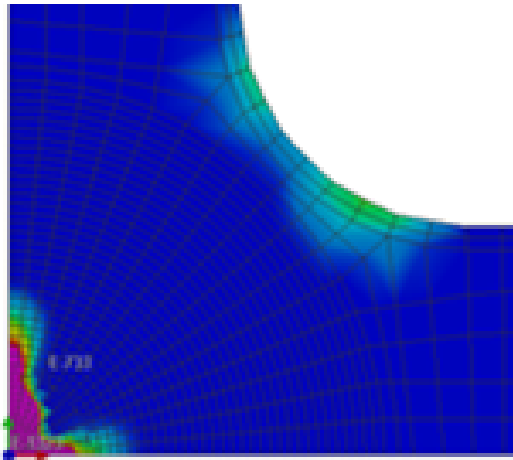


FIGURE 4.22: Étape 4 : Pour maillage grossier

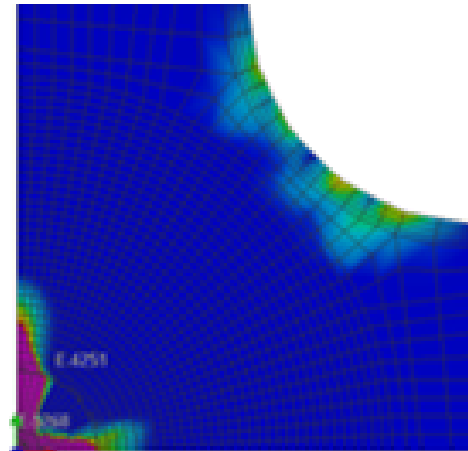


FIGURE 4.23: Étape 4 : Pour maillage fin

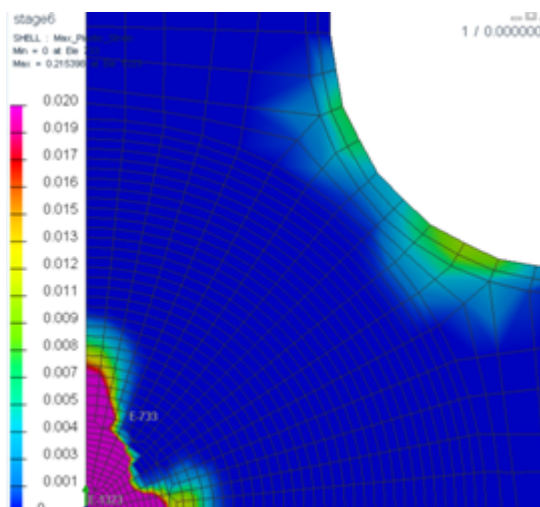


FIGURE 4.24: Étape 6 : Pour maillage grossier

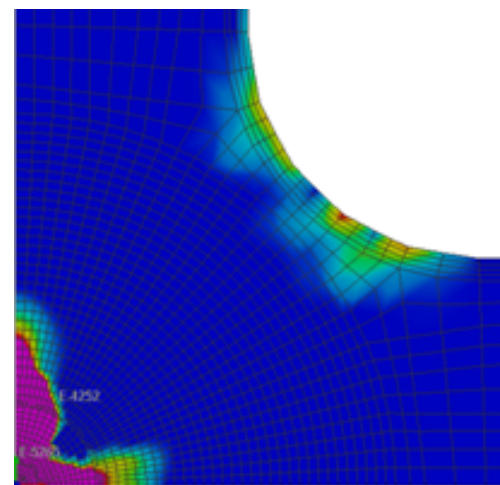


FIGURE 4.25: Étape 6 : Pour maillage fin

Les résultats ci-dessus montrent que le maillage joue un rôle important dans l’amorçage de l’endommagement, sa propagation et le nombre de cycles associé à la rupture finale. Ils montrent l’amélioration de la définition de la ligne d’endommagement et du nombre de cycles de la rupture.

4.3.1.4 Influence du déphasage

Les différents modes de rupture (la non-symétrie de l’endommagement) des échantillons laissent penser que les forces bi-directionnelles peuvent être en léger déphasage. L’objectif de ce paragraphe est de faire varier le déphasage et montrer son influence sur la ligne de rupture obtenue par le modèle. Par la même occasion, une étude sera faite sur l’effet

de la taille des mailles sur les lignes de rupture, la durée de vie et le nombre de cycles d'amorçage de la fissure. Le déphasage sera défini comme étant le retard de démarrage des cycles selon les deux directions. Les déphasages testés sont caractérisés par le retard de la force horizontale par rapport à la force verticale qui est exprimée en % par rapport à la période du cycle du chargement. Les retards testés sont : 5%, 10%, 15%, 20%, 25%, 35%. Ci-dessous et pour les différents nombres de cycles de chargement (analysé lors de l'analyse du modèle), l'effet du déphasage sur la zone endommagée est représenté. Cinq nombres de cycles ont été analysés.

Remarque :

1. Pour l'initiation de l'endommagement

- Pour un déphasage nul, l'initiation se fait au centre (zone centrale : point de la double symétrie, A) et puis à la zone de congé (aux points de symétrie, B) ; voir figure.

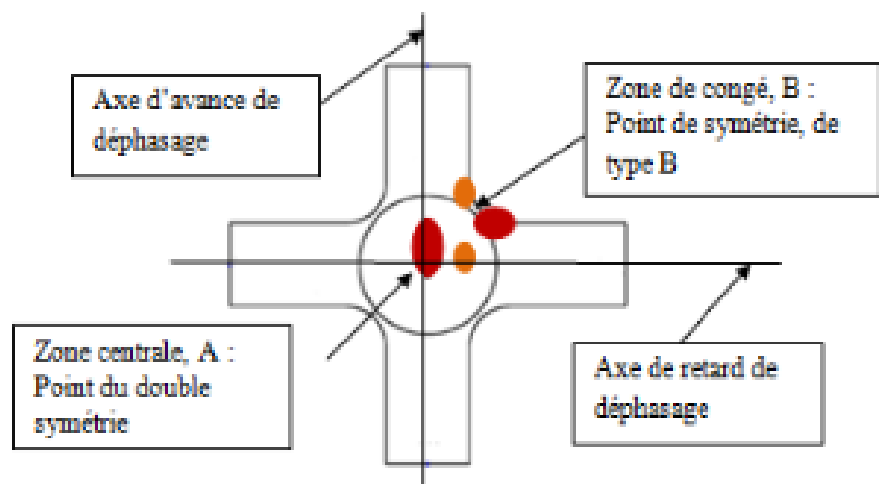


FIGURE 4.26: Les axes des déphasages

- Pour un déphasage non nul, l'initiation se fait toujours au point du double symétrie, A, mais la dégradation se fait plus selon l'axe d'avance de déphasage. Dans la zone du point B, l'initiation se fait de part et d'autre du point B mais la dégradation se fait du côté de l'axe en retard de déphasage.
2. Pour la propagation de l'endommagement :
- Pour un déphasage nul, la propagation commence du point A puis point du B (d'une façon prononcée) suivie d'une propagation de B vers A (avec une moindre intensité) et cela d'une façon symétrique.
 - Pour un déphasage non nul, la propagation est non symétrique et influencée en zone centrale, A, par l'axe en avance de déphasage vers la zone de congé,

B, influencée par l'axe en retard de déphasage. Ceci, confirme les résultats ci-dessous figure 4.27.



FIGURE 4.27: Résultats expérimentaux de déphasages

3. Pour la rupture finale et le nombre de cycles associés : Pour les mêmes étapes (correspondantes à un niveau donné de la courbe de Wöhler), la dégradation est plus importante lorsque le niveau de déphasage est plus important. Signalons que sur toutes les figures, on a gardé la même échelle.

Ces résultats montrent que sous un chargement en phase, la fatigue de la pièce se produit au même endroit que celle provoquer d'une pièce soumise à un chargement en déphasage.

Les figures 4.28, 4.29, 4.30, 4.31 et 4.32 montrent l'évolution de l'endommagement pour différents déphasages

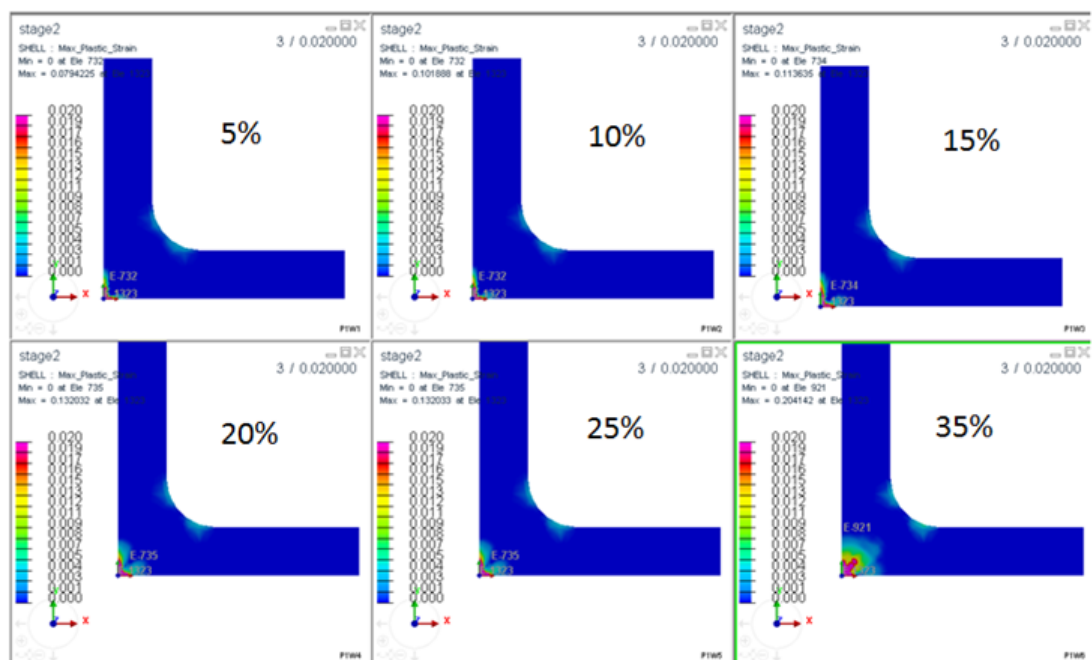


FIGURE 4.28: Étape 2 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35)

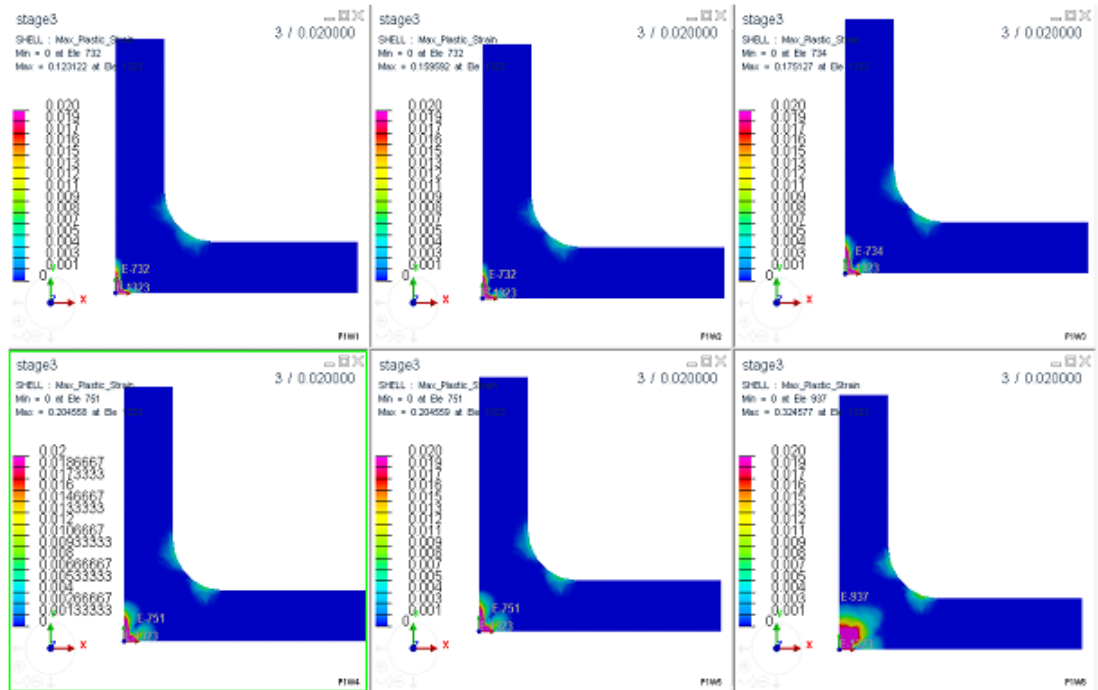


FIGURE 4.29: Étape 3 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35)

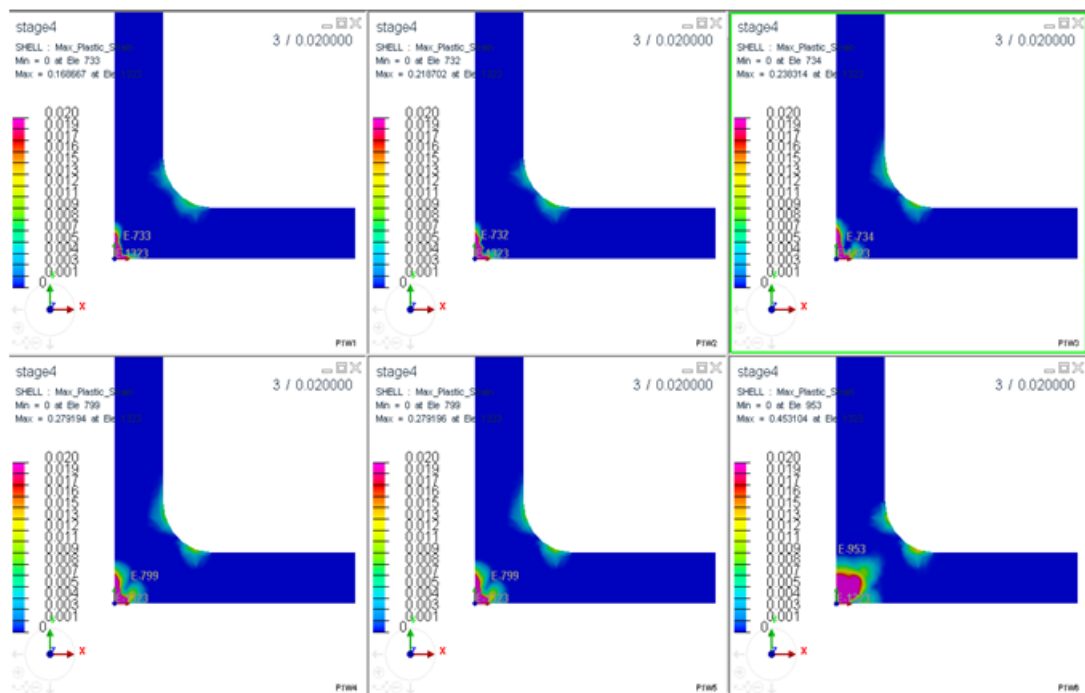


FIGURE 4.30: Étape 4 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35)

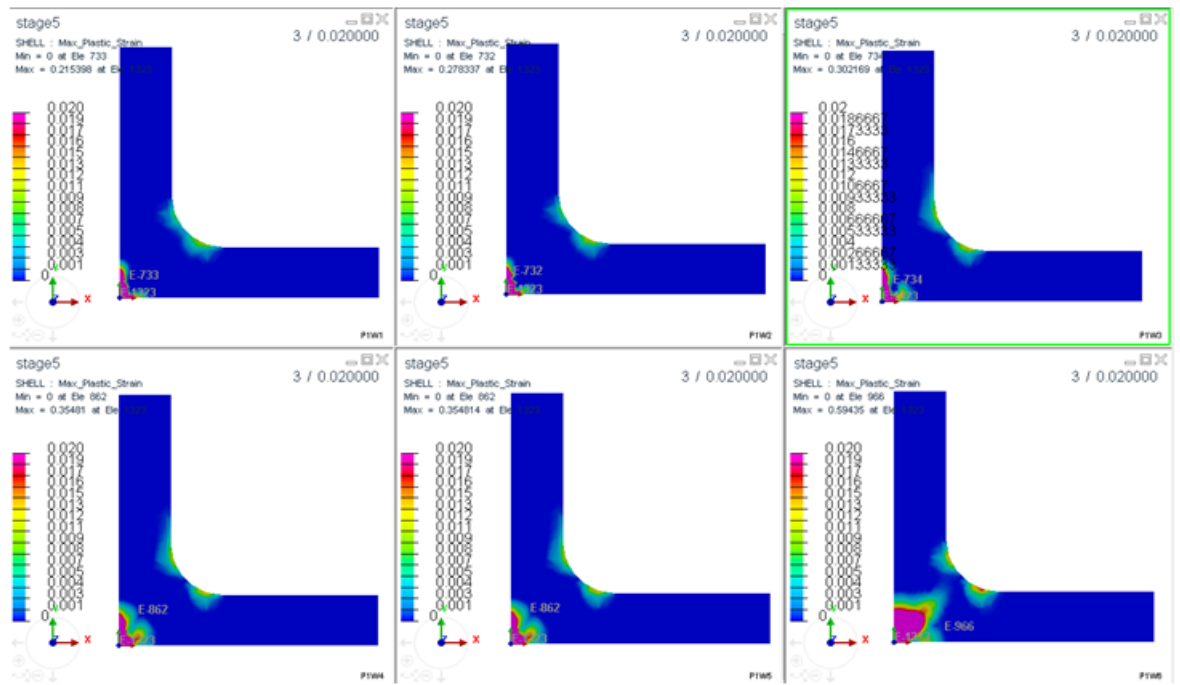


FIGURE 4.31: Étape 5 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35)

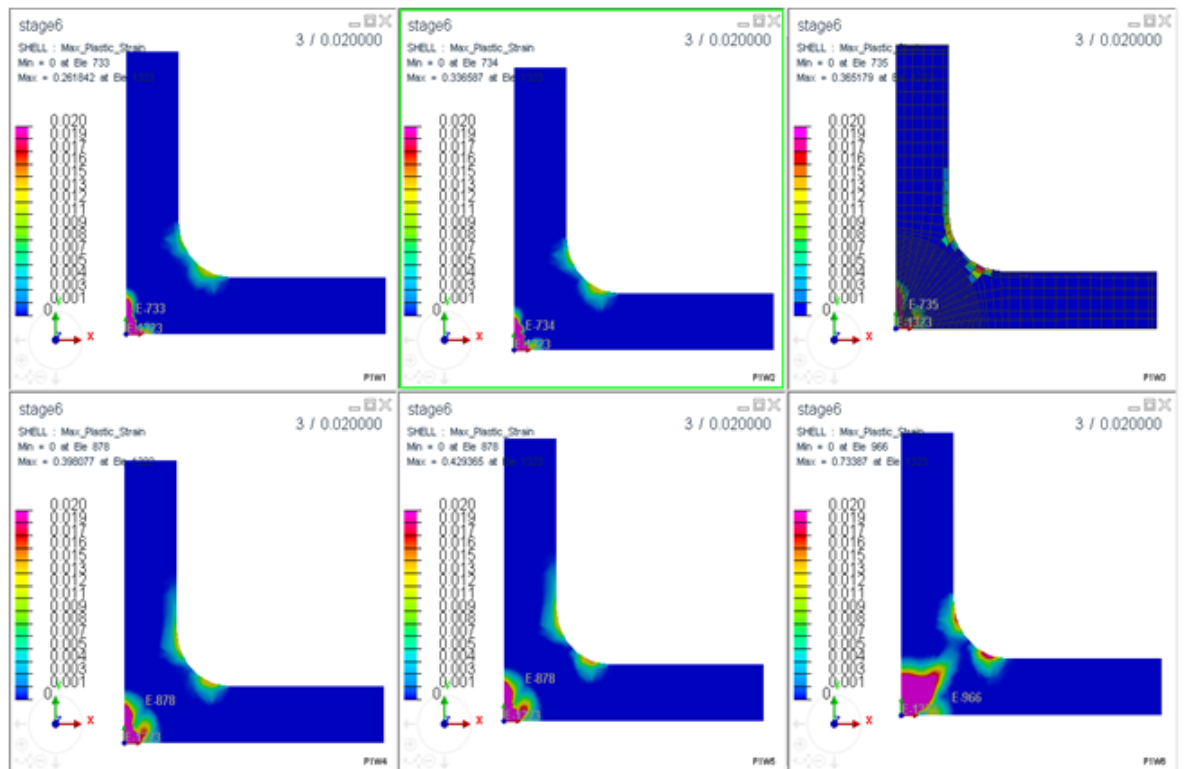


FIGURE 4.32: Étape 6 pour les différents niveaux de déphasage (5, 10, 15, 20, 25, 35)

Pour les déphasages négligeables 5 à 15% : l'influence est comme suit :

- Pour les premières étapes (1, 2 et 3) on a une anti-symétrie d'amorçage de fissures par rapport aux résultats où les chargements sont en phases-concentré dans les zones centrales. cette anti-symétrie de fissure est orientée suivant l'axe qui est en avance de phase
- Pour les derniers étapes (4, 5 et 6) : en plus de cette antisymétrie, on a l'apparence d'une légère antisymétrie au niveau de la zone de congé mais cette fois-ci suivant l'axe de chargement en retard de phase.

Pour les déphasages élevés (20 % à 35%) : dans les zones centrales, on a les mêmes résultats que précédemment sauf que dans les zones des congés, on a une orientation antisymétrique des fissures plus élevée et une propagation accélérée que lorsque le déphasage est négligeable.

4.3.2 Exemple industriel : pôle de roulement EDF

A fin de bien montrer la pertinence du présent modèle, un exemple industriel plus complexe en géométrie et en chargement que le 1^{er} exemple a été analysé. Il s'agit d'une pôle de roulement EDF en acier (d'une éolienne EDF). Les roulements étudiés possèdent deux rangées des billes. On a traité qu'une seule pôle d'éolienne avec son roulement qui lui permet de pivoter par rapport à son axe. Cet exemple est proposé par la société ESI group. Les caractéristiques mécaniques sont présentées dans la section 4.2.3.1. Le chargement appliqué est un couple de moment non symétrique $R=0.75$. Une simulation éléments finis 3D de cette structure est proposée.



FIGURE 4.33: Éolienne EDF

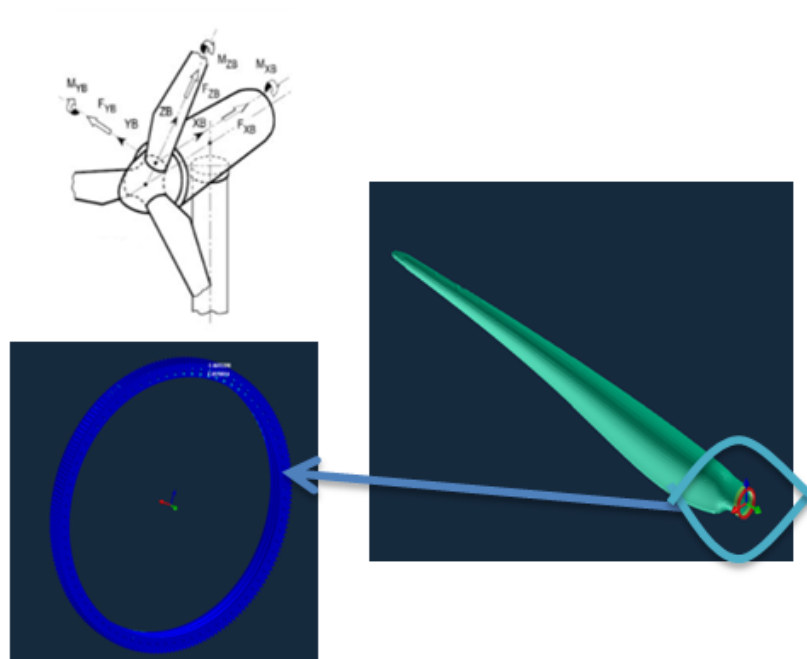


FIGURE 4.34: Pale de roulement EDF

4.3.2.1 Donnée de l'exemple

La structure étudiée est une pôle de roulement en acier dont les caractéristiques sont ci-dessous :

Le chargement est le suivant

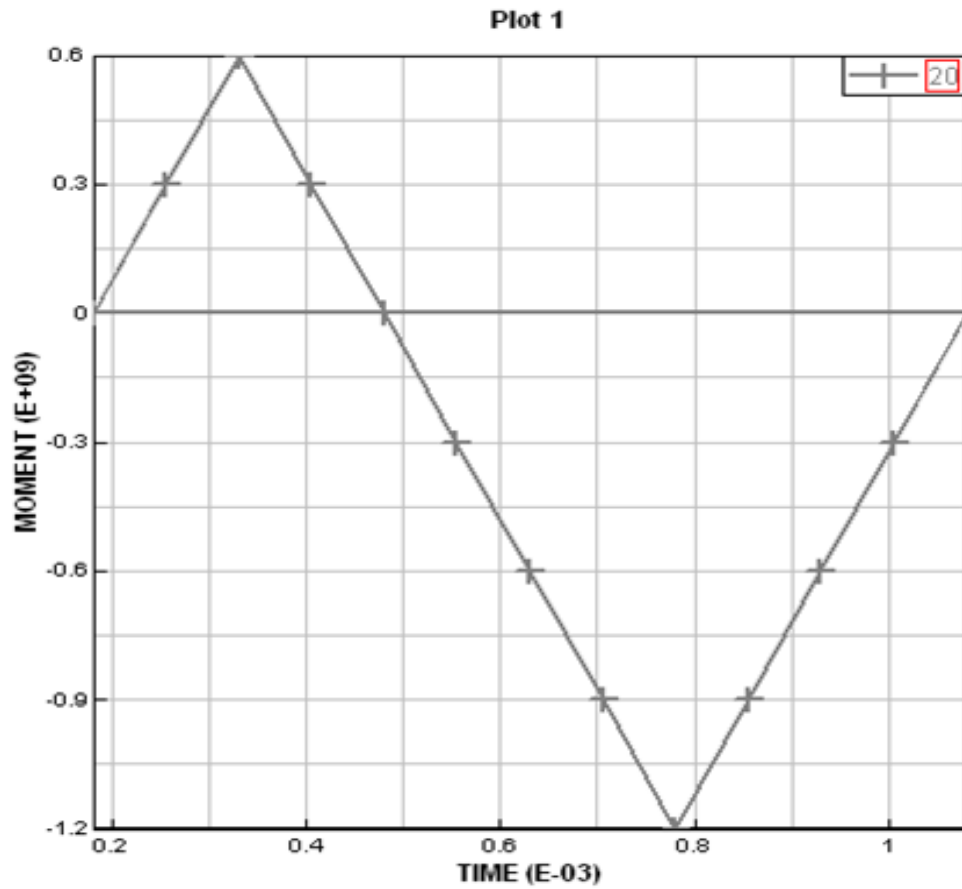


FIGURE 4.35: Cycle de chargement du pôle de roulement

La figure 4.36 et les équations (4.18) (4.19) montrent la courbe de Wöhler de l'acier déterminée par EDF.

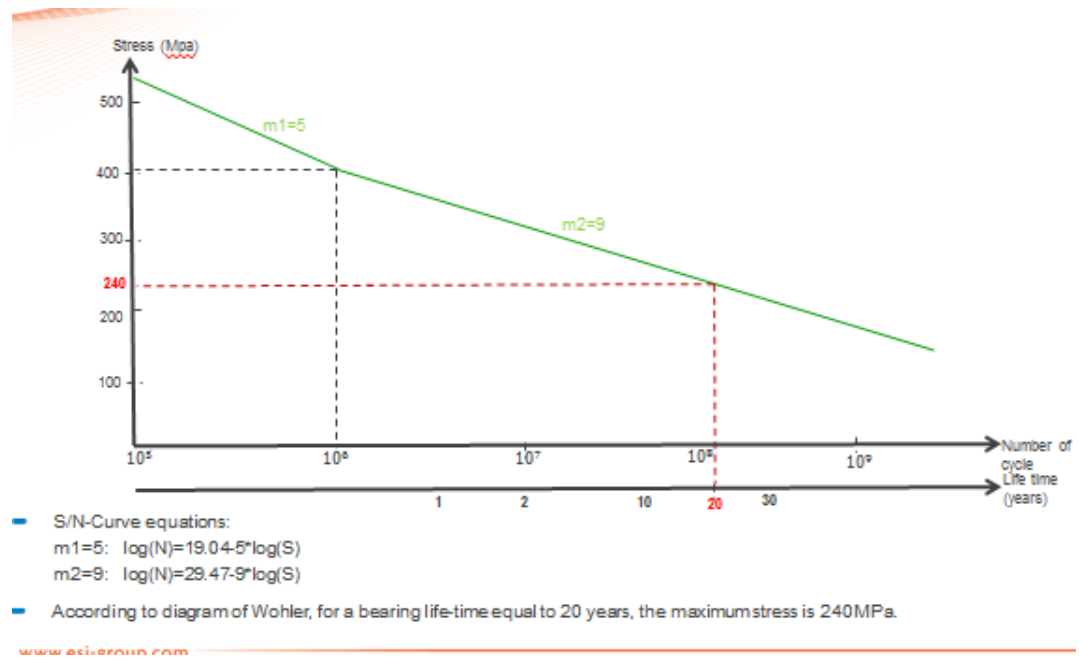


FIGURE 4.36: Courbe de Wöhler de l'acier utilisé

L'équation de la courbe de Wöhler est la suivante :

Zone oligo-cyclique

$$\log(N) = 19.04 - 5 * \log(S) \tag{4.18}$$

Zone d'endurance limitée

$$\log(N) = 29.47 - 9 * \log(S) \tag{4.19}$$

4.3.2.2 Résultats

Un calcul 3D de la structure a été effectué et les résultats sont illustrés dans les figures 4.37, 4.38 et 4.39 :

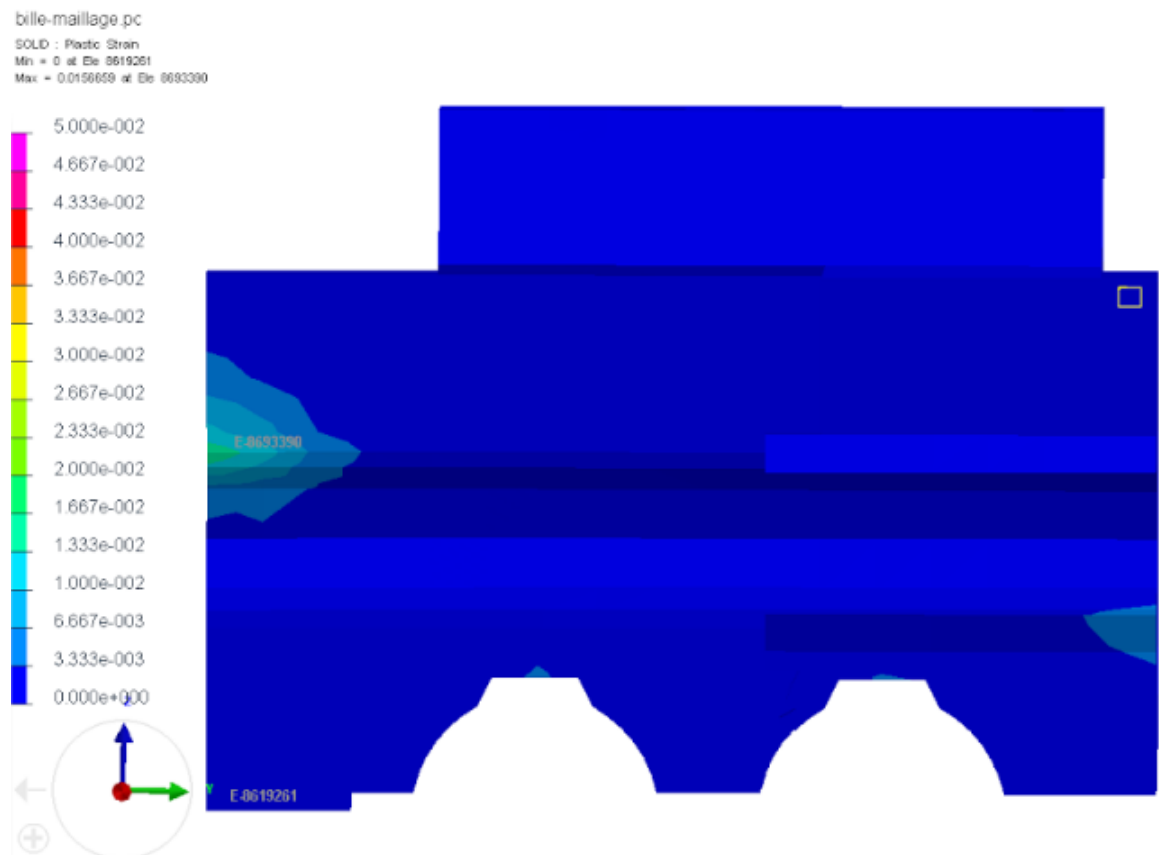


FIGURE 4.37: Étape 1 : N=1125796 cycles

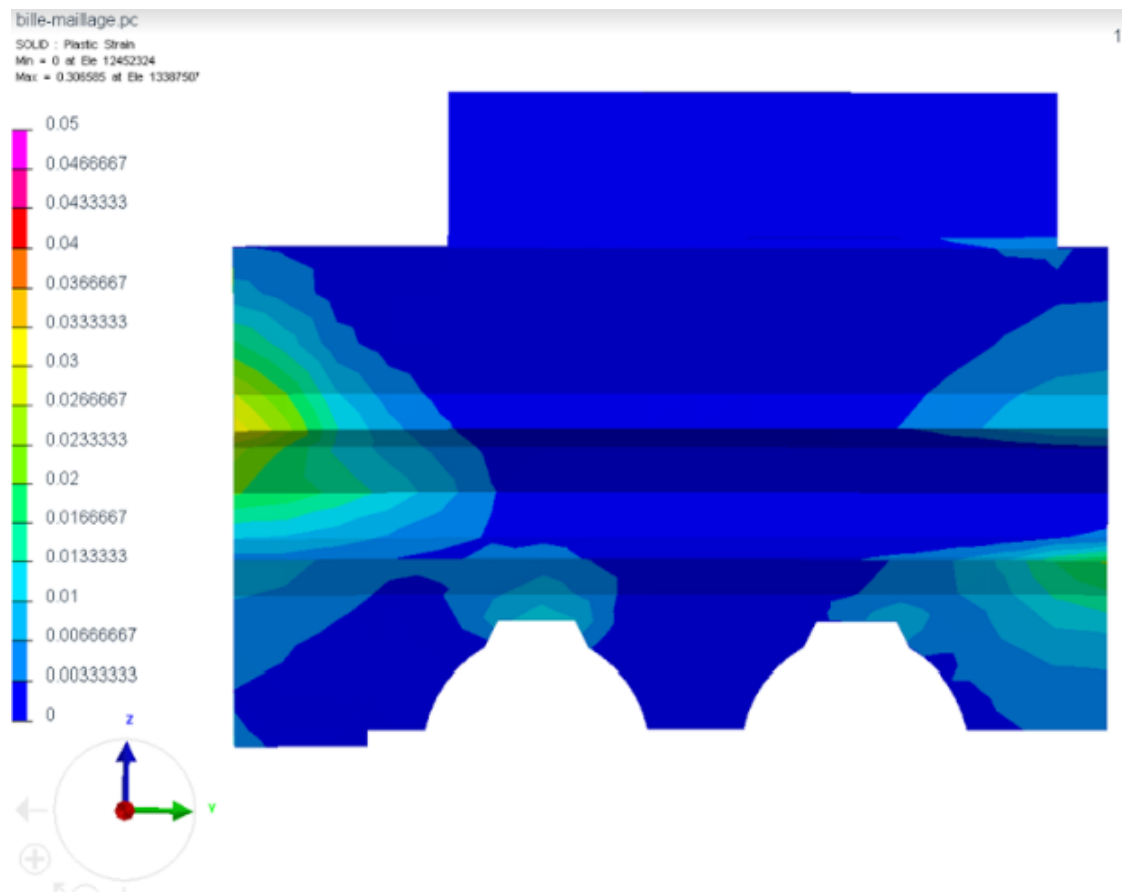


FIGURE 4.38: Étape 3 : N=83878411 cycles

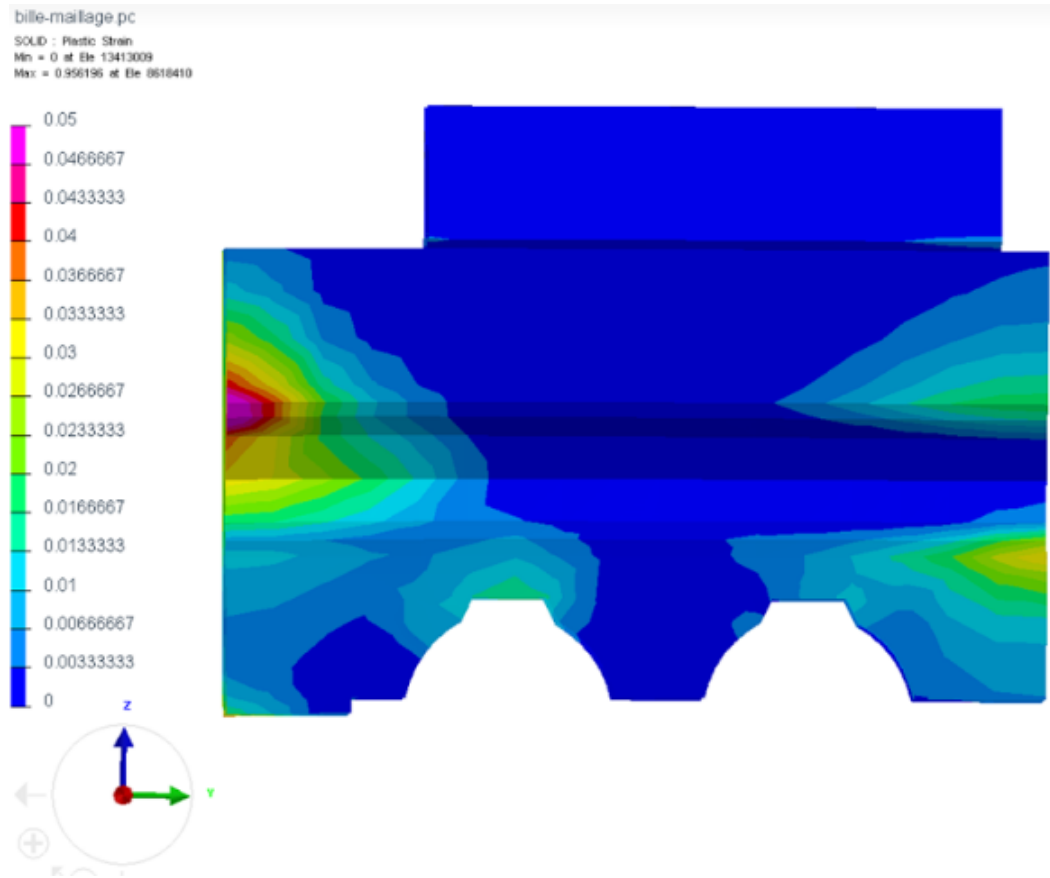


FIGURE 4.39: Étape 4 : N=1499696 cycles

Les résultat de Dang-Van de cette exemple est donné dans la figures 4.40

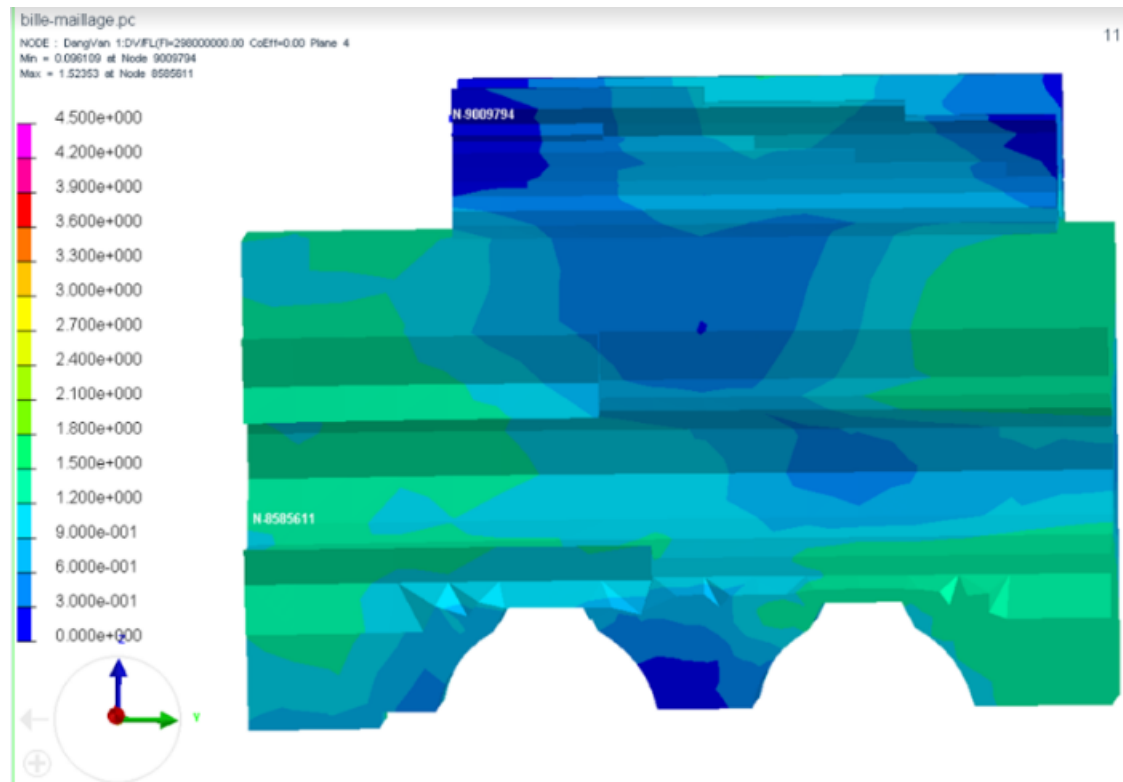


FIGURE 4.40: Résultat du critère de Dang-Van

Expérimentalement, la durée de vie de la pièce est de $1.4E9$ cycles. Numériquement on fait des calculs jusqu'aux $1.2E9$ cycles. Pour une comparaison avec DV-K, on trouve les mêmes zones d'endommagement à $1E7$ cycles, mais DV-K indique que la pièce n'est pas encore totalement endommagée ($D < 1$). Ainsi cette approche nous permet de continuer les calculs jusqu'à la rupture structurale.

Interprétation des résultats Pour la pâle de roulement, une simulation éléments finis a été effectuée avec un cycle de chargement complexe : c'est un couple de moment. La pâle de roulement est composée de plusieurs sous pièces chacune à sa propre matériau. D'après le modèle développé on trouve que la zone d'amorçage de fissure est au niveau de la sous-pièce 'roulement' qui est en acier. On trouve que la zone d'amorçage est la zone du côté du flasque puis une autre zone apparaît à côté de la bille de flasque enchaînée par la zone de goujon. La fissure commence de ses trois zones et se propage jusqu'à la rupture finale de la structure. Une comparaison de l'état de la pièce à $1E7$ cycles correspond au même résultat que celui de DV-K. On trouve d'après DV-K que les zones d'endommagements sont les mêmes que ceux qui sont données par le modèle développé. L'endommagement d'après DV-K n'a pas encore dépassé 1 ce qui signifie qu'on n'a pas

une rupture structurale à $1E7$ cycles. Alors, on peut interpréter que la durée de vie de la structure est supérieure de $1E7$ cycles. La société EDF trouve que la durée de vie de la structure est de l'ordre de $1E8$ cycles. D'après le calcul avec ce modèle, on trouve que la durée de vie de la structure est $1.4E8$ cycles. Pour la pôle de roulement, c'est un calcul 3D éléments finis avec une loi de comportement élastique bi-linéaire qui était fait avec un maillage pas trop fin : c'est coûteux en temps de calcul : chaque étape prend 8 heures de calcul avec un serveur de 12 processeurs : c'est gigantesque en temps de calcul aussi bien en espace mémoire puisque chacun prend un espace dans l'ordinateur plus de 16 Go.

4.4 Conclusion

Les deux formes simplifiées de l'approche présentées dans ce chapitre ont été testées sur une plaque cruciforme (présenté dans le chapitre 1) et un exemple industrielle (une pôle de roulement d'une éolienne d'Electricité De France, EDF).

Sur l'amorçage et la durée de vie de la structure, les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus par la littérature. L'avantage de l'approche ici présentée, même sous ses formes simplifiées, est de donner les étapes intermédiaires de l'évolution de l'endommagement (sens et nombre de cycles correspondants).

Les effets de la taille et du type du maillage ont été testés sur l'exemple de la plaque cruciforme et en utilisant la deuxième forme simplifiée.

Conclusion

Cette étude a été consacrée au développement d'une méthode simple et utile à l'ingénieur. Son objectif est de donner le nombre de cycles d'amorçage d'endommagement, sa propagation et la durée de vie d'une pièce à moindre coût pour des structures travaillant en endurance limitée sous sollicitations multi-axiales d'amplitude constante sans avoir recours au comptage des cycles.

Notre travail a consisté d'abord à décrire les méthodes de calcul de durée de vie en endurance limitée. Nous avons classé ces méthodes selon la nature du cycle de chargement appliqué (à amplitude constante ou à amplitude variable). Il est apparu que l'approche mésoscopique, initiée par Dang Van ([9], [8]) et Papadopoulos ([27], [28]) permet de donner une interprétation physique du dommage par fatigue polycyclique. Papadopoulos ([27], [28]), Morel ([24],[25]) et Zarka-Karaouni ([44]) l'ont utilisée et ont choisi la déformation plastique mésoscopique cumulée comme variable du dommage. Les auteurs ont supposé que la rupture se produit quand cette variable atteint une valeur critique.

Ensuite, une première version de notre approche modélisant l'endommagement par la dégradation isotropique de la rigidité a été formulée. Réellement l'évolution de l'endommagement est anisotropique même si le matériau au départ est isotrope. Pour cela, cette approche a été améliorée au profit d'une seconde version qui présente l'anisotropie de l'endommagement. Celle-ci considère que l'évolution de la rigidité sous un chargement cyclique est anisotropique et le modélise par une fonction qui dépend du gradient de la contrainte de critère de fatigue. Une version simplifiée de ce modèle a été présentée après. Cette approche numérique s'appuie, d'une part, sur les méthodes de calcul de structures, et d'autre part, sur les données expérimentales du matériau comme la courbe de Wöhler, un critère de fatigue multi-axial qui nous permettra d'envisager les chargements complexes et une loi d'évolution de l'endommagement.

Il s'agit d'un modèle macroscopique valable dans la zone d'endurance limitée et applicable aux matériaux métalliques. Une approche de l'initiation, la propagation de l'endommagement et de la rupture structurale par fatigue a été présentée. Rappelons que la propagation de l'endommagement n'est traitée en littérature que par des modèles de propagation de fissuration qui sont très complexes et coûteux en temps de calcul. L'approche ici présentée modélise l'initiation, la propagation de l'endommagement. La rupture structurale finale peut être aussi estimée par cette approche.

Le modèle a été testé sous sa version développée et sous sa version simplifiée et cela en utilisant les opérateurs existants :

- L'endommagement est schématisé par une disparition des éléments endommagés en dégradant la rigidité de la structure à chaque itération.
- L'endommagement est schématisé par une diminution brutale des caractéristiques mécaniques. Des simulations bi-linéaires élastiques sont effectuées. La contrainte limite de la première phase élastique a été unifiée à la contrainte limite de fatigue dans la zone d'endurance limitée. A chaque étape ou itération, la structure est

chargée par la déformation de la deuxième phase de loi bi-linéaire élastique de l'étape précédente (schématisant ainsi la répartition des contraintes) et la limite d'endommagement diminue, représentant ainsi l'endommagement par fatigue sous l'effet des cycles de chargement.

Une bonne corrélation des résultats de prédiction du modèle dans sa version complète (modélisation de l'endommagement par dégradation isotropique et anisotropique de la rigidité) avec les résultats expérimentaux a été obtenue pour les chargements à amplitude constante (uni et bi axial). En outre, la version simplifiée du modèle a été appliquée pour étudier la tenue en fatigue d'une pièce cruciforme en détectant le nombre de cycles et la zones d'amorçage d'endommagement, le sens de propagation et la rupture finale. On a aussi étudié l'influence de déphasage de chargement dans la pièce cruciforme sur la durée de vie et le sens de propagation de l'endommagement. Un exemple industriel plus complexe en géométrie a été étudié. Il s'agit d'une pale de roulement EDF. Seuls quatre calculs éléments finis ont été effectués pour déterminer les trois phases de fatigue (initiation, propagation et rupture) ce qui est rentable pour les bureaux d'études dans les phases de conception des structures. Une comparaison avec le critère de Dang Van et avec des résultats expérimentaux confirme le bon fonctionnement de notre modèle.

La représentation de la courbe de Wöhler par le modèle de Basquin a été le seul mis en application au cours de ce travail (les données matériau rencontrées relevant du modèle de Basquin).

Les perspectives à court terme de cette étude sont donc de chercher à tester cette approche à des matériaux dont la courbe Wöhler relève soit du modèle de Wöhler, soit d'un autre modèle.

Une autre perspective concerne le type de chargement appliqué : Etendre ce modèle pour des chargements à amplitude variables. Vu que notre modèle se base sur la courbe de Wöhler qui est probabiliste (on travaille avec la courbe de Wöhler : moyenne probabilité=0.5), les perspectives à long termes portent sur la prise en compte de l'aspect probabiliste dans la détermination de la durée de vie en fatigue.

Références bibliographiques

- [1] DANG VAN K. DEPERROIS A. PAPADOPOULOS-I.V. BALLARD, P. High-cycle fatigue and finite element analysis. *Fatigue and Fracture of Eng. Mat. Struct*, 18, 397-411., 1995.
- [2] DANG VAN K. DEPERROIS A. PAPADOPOULOS-I.V. BALLARD, P. Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach. *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures N 392*, Springer-Verlag,, 1995.
- [3] YOU B.R. and LEE S.B. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *Int. J. Fatigue*,, pages 235–244, 1996.
- [4] YOU B.R. and LEE S.B. Improvements of multiaxial fatigue criteria for a strong reduction of calculation duration. *Computational Materials Science*, 1999.
- [5] MILLER K. BROWN M.W. A theory of fatigue under multiaxial stress strain conditions. *proc of inst engrs 187*, pages 745–755, 1973.
- [6] SHEN C. *Contribution à l'étude du cumul de dommage en fatigue multiaxiale*. PhD thesis, Université de Lille 1, 2012.
- [7] J.WANG C.L. CHOW. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *International journal of fracture*,33, pages 3–16, 1986.
- [8] PAPADOPOULOS I.V. Dang Van K. Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'artillerie française, 3ème fascicule*, 1973.
- [9] PAPADOPOULOS I.V. Dang Van K. Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach. *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures N392*, pages 57–88, 1999.
- [10] Thèse de doctorat INSA Lyon. Fatigue multi-axial desstructures industrielles sous chargement quelconques. 1999.

- [11] MILLER K.J. and BROWN M.W. Eds. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME 12*, pages 159–164, 1945.
- [12] MILLER K.J. and BROWN M.W. Eds. A criterion for fully reversed out-of phase torsion and bending. *American Society for Testing and Materials*, pages 553–568, 1985.
- [13] MILLER K.J. and BROWN M.W. Eds. Biaxial and multiaxial fatigue. *Mechanical Engineering Publication*, page 621, 1989.
- [14] KENMEUGNE B. WEBER B. ROBERT J.-L FOGUE, M. Compteur de cycles et calcul de durée de vie en fatigue multiaxiale d'amplitude variable. *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 51, 3, 140-144., 1998.
- [15] KARAOUNI H. *Nouveaux outils pour la conception fiable des structures*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2001.
- [16] Robert J.-L. Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires. thèse de doctorat, insa de lyon. 1992.
- [17] MILLER K.J. and ZACHARIAH K.P. Cumulative damage laws for fatigue crack initiation and stage i propagation. *The journal of strain analysis for engineering design 12*, pages 262–270, 1977.
- [18] CHABOCHE J.L. LEMAITRE J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structure. *Mechanics of Visco-Plastic Media and Bodies.*, pages 291–301, 1975.
- [19] DESMORAT R. SAUSAY M. LEMAITRE J. Mechanical modeling of material damage. *Eur. J Mech. A Solids*, 19, pages 187–208, 2000.
- [20] CHABOCHE J.L LEMAITRE J. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée* 2, N3, pages 317–363, 1978.
- [21] CHABOCHE J.L LEMAITRE J. *Mécanique des Matériaux Solides*. 1996.
- [22] KACHANOV L.M. *Introduction to continuum damage mechanics*. 1986.
- [23] M. A. MINER. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME 12*, pages 159–164, 1945.
- [24] MOREL F. *Fatigue Multiaxiale sous Chargement d'Amplitude Variable*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1996.
- [25] MOREL F. A fatigue prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, pages 241–256, 1998.

- [26] MOREL.F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue*, pages 101–119, 2000.
- [27] PAPADOPOULOS. *Fatigue polycyclique des métaux - une nouvelle approche*. PhD thesis, Thèse de Doctorat ENPC, 1987.
- [28] PAPADOPOULOS. *Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions : the microscopic approach*. PhD thesis, Commission of the European Communities, Joint Research Center, ISEI/IE 2495/93, 1993.
- [29] PAPADOPOULOS. Multiaxial fatigue limit criterion of metals a mesoscopic scale approach. *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Springer-Verlag, 89-143.*, 1999.
- [30] PAPADOPOULOS. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue 23, 839-849*, 2001.
- [31] LEE S.B. *Evaluation of Theories on Multiaxial Fatigue with Discriminating Specimens*. PhD thesis, Stanford University, 1980.
- [32] Ohgi G. Sines G. Fatigue criteria under combined stresses or strains. asme. *Journal of Engineering Materials and Technology 103*, 1881.
- [33] G.R. HALFORD S.S. MANSON. Practical implimentation of the double linear damage rule and damage curve approach for treating cumulative fatigue damage. *International journal of fracture 17*, pages 169–192, 1981.
- [34] G.R. HALFORD S.S. MANSON. Cumulative fatigue damage. *fatigue and durability of stucture materials*, pages 123–156, 2006.
- [35] PETRONE. N SUSMEL.L. Multiaxial fatigue life estimations for 6082-t6 cylindrical specimens under in-phase and out-of-phase biaxial loadings. *Biaxial and Multiaxial fatigue and Fracture*, pages (Edited by Carpinteri A. et al.) ESIS 83–104.
- [36] K.S. HAN W. HWANG. Cumulative damage models and multi-stress fatigue life prediction. *journal of composite materials*, pages 125–153, 1986.
- [37] BROWN M.W. WANG C.H. A study of the deformation behavior under multiaxial loading. *Eur. J. Mechanics, A/Solids 13, N2*, pages 175–188, 1994.
- [38] BROWN M.W. WANG C.H. Life prediction technique for variable amplitude multiaxial fatigue part ii comparison with experimental results. *Journal of Engineering Materials and Tecnology 118*, pages 371–374, 1996.

- [39] BROWN M.W. WANG C.H. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - part i : Theories. *Journal of Engineering Materials and Tecnology* 118, pages 367–370, 1996.
- [40] BROWN M.W. WANG C.H. Multiaxial random load fatigue : life prediction techniques and experiments. *Pineau A., Cailletaud G., and Lindley T.C., editors, Multiaxial fatigue and design, ESIS 21. London*, pages 513–527, 1996.
- [41] KENMEUGNE B. ROBERT. J.-L. WEBER. B., CARMETA A. On a global stress based approach for fatigue assessment under multiaxial random loading. *Engineering Against Fatigue 407-414*, pages 371–374, 1999.
- [42] KENMEUGNE B. ROBERT. J.-L. WEBER. B., CARMETA A. stress based approach for fatigue assessment under multiaxial variable amplitude loading. *Multiaxial Fatigue and Fracture*, pages 218–233, 1999.
- [43] RABOTNOV Y.N. creep rupture. *12th int congres of appied mecanics stanford*, 1968.
- [44] KARAOUNI H ZARKA J. *Fatigue analysis during one parameter loadings*. First MIT Conférence on Computational Fluid and Solid Mechanics.

Annexe A

Courbe de Wöhler

La plus ancienne représentation de la fatigue est définie par la courbe de Wöhler. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée σ (généralement notée S) et le nombre de cycles à la rupture N_f .

Comme on a cité dans la partie bibliographique que la courbe de Wöhler se divise en 3 grandes parties :

Partie 1 : zone oligo-cyclique Dans cette zone, la rupture se produit après un nombre de cycles relativement faible et une déformation plastique notable. Le nombre de cycles à la rupture est lié à la déformation plastique par la relation de Coffin(1962) suivante :

$$\frac{\Delta \epsilon^p}{2} = A.N_f^a$$

avec

a, A : des constantes de matériau.

Partie 2 : zone d'endurance limitée Diverses expressions ont été proposées pour rendre compte de la forme de la courbe de Wöhler(courbe S-N).

Expression de Wöhler (1870)

$$\ln(N_f) = a - b.\sigma_a$$

avec

a, b : deux constantes.

Expression de Basquin (1910)

Permet de représenter la courbure raccordant la partie descendante et la branche asymptotique du graphe, sans pour autant décrire la tendance asymptotique :

$$\sigma_a = \left(\frac{A}{N_f} \right)^B$$

Avec

A, B : deux constantes du matériau.

Expression de Stromeyer (1914)

Pour rendre compte de l'asymptote horizontale ou limite d'endurance σ_D :

$$\ln(N_f) = a - b \cdot \ln(\sigma_a - \sigma_D)$$

avec

a, b : deux constantes du matériau

Expression de Palmgren (1924) permet de traduire la un point d'inflexion de la courbe de fatigue dans la zone de transition fatigue oligo-cyclique/ endurance limitée :

$$\sigma_a = \sigma_D + \left(\frac{A}{N_f + B} \right)^c$$

Expression de Weibull (1939) qui est comparable à celui de Palmgren

$$\ln(N_f + B) = a - b \cdot \ln\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{R - \sigma_D} \right)$$

avec

a, b, B, σ_D : des paramètres constants

R : la résistance à la traction du matériau

Annexe B

Critère de Sines

La 1^{er} version de Sines a été établie en 1955 et modifiée en 1981 [32] par Sines. La fonction critère de fatigue de Sines est écrite en fonction des invariants des tenseurs de contraintes et de ses déviateurs. L'expression de cette fonction est exprimée dans l'équation suivante :

$$E_{si} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha I_{1m}}{A}$$

La fonction de fatigue $E=1$ à la limite de fatigue. Les deux limites de fatigue en traction répétée σ_0 et en torsion alternée symétrique vérifient le critère de fatigue et qui sont choisis pour caler le modèle.

$$A = \tau_{-1}$$
$$\alpha = 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} - \frac{1}{3}$$

Ce modèle est valable si $\alpha > 0$ implique que $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} > \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Annexe C

Critère de Dang Van [9] [8]

Pour qu'il n'y ait pas l'amorçage de fissure sous un chargement donné, une étude à échelle de grain représente une condition nécessaire. La formulation du critère de Dang Van a été faite à l'échelle microscopique. On suppose que le matériau reste globalement élastique tandis qu'il se plastifie localement. Hypothèse physique intéressante du modèle est que le matériau s'adapte localement (il devient élastique après être passé par la plasticité) en-dessous de la limite d'endurance, ce qui correspond à la non initiation de fissure. Au-dessus de la limite d'endurance il y a localement accommodation plastique donc initiation de fissure. Les hypothèses de base de l'interaction micro-macro, Lin-Taylor, permettent d'écrire :

$$\sigma_{i,j}^l(t) = \sigma_{i,j}(t) + \rho_{i,j}(t) \quad (4.20)$$

$$\rho_{i,j} = -2\mu\epsilon_{i,j}^p(t) \quad (4.21)$$

$\sigma_{i,j}^l(t)$ contrainte locale

$\sigma_{i,j}(t)$ contrainte globale

$\rho_{i,j}(t)$ contrainte résiduelle locale

$\epsilon_{i,j}^p(t)$ déformation plastique locale

On écrit en terme de cisaillement

$$\tau^l(t) = \tau(t) + \tau^* \quad (4.22)$$

τ le vecteur de cisaillement macroscopique.

τ^* le vecteur de cisaillement résiduel microscopique

une formulation du critère de Dang Van est la suivante

$$\tau^l(n, t) + ap^l(n, t) \quad (4.23)$$

où $\tau^l(n, t)$: La scission instantanée

$p^l(n, t)$: La pression hydrostatique associée à la contrainte microscopique σ^l (tenseur)

Dang Van suppose qu'à l'état stabilisé, la limite élastique des contraintes microscopiques est égale à la limite élastique des contraintes macroscopiques.

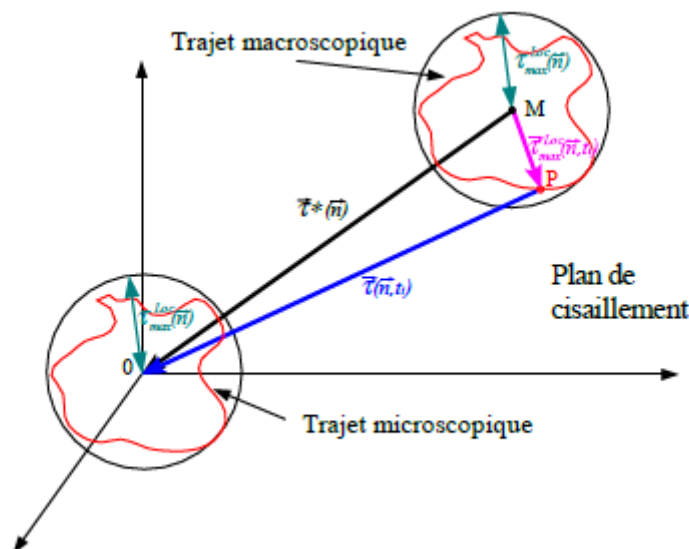


FIGURE 4.41: Trajet micro/macro dans la plan de cisaillement

Ce critère est adopté dans l'industrie. Les hypothèses adoptées par ce critère se limitent à la zone d'endurance illimitée ($N > 10E7$ cycles)

Calage du critère de Dang Van

Essai de traction alternée

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{-1} \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'écriture du critère de Dang Van $\max(\tau(t) + ap(t))$

On obtient

$$\max p(t) = \frac{\sigma_{-1} \sin(\omega t)}{3} = \frac{\sigma_{-1}}{3} \tag{4.24}$$

D'après le tri cercles de Moher le cisaillement maximal est

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{-1}}{2} \tag{4.25}$$

Alors

$$\frac{\sigma_{-1}}{2} + a \frac{\sigma_{-1}}{3} = b \tag{4.26}$$

Essai de torsion alternée

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{-1} \sin(\omega t) & 0 \\ \tau_{-1} \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p(t)$ est identiquement nulle en torsion pure, d'où : $\max p(t) = 0$

$$\sigma_{max} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{-1} & 0 \\ \tau_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les trois contraintes principales de cet état de contraintes sont τ_{-1} , 0 et $-\tau_{-1}$. D'après le tri-cercle de Mohr, le cisaillement maximal déterminé dans ce cas est donc : $\tau_{max} = \tau_{-1}$

$$\begin{cases} \tau_{-1} = b \\ \frac{\sigma_{-1}}{2} + a \frac{\sigma_{-1}}{3} = b \end{cases} \quad (4.27)$$

Les équations (7) et (8) donnent

$$\begin{cases} a = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{-1} = b \end{cases} \quad (4.28)$$

Diagramme d'endurance du critère Le domaine d'endurance du critère de Dang Van est représenté par une droite d'équation $\tau_a + ap = b$ Si le cycle de contrainte reste au-dessous de cette courbe alors il n'y a pas d'amorçage de fissure au seuil d'endurance du plan considéré. Si la courbe représentative du chargement :

- traverse la droite d'endurance
- est une tangente de la droite d'endurance

alors on aura rupture par fatigue de la structure étudiée.

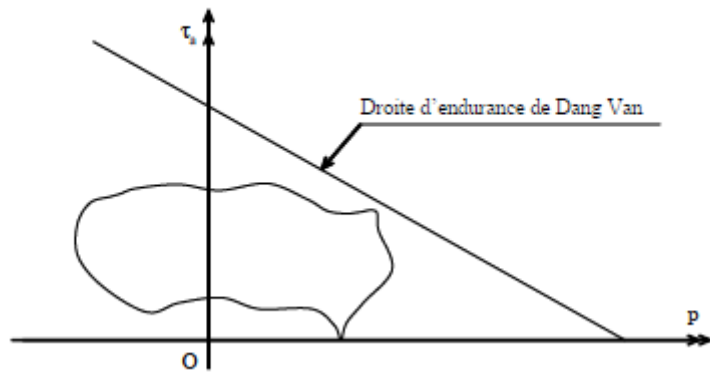


FIGURE 4.42: Droite d'endurance du critère de Dang Van

Annexe D

Matrice d'endommagement ($I-D$) à l'itération n

On note

$$d_{xx} = f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{i}}{\|\nabla \sigma_{eq}^n\|}\right)$$

$$d_{yy} = f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{j}}{\|\nabla \sigma_{eq}^n\|}\right)$$

$$d_{zz} = f * \left(1 - \frac{\overrightarrow{\nabla \sigma_{eq}^n} \cdot \vec{k}}{\|\nabla \sigma_{eq}^n\|}\right)$$

$$(1-D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-d_{xx}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-d_{yy}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-d_{zz}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-d_{yy})^{0.5}(1-d_{zz})^{0.5}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-d_{xx})^{0.5}(1-d_{zz})^{0.5}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-d_{yy})^{0.5}(1-d_{xx})^{0.5}}} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yx}} \end{bmatrix}$$

$$\nu_{xy}^{n+1} = \nu_{xy}^n \sqrt{\frac{(1-d_{yy})}{(1-d_{xx})}} \quad (4.29)$$

$$\nu_{yz}^{n+1} = \nu_{yz}^n \sqrt{\frac{(1-d_{zz})}{(1-d_{yy})}} \quad (4.30)$$

$$\nu_{xz}^{n+1} = \nu_{xz}^n \sqrt{\frac{(1-d_{zz})}{(1-d_{xx})}} \quad (4.31)$$

$$E_x^{n+1} = E_x^n (1-d_{xx}) \quad (4.32)$$

$$E_y^{n+1} = E_y^n (1-d_{yy}) \quad (4.33)$$

$$E_z^{n+1} = E_z^n (1 - d_{zz}) \quad (4.34)$$

$$G_{xy}^{n+1} = G_{xy}^n \sqrt{(1 - d_{xx})(1 - d_{yy})} \quad (4.35)$$

$$G_{zy}^{n+1} = G_{zy}^n \sqrt{(1 - d_{yy})(1 - d_{zz})} \quad (4.36)$$

$$G_{zx}^{n+1} = G_{zx}^n \sqrt{(1 - d_{zz})(1 - d_{xx})} \quad (4.37)$$

Annexe E

Communications scientifiques et publication

- **MECAMAT Aussois 2017 : Fatigue des structures et des matériaux**
- **LCF8 - Eighth International Conference on Low Cycle Fatigue 2017**

This approach describes the initiation, propagation and failure by fatigue. It is based on a “surfing” on the criterion’s surface and on a following of the damage cross the crest of the criterion’s “surface”. This approach assumes that the damage of the material is created by a material’s flow on a surface defined by the fatigue criterion. The material’s flow is caused by shear stressed (characterized by the criterion) and representing the fatigue damage destroyed crystalline cohesion of the material. Thus, material will have a non-homogeneous distribution according to the evolution of the adopted criterion and stress distribution. In the case of fatigue damage, a global approach criterion (based on the invariants of the stress tensor) will be adopted. This reduction of the material density will be defined as its flow on the surface of the criterion. This flow will be based on the parameters of the surface (mainly its gradient) and the number of cycle and the level of stresses. Then the Wöhler curve will be used. The propagation of damage will be mainly according the ridges of the criterion’s surface (zero gradients, at the lines where the material is less present). Using the existent tools, two simplified forms of the model are used and results are compared with a cruciform experimental reference example. A mapping with Dang Van criterion is also computed to analyze the numerical results.

Key Words : Damage fatigue, criteria, Wohler curve, initiation and propagation of the damage, finite element method, stiffness, criteria gradient.

- **A pragmatic anisotropic Damage Fatigue Model Based on a failure criterion and its gradient**

IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)

A. Manai, H. Hassis, A. Ben hamida, A. Krairi.

A new practical engineering methodology for the analysis of structures under cyclic loading is proposed in this work. A new anisotropic fatigue damage model is developed. The evolution of material properties degradation depends on a failure criterion and its gradient. The anisotropic material degradation will guide the damage propagation. The propagation of damage is mainly depending on the ridges of the criterion’s “surface” (zero gradients). The proposed approach can describe the initiation and propagation of the damage until the structural failure under fatigue loading. For each finite element, a non-homogeneous anisotropic distribution of material properties are associated. Schematically, it seems like a material “surfing” on the criterion’s “surface” and damages follow the crest of the criterion’s “surface” (level and gradient). A global approach criterion, based on invariants of the stress tensor, is adopted. The reduction of material properties is assigned to a number of cycles and a global level of stresses, using an experimental Wöhler curve. Two simplified forms of the model are proposed and results are compared with a cruciform experimental reference example and an industrial case. A mapping with Dang Van criterion is also computed to analyze the numerical results.

Key Words : Damage fatigue, failure criterion, Wohler curve, Damage initiation and propagation.