



HAL
open science

Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive

Aurélien Djament, Antoine Touzé, Christine Vespa

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Antoine Touzé, Christine Vespa. Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive. 2019. hal-02103934v2

HAL Id: hal-02103934

<https://hal.science/hal-02103934v2>

Preprint submitted on 31 Jul 2019 (v2), last revised 30 Apr 2021 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive

Aurélien Djament*, Antoine Touzé† et Christine Vespa‡

28 août 2019

Résumé

Nous donnons une description des foncteurs simples à valeurs de dimension finie allant d'une petite catégorie additive dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps. Cette description est analogue à des théorèmes de décomposition tensorielle de Steinberg en théorie des représentations des groupes. Nos résultats reposent sur la notion de foncteur polynomial introduite par Eilenberg et Mac Lane. Nous en donnons des applications aux représentations des groupes linéaires ou aux propriétés de finitude des catégories de foncteurs.

Abstract

We give a description of simple functors taking finitely generated values, from a small additive category to the category of vector spaces over a field. This description is analogous to Steinberg's tensor product theorems in group representation theory. Our results rest on the notion of polynomial functor introduced by Eilenberg and Mac Lane. We give applications to representations of general linear groups or to finiteness properties of functor categories.

Mots-clefs : représentations et foncteurs polynomiaux, représentations et foncteurs simples, catégories additives, décomposition tensorielle, présentation finie.

Classification MSC 2010 : 18A25, 18E05, 18E15, 20C99, 20G05, 20J99.

Introduction

Les théorèmes de décomposition tensorielle sont une pierre angulaire de la théorie des représentations des groupes. Un premier exemple est donné par un théorème de Steinberg [56] sur les représentations de dimension finie de $SL_n(\mathbb{Z})$.

*CNRS, laboratoire Paul Painlevé (UMR8524), Université de Lille, Cité scientifique, bât. M2, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE, aurelien.djament@univ-lille.fr.

†Université de Lille, laboratoire Paul Painlevé (UMR8524), Cité scientifique, bât. M2, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE, antoine.touze@univ-lille.fr.

‡Université de Strasbourg, IRMA (UMR7501), 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France, vespa@math.unistra.fr.

Plus précisément, une représentation complexe M de dimension finie est simple si et seulement si elle se décompose sous la forme :

$$M \simeq S \otimes T \tag{1}$$

où S est une représentation simple factorisant par un groupe fini $SL_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et T est une représentation polynomiale simple. Une telle décomposition tensorielle est alors unique. Des cas particuliers de cette décomposition tensorielle avaient été obtenus préalablement par Bass-Milnor-Serre [4] et Serre [52] ; les théorèmes de superrigidité de Margulis [43, chap. VII, § 5] donnent des résultats nettement plus généraux en ce sens, à l'aide de méthodes beaucoup plus complexes. Un deuxième exemple, également dû à Steinberg [55], concerne les groupes finis de type Lie sur un corps fini de cardinal $q = p^r$ (avec p premier) $G(\mathbb{F}_q)$ (par exemple $G(\mathbb{F}_q) = GL_n(\mathbb{F}_q)$). Plus précisément, si k est un corps algébriquement clos contenant \mathbb{F}_q , une représentation k -linéaire M de $G(\mathbb{F}_q)$ est simple si et seulement si elle se décompose comme un produit tensoriel

$$M \simeq M_0^{[0]} \otimes M_1^{[1]} \otimes \dots \otimes M_{r-1}^{[r-1]} \tag{2}$$

où les M_i sont des représentations simples p -restreintes de $G(k)$, et l'exposant $[i]$ indique que l'on a restreint la représentation M_i le long du morphisme de groupes $G(\mathbb{F}_q) \rightarrow G(k)$ induit par le plongement $\mathbb{F}_q \rightarrow k$, $x \mapsto x^{p^i}$. Dans le cas de $SL_n(\mathbb{F}_q)$ (respectivement $GL_n(\mathbb{F}_q)$) les représentations M_i sont uniquement déterminées (resp. uniquement déterminées à tensorisation par des puissances du déterminant près).

Les catégories de foncteurs de source une petite catégorie \mathcal{C} constituent une généralisation naturelle des représentations des groupes. En théorie des représentations, elles apparaissent par exemple dans l'étude des représentations indécomposables des algèbres de dimension finie, comme dans les travaux d'Auslander [2, 3] ou de Gabriel [28], ou dans l'étude des propriétés de pureté pour les modules sur des anneaux généraux [37]. En topologie algébrique, elles sont notamment reliées aux modules sur l'algèbre de Steenrod [31, 38, 39, 40], à l'homologie de Hochschild topologique (THH) [48] ou à l'homologie stable des groupes [23, 5, 17, 15].

Dans cet article, nous obtenons des analogues des décompositions de Steinberg (1) et (2) pour les catégories de foncteurs d'une petite catégorie additive \mathcal{A} vers les espaces vectoriels sur un corps k . Nous noterons dans la suite $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ cette catégorie de foncteurs et $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$ sa sous-catégorie pleine des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie. Dans un souci de simplicité, bien que certains de nos résultats soient valables dans un cadre plus vaste, ***on suppose dans toute cette introduction que k est un corps commutatif algébriquement clos et \mathcal{A} une petite catégorie additive.*** On renvoie le lecteur au corps du texte pour les énoncés les plus généraux.

Nos résultats reposent sur la notion de *foncteur polynomial* introduite initialement par Eilenberg et Mac Lane [20] à des fins de topologie algébrique. Les foncteurs polynomiaux constituent une généralisation naturelle des foncteurs additifs (les foncteurs polynomiaux de degré 1 sont, à un terme constant près, les foncteurs additifs). Nous renvoyons le lecteur à la section 1.4 pour plus de détails sur cette notion classique qui intervient par exemple dans les différentes parties de la topologie algébrique mentionnées ci-dessus.

La notion d'*idéal* d'une petite catégorie additive \mathcal{A} (voir début de la section 3.1) étend celle pour un anneau A . Nous introduisons la notion d'*idéal k -cotrivial* de \mathcal{A} dans la définition 3.1. C'est un analogue catégorique de la condition qu'un anneau quotient A/I est fini et de caractéristique inversible dans k . Notre premier théorème principal est l'analogie fonctoriel de la décomposition tensorielle (1). Dans ce théorème (et dans tout l'article) le produit tensoriel de deux foncteurs est défini terme à terme : $(F \otimes G)(a) = F(a) \otimes G(a)$ et pris sur k .

Théorème 1 (Corollaire 3.7). *Un foncteur F de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq S \otimes T,$$

où S est un foncteur simple factorisant par une catégorie quotient \mathcal{A}/\mathcal{I} pour un idéal k -cotrivial \mathcal{I} , et T est un foncteur simple polynomial de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$. De plus, S et T sont uniquement déterminés, à isomorphisme près.

Un cas intéressant d'application du théorème 1 est celui où la catégorie \mathcal{A} ne possède pas d'idéal k -cotrivial autre que \mathcal{A} elle-même. Par exemple, lorsque \mathcal{A} est \mathbb{F}_p -linéaire et que k contient \mathbb{F}_p . Dans ce cas, le théorème 1 affirme que tous les simples de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}, k)$ sont polynomiaux.

Bien que la décomposition tensorielle (1) et le théorème 1 soient formellement similaires, les relations entre ces deux énoncés ne sont pas complètement comprises (voir les remarques 3.8 et A.7 pour plus de détails).

Nous passons maintenant à un analogue fonctoriel de la décomposition tensorielle (2). Il est bien connu que les représentations polynomiales simples des groupes $GL_n(k)$ s'obtiennent par des constructions fonctorielles, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme $F(k^n)$ où F est un endofoncteur simple des k -espaces vectoriels. Nous appelons *foncteurs élémentaires* les foncteurs F qui sont des quotients simples des puissances tensorielles. Nous renvoyons à la section 5 et l'appendice B pour des descriptions plus explicites, et mentionnons seulement que si k est de caractéristique nulle, les foncteurs élémentaires sont les foncteurs de Schur classiques [26, Chap. 6.1]. Si E est un foncteur élémentaire et π est un foncteur additif de \mathcal{A} vers la catégorie des k -espaces vectoriels, on note π^*E la restriction de E le long de π (c'est-à-dire le foncteur composé $E \circ \pi$). Notre deuxième théorème principal est le suivant.

Théorème 2 (Théorème 7.5). *Un foncteur polynomial F de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq \pi_1^*E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^*E_n$$

où $n \in \mathbb{N}$, les π_i sont des foncteurs additifs simples deux à deux non isomorphes de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$ et les E_i sont des foncteurs élémentaires non constants. De plus, l'entier n et les classes d'isomorphisme des E_i et des π_i sont uniques, à permutation des facteurs près.

Les théorèmes principaux 1 et 2 sont valables pour toutes les petites catégories additives \mathcal{A} , sans restriction. Nous illustrons nos théorèmes dans trois cas particuliers. Dans la suite, $\mathbf{P}(A)$ désigne la catégorie des A -modules projectifs de type fini sur un anneau A .

1. Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathbb{Z})$, le foncteur $\pi : \mathbf{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow k\text{-Mod}$ d'extension des scalaires est le seul foncteur additif simple. Les foncteurs simples à valeurs de dimensions finies sont donc les produits tensoriels $S \otimes \pi^* E$, où S est un foncteur simple factorisant par une catégorie $\mathbf{P}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ avec m inversible dans k , et E est un foncteur élémentaire.
2. Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathbb{F}_q)$ et si k est un surcorps de \mathbb{F}_q , on obtient une nouvelle démonstration d'un théorème de Kuhn [39, Thm 5.23] et [41, Thm 7.11].
3. Pour $\mathcal{A} = \Lambda\text{-mod}$, la catégorie des modules de type fini sur une k -algèbre Λ de dimension finie, nos théorèmes montrent que les foncteurs simples à valeurs de dimensions finies sont les produits tensoriels de la forme $\pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n$ où les E_i sont des foncteurs élémentaires et les $\pi_i : \Lambda\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$ sont des foncteurs additifs simples. Ces foncteurs additifs simples ont été décrits par Auslander [3], nos théorèmes permettent donc d'étendre cette description aux foncteurs simples non additifs.

Nous décrivons maintenant quelques applications des théorèmes 1 et 2.

Décomposition pour $GL_n(A)$ (A anneau fini)

Lorsque $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, l'évaluation sur A^n d'un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ donne naturellement une représentation de $GL_n(A)$. Dans le cas d'un p -anneau fini A (c'est-à-dire un anneau fini de caractéristique une puissance de p), où p est la caractéristique de k , nous pouvons obtenir à partir des théorèmes 1 et 2 un théorème de décomposition tensorielle pour les groupes finis $GL_n(A)$. (L'énoncé du théorème 6.9 est légèrement plus précis sur la propriété d'unicité.)

Théorème 3 (Théorème 6.9). *Si k est de caractéristique $p \neq 0$, soient A un p -anneau fini, et $\{S_1, \dots, S_m\}$ un système complet de A -modules simples. On note B_i un facteur de composition du (k, A) -bimodule $S_i \otimes_{\mathbb{Z}} k$.*

Soit M une représentation k -linéaire de $GL_n(A)$. Alors M est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel

$$M \simeq M_1^{[B_1]} \otimes \cdots \otimes M_m^{[B_m]}$$

où les M_i sont des représentations polynomiales simples p -restreintes des groupes $GL_{n d_i}(k)$, où $d_i = \dim S_i$ et l'exposant $[B_i]$ signifie que l'on restreint la représentation M_i le long du morphisme de groupes $GL_n(A) \rightarrow GL_{n d_i}(k)$ induit par le morphisme $A \rightarrow \mathcal{M}_{d_i}(k)$ correspondant au bimodule B_i . De plus, les M_i sont uniquement déterminés à tensorisation par une puissance du déterminant près.

Lorsque $A = \mathbb{F}_q$, le théorème 3 redonne la décomposition tensorielle de Steinberg (2). Les méthodes de notre article donnent donc une nouvelle démonstration de ce résultat fondamental. Dans le cas où A n'est pas un corps, le théorème 3 semble nouveau et suggère que certains résultats bien connus pour les groupes classiques sur un corps pourraient se généraliser au cas d'un anneau fini. Il serait intéressant de savoir s'il existe des variantes du théorème 3 pour les groupes orthogonaux et symplectiques.

Décomposition pour des représentations EML-polynomiales sur un anneau commutatif

On suppose maintenant que A est un anneau commutatif, éventuellement infini. Pour obtenir des décompositions tensorielles d'une représentation V de $G(A)$, où G désigne un monoïde multiplicatif \mathcal{M}_n , ou son sous-groupe GL_n ou SL_n , nous avons besoin d'hypothèses de régularité sur le morphisme d'action $\rho : G(A) \rightarrow \text{End}_k(V)$. Nous introduisons la notion de *représentation polynomiale à la Eilenberg Mac Lane*, ou plus brièvement *représentation EML-polynomiale*, dans la définition 7.13. C'est une version affaiblie de la notion classique de représentation polynomiale [29], dans laquelle on demande que ρ soit une fonction polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane (par opposition à un polynôme). Les deux propriétés suivantes donnent un grand nombre d'exemples.

1. Toute représentation polynomiale de $GL_n(k)$ au sens classique [29] est EML-polynomiale.
2. La notion de représentation polynomiale est stable par produit tensoriel, par sous-quotients et par restriction le long des morphismes d'anneaux.

Si M est une représentation de $G(k)$, on note $M^{[\phi]}$ la représentation de $G(A)$ obtenue par restriction de M le long du morphisme $G(A) \rightarrow G(k)$ induit par un morphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow k$. Nous obtenons (cf. théorème 7.26) le théorème de décomposition suivant.

Théorème 4. *Soient A un anneau commutatif et M une représentation k -linéaire de dimension finie de $SL_n(A)$. On suppose que M est EML-polynomiale. Alors M est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$$

où les M_i sont des représentations polynomiales (au sens classique) simples de $SL_n(k)$, qui sont p -restreintes si k est de caractéristique $p > 0$, et les $\phi_i : A \rightarrow k$ sont des morphismes d'anneaux deux à deux distincts.

De plus, les morphismes ϕ_i et les représentations M_i apparaissant dans une telle décomposition sont uniquement déterminés.

L'existence d'une décomposition de ce type est également vraie (et établie dans l'article) en remplaçant SL_n par \mathcal{M}_n ou GL_n . En revanche, l'unicité n'est généralement plus exacte pour GL_n sous la forme précédente, ni même sous celle donnée par le théorème 3 pour un anneau fini, c'est pourquoi nous nous sommes concentrés sur le cas de SL_n .

Tout comme pour le théorème 3, il serait intéressant de savoir s'il existe des versions du théorème 4 pour d'autres groupes classiques.

Notons que même lorsque $A = k$, il existe des représentations k -linéaires simples de $GL_n(A)$ qui ne sont pas EML-polynomiales (par exemple une représentation fournie par un caractère $\psi : GL_n(A) \rightarrow k^\times$ bien choisi, voir l'exemple A.2). Pour de telles représentations, on ne peut pas espérer de décomposition de Steinberg comme dans le théorème 4, l'hypothèse de régularité sur les représentations n'est donc pas superflue.

Représentations EML-polynomiales et arithmétique

La notion de polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane utilisée dans la définition 7.13 ne fait intervenir que la structure *additive* des anneaux de matrices $\mathcal{M}_n(A)$,

tandis que la notion de représentation concerne leur structure *multiplicative*. La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane constitue donc une forme de propriété *arithmétique*.

Le résultat arithmétique suivant fournit une illustration de cette observation. Nous l’obtenons comme conséquence du théorème 4 ou plutôt de l’analogie pour les représentations des monoïdes multiplicatifs $\mathcal{M}_n(A)$. Nous n’en connaissons pas de démonstration directe.

Proposition 5 (Proposition 7.28). *Soient A un anneau commutatif et K un corps commutatif. Soit $\varphi : A \rightarrow K$ une fonction EML-polynomiale de degré $d > 0$, et multiplicative au sens où $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in A$. Alors il existe une extension finie de corps commutatifs $K \subset L$ de degré au plus $d!$ et des morphismes d’anneaux $f_i : A \rightarrow L$, pour $1 \leq i \leq d$, tels que*

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x).$$

De plus, les morphismes f_i sont uniques à l’ordre des facteurs près (et à agrandissement du corps L près).

On obtient en fait un résultat d’unicité un peu plus précis — voir la remarque 7.29.

Application aux propriétés de finitude des catégories de foncteurs

Nous appliquons également nos théorèmes principaux à l’étude de propriétés de finitude des catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ (dans cette partie, le corps k peut être quelconque). Ces propriétés sont banales lorsque cette catégorie est localement noethérienne, mais elles valent sous des hypothèses bien plus faibles et faciles à vérifier. On rappelle qu’une catégorie abélienne est *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens, et qu’un objet est dit *fini* s’il est à la fois noethérien et artinien.

Théorème 6 (Théorème 8.7). *Si, pour tout idéal k -cotrivial \mathcal{I} de \mathcal{A} , les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; k)$ et $\mathcal{F}((\mathcal{A}/\mathcal{I})^{op}; k)$ sont localement noethériennes, alors la classe des foncteurs finis de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$ est stable par produit tensoriel.*

L’hypothèse de ce théorème est en particulier vérifiée pour $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, où A est un anneau quelconque (y compris non noethérien).

Notre section 8 s’intéresse ensuite à la propriété de présentation finie pour les foncteurs finis, et plus généralement à la propriété pf_∞ d’existence d’une résolution projective dont tous les termes sont de type fini. Rappelons qu’un lemme classique et important de L. Schwartz (cf. par exemple [24, proposition 10.1]) stipule que, si \mathbf{F} est un corps fini, tout foncteur fini de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}); \mathbf{F})$ possède la propriété pf_∞ . La démonstration, élémentaire, est indépendante des profonds résultats de noethérianité de Putman-Sam-Snowden [50, 51] (bien postérieurs); elle nécessite toutefois de façon cruciale la finitude de \mathbf{F} . Le lemme de Schwartz a des implications importantes sur la comparaison cohomologique de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}); \mathbf{F})$ et de sa sous-catégorie pleine de foncteurs analytiques, étroitement liée à la topologie algébrique via les modules instables sur l’algèbre de Steenrod en vertu de [31]. Notre théorème 8.9 fournit une vaste généralisation du lemme

de Schwartz, y compris dans des catégories de foncteurs non localement noethériennes (si l'on s'intéresse seulement à la présentation finie, on peut affaiblir les hypothèses — cf. théorème 8.8). Afin d'éviter toute condition technique, nous nous contenterons ici de donner un cas particulier du théorème 8.9.

Théorème 7. *Soit A un anneau commutatif de type fini. Tout foncteur fini de $\mathcal{F}^{df}(\mathbf{P}(A); k)$ possède la propriété pf_∞ dans $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$.*

Ce résultat ne découle pas de propriétés formelles générales car la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$ n'est localement noethérienne que si A est *fini* (proposition 8.17). En revanche, on montre que sa sous-catégorie $\mathcal{F}^{df}(\mathbf{P}(A); k)$ est localement finie, sans aucune hypothèse sur l'anneau A , dès lors que le corps k est de caractéristique nulle (proposition 8.33).

Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie

Les théorèmes 1 et 2 concernent les foncteurs simples prenant des valeurs de dimension finie. Sous de fortes hypothèses de finitude sur \mathcal{A} , tous les foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ appartiennent à $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$, mais c'est loin d'être le cas en général. Nous discutons quelques aspects de cette question dans l'appendice A.

Dans la section A.1, nous donnons des exemples explicites de foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(L); k)$ (pour L un corps commutatif infini) prenant une seule valeur non nulle de dimension finie.

Il semble en général hors de portée de décrire les foncteurs simples ne prenant aucune valeur de dimension finie non nulle. Nous constatons toutefois, dans la section A.2, qu'il en existe dans un cadre général, par exemple dans $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$, où A est un anneau commutatif de caractéristique nulle.

Dans un souci de simplicité, nous avons fait le choix dans cet article de formuler nos résultats pour des foncteurs simples prenant des valeurs de dimensions finies. Notons néanmoins que cette propriété est un cas particulier de la notion plus générale et intrinsèque d'*endofinitude* dans les catégories abéliennes. Nous expliquons ce point dans la section A.3.

Remerciements. Le premier auteur remercie Ofer Gabber pour l'entretien qu'il lui a accordé sur des questions arithmétiques reliées à ce travail, ainsi que Henning Krause pour l'avoir initié à la notion d'endofinitude.

Les auteurs ont bénéficié du soutien partiel de l'Agence Nationale de la Recherche, via le projet ANR ChroK [ANR-16-CE40-0003] et le labex CEMPI [ANR-11-LABX-0007-01]. Ils ne soutiennent pas pour autant l'ANR, dont ils revendiquent la restitution des moyens aux laboratoires sous forme de crédits récurrents.

Table des matières

1	Rappels sur les catégories de foncteurs	9
1.1	Catégories de Grothendieck	9
1.2	Catégories de foncteurs	9
1.3	Prolongements intermédiaires	10
1.4	Foncteurs polynomiaux	11

2	Produits tensoriels et extension des scalaires	14
3	Décomposition tensorielle globale	17
3.1	Définitions et énoncés	17
3.2	Démonstration du théorème 3.4	19
4	Décomposition tensorielle primaire	25
5	Décomposition tensorielle des simples polynomiaux	27
5.1	Définitions et énoncés	27
5.2	Démonstration du théorème 5.3	28
6	Simple de $\mathcal{F}(A, K)$ pour A anneau fini	32
6.1	Décompositions tensorielles des foncteurs simples	32
6.2	Application aux monoïdes finis de matrices	33
6.3	Application aux groupes linéaires finis	34
6.4	Simple polynomiaux et non polynomiaux. Conjecture sur les fonctions de dimension 37	
7	Renforcement et conséquences du théorème 5.3	39
7.1	Compléments sur les effets croisés	39
7.2	Forme générale du corollaire 5.4	41
7.3	Simple polynomiaux de $\mathcal{F}(A, K)$ (A commutatif)	42
7.4	Applications aux représentations polynomiales	43
7.5	Traductions arithmétiques	48
8	Applications : propriétés de finitude	50
8.1	Contexte et résultats principaux	50
8.2	Rappels sur les propriétés de finitude	53
8.3	Propriétés de finitude des idéaux K -cotriviaux	55
8.4	La propriété localement finie dans $\mathcal{F}(A, K)$	59
8.5	Produit tensoriel de foncteurs de longueur finie	62
8.6	Présentation finie et généralisations	63
A	Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie	67
A.1	Foncteurs simples prenant une valeur non nulle de dimension finie	67
A.2	Foncteurs simples qui ne prennent aucune valeur de dimension finie non nulle	70
A.3	Notion intrinsèque : endofinitude (centrale)	70
A.4	Produits infinis de foncteurs simples	73
B	Foncteurs élémentaires	74

Conventions. Dans tout l'article, on désigne par :

- \mathcal{A} une petite catégorie additive ;
- \mathcal{E} une catégorie de Grothendieck ;
- K un corps commutatif ;
- $K[\mathcal{M}]$ la K -algèbre d'un monoïde (ou d'un groupe) \mathcal{M} , de sorte que les $K[\mathcal{M}]$ -modules s'identifient aux représentations K -linéaires de \mathcal{M} .

Sauf mention explicite du contraire, les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur K .

1 Rappels sur les catégories de foncteurs

1.1 Catégories de Grothendieck

La plupart des catégories abéliennes considérées dans cet article seront des *catégories de Grothendieck* à l'instar des catégories considérées dans [27], c'est-à-dire des catégories abéliennes avec sommes arbitraires, colimites filtrantes exactes et un générateur. Le générateur assure en particulier que les sous-objets d'un objet donné forment un ensemble. La catégorie $A\text{-Mod}$ des modules à gauche sur un anneau A est un exemple de catégorie de Grothendieck.

Un objet s de la catégorie de Grothendieck \mathcal{E} est *simple* s'il est non nul et n'admet aucun sous-objet trivial. L'anneau des endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{E}}(s)$ est alors un corps (généralement non commutatif). Les classes d'isomorphisme d'objets simples de \mathcal{E} forment un ensemble, qu'on notera $\text{Irr}(\mathcal{E})$. Un objet de \mathcal{E} est dit *semi-simple* s'il est somme directe d'une famille d'objets simples de \mathcal{E} . Il est dit *semi-simple isotypique de type s* s'il est somme directe de copies d'un objet simple s . Les propriétés des objets semi-simples de \mathcal{E} sont analogues à celles des objets semi-simples dans les catégories de modules. Pour plus de détails nous renvoyons à [9, § 4], qui traite de catégories de modules, mais dont les démonstrations valent en fait dans toute catégorie de Grothendieck.

Un objet x de \mathcal{E} est *de type fini* si toute famille de sous-objets de x , filtrante croissante pour l'inclusion et de réunion x , contient x . De manière équivalente, le foncteur $\mathcal{E}(x, -)$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes. Un objet de type fini non nul possède toujours un quotient simple. Dualement, un objet x est *de type cofini* si toute famille de sous-objets, filtrante décroissante pour l'inclusion et d'intersection nulle, contient l'objet nul. Un objet de type cofini non nul possède toujours un sous-objet simple.

1.2 Catégories de foncteurs

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, avec \mathcal{C} petite (ou essentiellement petite). On note $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , les morphismes étant les transformations naturelles. On note $\Phi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ le foncteur de précomposition par un foncteur $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.

Si \mathcal{D} possède des limites ou des colimites, il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, où elles se calculent au *but*. En particulier, si \mathcal{D} est abélienne (resp. avec colimites filtrantes exactes), il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Pour une catégorie \mathcal{D} avec sommes arbitraires, M un objet de \mathcal{D} et E un ensemble, on note $M[E]$ la somme de copies de M indexées par E . Une variation classique autour du lemme de Yoneda donne une bijection :

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(M[\mathcal{C}(t, -)], F) \simeq \mathcal{D}(M, F(t))$$

naturelle en les objets M , t et F de \mathcal{D} , \mathcal{C} et $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ respectivement. Il en résulte que si M est un objet générateur (resp. projectif) de \mathcal{D} , alors les foncteurs $M[\mathcal{C}(t, -)]$ engendrent (resp. sont projectifs dans) $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ lorsque t parcourt un squelette de \mathcal{C} . Dualement, si \mathcal{D} possède des produits, on note M^E le produit de copies de M indexées par E , et on a une bijection naturelle en M , t et F :

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(F, M^{\mathcal{C}(-, t)}) \simeq \mathcal{D}(F(t), M) .$$

En particulier, si M est un cogénérateur injectif de \mathcal{D} , alors les foncteurs $M^{\mathcal{C}(-,t)}$ forment un ensemble de cogénérateurs injectifs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Ces considérations impliquent la proposition classique suivante.

Proposition 1.1. *Si \mathcal{D} est une catégorie de Grothendieck (resp. une catégorie abélienne avec assez de projectifs, resp. avec assez d'injectifs) alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est une catégorie de Grothendieck (resp. une catégorie abélienne avec assez de projectifs, resp. avec assez d'injectifs).*

Si S est un ensemble d'objets de \mathcal{C} , on dit que S est un *support*¹ (resp. *co-support*) d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ si ce foncteur est isomorphe à un quotient (resp. sous-foncteur) d'une somme directe (resp. d'un produit) de foncteurs du type $M[\mathcal{C}(s, -)]$ (resp. $M^{\mathcal{C}(-,s)}$) où M est un objet de \mathcal{E} et s un élément de S .

Si k est un anneau, on note $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, k\text{-Mod})$. C'est une catégorie de Grothendieck dont un générateur projectif est donné par la somme des foncteurs $P_{\mathcal{C}}^t(-) = k[\mathcal{C}(t, -)]$, qui représentent l'évaluation en t , et qu'on appelle projectifs standard. Un foncteur est de type fini si et seulement s'il est quotient d'une somme finie de projectifs standard.

Si A est un anneau, on note $\mathbf{P}(A)$ la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ des A -modules projectifs de type fini. La catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$ sera notée simplement $\mathcal{F}(A, k)$; certains de nos énoncés ne vaudront que dans ce cadre.

Si k est un corps, on note $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}; k)$ (resp. $\mathcal{F}^{df}(A, k)$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ (resp. $\mathcal{F}(A, k)$) des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie sur k . La plupart de nos résultats ne traiteront que de tels foncteurs.

1.3 Prolongements intermédiaires

La propriété classique suivante peut se trouver dans [7, prop. 3.4.1 et 3.4.2]. Notre terminologie de foncteur *réflexif* s'inspire de [7, déf. 3.5.2].

Proposition et définition 1.2. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. On suppose que F possède un adjoint à gauche G et un adjoint à droite H .*

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

1. *l'unité $Id_{\mathcal{C}'} \rightarrow FG$ est un isomorphisme ;*
2. *la coïunité $FH \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$ est un isomorphisme.*

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dira que F est réflexif.

La définition suivante provient de la théorie des recollements, qui est sous-jacente à ce paragraphe et à d'autres considérations de l'article, mais nous n'aurons explicitement besoin que de la notion de *prolongement intermédiaire*. Les recollements et prolongements intermédiaires ont d'abord été introduits dans le cadre des catégories triangulées dans [6]. Pour le contexte abélien, notamment de catégories de foncteurs, nous nous référons à [39].

Définition 1.3. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ des catégories abéliennes et $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur réflexif. On note G et H les adjoints à gauche et à droite respectivement de F . On appelle *prolongement intermédiaire* associé à F le foncteur $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ image de la transformation naturelle $G \rightarrow H$ dont l'adjointe $Id_{\mathcal{D}'} \rightarrow FH$ est l'inverse de la coïunité.

¹. Pour davantage de rappels sur cette notion, notamment une présentation plus conceptuelle en termes d'extensions de Kan, on pourra par exemple consulter [16, §2.3].

Pour les propriétés élémentaires suivantes, on renvoie par exemple à [39, § 4].

Proposition 1.4. *Soient $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur réflexif entre catégories abéliennes et $T : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ le prolongement intermédiaire associé.*

1. *L'image par le foncteur F d'un objet simple de \mathcal{D} est soit nulle, soit simple dans \mathcal{D}' .*
2. *L'endofoncteur FT de \mathcal{D}' est isomorphe à l'identité.*
3. *Le foncteur T est pleinement fidèle. Il est additif et préserve les monomorphismes et les épimorphismes.*
4. *Le foncteur T envoie un objet simple de \mathcal{D}' sur un objet simple de \mathcal{D} . De plus, deux objets simples non isomorphes ont des images par T non isomorphes.*

L'une des classes de prolongements intermédiaires les plus importantes dans la théorie des catégories de foncteurs est celle provenant de la proposition suivante, qui constitue un cas particulier de [7, proposition 3.7.3].

Proposition 1.5. *Soient \mathcal{C} une petite catégorie et \mathcal{D} une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} . Le foncteur de restriction $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ est réflexif.*

Si \mathcal{D} est une sous-catégorie à un objet, on déduit de la proposition 1.4 :

Corollaire 1.6. *Soient \mathcal{C} une petite catégorie, t un objet de \mathcal{C} et k un anneau. Alors le foncteur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k) \rightarrow k[\mathbf{End}_{\mathcal{C}}(t)]\text{-Mod}$ d'évaluation en t envoie un objet simple F sur un objet nul ou simple, qui a alors le même corps d'endomorphismes que F .*

1.4 Foncteurs polynomiaux

Dans cet article nous ne traitons que des foncteurs polynomiaux sur une petite catégorie additive, cadre classique remontant à Eilenberg-Mac Lane [20, chapitre II]. Soit \mathcal{D} une catégorie abélienne.

Foncteurs additifs On rappelle qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ est *additif* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. pour tout couple (s, t) d'objets de \mathcal{A} , la fonction $\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \mathcal{D}(F(s), F(t))$ induite par F est additive ;
2. On a $F(0) = 0$ et pour tout couple (s, t) d'objets de \mathcal{A} le morphisme canonique $F(s \oplus t) \rightarrow F(s) \oplus F(t)$ de \mathcal{D} est un monomorphisme ;
3. pour tout couple (s, t) d'objets de \mathcal{A} , le morphisme canonique $F(s \oplus t) \rightarrow F(s) \oplus F(t)$ est un isomorphisme ;
4. pour tout couple (s, t) d'objets de \mathcal{A} , le morphisme canonique $F(s) \oplus F(t) \rightarrow F(s \oplus t)$ est un isomorphisme.

On note $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ formée des foncteurs additifs. C'en est une sous-catégorie épaisse, stable par limites et colimites. On notera $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ pour $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, k\text{-Mod})$, lorsque k est un anneau. La propriété élémentaire suivante est classique [19, 62].

Proposition 1.7. *Soient A et k deux anneaux. L'évaluation en A induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A); k) \xrightarrow{\simeq} (A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} k)\text{-Mod}$$

dont un quasi-inverse est donné par la tensorisation au-dessus de A avec un (k, A) -bimodule.

Fonctions polynomiales entre groupes abéliens Soient V et E des groupes abéliens, $f : V \rightarrow E$ une fonction et $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. La n -ème déviation de f [20, § 8]² est la fonction $\delta_n(f) : V^n \rightarrow E$ définie par

$$\delta_n(f)(a_1, \dots, a_n) := \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|I|} f(a_I)$$

où $|I|$ désigne le cardinal de l'ensemble I et $a_I := \sum_{i \in I} a_i$. On dit que f est une *fonction polynomiale* de degré au plus n si la fonction $\delta_{n+1}(f)$ est identiquement nulle (ce qui implique que les déviations $\delta_i(f)$ sont également nulles pour $i \geq n+1$). Les fonctions polynomiales (resp. les fonctions polynomiales de degré au plus n) forment un sous-groupe noté $Pol(V, W)$ (resp. $Pol_n(V, W)$) du groupe abélien des fonctions $V \rightarrow W$. Pour une étude systématique de ces fonctions polynomiales, on pourra consulter Passi [46, chap. V].

Effets croisés Soit n un entier strictement positif. Le n -ème effet croisé est le foncteur $cr_n : \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}^n, \mathcal{D})$ défini par

$$cr_n(F)(t_1, \dots, t_n) := \text{Ker} \left(F \left(\bigoplus_{i=1}^n t_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F \left(\bigoplus_{j \neq i} t_j \right) \right)$$

(morphismes induits par les projections canoniques). Le multifoncteur en n variables $cr_n(F)$ est *symétrique* au sens où l'on dispose d'isomorphismes $cr_n(F)(t_1, \dots, t_n) \simeq cr_n(F)(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, isomorphismes vérifiant les propriétés de naturalité appropriées. On a une décomposition naturelle [20, théorème 9.1] :

$$F \left(\bigoplus_{i=1}^n t_i \right) \simeq \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} cr_d(F)(t_{j_1}, \dots, t_{j_d}).$$

Foncteurs polynomiaux Un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ est *polynomial de degré au plus n* s'il vérifie les conditions suivantes, qui sont équivalentes d'après [20, Théorème 9.11] :

1. pour tout couple (s, t) d'objets de \mathcal{A} , la fonction $\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \mathcal{D}(F(s), F(t))$ induite par F est polynomiale de degré au plus n ;
2. $cr_{n+1}(F) = 0$.

2. Nous ne suivons pas l'indexation d'Eilenberg et Mac Lane pour les déviations (et plus tard, les effets croisés) : ce que nous nommons n -ème déviation (resp. effet croisé) correspond à leur $(n-1)$ -ème déviation (resp. effet croisé). Cela nous permet de nous conformer aux conventions les plus courantes pour les effets croisés.

Un foncteur F est de degré n s'il est de degré au plus n et si $cr_n F \neq 0$.

Exemple 1.8. Les foncteurs constants sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus 0. Les foncteurs additifs sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus 1 et nuls sur l'objet nul.

On note $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus n . C'est une sous-catégorie épaisse, stable par limites et colimites. Si $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif entre catégories additives essentiellement petites, le foncteur de précomposition Φ^* envoie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ dans $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{D})$.

Le rôle fondamental des fonctions additives (resp. foncteurs additifs) est mis en évidence par les propositions suivantes, qui découlent de ce que la dernière déviation (resp. le dernier effet croisé) non nul(le) d'une fonction (resp. d'un foncteur) est additive (resp. additif) par rapport à chaque variable.

Proposition 1.9. *Soient U et V deux groupes abéliens. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Le groupe abélien $\mathbf{Ab}(U, V)$ est réduit à 0.
2. Toute fonction polynomiale de U dans V est constante.

Proposition 1.10. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. La catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ est réduite à 0.
2. Tout foncteur polynomial $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ est constant.

Si $\mathcal{D} = k\text{-Mod}$ pour un anneau k , ces assertions équivalent aussi aux suivantes :

1. $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ pour tous objets x et y de \mathcal{A} ;
2. $\text{End}_{\mathcal{A}}(x) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ pour tout objet x de \mathcal{A} .

Effets croisés comme adjoints, et produits tensoriels Soit $\mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)$ la catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^n; K)$ dont les objets sont les foncteurs multiréduits (c'est-à-dire les foncteurs F tels que $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ dès que l'un des a_i est nul). Cette catégorie est reliée à $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ par la paire de foncteurs suivante, où cr_n est le n -ème effet croisé, et Δ^* est la précomposition par le foncteur diagonale $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^n$, c'est-à-dire $\Delta^* F(x) = F(x, \dots, x)$:

$$cr_n : \mathcal{F}(\mathcal{A}; K) \rightleftarrows \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K) : \Delta^* .$$

Proposition 1.11. *Le foncteur cr_n est adjoint au foncteur Δ^* des deux côtés. On a donc des isomorphismes naturels :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\Delta^* F, G) &\simeq \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)(F, cr_n G) , \\ \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(G, \Delta^* F) &\simeq \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)(cr_n G, F) . \end{aligned}$$

Nous utiliserons souvent la proposition 1.11, qui découle de l'adjonction entre somme et diagonale, lorsque F_1, \dots, F_n sont des foncteurs réduits (c'est-à-dire nuls sur l'objet nul) et que $F = F_1 \boxtimes \dots \boxtimes F_n$ est leur produit tensoriel externe, défini par $(F_1 \boxtimes \dots \boxtimes F_n)(a_1, \dots, a_n) = F_1(a_1) \otimes \dots \otimes F_n(a_n)$. Dans ce cas, $\Delta^* F$ est égal au produit tensoriel des F_i , défini par $(F_1 \otimes \dots \otimes F_n)(a) = F_1(a) \otimes \dots \otimes F_n(a)$.

2 Produits tensoriels et extension des scalaires

Dans cette section, nous étendons aux catégories de foncteurs générales des résultats classiques sur les représentations simples des produits tensoriels d'algèbres, pour lesquels on pourra se référer à [9, § 12].

Dans toute la section, \mathcal{C} et \mathcal{C}' désignent deux petites catégories. On rappelle que K désigne un corps commutatif. Étant donné un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ et un foncteur G de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ on note $F \boxtimes G$ le foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$ tel que $(F \boxtimes G)(c, c') := F(c) \otimes G(c')$, les produits tensoriels étant pris comme d'habitude sur K .

Proposition 2.1. *Soit S un objet simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme canonique $K \rightarrow \text{End}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)}(S)$ est un isomorphisme.*
2. *Pour toute petite catégorie \mathcal{C}' et tout couple F, G d'objets de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$, le produit tensoriel par Id_S induit un isomorphisme :*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)(F, G) \xrightarrow{\text{Id}_S \boxtimes -} \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)(S \boxtimes F, S \boxtimes G).$$

3. *Pour toute petite catégorie \mathcal{C}' et tout foncteur simple T de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$, le produit tensoriel $S \boxtimes T$ est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$.*
4. *Pour toute extension L de K , $S \otimes_K L$ est un objet simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$.*

Démonstration. (1) \Rightarrow (3). Via l'isomorphisme canonique de catégories $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$, le foncteur $S \boxtimes T$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine \mathcal{S} de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ constituée des foncteurs semi-simples isotypiques de type S . Comme celle-ci est stable par sous-quotients, il suffit de montrer que le foncteur qu'on obtient en voyant $S \boxtimes T$ comme objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{S})$ est simple. Mais \mathcal{S} est équivalente (via $\text{Hom}(S, -)$) à la catégorie des espaces vectoriels sur K , et via cette équivalence, $S \boxtimes T$ s'identifie au foncteur T de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$, qui est par hypothèse simple, d'où la simplicité de $S \boxtimes T$.

(3) \Rightarrow (4) : soit \mathcal{C}' la catégorie à un objet associée au monoïde multiplicatif L_μ sous-jacent à L . La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine, qui est stable par sous-quotient (donc préserve la simplicité), de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$ constituée des foncteurs sur lesquels les éléments de K à la source (vus comme flèches de \mathcal{C}') agissent par l'homothétie correspondante au but et sur lesquels l'action de L à la source est additive, d'où le résultat en prenant pour T le $K[L_\mu]$ -module simple L .

(4) \Rightarrow (1) : pour toute extension L de K , le foncteur $S \otimes_K L$ prend naturellement ses valeurs dans les modules à gauche *libres* sur l'anneau $A_L := \text{End}(S) \otimes_K L$. Comme par hypothèse $S \otimes_K L$ est simple dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$, on en déduit que tout élément non nul de A_L définit un automorphisme de ce foncteur. Comme une homothétie sur un module libre non nul ne peut être inversible que si son rapport l'est, on en déduit que A_L est un *corps*. Supposons que $\text{End}(S)$ contienne strictement K et considérons un élément $\xi \in \text{End}(S) \setminus K$: si ξ est algébrique sur K , A_L n'est pas un corps si l'on prend pour L un corps de rupture d'un polynôme irréductible sur K annulant ξ , ce qui est absurde. Si ξ est transcendant, $A_{K(x)}$ n'est pas un corps car son élément non nul $\xi \otimes 1 - 1 \otimes x$ n'est pas inversible. On en déduit donc $\text{End}(S) = K$.

L'implication (2) \Rightarrow (1) est évidente (prendre pour \mathcal{C}' la catégorie à un seul morphisme), et l'implication réciproque s'établit comme (1) \Rightarrow (3). \square

Définition 2.2. Un foncteur simple est *absolument simple* lorsqu'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 2.1.

Proposition 2.3. 1. Si K est algébriquement clos, alors tout foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ à valeurs de dimension finie (ou, plus généralement, prenant au moins une valeur de dimension finie non nulle) est absolument simple.
 2. Si pour tout objet a de \mathcal{C} , l'ensemble $\mathcal{C}(a, a)$ est fini, et si K contient toutes les racines de l'unité, alors tout foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est absolument simple.

Démonstration. Soit F un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ tel qu'il existe un objet t de \mathcal{C} tel que $F(t)$ soit non nul et de dimension finie. Alors $\text{End}(F)$ est un sous-espace vectoriel de $F(t)$, car F est un quotient de $P_{\mathcal{C}}^t$ (on a une flèche non nulle $P_{\mathcal{C}}^t \rightarrow F$ et F est simple), donc est de dimension finie sur K . Par conséquent, si K est algébriquement clos, $\text{End}(F)$ est nécessairement réduit à K .

Démontrons la deuxième assertion. Si F est simple et $F(t) \neq 0$ alors $F(t)$ est un $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(t)]$ -module simple qui a même corps d'endomorphismes que F , d'après le corollaire 1.6. Il suffit donc de vérifier que si M est un monoïde fini, S un $K[M]$ -module simple et K contient les racines de l'unité, alors $\text{End}(S) \simeq K$.

Si le monoïde M est un *groupe*, il s'agit d'un corollaire classique du théorème d'induction de Brauer (voir par exemple [13, *Theorem 17.1*]). Le cas d'un monoïde fini quelconque s'y ramène (voir par exemple [54, théorème 5.5]). \square

Remarque 2.4. La première propriété tombe en défaut si l'on omet l'hypothèse des valeurs de dimension finie. C'est déjà vrai pour des algèbres : si K est un corps algébriquement clos et A une K -algèbre, il peut exister des A -modules simples dont le corps des endomorphismes est strictement plus gros que K . N'importe quelle extension stricte du corps K fournit un tel A !

Il nous sera parfois utile de ramener l'étude de foncteurs simples à celle de foncteurs absolument simples, vu les bonnes propriétés dont jouissent ces derniers. On peut le faire, au prix d'une extension finie des scalaires et de dévissages, par l'intermédiaire de la propriété suivante.

Proposition 2.5. Soit S un foncteur simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$. Il existe une extension finie de corps commutatifs $K \subset L$ telle que le foncteur $S \otimes_K L$ de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont absolument simples.

Démonstration. Comme S est à valeurs de dimension finie, le corps $\text{End}(S)$ est de dimension finie sur K et donc a fortiori sur son centre Z . Soit L un corps *neutralisant* — cf. [9, § 15.3] — de $\text{End}(S)$ (sur Z) : c'est une extension finie de Z et donc de K telle que $\text{End}(S) \otimes_Z L \simeq \mathcal{M}_n(L)$ comme L -algèbres pour un certain entier $n > 0$. Par conséquent, $S \otimes_Z L$ est la somme directe de n copies d'un foncteur absolument simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$.

Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut supposer que $K \subset L$ est une extension normale. Alors $S \otimes_K L$ possède une filtration de longueur au plus rn , où r est le degré de Z sur K , dont les sous-quotients sont absolument simples. \square

La proposition 2.6 est une variante fonctorielle de [9, § 12.1, proposition 2].

Proposition 2.6. Soit F un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$. On suppose qu'il existe un objet (x, y) de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tel que $F(x, y)$ soit de dimension finie non nulle

sur K . Alors il existe des foncteurs simples S de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ et T de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$, uniques à isomorphisme près, tels que F soit isomorphe à un quotient de $S \boxtimes T$.

Démonstration. Si S et T existent, alors pour tous les objets t de \mathcal{C} et u de \mathcal{C}' , le foncteur $F(t, -)$, resp. $F(-, u)$ est semi-simple isotypique de type S , resp. T . Ceci prouve l'unicité de S et T . Montrons leur existence.

Notons que $\{(x, y)\}$ est un support et un co-support de F . Il s'ensuit que $\{x\}$ (resp. $\{y\}$) est un support et un co-support de $F(-, u)$ (resp. $F(t, -)$) pour tout objet u de \mathcal{C}' (resp. t de \mathcal{C}). Soit M un $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(x)]$ -module simple contenu dans $F(x, y)$ (il en existe car $F(x, y)$ est de dimension finie non nulle sur K) : alors $F(-, y)$ contient le foncteur simple S de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ obtenu en appliquant à M le prolongement intermédiaire associé à la restriction de \mathcal{C} à sa sous-catégorie pleine constituée du seul objet t (cf. propositions 1.5 et 1.4), car le foncteur de prolongement intermédiaire préserve les monomorphismes, et l'hypothèse qu'un ensemble d'objets d'un foncteur en constitue un support et un co-support est équivalente à dire que ce foncteur s'identifie au prolongement intermédiaire de sa restriction à la sous-catégorie pleine déterminée par cet ensemble.

Ainsi, vu comme objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)) (\simeq \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K))$, F prend une valeur contenant un objet simple S de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$. La simplicité de F montre alors que toutes les valeurs de ce foncteur sont des objets semi-simples isotypiques de type S dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, puisque $\{y\}$ constitue un support de F (vu dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$). On obtient de même un simple T de $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ tel que $F(c, -)$ soit un foncteur semi-simple isotypique de type T pour tout objet c de \mathcal{C} .

Pour voir que F est un quotient de $S \boxtimes T$, on raisonne comme au début de la démonstration de la proposition 2.1 : la sous-catégorie \mathcal{S} de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, K)$ des foncteurs semi-simples isotypiques de type S est équivalente à $\text{End}(S)^{op}\text{-Mod}$. Il existe donc un foncteur simple T' de $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \text{End}(S)^{op})$ tel que $F \simeq S \boxtimes_{\text{End}(S)^{op}} T'$.

L'image de T' dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ (par le foncteur de restriction des scalaires au but) contient manifestement T , de sorte qu'on dispose dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; \text{End}(S)^{op})$ d'un épimorphisme $T \otimes_K \text{End}(S) \rightarrow T'$, d'où un épimorphisme $S \boxtimes T \rightarrow F$. \square

Remarque 2.7. Le résultat tombe en général en défaut si l'on omet l'hypothèse d'une valeur de dimension finie. Là encore, c'est un problème d'algèbres : soient A l'algèbre de polynômes $K[x]$ et B l'algèbre de polynômes $K[t_P]$, où les indéterminées t_P sont indexées par les polynômes irréductibles unitaires P de $K[X]$. On fait du corps $K(x)$ un $A \otimes B$ -module via les morphismes de K -algèbres $K[x] \hookrightarrow K(x)$ (inclusion canonique) et $K[t_P] \rightarrow K(x)$ envoyant t_P sur $1/P$. Ce module est simple car le morphisme $A \otimes B \rightarrow K(x)$ ainsi défini est surjectif. Mais $K(x)$ ne contient aucun $K[x]$ -module simple !

Corollaire 2.8. *Supposons que tous les simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}; K)$ sont absolument simples (voir la proposition 2.3 pour des conditions suffisantes concrètes). Alors les simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$ sont les bifoncteurs de la forme $S \boxtimes T$ où S et T sont des simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}; K)$ et $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}'; K)$ respectivement. De plus, deux simples $S \boxtimes T$ et $S' \boxtimes T'$ sont isomorphes si et seulement si $S \simeq S'$ et $T \simeq T'$.*

Afin de manier commodément ces notions liées à l'extension des scalaires au but des catégories de foncteurs, nous introduisons une terminologie directement inspirée (au vu de la proposition 1.7) de la théorie classique des représentations.

Définition 2.9. Nous dirons que K est un *corps de décomposition* (resp. *corps de décomposition non additif*) de la catégorie \mathcal{A} si tout foncteur simple à valeurs de dimension finie de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ (resp. $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$) est absolument simple.

Si A est un anneau, K est un corps de décomposition de la catégorie $\mathbf{P}(A)$ si et seulement si K est un corps de décomposition (*splitting field* en anglais) de la K -algèbre $A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ au sens usuel de la théorie des représentations (où l'on suppose souvent cette K -algèbre de dimension finie — cf. par exemple [13, §7.B]), en vertu de la proposition 1.7.

Exemple 2.10. 1. La proposition 2.3 montre qu'un corps commutatif algébriquement clos est un corps de décomposition non additif d'une petite catégorie additive arbitraire.

2. Cette même proposition montre qu'un corps commutatif contenant toutes les racines de l'unité est un corps de décomposition non additif de toute petite catégorie additive \mathcal{A} telle que $\mathcal{A}(a, a)$ soit fini pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$.

3. Si k est un corps fini, tout surcorps commutatif de k est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(k)$. Tout corps commutatif est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(\mathbb{Z})$ et de $\mathbf{P}(\mathbb{Q})$.

Remarque 2.11. Une grande partie des résultats de changement de base de cette section s'étend (avec les mêmes démonstrations) à la situation plus intrinsèque suivante : soient \mathcal{D} une catégorie abélienne k -linéaire (où k est un anneau commutatif) et A une k -algèbre. Les objets x de \mathcal{D} munis d'une action de A (c'est-à-dire d'un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow \text{End}_{\mathcal{E}}(x)$) forment une catégorie abélienne \mathcal{D}_L , qui est une catégorie de Grothendieck si c'est le cas de \mathcal{D} . On dispose d'un foncteur d'extension des scalaires $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_L$, qui est adjoint à gauche au foncteur d'oubli.

Le lien avec la situation considérée dans cette section provient de l'observation suivante. Si \mathcal{C} (resp. \mathcal{A}) est une petite catégorie (resp. une petite catégorie additive), la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)_L$ (resp. $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)_L$) est équivalente à $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ (resp. $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$), et les foncteurs d'oubli et d'extension des scalaires au sens abstrait précédent s'identifient à ceux considérés auparavant entre catégories de foncteurs.

3 Décomposition tensorielle globale

3.1 Définitions et énoncés

On rappelle (cf. Mitchell [44, § 3, p. 18], Street [57]) qu'un *idéal* \mathcal{I} d'une petite catégorie additive \mathcal{A} est un sous-foncteur de $\text{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Autrement dit, \mathcal{I} consiste en la donnée de sous-groupes $\mathcal{I}(x, y)$ de $\mathcal{A}(x, y)$ stables par composition à droite et à gauche par des morphismes quelconques. Un tel idéal détermine une catégorie additive \mathcal{A}/\mathcal{I} ayant les mêmes objets que \mathcal{A} et dont les morphismes sont donnés par $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(x, y) := \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$, la composition étant induite par celle de \mathcal{A} . On dispose ainsi d'un foncteur additif canonique plein et essentiellement surjectif (c'est l'identité sur les objets) $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$. Réciproquement, tout foncteur additif depuis \mathcal{A} détermine un idéal en considérant les noyaux des morphismes induits entre groupes abéliens de flèches. Nous noterons parfois simplement $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ pour signifier que \mathcal{I} est un idéal de \mathcal{A} .

La condition suivante apparaîtra de façon récurrente dans le présent article.

Définition 3.1. Soit \mathcal{I} un idéal de \mathcal{A} . Nous dirons que \mathcal{I} est K -cotrivial si, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , les conditions suivantes sont vérifiées :

1. le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$ est fini ;
2. le groupe abélien $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$ est nul.

Exemple 3.2. Dans un certain nombre de situations courantes, \mathcal{A} ne possède pas d'autre idéal K -cotrivial que \mathcal{A} . C'est notamment le cas si la catégorie additive \mathcal{A} est linéaire sur un corps L , si L est infini ou que $\text{car}(L) = \text{car}(K)$.

Exemple 3.3. Les idéaux bilatères d'un anneau A sont en bijection avec les idéaux de la catégorie $\mathbf{P}(A)$. La bijection envoie un idéal I sur le foncteur $I.\text{Hom}_{\mathbf{P}(A)}$. Elle induit une bijection entre les idéaux bilatères I de A tels que A/I est fini et $K \otimes_{\mathbb{Z}} A/I$ est nul (que nous appellerons également *idéaux K -cotriviaux de A*) et les idéaux K -cotriviaux de $\mathbf{P}(A)$.

L'énoncé et la démonstration du théorème suivant s'inspirent de résultats de Steinberg [56, théorèmes 6 et 8] mentionnés dans l'introduction. On y emploie la notation suivante. Pour $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, on désigne par

$$\psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$$

le foncteur dont les composantes sont la projection canonique $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ et l'identité $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Si $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$ est contenu dans \mathcal{I} , on désigne par $\rho_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ le foncteur canonique $\mathcal{A}/\mathcal{J} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$ (produit de la projection $\mathcal{A}/\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ et de l'identité de \mathcal{A}).

Théorème 3.4. 1. Soit F un foncteur de type fini et de type cofini de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$. Il existe un idéal K -cotrivial $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ et $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$ tels que :

- (a) le foncteur B est polynomial par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire que pour tout x , $B(x, -)$ est un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$;
- (b) $F \simeq B \circ \psi_{\mathcal{I}}$.

2. De plus, si $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ et $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$ sont K -cotriviaux et si $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$ et $B' : \mathcal{A}/\mathcal{J} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$ sont polynomiaux par rapport à la deuxième variable, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $B \circ \psi_{\mathcal{I}} \simeq B' \circ \psi_{\mathcal{J}}$;
- (b) il existe $\mathcal{K} \triangleleft \mathcal{A}$, K -cotrivial, contenu dans \mathcal{I} et \mathcal{J} , tel que $B \circ \rho_{\mathcal{I}, \mathcal{K}} \simeq B' \circ \rho_{\mathcal{J}, \mathcal{K}}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{K} \times \mathcal{A}; K)$.

3. Enfin, si $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ est K -cotrivial et que $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$ est polynomial par rapport à la deuxième variable, alors B est simple si et seulement si $B \circ \psi_{\mathcal{I}}$ est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$.

On obtient en particulier le résultat suivant, qui s'applique aux situations de l'exemple 3.2 :

Corollaire 3.5. Si \mathcal{A} est le seul idéal K -cotrivial de \mathcal{A} , alors tout foncteur simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ est polynomial.

Exemple 3.6. Si k est un corps infini, tout foncteur simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$ est polynomial. En particulier, si $\text{car}(k) \neq \text{car}(K)$, le foncteur constant K est le seul foncteur simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$, et $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$ est réduite aux foncteurs constants.

Steinberg [56, *theorem* p. 343] a montré que toute représentation complexe de dimension finie d'un groupe $SL_n(\mathbb{Q})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) est polynomiale : la polynomialité des foncteurs simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{C})$ est à mettre en parallèle de ce résultat.

Corollaire 3.7. *Si K contient toutes les racines de l'unité, alors un objet de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel $\pi_{\mathcal{I}}^*(S) \otimes T$, où \mathcal{I} est un idéal K -cotrivial de \mathcal{A} , S est un simple de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ et T est un simple polynomial de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$.*

De plus, deux simples $\pi_{\mathcal{I}}^(S) \otimes T$ et $\pi_{\mathcal{J}}^*(S') \otimes T'$ sont isomorphes si et seulement si on a des isomorphismes $T \simeq T'$ et $\pi_{\mathcal{I}}^*(S) \simeq \pi_{\mathcal{J}}^*(S')$.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.8, si \mathcal{I} est K -cotrivial et K a toutes les racines de l'unité, les simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$ sont les bifoncteurs de la forme $S \boxtimes T$ avec S et T simples (uniquement déterminés à isomorphisme près). De plus, un tel simple est polynomial en la deuxième variable si et seulement si T est polynomial. Le résultat découle alors directement du théorème 3.4. \square

Remarque 3.8. Lorsque $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, un foncteur donne par évaluation sur chaque A^n une représentation de $GL_n(A)$, et on peut donc penser $\mathcal{F}(A, K)$ comme un avatar des représentations K -linéaires de $GL_{\infty}(A)$. Avec ce point de vue, le corollaire 3.7 pour $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ est formellement analogue à la décomposition tensorielle de Steinberg [56] (la formule (1) de l'introduction de notre article) ou aux résultats similaires de Bass-Milnor-Serre [4]. Cependant, contrairement à ces résultats, le corollaire 3.7 ne requiert aucune hypothèse sur l'anneau A . Ceci est rapprocher de phénomènes de « stabilisation » classiques : il est plus facile de donner une présentation du groupe $GL_{\infty}(A)$ que des groupes $GL_n(A)$, $n < \infty$. Il ne semble donc pas qu'on puisse déduire directement les résultats de [56, 4] de ceux pour $\mathcal{F}(A, K)$ ou inversement. À cet égard, la situation est différente de l'article [30] où Harman utilise les résultats de [4] pour obtenir des résultats de structure sur des catégories de foncteurs dont la source sont les groupes abéliens, mais avec des morphismes modifiés (monomorphismes munis d'un scindement).

3.2 Démonstration du théorème 3.4

Pour $f \in \mathcal{A}(x, y)$, on note $u[f]$ (la lettre u est mise pour *unipotent*) l'automorphisme de $x \oplus y$ donné matriciellement par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$. Le lemme suivant, immédiat, énumère les propriétés des morphismes $u[f]$ dont nous aurons besoin.

Lemme 3.9. *Soient x, y, z des objets de \mathcal{A} , $f, f' \in \mathcal{A}(x, y)$ et $g \in \mathcal{A}(y, z)$.*

1. *On a $u[f]u[f'] = u[f']u[f] = u[f + f']$.*
2. *On a des diagrammes commutatifs dans \mathcal{A} :*

$$\begin{array}{ccc}
 x \oplus y & \xrightarrow{u[f]} & x \oplus y \\
 x \oplus g \downarrow & & \downarrow x \oplus g \\
 x \oplus z & \xrightarrow{u[gf]} & x \oplus z
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 x \oplus z & \xrightarrow{u[gf]} & x \oplus z \\
 f \oplus z \downarrow & & \downarrow f \oplus z \\
 y \oplus z & \xrightarrow{u[g]} & y \oplus z
 \end{array}
 .$$

3. Notons $p(f, g) : x \oplus y \oplus z \rightarrow x \oplus z$ le morphisme dont les composantes $x \rightarrow x$ et $z \rightarrow z$ sont les identités, la composante $y \rightarrow z$ est g et les autres composantes sont nulles. Alors $p(f, g)$ est un épimorphisme scindé, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} x \oplus y \oplus z & \xrightarrow{p(f, g)} & x \oplus z \\ u[f] \oplus z \downarrow & & \downarrow u[gf] \\ x \oplus y \oplus z & \xrightarrow{p(f, g)} & x \oplus z \end{array} .$$

4. Notons $i(f, g) : x \oplus y \oplus z \rightarrow x \oplus z$ le morphisme dont les composantes $x \rightarrow x$ et $z \rightarrow z$ sont les identités, la composante $x \rightarrow y$ est f et les autres composantes sont nulles. Alors $i(f, g)$ est un monomorphisme scindé, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} x \oplus z & \xrightarrow{i(f, g)} & x \oplus y \oplus z \\ u[gf] \downarrow & & \downarrow x \oplus u[g] \\ x \oplus z & \xrightarrow{i(f, g)} & x \oplus y \oplus z \end{array} .$$

Le lemme suivant est la clé de la démonstration du théorème 3.4.

Lemme 3.10. *Soit F un objet de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$. On suppose que F est de type fini ou de type cofini. Alors il existe un idéal K -cotrivial \mathcal{I} de \mathcal{A} tel que, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , la fonction*

$$\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_K(F(x), F(y))$$

qu'induit F soit la composée de l'application linéaire canonique

$$\pi_{\mathcal{I}}(x, y) : \mathcal{A}(x, y) \rightarrow (\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y)$$

et d'une fonction $(\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_K(F(x), F(y))$ polynomiale par rapport à la deuxième variable.

De plus, cette factorisation est unique et fonctorielle en x et y .

Démonstration. Étant donné des objets x et y de \mathcal{A} , notons $\mathcal{I}(x, y)$ l'ensemble des morphismes f de $\mathcal{A}(x, y)$ tels que l'automorphisme $F(u[f] \oplus t)$ de $F(x \oplus y \oplus t)$ soit unipotent pour tout objet t de \mathcal{A} .

Comme le produit de deux automorphismes unipotents permutables est unipotent, le lemme 3.9.1 montre que $\mathcal{I}(x, y)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}(x, y)$.

Soient $f \in \mathcal{I}(x, y)$ et $g \in \mathcal{A}(y, z)$, montrons que $gf \in \mathcal{I}(x, z)$. Soit t un objet de \mathcal{A} . En utilisant le lemme 3.9.3, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus z \oplus t) & \xrightarrow{F(p(f, g) \oplus t)} & F(x \oplus z \oplus t) \\ F(u[f] \oplus z \oplus t) \downarrow & & \downarrow F(u[gf] \oplus t) \\ F(x \oplus y \oplus z \oplus t) & \xrightarrow{F(p(f, g) \oplus t)} & F(x \oplus z \oplus t) \end{array} \quad (3)$$

dans lequel $F(p(f, g) \oplus t)$ est un épimorphisme. Comme $F(u[f] \oplus z \oplus t)$ est unipotent puisque f appartient à $\mathcal{I}(x, y)$, on en déduit que $F(u[gf] \oplus t)$ est également unipotent. On a donc bien $gf \in \mathcal{I}(x, z)$.

On établit de façon analogue, à partir du lemme 3.9.4, que, pour $f \in \mathcal{A}(x, y)$ et $g \in \mathcal{I}(y, z)$, on a $gf \in \mathcal{I}(x, z)$.

Par conséquent, \mathcal{I} est un idéal de \mathcal{A} .

Comme F est supposé de type fini ou de type cofini, il existe un objet s de \mathcal{A} qui en constitue un support ou un co-support. Pour un tel s , un morphisme $f \in \mathcal{A}(x, y)$ appartient à $\mathcal{I}(x, y)$ dès que $F(u[f] \oplus s)$ est unipotent. Montrons ce fait lorsque, par exemple, s est un support de F (l'autre cas se traite de manière analogue). Cette hypothèse implique que s est également un support de $\tau_a(F) := F \circ (a \oplus -)$ pour tout objet a de \mathcal{A} (cela résulte de l'effet du foncteur de translation τ_a sur les foncteurs projectifs $P_{\mathcal{A}}^b$). Par conséquent, pour tout objet t de \mathcal{A} , le morphisme $\xi : F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s, t)} \rightarrow F(x \oplus y \oplus t)$ dont la composante indexée par un morphisme $\alpha \in \mathcal{A}(s, t)$ est $F(x \oplus y \oplus \alpha) : F(x \oplus y \oplus s) \rightarrow F(x \oplus y \oplus t)$ est un épimorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s, t)} & \xrightarrow{\xi} & F(x \oplus y \oplus t) \\ F(u[f] \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s, t)} \downarrow & & \downarrow F(u[f] \oplus t) \\ F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s, t)} & \xrightarrow{\xi} & F(x \oplus y \oplus t) \end{array}$$

montre donc que $F(u[f] \oplus t)$ est unipotent si c'est le cas de $F(u[f] \oplus s)$, de sorte que $f \in \mathcal{I}(x, y)$ si $F(u[f] \oplus s)$ est unipotent.

Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Par ailleurs, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , notons $d(x, y) := \dim_K F(x \oplus y \oplus s)$. On dispose d'un morphisme de groupes $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow (\bar{K}^\times)^{d(x, y)}$ obtenu en trigonalisant simultanément les automorphismes permutables $\bar{K} \otimes_K F(u[f] \oplus s)$ (pour $f \in \mathcal{A}(x, y)$) de $\bar{K} \otimes_K F(x \oplus y \oplus s)$, les composantes $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \bar{K}^\times$ du morphisme étant les différents coefficients diagonaux des matrices ainsi obtenues.

Le noyau de ce morphisme est exactement $\mathcal{I}(x, y)$ d'après ce qu'on vient de montrer sur s , de sorte qu'il induit un monomorphisme de groupes

$$\phi_{x, y} = (\phi_{x, y}^1, \dots, \phi_{x, y}^{d(x, y)}) : \mathcal{A}(x, y) / \mathcal{I}(x, y) \rightarrow (\bar{K}^\times)^{d(x, y)}.$$

Soient $f \in \mathcal{A}(x, y)$ et $g \in \mathcal{A}(y, z)$ des morphismes de \mathcal{A} . Si g est un épimorphisme scindé, alors le lemme 3.9.2 procure un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus s) & \xrightarrow{F(u[f] \oplus s)} & F(x \oplus y \oplus s) \\ F(x \oplus g \oplus s) \downarrow & & \downarrow F(x \oplus g \oplus s) \\ F(x \oplus z \oplus s) & \xrightarrow{F(u[gf] \oplus s)} & F(x \oplus z \oplus s) \end{array}$$

où $F(x \oplus g \oplus s)$ est un épimorphisme, ce qui implique l'existence d'une fonction injective $\sigma : \{1, \dots, d(x, z)\} \rightarrow \{1, \dots, d(x, y)\}$ telle que $\phi_{x, z}^i(gf) = \phi_{x, y}^{\sigma(i)}(f)$ pour tout $i \in \{1, \dots, d(x, z)\}$. De même, si f est un monomorphisme scindé, le lemme 3.9.2 implique l'existence d'une fonction injective $\tau : \{1, \dots, d(x, z)\} \rightarrow \{1, \dots, d(y, z)\}$ telle que $\phi_{x, z}^i(gf) = \phi_{y, z}^{\tau(i)}(g)$ pour tout $i \in \{1, \dots, d(x, z)\}$.

Comme tout morphisme f de $\mathcal{A}(x, y)$ se factorise en

$$x \xrightarrow{\alpha} x \oplus y \xrightarrow{Id} x \oplus y \xrightarrow{\beta} y$$

où α a pour composantes l'identité $x \rightarrow x$ et $f : x \rightarrow y$, et est donc un monomorphisme scindé, et β est la projection canonique, qui est un épimorphisme scindé, on en déduit (en appliquant ce qui précède à la composée $\beta \circ Id$ puis à $\beta \circ \alpha$) que l'image de $\phi_{x,y}$ est *finie*, de cardinal majoré par le nombre de fonctions injectives de $\{1, \dots, d(x, y)\}$ vers $\{1, \dots, d(x \oplus y, x \oplus y)\}$.

$\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$ est donc isomorphe à un sous-groupe fini d'un produit de copies de \bar{K}^\times , ce qui implique la nullité de $K \otimes \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$. Ainsi, l'idéal \mathcal{I} de \mathcal{A} est K -cotrivial.

Pour $f \in \mathcal{A}(x, y)$ et $t \in \text{Ob } \mathcal{A}$, considérons la décomposition de Jordan multiplicative de $F(u[f] \oplus t)$ en produit permutable d'un automorphisme unipotent $U(f)$ et d'un automorphisme absolument semi-simple $D(f)$. (Une telle décomposition existe toujours, car les valeurs propres de $F(u[f] \oplus t)$ sont des racines de l'unité grâce à ce qui précède, elles sont donc *séparables* — cf. [10, chap. 7, §5.9, th. 1 et prop. 17].) Comme les $u[f]$ sont deux à deux permutable, U et D définissent des morphismes de groupes $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$ dont les images commutent ; de plus, le noyau de D contient $\mathcal{I}(x, y)$, de sorte que ces morphismes induisent un morphisme de groupes $(\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$. De plus, le morphisme $U : \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$ est à valeurs dans les matrices triangulaires supérieures *strictes* pour un choix convenable de base, ce qui implique qu'il est polynomial, de degré strictement inférieur à $\dim_K F(x \oplus y \oplus t)$. En prenant $t = 0$ et en écrivant tout morphisme $f \in \mathcal{A}(x, y)$ comme la composée de l'inclusion canonique $x \rightarrow x \oplus x \oplus y$ suivie de $u[f]$ puis de la projection canonique $x \oplus y \rightarrow y$ et en appliquant le foncteur F , on obtient l'existence de la factorisation recherchée. Son unicité découle du lemme 3.11 ci-après.

La functorialité en y de la décomposition obtenue se montre à partir du diagramme (3) (avec $t = 0$), en appliquant la décomposition de Jordan aux flèches verticales. La functorialité en x s'établit de façon analogue. \square

Lemme 3.11. *Soient E un K -espace vectoriel, V un groupe abélien et U un sous-groupe de V tel quel $K \otimes_{\mathbb{Z}} V/U = 0$. Alors la restriction de la fonction $E^{V/U \times V} \rightarrow E^V$ induite par l'application linéaire canonique $V \rightarrow V/U \times V$ (dont les composantes sont la projection et l'identité) à l'espace vectoriel des fonctions $V/U \times V \rightarrow E$ qui sont polynomiales par rapport à la deuxième variable est injective.*

Démonstration. Montrons d'abord que la restriction de V à U définit une application linéaire *injective* $\text{Pol}(V, E) \rightarrow \text{Pol}(U, E)$. Supposons en effet qu'il existe une fonction polynomiale non nulle $f : V \rightarrow E$ dont la restriction à U soit nulle ; soit $n \geq 0$ le degré de f . Alors la n -déviante $\delta_n(f) : V^n \rightarrow E$ est une fonction additive par rapport à chacune des n variables et non identiquement nulle. On voit par récurrence descendante sur l'entier $r \in \{0, \dots, n\}$ que $\delta_n(f)(a_1, \dots, a_n) = 0$ si au moins r des éléments a_1, \dots, a_n de V appartiennent à U : pour $r = n$ cela résulte de la nullité de f sur U , et le pas de la récurrence s'obtient en utilisant que toute fonction *additive* $V/U \rightarrow E$ est nulle, en raison de la nullité de $K \otimes_{\mathbb{Z}} V/U$. Pour $r = 0$, on voit que $\delta_n(f)$ est identiquement nulle, contradiction qui établit l'injectivité souhaitée.

Considérons maintenant une fonction $f : V/U \times V \rightarrow E$ polynomiale par rapport à la deuxième variable et telle que $f(\bar{x}, x) = 0$ pour tout $x \in V$, où \bar{x} désigne la classe de x modulo U . Pour tout $x \in V$, la fonction $V \rightarrow E \quad t \mapsto f(\bar{x}, x + t)$ est polynomiale et nulle sur U , elle est donc identiquement nulle d'après ce qui précède, d'où le lemme. \square

Lemme 3.12. *Soit $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ tel que $K \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) = 0$ pour tous objets x et y de \mathcal{A} .*

1. *Si X est un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$ polynomiale par rapport à la deuxième variable, alors tout sous-foncteur de $\psi_{\mathcal{I}}^*(X)$ est isomorphe à $\psi_{\mathcal{I}}^*(Y)$ pour un sous-foncteur Y de X dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$.*
2. *Soient X et Y des objets de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$ polynomiaux par rapport à la deuxième variable. Alors $\psi_{\mathcal{I}}$ induit une bijection :*

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)(X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\psi_{\mathcal{I}}^*X, \psi_{\mathcal{I}}^*Y) .$$

Démonstration. Les deux assertions se déduisent du lemme 3.11. On note au préalable que la sous-catégorie pleine \mathcal{B} de $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$ constituée des objets du type (a, a) (où a est un objet de \mathcal{A}) est équivalente au sens de Morita à $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$: l'inclusion induit une équivalence $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\mathcal{B}; K)$. En effet, tout objet de $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$ est facteur direct d'un objet de \mathcal{B} . On peut donc remplacer $\psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$ par le foncteur additif essentiellement surjectif $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ qu'il induit.

Pour la première assertion, soit F un sous-foncteur de $\psi_{\mathcal{I}}^*X$: pour tous objets r et s de \mathcal{A} , on dispose d'un diagramme commutatif ensembliste (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(a, b) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}_K(F(a), F(b)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_K(F(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) \\ \downarrow j & \dashrightarrow & \nearrow & & \nearrow \beta \\ (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) & \xrightarrow{g} & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^*X(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) & & \end{array}$$

où les flèches f et g sont données par la functorialité de F et X respectivement, α et β sont induites par les inclusions $F(b) \subset \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)$ et $F(a) \subset \psi_{\mathcal{I}}^*X(a)$ respectivement, et j est induite par $\psi_{\mathcal{I}}$. L'existence d'une fonction ensembliste en pointillé faisant commuter le diagramme, et naturelle en x et y , est équivalente au fait que F est isomorphe à la précomposition par $\psi_{\mathcal{I}}$ d'un sous-foncteur de X . Comme α est un monomorphisme de K -espaces vectoriels, l'existence de la flèche en pointillé équivaut à la nullité de la composée de βg et de la projection de $\text{Hom}_K(F(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b))$ sur $\text{Coker } \alpha$. Or la précomposition de cette composée avec $\mathcal{A}(a, b) \xrightarrow{j} (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b)$ est nulle (grâce à la commutativité du diagramme), de sorte que l'hypothèse faite sur X et le lemme 3.11 garantissent l'existence de la flèche en pointillé. Ce même lemme montre la naturalité en x et y des factorisations obtenues, d'où le premier point.

Pour la deuxième assertion, l'injectivité résulte de l'observation d'équivalence de Morita du début et de l'essentielle surjectivité du foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ qu'induit $\psi_{\mathcal{I}}$. Pour la surjectivité, considérons une transformation naturelle $\psi_{\mathcal{I}}^*X \rightarrow \psi_{\mathcal{I}}^*Y$: c'est une collection d'applications linéaires $\psi_{\mathcal{I}}^*X(a) \rightarrow \psi_{\mathcal{I}}^*Y(a)$, pour a objet de

\mathcal{A} , telle que le diagramme ensembliste évident

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* Y(b)) \end{array} \quad (4)$$

commute pour tous objets a et b de \mathcal{A} . Le fait que cette transformation naturelle appartient à l'image du morphisme $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)(X, Y) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\psi_{\mathcal{I}}^* X, \psi_{\mathcal{I}}^* Y)$ équivaut à la commutativité du diagramme évident

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* Y(b)) \end{array} \quad (5)$$

dans lequel les deux composées $(\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* Y(b))$ sont polynomiales par rapport à la deuxième variable. Comme le diagramme commutatif (4) s'obtient en composant (5) avec $\mathcal{A}(a, b) \xrightarrow{j} (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b)$, le lemme 3.11 implique la commutativité de (5), ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 3.13. Soient k un anneau, F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$, S un support de F et T un co-support de F et $d \in \mathbb{N}$. Si pour tous $s \in S$ et $t \in T$, la fonction

$$\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \text{Hom}_k(F(s), F(t))$$

induite par F est polynomiale de degré au plus d , alors F est un foncteur polynomial de degré au plus d .

Démonstration. Soient x et y deux objets de \mathcal{A} . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(x, y) & \longrightarrow & \text{Hom}_k(F(x), F(y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod \mathcal{A}(s, t) & \longrightarrow & \prod \text{Hom}_k(F(s), F(t)) \end{array}$$

où les produits sont pris sur tous les $s \in S$, $t \in T$ et toutes les flèches $f : s \rightarrow x$ et $g : y \rightarrow t$ de \mathcal{A} , les flèches horizontales sont données par l'effet de F sur les morphismes, et les flèches verticales sont induites par l'image inverse le long de f et l'image directe le long de g .

Par hypothèse, la flèche horizontale inférieure est une fonction polynomiale de degré au plus d .

Les flèches verticales sont des morphismes de groupes abéliens, et celle de droite est *injective* puisque S (resp. T) est un support (resp. co-support) de F . Il en résulte que la flèche horizontale supérieure est une fonction polynomiale de degré au plus d , ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration du théorème 3.4. Montrons l'assertion 1. L'équivalence de Morita entre $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$ et sa sous-catégorie pleine \mathcal{B} dont les objets sont les (x, x) pour $x \in \text{Ob}\mathcal{A}$, déjà observée au début de la démonstration du lemme 3.12,

et le lemme 3.10 montrent que tout foncteur S de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$ est isomorphe à $B \circ \psi_{\mathcal{I}}$ pour un idéal K -cotrivial \mathcal{I} et un foncteur B de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$ tel que, pour tout objet t de \mathcal{A}/\mathcal{I} , le foncteur $B(t, -)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ induit une fonction polynomiale entre les groupes abéliens de morphismes. Si S est de type fini et de type cofini, ou simple, il en est de même pour B (car $\psi_{\mathcal{I}}^*$ est fidèle et commute à toutes les limites et colimites), qui est donc polynomial grâce au lemme 3.13.

L'assertion 3 du théorème 3.4 découle de la première propriété du lemme 3.12.

Pour établir l'assertion 2, on note déjà que l'intersection \mathcal{K} de deux idéaux \mathcal{I} et \mathcal{J} de \mathcal{A} (définie par $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{I}(x, y) \cap \mathcal{J}(x, y) \subset \mathcal{A}(x, y)$ pour tous objets x et y de \mathcal{A}) est un idéal de \mathcal{A} , qui est K -cotrivial si \mathcal{I} et \mathcal{J} le sont (en effet, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{K}(x, y)$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y) \oplus \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{J}(x, y)$). Précomposant B et B' par $\rho_{\mathcal{I}, \mathcal{K}}$ et $\rho_{\mathcal{J}, \mathcal{K}}$ respectivement, on se ramène au cas où $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, dans lequel il s'agit de montrer que B et B' sont isomorphes lorsque B et B' sont deux foncteurs polynomiaux par rapport à la deuxième variable tels que $B \circ \psi_{\mathcal{I}} \simeq B' \circ \psi_{\mathcal{I}}$. Cela résulte de la deuxième propriété du lemme 3.12. \square

4 Décomposition tensorielle primaire

Cette section contient une généralisation (directe) aux catégories additives des décompositions classiques des algèbres données par des familles d'idempotents orthogonaux [13, § 6A]. Nous obtenons en particulier la proposition 4.3, qui s'applique aux catégories \mathcal{A}/\mathcal{I} apparaissant dans le théorème 3.4, et permet une décomposition tensorielle plus fine des simples qui y apparaissent.

Appelons *idempotent* de \mathcal{A} un foncteur additif $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ qui est l'identité sur les objets, et tel que $e^2 = e$. On note alors $e\mathcal{A}$ la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{A} avec $\text{Hom}_{e\mathcal{A}}(a, b) = e\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)$ et avec la loi de composition $(ef) \circ (eg) = e(f \circ g)$. Cette loi est bien définie, $e\mathcal{A}$ est une catégorie additive, et on a un foncteur quotient canonique

$$\pi_e : \mathcal{A} \rightarrow e\mathcal{A}.$$

Une *famille localement finie d'idempotents orthogonaux* de \mathcal{A} est une famille d'idempotents $(e_i)_{i \in I}$ de \mathcal{A} telle que :

1. $e_i e_j = 0 = e_j e_i$ si $i \neq j$;
2. pour tous objets a, b de \mathcal{A} , seul un nombre fini d'idempotents induisent une application non nulle $e_i : \mathcal{A}(a, b) \rightarrow \mathcal{A}(a, b)$;
3. $\sum_{i \in I} e_i = 1$ (la somme signifie la somme sur les morphismes, et l'identité sur les objets. Cette somme éventuellement infinie a un sens car elle est en fait finie à cause de la condition précédente).

Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories additives. La somme $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est la sous-catégorie pleine de $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, dont les objets sont les familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que tous les x_i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Lemme 4.1. *Pour toute famille $(e_i)_{i \in I}$ localement finie d'idempotents orthogonaux de \mathcal{A} , le foncteur*

$$\prod_{i \in I} \pi_{e_i} : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{i \in I} e_i \mathcal{A}$$

est à valeurs dans la sous-catégorie $\bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}$, et pour toute catégorie abélienne \mathcal{D} , il induit une équivalence de catégories :

$$\mathbf{Fct} \left(\bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}, \mathcal{D} \right) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D}).$$

Démonstration. La deuxième condition dans la définition des familles localement finies d'idempotents orthogonaux assure que pour tout objet x de \mathcal{A} , et pour tous les i sauf un nombre fini, $\pi_{e_i}(x)$ est nul dans $e_i \mathcal{A}$. Ainsi $\prod_{i \in I} \pi_{e_i}$ est à valeurs dans $\bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}$. La troisième condition assure que $\prod_{i \in I} \pi_{e_i}$ est pleinement fidèle. Il induit donc une équivalence de catégories entre \mathcal{A} et son image Δ . L'équivalence de catégories du lemme découle alors du fait que tout objet de $\bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}$ est facteur direct d'un objet de Δ . \square

Proposition 4.2. *Soient $(e_i)_{i \in I}$ une famille localement finie d'idempotents orthogonaux de \mathcal{A} , J un sous-ensemble fini de I , et pour tout $j \in J$ soit S_j un foncteur non constant de $\mathcal{F}(e_j \mathcal{A}; K)$.*

1. *Le foncteur $\bigotimes_{j \in J} \pi_{e_j}^* S_j$ est absolument simple si et seulement si les foncteurs S_j sont absolument simples.*
2. *Si on a un isomorphisme entre deux foncteurs absolument simples :*

$$\bigotimes_{i \in J} \pi_{e_j}^* S_j \simeq \bigotimes_{k \in K} \pi_{e_k}^* T_k$$

alors $J = K$ et pour tout $j \in J$, le foncteur S_j est isomorphe à T_j .

Enfin, K est un corps de décomposition non additif de \mathcal{A} si et seulement si c'est un corps de décomposition non additif de chaque catégorie $e_j \mathcal{A}$. Dans ce cas, tous les foncteurs simples de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ sont isomorphes à un produit tensoriel du type ci-dessus.

Démonstration. Le fait que K est un corps de décomposition non additif des $e_j \mathcal{A}$ si c'est un corps de décomposition non additif de \mathcal{A} découle de ce que $\mathcal{F}^{\text{df}}(e_j \mathcal{A}; K)$ est une sous-catégorie pleine stable par sous-quotient de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$. Les autres assertions découlent du lemme précédent et des propositions 2.1 et 2.6, lorsque la famille d'idempotents est finie. Le cas général s'en déduit car tout foncteur de type fini sur une catégorie somme directe de catégories additives se factorise par la projection sur la somme directe d'une sous-famille finie. \square

Si V est un groupe abélien et p un nombre premier, on note ${}_{(p)}V$ le sous-groupe de torsion p -primaire de V . On note ${}_{(p)}\mathcal{A}$ la sous-catégorie de \mathcal{A} avec les mêmes objets que \mathcal{A} et dont les groupes abéliens de morphismes sont donnés par ${}_{(p)}\mathcal{A}(x, y) = {}_{(p)}(\mathcal{A}(x, y))$. On a un foncteur canonique (qui est l'identité sur les objets et qui envoie un morphisme sur sa composante p -primaire) :

$$\pi_p : \mathcal{A} \rightarrow {}_{(p)}\mathcal{A}.$$

Proposition 4.3. *Soit S un foncteur non constant de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Si les groupes abéliens de morphismes $\mathcal{A}(x, y)$ sont finis pour tous objets x et y de \mathcal{A} et que K est un corps de décomposition non additif de \mathcal{A} , alors S est simple si et*

seulement s'il existe un ensemble fini P de nombres premiers, et des simples non constants S_p de $\mathcal{F}_{(p)}(\mathcal{A}; K)$, pour tout $p \in P$, tels que

$$S \simeq \bigotimes_{p \in P} \pi_p^* S_p .$$

De plus, dans une telle décomposition tensorielle, l'ensemble P est uniquement déterminé, et les S_p sont uniquement déterminés à isomorphisme près.

Démonstration. Comme les ensembles de morphismes sont finis dans \mathcal{A} , tout foncteur de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ prend des valeurs de dimension finie. Par conséquent, le résultat découle de la proposition 4.2 et de la décomposition primaire des groupes abéliens finis. \square

5 Décomposition tensorielle des simples polynomiaux

5.1 Définitions et énoncés

Pour tout $K[\mathfrak{S}_d]$ -module M on définit $E_M : K\text{-Mod} \rightarrow K\text{-Mod}$ par :

$$E_M(V) := \text{Im} \left((V^{\otimes d} \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \xrightarrow{N} (V^{\otimes d} \otimes M)^{\mathfrak{S}_d} \right) .$$

Le morphisme N apparaissant dans cette formule est la norme, qui est l'application $M_G \rightarrow M^G$ définie pour tout groupe fini G agissant K -linéairement sur M , et qui à un coinvariant m associe l'invariant $N(m) = \sum_{g \in G} gm$. L'action de \mathfrak{S}_d sur le K -module $V^{\otimes d} \otimes M$ est donnée par

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes \sigma m .$$

Définition 5.1. Un foncteur élémentaire E est un endofoncteur de $K\text{-Mod}$ tel qu'il existe un $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple M et un isomorphisme $E \simeq E_M$.

Remarque 5.2. Les foncteurs élémentaires sont intimement reliés aux foncteurs de Schur classiques. Nous n'utiliserons que la définition élémentaire donnée ci-dessus dans la section 5, et renvoyons le lecteur à l'appendice B pour des détails sur les relations avec les foncteurs de Schur et les représentations de $GL_n(K)$.

Le but de la section est d'établir le théorème suivant de décomposition tensorielle à la Steinberg pour les foncteurs absolument simples polynomiaux. Contrairement au théorème 3.4, il n'utilise pas d'hypothèse de dimension finie sur les foncteurs.

Théorème 5.3. Soit S un foncteur polynomial de degré $d > 0$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) Le foncteur S est simple, et il existe des foncteurs additifs absolument simples π_i tels que S soit un quotient de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$.
- (2) Le foncteur S est simple, et il existe des foncteurs additifs absolument simples π_i tels que S soit un sous-foncteur de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$.

- (3) Il existe un entier n strictement positif, des foncteurs additifs absolument simples π_i deux-à-deux non isomorphes, des foncteurs élémentaires E_i non constants, et un isomorphisme :

$$S \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n ,$$

De plus, si S vérifie les conditions équivalentes précédentes, les foncteurs π_i et E_i sont uniquement déterminés (à isomorphisme près et à une permutation des indices près), et S est absolument simple.

Le corollaire 5.4 ci-dessous donne une situation où le théorème 5.3 s'applique facilement. Des illustrations de ce corollaire seront données dans la section 6, et une généralisation en sera donnée dans la section 7, au théorème 7.5.

Corollaire 5.4. *Soit A un anneau. On suppose que K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$ (par exemple K est algébriquement clos). Tout foncteur polynomial simple S de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ est absolument simple, et s'écrit de manière unique (à permutation des indices près) comme produit tensoriel :*

$$S \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n ,$$

où les E_i sont des foncteurs élémentaires non constants, et les $\pi_i : \mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$ sont des foncteurs additifs simples à valeurs de dimensions finies, deux-à-deux non isomorphes. Réciproquement, tout produit tensoriel de ce type définit un simple polynomial de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$. (Le foncteur simple constant s'obtient par le produit tensoriel vide.)

Démonstration. L'énoncé est clair si S est un foncteur constant. Supposons S non constant et soit $d = \deg S > 0$. Alors $cr_d S$ est additif en chaque variable, et à valeurs de dimension finie. Les simples de $\mathcal{F}^{df}(\mathbf{P}(A)^{\times d}; K)$ additifs en chaque variable sont de la forme $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d$, où les π_i sont absolument simples additifs, d'après le corollaire 2.8. En particulier, $cr_d S$ admet une filtration finie (de longueur bornée par $\dim_K cr_d S(A, \dots, A)$) dont les sous-quotients sont de la forme $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d$. En utilisant l'adjonction diagonale-effets croisés et la simplicité de S , on obtient que S est un quotient du foncteur $\Delta^* cr_d S(x) = cr_d S(x, \dots, x)$, où d est le degré de S . Ainsi S est un quotient d'un des facteurs $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ de la filtration de $\Delta^* cr_d S$. L'existence et l'unicité de la décomposition, ainsi que l'absolue simplicité de S , découlent du théorème 5.3. \square

5.2 Démonstration du théorème 5.3

Nous démontrons le théorème 5.3 en une série de propositions. De manière plus précise, l'équivalence (1) \Leftrightarrow (2) est démontrée dans la proposition 5.5, l'implication (1) \Rightarrow (3) est démontrée dans la proposition 5.11, l'implication (3) \Rightarrow (1) est démontrée dans la proposition 5.13. Enfin, l'unicité de la décomposition et l'absolue simplicité des simples sont démontrées dans la proposition 5.10.

Proposition 5.5 (Démonstration de (1) \Leftrightarrow (2)). *Soit S un foncteur simple de $\mathcal{F}(A; K)$, $d \geq 0$. Soient π_1, \dots, π_d des foncteurs absolument simples additifs. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes.*

1. *Le foncteur S est un quotient de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$.*
2. *Le foncteur $cr_d S$ est un facteur direct de $\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_{\sigma(d)}$.*

3. Le foncteur S est un sous-foncteur de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$

Démonstration. Soit $B = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ et $C = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_{\sigma(d)}$. On a $C = cr_d B$. Montrons (1) \Rightarrow (2) Par exactitude des effets croisés, $cr_d S$ est quotient de $cr_d B = C$. D'après la troisième condition de la proposition 2.1, C est semi-simple, donc S est un facteur direct de C . Montrons (2) \Rightarrow (1). Par adjonction entre diagonale et effets croisés, il existe un morphisme non nul $\Delta_d^* cr_d S \rightarrow S$. Mais $\Delta_d^* cr_d S$ est un facteur direct de $\Delta_d^* C$ et ce dernier est isomorphe à une somme directe de $d!$ copies de B . Il existe donc un morphisme non nul (donc un épimorphisme) $B \rightarrow S$. La démonstration de (2) \Leftrightarrow (3) est similaire. \square

Notons $\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}^{\times n}; K)$ la catégorie des foncteurs F de $K\text{-Mod}^{\times n}$ vers $K\text{-Mod}$, tels que pour tout (v_1, \dots, v_n) , $F(v_1, \dots, v_n)$ est la colimite des sous-espaces vectoriels $F(u_1, \dots, u_n)$ où les u_i sont les sous-espaces de dimension finie des v_i . Par exemple, les foncteurs élémentaires sont des objets de $\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}; K)$. Le lemme suivant est évident, et justifie pourquoi nous ne distinguerons pas dans la suite un foncteur élémentaire et sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{P}(K)$.

Lemme 5.6. *Le foncteur de restriction de $K\text{-Mod}^{\times n}$ à $\mathbf{P}(K)^{\times n}$ induit une équivalence de catégories :*

$$\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}^{\times n}; K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)$$

dont un quasi-inverse L est donné en prolongeant les foncteurs par colimite sur les sous-espaces de dimension finie.

Si $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ est un n -uplet de foncteurs additifs $\pi_i : \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$, on définit un foncteur d'évaluation :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}} : \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$$

par la formule : $\text{ev}_{\mathbb{P}} F(a) := LF(\pi_1(a), \dots, \pi_n(a))$.

Exemple 5.7. Notons $T^d : \mathbf{P}(K) \rightarrow K\text{-Mod}$ le foncteur de d -ème puissance tensorielle : $T^d(V) = V^{\otimes d}$. Pour $n \geq 1$, on pose $T^\lambda = T^{\lambda_1} \boxtimes \cdots \boxtimes T^{\lambda_n}$, où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un n -uplet d'entiers positifs. On a alors :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}} T^\lambda = \pi_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes \pi_n^{\otimes \lambda_n} .$$

Si $E_{\mathbb{M}} = E_{M_1} \boxtimes \cdots \boxtimes E_{M_n}$ où chaque M_i est un $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ -module simple, on a :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}} = \pi_1^* E_{M_1} \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_{M_n} .$$

Lemme 5.8. *Soient $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ et $\mathbb{R} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ deux uplets de foncteurs additifs absolument simples, dont les éléments sont deux-à-deux non isomorphes. Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deux uplets d'entiers strictement positifs. Soit $F : \mathbf{P}(K)^{\times n} \rightarrow K\text{-Mod}$ un quotient d'une somme directe de copies de T^λ et soit $G : \mathbf{P}(K)^{\times m} \rightarrow K\text{-Mod}$ un sous-foncteur d'un produit de copies de T^μ .*

1. Si $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}} F, \text{ev}_{\mathbb{R}} G) \neq 0$, alors $n = m$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout i , $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ et $\pi_i \simeq \rho_{\sigma(i)}$.
2. Si $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ et $\lambda = \mu$, alors le foncteur $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ induit un isomorphisme :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)(F, G) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}} F, \text{ev}_{\mathbb{P}} G) .$$

Démonstration. Pour les deux affirmations, il suffit de traiter le cas de $F = T^\lambda$ et $G = T^\mu$, le cas général s'en déduit par exactitude à gauche des Hom et par fidélité de $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ (ce dernier point résulte de ce que tout objet de $K\text{-Mod}^{\times n}$ est colimite filtrante de facteurs directs d'objets dans l'image essentielle de $(\pi_1, \dots, \pi_n) : \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}^{\times n}$, puisque les π_i sont additifs et non nuls).

Démontrons le premier point. Notons $d = \sum \lambda_i$ et $e = \sum \mu_j$. Le foncteur $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ est de degré d et $\text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$ est de degré e . Par la proposition 1.11, l'existence d'un morphisme non nul $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda \rightarrow \text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$ implique $d = e$. Pour $1 \leq k \leq d$, on pose $\pi^k := \pi_{i(k)}$ où $i(k)$ est l'unique indice tel que $\sum_{j < i(k)} \lambda_j \leq k < \sum_{j \leq i(k)} \lambda_j$. On définit $\pi : \mathcal{A}^{\times d} \rightarrow K\text{-Mod}$ par $\pi(a_1, \dots, a_d) = \pi^1(a_1) \otimes \dots \otimes \pi^d(a_d)$. De même, on définit $\rho : \mathcal{A}^{\times d} \rightarrow K\text{-Mod}$ à partir du m -uplet μ et on note $\rho^\tau(a_1, \dots, a_d) = \rho(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(d)})$. La proposition 1.11 et le fait qu'il n'y a pas de morphisme non nul entre un foncteur additif et un foncteur constant donne :

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda, \text{ev}_{\mathbb{P}}T^\mu) \simeq \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \rho^\tau). \quad (*)$$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \rho^\tau)$. Si on fixe toutes les variables sauf la k -ème, f induit un morphisme d'une somme directe de copies de π^k vers une somme directe de copies de $\rho^{\tau^{-1}(k)}$. En particulier, si f est non nulle alors il y a un morphisme non nul (donc un isomorphisme) de π^k vers $\rho^{\tau^{-1}(k)}$, et ceci pour tout indice k tel que $1 \leq k \leq d$. On en déduit qu'à permutation des facteurs près et à isomorphisme près, les facteurs des produits tensoriels $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ et $\text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$ sont les mêmes, ce qui démontre le premier point.

Pour le deuxième point, le foncteur $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ est clairement fidèle, il suffit donc de montrer que les deux côtés de l'isomorphisme ont même dimension. Pour calculer la dimension du membre de droite, on utilise l'isomorphisme (*), avec $\lambda = \mu$ et $\rho = \pi$. Un terme $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \pi^\tau)$ est non nul si et seulement si τ est un élément du sous-groupe de Young \mathfrak{S}_λ de \mathfrak{S}_d , et dans ce cas $\pi = \pi^\tau$ de sorte que le terme est de dimension 1 d'après le troisième point de la proposition 2.1. La dimension du membre de droite de l'isomorphisme vaut donc $\lambda_1! \dots \lambda_n!$. On montre que la dimension du membre de gauche vaut $\lambda_1! \dots \lambda_n!$ avec la même méthode (c'est-à-dire en utilisant les propositions 1.11 et 2.1). \square

Le lemme suivant est une version fonctorielle d'un théorème classique de Clausen et James, voir [11, 34, 60].

Lemme 5.9. *Les foncteurs élémentaires sont absolument simples. De plus pour tout $d \geq 0$, tout quotient simple de T^d est isomorphe à un foncteur élémentaire.*

Démonstration. Si F est un objet de $\mathcal{F}(K, K)$, on note $cF = cr_d F(K, \dots, K)$. Le groupe \mathfrak{S}_d agit sur cF en permutant les copies de K en argument de $cr_d F$. Ceci définit un foncteur exact $c : \mathcal{F}(K, K) \rightarrow K[\mathfrak{S}_d]\text{-Mod}$.

Le foncteur c est *réflexif* (cf. définition 1.2). En effet, la proposition 1.11 fournit des isomorphismes de $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules naturels en F

$$cF \simeq \mathcal{F}(K, K)(T^d, F) \quad \text{et} \quad (cF)^* \simeq \mathcal{F}(K, K)(F, T^d), \quad (6)$$

l'action sur les espaces de morphismes étant induite par l'action de \mathfrak{S}_d sur T^d . Ainsi, c possède des adjoints à gauche et à droite donnés respectivement par

$$M \mapsto (T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \quad \text{et} \quad M \mapsto (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d},$$

de sorte qu'un calcul direct d'effets croisés montre la réflexivité de c , et le fait que le prolongement intermédiaire associé est la norme. L'absolue simplicité de E_M se déduit alors de la proposition 1.4 et de l'absolue simplicité des représentations simples des groupes symétriques [33, théorème 11.5].

Si S est un quotient simple de T^d , alors $c(S)$ est non nul (utiliser le premier isomorphisme de (6)), donc la proposition 1.4 montre également que S est isomorphe à E_M pour un $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple M . \square

Proposition 5.10 (Démonstration de l'unicité et de l'absolue simplicité). *Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deux uplets d'entiers strictement positifs. Soient $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ et $\mathbb{R} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ deux uplets de foncteurs additifs absolument simples. On suppose que les éléments de \mathbb{P} (resp. \mathbb{R}) sont deux-à-deux non isomorphes. Soit $\mathbb{L} = (L_1, \dots, L_n)$ un n -uplet où chaque L_i est une représentation simple de $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$, et soit $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_m)$ un m -uplet où chaque M_i est une représentation simple de $K[\mathfrak{S}_{\mu_i}]$.*

1. Si $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \neq 0$ alors $n = m$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout i , $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$, $A_i \simeq B_{\sigma(i)}$, et $L_i \simeq M_{\sigma(i)}$.
2. $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}, \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}) \simeq K$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \neq 0$ alors, d'après le lemme 5.8, λ et μ sont égaux à une permutation σ près, et $\pi_i \simeq \rho_{\sigma(i)}$. En notant $\mathbb{M}\sigma = (M_{\sigma(1)}, \dots, M_{\sigma(n)})$ on a alors un isomorphisme de foncteurs $\text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}} \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}\sigma}$. Donc d'après le lemme 5.8, on a un isomorphisme :

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \simeq \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)(E_{\mathbb{L}}, E_{\mathbb{M}\sigma}). \quad (*)$$

Puisque les deux foncteurs élémentaires E_L et E_M sont isomorphes si et seulement si L et M sont isomorphes, la non-nullité du membre de droite implique l'existence d'isomorphismes $L_i \simeq M_{\sigma(i)}$. Finalement, si $\lambda = \mu$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{M}$, alors σ est l'identité donc $\mathbb{M}\sigma = \mathbb{M}$ et d'après l'absolue simplicité des E_L (cf. lemme 5.9 et proposition 2.1) le membre de droite de (*) est isomorphe à K . \square

Proposition 5.11 (Démonstration de (1) \Rightarrow (3)). *Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs, et $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ un n -uplet de foncteurs additifs absolument simples et deux à deux non isomorphes. Alors tout quotient simple de $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ est isomorphe à un foncteur de la forme $\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}$, où $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_n)$ est un uplet dont chaque M_i est un $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ -module simple.*

Démonstration. D'après le lemme 5.5, un quotient simple S de $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ est aussi un sous-foncteur de $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$. Le foncteur S est donc l'image d'un endomorphisme de $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$. Mais $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ induit un isomorphisme entre les endomorphismes de T^λ et les endomorphismes de $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$. De plus, $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ est exact, donc préserve les images. On en déduit que $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}S'$, où S' est l'image d'un endomorphisme de T^λ .

Comme $\text{ev}_{\mathbb{P}}$ est exact et fidèle, la simplicité de S implique que S' est simple. Donc S' est un simple de $\mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)$ et un quotient de T^λ . Or les simples quotients de T^d sont les E_M , avec M représentation simple de $K[\mathfrak{S}_d]$. D'après la proposition 2.6, cela implique que S' est un quotient d'un foncteur $E_{\mathbb{M}}$. Comme les E_M sont absolument simples, $E_{\mathbb{M}}$ est simple d'après la proposition 2.1. Donc $S' \simeq E_{\mathbb{M}}$, et ainsi $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}$. \square

Lemme 5.12. *Soient π_1, \dots, π_d des foncteurs absolument simples additifs, et F un sous-foncteur de $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d$. Alors F admet un sous-foncteur simple.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que F n'admet pas de sous-foncteur simple. Le foncteur F lui-même n'est donc pas simple, et il admet un sous-foncteur propre F_1 . Le foncteur $cr_d F_1$ est un sous-objet du foncteur semi-simple

$$cr_d(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_{\sigma(d)}$$

de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)$, donc il en est facteur direct. Comme $cr_d F_1$ est de plus stable par l'action de \mathfrak{S}_d , il existe un morphisme non nul $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d \rightarrow cr_d F_1$, donc un morphisme non nul $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d \rightarrow F_1$ par la proposition 1.11. On note ϕ_1 la composée

$$\phi_1 : \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d \rightarrow F_1 \hookrightarrow \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d .$$

Le foncteur $\text{Im } \phi_1$ est un sous-foncteur de F_1 , donc de F , et n'est donc pas simple. Ainsi, il existe F_2 tel que $F_2 \subsetneq \text{Im } \phi_1 \subsetneq F_1$. En itérant ce raisonnement, on peut construire une suite infinie $(\phi_n)_{n \geq 1}$ d'endomorphismes de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ tels que $\text{Im } \phi_{n+1} \subsetneq \text{Im } \phi_n$ pour tout n . Une telle suite de morphismes est nécessairement une famille libre de $\text{End}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d)$. Ceci contredit la finitude de la dimension de cette algèbre (la dimension se calcule en utilisant les propositions 1.11 et 2.1 comme dans la démonstration du lemme 5.8). \square

Proposition 5.13 (Démonstration de (3) \Rightarrow (1)). *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs, soit $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ un n -uplet de foncteurs additifs absolument simples et deux à deux non isomorphes, et soit $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_n)$ un uplet dont chaque M_i est une représentation simple de $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$. Alors le foncteur $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$ est un quotient simple de $\text{ev}_{\mathbb{P}} T^{\lambda}$.*

Démonstration. Le foncteur $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$ est clairement un quotient de $\text{ev}_{\mathbb{P}} T^{\lambda}$. Montrons qu'il est simple. D'après le lemme 5.12, $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$ admet un sous-foncteur simple S . D'après la proposition 5.11, $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{L}}$ pour un certain n -uplet \mathbb{L} de représentations de groupes symétriques. Les calculs d'espaces de morphismes de la proposition 5.10 forcent alors le monomorphisme $S \hookrightarrow \text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$ à être un isomorphisme. Ainsi $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$ est simple. \square

6 Simples de $\mathcal{F}(A, K)$ pour A anneau fini

6.1 Décompositions tensorielles des foncteurs simples

Nous appelons p -anneau un anneau A de caractéristique p^r , pour un nombre premier p et un entier $r > 0$. Si A est un anneau fini, on note ${}_{(p)}A$ la partie p -primaire du groupe abélien A , munie de l'unique structure de p -anneau pour laquelle la surjection canonique $A \rightarrow {}_{(p)}A$ est un morphisme d'anneaux. On note $\pi_p : \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbf{P}({}_{(p)}A)$ le foncteur qui envoie un A -module projectif de type fini sur sa partie p -primaire. Le théorème suivant résume les résultats démontrés dans les sections 3, 4 et 5 dans le cas particulièrement simple où la catégorie source est $\mathbf{P}(A)$ pour un anneau fini A , et où K est suffisamment gros.

Théorème 6.1. *Soit A un anneau fini; notons q la caractéristique de K .*

1. *Les valeurs des foncteurs simples de $\mathcal{F}(A, K)$ sont de dimension finie.*
2. *Si A est un p -anneau et $q = p$, alors tous les simples sont polynomiaux. En particulier K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$ si et seulement si c'en est un corps de décomposition non additif.*

3. Si A est un p -anneau et $q \neq p$, le seul simple polynomial est le foncteur constant de valeur K .

Supposons de plus que K est un corps de décomposition non additif pour $\mathbf{P}(A)$. Notons P l'ensemble (fini) des nombres premiers tels que ${}_{(p)}A \neq 0$, et S un ensemble fini de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs additifs $\mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$ simples. Un foncteur F de $\mathcal{F}(A, K)$ est simple si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel :

$$F \simeq \left(\bigotimes_{p \in P, p \neq q} \pi_p^* S_p \right) \otimes \left(\bigotimes_{\pi \in S} \pi^* E_\pi \right).$$

où les S_p sont des simples de $\mathcal{F}({}_{(p)}A, K)$ et les E_π sont des foncteurs élémentaires. De plus, dans une telle décomposition, les S_p et les E_π sont uniquement déterminés à isomorphisme près.

Démonstration. Comme A est fini, les projectifs standard de $\mathcal{F}(A, K)$ sont à valeurs de dimensions finies, donc leurs quotients (en particulier les simples) sont à valeurs de dimensions finies. Ceci prouve la première assertion. Si A est un p -anneau et $q = p$, la polynomialité des simples découle du corollaire 3.5. La propriété sur le corps de décomposition provient du corollaire 5.4. Si A est un p -anneau et $q \neq p$, alors $\mathbf{P}(A)(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$ et il n'y a pas de foncteurs polynomiaux non constants d'après la proposition 1.10. Finalement, si K est un corps de décomposition non additif de $\mathbf{P}(A)$, les simples s'écrivent de manière unique comme un produit tensoriel de simples de la forme $\pi_p^* S_p$ où les S_p sont des simples de $\mathcal{F}({}_{(p)}A, K)$, d'après la proposition 4.3, et le corollaire 5.4 donne une décomposition tensorielle du simple $\pi_q^* S_q$. \square

6.2 Application aux monoïdes finis de matrices

Nous donnons maintenant les conséquences du théorème 6.1 sur la structure des $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples, pour un p -anneau fini A . Se donner un (K, A) -bimodule B de dimension finie ℓ sur K équivaut à se donner un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \mathcal{M}_\ell(K)$. On en déduit pour tout $n \geq 1$ un morphisme d'anneaux (qui est le morphisme d'anneaux définissant le $(K, \mathcal{M}_n(A))$ -bimodule $B^{\oplus n}$)

$$\psi_B : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_\ell(K)) \simeq \mathcal{M}_{n\ell}(K).$$

Notation 6.2. Pour tout $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -module M , on note $M^{[B]}$ le $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module obtenu par restriction le long de $K[\psi_B] : K[\mathcal{M}_n(A)] \rightarrow K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$.

Pour un module M de la forme $M \simeq E(K^{n\ell})$ avec E un endofoncteur des K -espaces vectoriels, on a donc un isomorphisme de $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules $M^{[B]} \simeq (\pi_B^* E)(A^n)$ où $\pi_B : \mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$ est le foncteur additif $\pi_B(-) = B \otimes_A -$ (d'après la proposition 1.7, tous les foncteurs additifs sont de cette forme).

Définition 6.3. Un $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -module est *élémentaire* s'il est non nul et isomorphe à un module de la forme $E(K^{n\ell})$, où E est un foncteur élémentaire.

Le corollaire 1.6 assure que les $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -modules élémentaires sont simples, et donne une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations élémentaires de $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ et les classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires ne s'annulant pas sur $K^{n\ell}$. La traduction de théorème 6.1 en termes de $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples est donc directe et donne le théorème suivant.

Théorème 6.4. *Soit A un p -anneau fini, et K un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$, de caractéristique p . Soit $\{B_1, \dots, B_m\}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de (K, A) -bimodules simples.*

Un $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module M est simple si et seulement s'il existe des modules élémentaires M_1, \dots, M_m et un isomorphisme de $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules :

$$M \simeq M_1^{[B_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[B_m]} .$$

De plus, les M_i apparaissant dans une telle décomposition sont uniquement déterminés, à isomorphisme de $K[\mathcal{M}_{n \dim_K(B_i)}(K)]$ -modules près. Enfin tous les $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples sont absolument simples.

6.3 Application aux groupes linéaires finis

Nous commençons par des observations élémentaires reliant un monoïde unitaire \mathcal{M} et son sous-monoïde \mathcal{M}^\times des éléments inversibles. Soit $\iota : K[\mathcal{M}^\times] \rightarrow K[\mathcal{M}]$ l'inclusion d'anneaux. On définit deux applications K -linéaires :

$$r : K[\mathcal{M}] \rightarrow K[\mathcal{M}^\times] , \quad \delta : K[\mathcal{M}] \rightarrow K \simeq \text{End}_K(K)$$

nulles sur les éléments non inversibles de \mathcal{M} , et respectivement égales à l'identité et à 1 sur \mathcal{M}^\times . Les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) le produit de deux éléments de \mathcal{M} est inversible si et seulement si les deux éléments sont inversibles,
- (ii) l'application r est un morphisme d'anneaux,
- (iii) l'application δ est un morphisme d'anneaux.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, δ définit un $K[\mathcal{M}]$ -module de dimension 1 qu'on note encore δ .

Exemple 6.5. Si \mathcal{M} est un monoïde fini, ou si $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(A)$ pour un anneau commutatif A , alors r est un morphisme d'anneaux.

Lemme 6.6. *On suppose que r est un morphisme d'anneaux.*

1. *La restriction le long de r induit un foncteur pleinement fidèle*

$$r^* : K[\mathcal{M}^\times]\text{-Mod} \rightarrow K[\mathcal{M}]\text{-Mod}$$

De plus r^ préserve les simples et induit une injection $\text{Irr}(K[\mathcal{M}^\times]) \hookrightarrow \text{Irr}(K[\mathcal{M}])$ entre les classes d'isomorphismes de modules simples.*

2. *La restriction le long de ι induit un foncteur essentiellement surjectif*

$$\iota^* : K[\mathcal{M}]\text{-Mod} \rightarrow K[\mathcal{M}^\times]\text{-Mod} .$$

De plus ι^ préserve les simples si et seulement si $- \otimes \delta$ préserve les $K[\mathcal{M}]$ -modules simples. Si c'est le cas, alors ι^* induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules simples $M \otimes \delta$ et $\text{Irr}(K[\mathcal{M}^\times])$.*

Démonstration. L'énoncé est une conséquence directe des identités $\iota^* r^* M = M$ et $r^* \iota^* M = M \otimes \delta$. \square

Pour transporter le théorème de décomposition tensorielle 6.4 au niveau des $K[GL_n(A)]$ -modules, commençons par quelques rappels classiques issus de la théorie des anneaux artiniens (cf. par exemple [9]). Dans la suite de cette sous-section, p désigne un nombre premier, A un p -anneau fini, et l'on suppose que K est de caractéristique p .

L'idéal de A engendré par p , qui en est un élément nilpotent central, est inclus dans son radical. Par conséquent, le morphisme surjectif d'anneaux $A \rightarrow A/p$ induit un isomorphisme $A/\text{Rad}(A) \xrightarrow{\simeq} (A/p)/\text{Rad}(A/p)$. En appliquant le corollaire de [9, § 12.7 (page 220)], on en déduit que le morphisme canonique $(A/\text{Rad}(A)) \otimes_{\mathbb{Z}} K \rightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} K)/\text{Rad}(A \otimes_{\mathbb{Z}} K)$ est un isomorphisme.

Il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de A -modules à droite simples, notons S_1, \dots, S_m des représentants de ces classes d'isomorphisme. Pour chaque i , le corps d'endomorphismes de S_i est isomorphe à $\mathbb{F}_{p^{r_i}}$ pour un entier $r_i > 0$ qu'on appellera *exposant* de S_i ; si $\ell_i > 0$ désigne la dimension de S_i sur ce corps (appelée *endodimension* de S_i), on dispose d'un isomorphisme d'anneaux

$$A/\text{Rad}(A) \simeq \prod_{i=1}^m \mathcal{M}_{\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})$$

et, par équivalence de Morita, d'un isomorphisme d'anneaux

$$\mathcal{M}_n(A)/\text{Rad}(\mathcal{M}_n(A)) \simeq \prod_{i=1}^m \mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}}), \quad (7)$$

pour tout entier $n > 0$; cet isomorphisme est induit par des morphismes d'anneaux $\psi_{i,n} : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})$ définissant les $\mathcal{M}_n(A)$ -modules simples $S_i^{\oplus n}$. D'après le résultat de changement de base susmentionné, on en déduit un isomorphisme

$$\mathcal{M}_n(A \otimes_{\mathbb{Z}} K)/\text{Rad}(\mathcal{M}_n(A \otimes_{\mathbb{Z}} K)) \simeq \prod_{i=1}^m \mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} K). \quad (8)$$

Si l'on suppose que K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$ (ce qui revient à dire que ce corps contient chaque $\mathbb{F}_{p^{r_i}}$), on dispose, par la théorie de Galois des corps finis, d'un isomorphisme de $(K, \mathbb{F}_{p^{r_i}})$ -bimodules

$$\mathbb{F}_{p^{r_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \simeq K \times K^{(1)} \times \dots \times K^{(r_i-1)}$$

où l'action de $\mathbb{F}_{p^{r_i}}$ sur chaque facteur est déduite d'un choix de plongement $\mathbb{F}_{p^{r_i}} \rightarrow K$ et l'exposant (t) indique que l'action de K sur lui-même est tordue par ϕ^t , où ϕ désigne le morphisme de Frobenius. Autrement dit, si B_i est un facteur de composition du (K, A) -bimodule $S_i \otimes_{\mathbb{Z}} K$, on a

$$S_i \otimes_{\mathbb{Z}} K \simeq B_i \oplus B_i^{(1)} \oplus \dots \oplus B_i^{(r_i-1)} \quad (9)$$

(comme (K, A) -bimodules), où l'exposant (t) signifie encore que l'action de K sur B_i est tordue par ϕ^t ($B_i^{(t)} := K_{\phi^t} \otimes B$). Par conséquent, les $B_i^{(j)}$, où $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq j < r_i$, forment un système de représentants des (K, A) -bimodules simples.

Rappelons par ailleurs qu'une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est p^r -restreinte si on a $\lambda_n < p^r$ et pour tout $i < n$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p^r$. Toute partition p^r -restreinte λ se

décompose de manière unique en une somme $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \dots + p^{r-1}\lambda^{r-1}$ où les λ^i sont des partitions p -restreintes. D'après la proposition B.2 de l'appendice B, les foncteurs élémentaires sont isomorphes aux socles \mathbb{L}_λ des foncteurs de Schur \mathbb{S}_λ indexés par les partitions p -restreintes.

Notation 6.7. Soit λ une partition p^r -restreinte, et $\lambda^0 + \dots + p^{r-1}\lambda^{r-1}$ sa décomposition à l'aide de partitions p -restreintes λ^i . On note :

$$\mathbb{L}_\lambda(K^n) = \mathbb{L}_{\lambda^0}(K^n)^{[0]} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}_{\lambda^{r-1}}(K^n)^{[r-1]}$$

où l'exposant $^{[k]}$ indique la restriction d'un module le long de ϕ^k .

Remarque 6.8. On dispose d'isomorphismes canoniques $(L^{[i]})^{[B]} \simeq L^{[B^{(i)}]}$.

Théorème 6.9. Soit A un p -anneau fini et K un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$, de caractéristique p . Soit $\{S_1, \dots, S_m\}$ un système complet de A -modules simples. On note r_i l'exposant de S_i , ℓ_i son endodimension, et B_i un facteur de composition du (K, A) -bimodule $S_i \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

Un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des $K[GL_n(A)]$ -modules simples est donné par les produits tensoriels

$$\mathbb{L}_{\lambda(1)}(K^{n\ell_1})^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}_{\lambda(m)}(K^{n\ell_m})^{[B_m]}$$

où les $\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \dots, \lambda(i)_{n\ell_i})$ parcourent l'ensemble des partitions p^{r_i} -restreintes telles que $\lambda(i)_{n\ell_i} \neq 0$. De plus, tous les $K[GL_n(A)]$ -modules simples sont absolument simples.

Démonstration. Notons $L(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$ le $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module :

$$L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) := \mathbb{L}_{\lambda(1)}(K^{n\ell_1})^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}_{\lambda(m)}(K^{n\ell_m})^{[B_m]} .$$

D'après le théorème 6.4, les $L(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$, indexés par les partitions p^{r_i} -restreintes $\lambda(i)$, forment un système de représentants des classes d'isomorphisme de $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples. D'après le deuxième point du lemme 6.6, pour démontrer le théorème 6.9, il suffit de démontrer que si les $\lambda(i)_{n\ell_i}$ sont tous non nuls alors :

$$L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) \otimes \delta \simeq L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) \quad (10)$$

et que si l'un des $\lambda(i)_{n\ell_i}$ est nul alors il existe des partitions $\mu(1), \dots, \mu(m)$ avec tous les $\mu(i)_{n\ell_i}$ non nuls, telles que

$$L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) \otimes \delta \simeq L(\mu(1), \dots, \mu(m)) . \quad (11)$$

Les isomorphismes (10) et (11) sont une conséquence directe des isomorphismes de $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules (*) et (**) ci-dessous, où chaque δ_i désigne la représentation δ relative à $K[\mathcal{M}_{n\ell_i}(K)]$, où λ est une partition quelconque de la forme $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n\ell_i})$, et où μ est la partition $\mu = (\lambda_1 + p^{r_i} - 1, \dots, \lambda_{n\ell_i} + p^{r_i} - 1)$, avec r_i l'exposant de B_i :

$$\begin{aligned} (*) \quad & \delta \simeq \delta_1^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \delta_m^{[B_m]}, \\ (**) \quad & \mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} \simeq \begin{cases} \mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i})^{[B_i]} & \text{si } \lambda_{n\ell_i} \neq 0, \\ \mathbb{L}_\mu(K^{n\ell_i})^{[B_i]} & \text{si } \lambda_{n\ell_i} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à établir les isomorphismes (*) et (**).

Pour démontrer (*), il suffit de vérifier que l'action d'un élément $x \in \mathcal{M}_n(A)$ sur $\delta_1^{[B_1]} \otimes \cdots \otimes \delta_m^{[B_m]}$ est l'identité si $x \in GL_n(A)$, et est nulle si $x \notin GL_n(A)$. Cela provient de ce qu'un élément d'un anneau est inversible si et seulement si sa classe modulo le radical de l'anneau est inversible, ainsi que des isomorphismes (8) et (9).

Démontrons (**). Supposons d'abord $\lambda_{n\ell_i} \neq 0$. Alors, l'une au moins des partitions p -restreintes intervenant dans la décomposition de λ a un $n\ell_i$ -ème terme non nul. La proposition B.4 de l'appendice B donne un isomorphisme :

$$\mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} = (\mathbb{L}_{\lambda_i}(K^{n\ell_i}) \otimes \delta_i)^{[B_i]} \simeq \mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i})^{[B_i]}.$$

Supposons maintenant $\lambda_{n\ell_i} = 0$. Comme le morphisme $\mathcal{M}_n(A) \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell_i}(K)$ définissant B_i se factorise par $\psi_{i,n}$ (défini après l'isomorphisme (7)), qui est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})$, la restriction de δ_i à son image coïncide avec le caractère $\det^{\otimes p^{r_i}-1}$, de sorte que :

$$\mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} = (\mathbb{L}_{\lambda_i}(K^{n\ell_i}) \otimes \delta_i)^{[B_i]} = (\mathbb{L}_\lambda(K^{n\ell_i}) \otimes \det^{\otimes p^{r_i}-1})^{[B_i]}.$$

De plus, comme $p^{r_i} - 1 = \sum_{0 \leq k < r_i} (p-1)p^k$ on a

$$\det^{\otimes p^{r_i}-1} = \det^{\otimes p-1} \otimes (\det^{\otimes p-1})^{[1]} \otimes \cdots \otimes (\det^{\otimes p-1})^{[r_i-1]},$$

de sorte que la proposition B.4 de l'appendice B nous donne le calcul désiré. \square

6.4 Simples polynomiaux et non polynomiaux. Conjecture sur les fonctions de dimension

Le théorème 6.1 permet d'exprimer un foncteur simple de $\mathcal{F}(A, K)$ en un produit tensoriel de simples de deux types différents : des simples polynomiaux, et des simples non polynomiaux.

Il y a une dichotomie dans l'étude de ces deux types de simples, qui se voit déjà au niveau de la paramétrisation des objets simples. En effet, le théorème 6.1 permet de paramétriser les simples polynomiaux en termes de partitions et des (K, A) -bimodules simples, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 6.10. Si K est un corps de caractéristique p et $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, les simples polynomiaux de $\mathcal{F}(A, K)$ sont paramétrisés par les partitions p -restreintes.

A contrario, la proposition 6.11 ci-dessous montre la difficulté à donner une paramétrisation combinatoire des simples non polynomiaux, même pour $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ avec p inversible dans K . En effet, la proposition 6.11 montre qu'une paramétrisation des foncteurs simples donnerait une paramétrisation des $K[GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})]$ -modules simples (pour tous les n). Mais la description des classes de conjugaison des différents groupes $GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est un problème sauvage, d'après un théorème de Bondarenko-Nagornyï cité dans [61, § 4].

Proposition 6.11. *Soit \mathcal{C} une petite catégorie dont les idempotents se scindent, et telle que $\mathcal{C}(x, y)$ soit fini pour tous objets x et y de \mathcal{C} . On a une bijection*

$$\Phi : \bigsqcup_{[a] \in \text{Iso}(\mathcal{C})} \text{Irr}(K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod}) \xrightarrow{\cong} \text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)).$$

De plus, Φ envoie les représentations absolument simples sur les foncteurs absolument simples.

(La notation Irr pour les classes d'isomorphisme de simples est celle du § 1.1.)

Démonstration. Pour tout objet a de \mathcal{C} , on a un morphisme d'anneaux $r_a : K[\text{End}_{\mathcal{C}}(a)] \rightarrow K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$ qui est l'identité sur les éléments inversibles de $\text{End}_{\mathcal{C}}(a)$ et nul sur les éléments non inversibles. On note $T_a : K[\text{End}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ le prolongement intermédiaire associé à l'évaluation d'un foncteur sur a . D'après le lemme 6.6 et le corollaire 1.6, le foncteur $\Phi_a = T_a \circ r_a^*$ est pleinement fidèle et induit une injection (toujours notée Φ_a) :

$$\Phi_a : \text{Irr}(K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod}) \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)) \quad [M] \rightarrow [T_a(r_a^*M)] .$$

Pour démontrer la proposition, il reste à montrer que tout élément de $\text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$ est dans l'image de Φ_a pour un élément a unique à isomorphisme près.

Pour voir que tout élément $[S]$ de $\text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$ est dans l'image d'un Φ_a , prenons un objet x de \mathcal{C} tel que $S(x) \neq 0$. Par le corollaire 1.6, $S(x)$ est un $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(x)]$ -module simple. Comme le monoïde $\text{End}_{\mathcal{C}}(x)$ est fini, [54, thm 5.5] donne un idempotent $e \in \text{End}_{\mathcal{C}}(x)$ tel que $eS(x)e \neq 0$ et tel que les éléments non inversibles du monoïde $e\text{End}_{\mathcal{C}}(x)e$ opèrent par 0 sur $S(x)$. Soit a l'image de e dans \mathcal{C} (qui existe par hypothèse sur \mathcal{C}). On déduit que $S(a)$ est un $K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$ -module simple et que S est isomorphe à l'image par Φ_a de $S(a) (\simeq eS(x))$.

Il reste à voir que si a et b sont deux éléments non isomorphes de \mathcal{C} , les images de Φ_a et Φ_b sont disjointes. Cela peut se déduire facilement des résultats de [54, § 5.2], ou s'établir directement en observant que la formule donnant le prolongement intermédiaire T_a montre que, si M est un $K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$ -module (non nécessairement simple), alors $T_a(r_a^*M)(x)$ ne peut être non nul que si a est facteur direct de x . \square

La dichotomie entre simples polynomiaux et non polynomiaux se voit également au niveau des fonctions de dimension. Rappelons que si F est un foncteur de $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$, sa *fonction de dimension* est la fonction

$$d_F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \dim_K F(A^n) .$$

Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est dite *polynomiale* si elle est la restriction d'une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ polynomiale au sens d'Eilenberg-Mac Lane rappelé au § 1.4. De manière équivalente, \mathbf{f} est un polynôme numérique, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers de coefficients binomiaux $n \mapsto C_n^k$ (ou $n \mapsto \binom{n}{k}$ en notation anglo-saxonne). Le lemme suivant, bien connu, est conséquence directe de la décomposition de $F(A^n)$ à l'aide des effets croisés (cf. la section 1.4).

Lemme 6.12. *Soit A un anneau et soit F un foncteur de $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$. Si F est polynomiale, alors d_F est une fonction polynomiale de même degré que F , sinon d_F croît plus vite que toute fonction polynomiale.*

Nous formulons toutefois une conjecture restreignant fortement les valeurs possibles pour les dimensions prises par les foncteurs simples dans ce contexte. Cette conjecture est valide lorsque A est un p -anneau fini *semi-simple*. Nous verrons, au corollaire 8.32, que ceci peut s'établir facilement³ à partir des résultats de Kuhn [42]. Nous montrerons en fait pour les p -anneaux finis semi-simples une version plus précise de la conjecture (la conjecture 8.30).

3. Nagpal a démontré [45, théorème 1.1], à l'aide de méthodes différentes, un résultat analogue pour les foncteurs de type fini des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini avec *injections* vers les espaces vectoriels sur un corps d'une autre caractéristique.

Conjecture 6.13. *Soit A un p -anneau fini. On suppose $\text{car}(K) \neq p$. Alors pour tout foncteur simple F de $\mathcal{F}(A, K)$, il existe une fonction polynomiale $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_F(n) = f(p^n)$.*

7 Renforcement et conséquences du théorème 5.3

Dans cette section, nous montrons comment étendre le champ d'application des résultats de la section 5. Cela repose sur une étude fine des effets croisés (§ 7.1), qui nous permet (§ 7.2) d'affaiblir les hypothèses du corollaire 5.4 pour parvenir à la même conclusion — nous donnons aussi un énoncé pour un corps de coefficients pas assez gros qui nous servira dans la section 8. Au § 7.3, nous affaiblissons encore les hypothèses nécessaires lorsque la catégorie source est de la forme $\mathbf{P}(A)$, où A est un anneau *commutatif*. Les § 7.4 et 7.5 sont dédiés à des applications à connotations représentationniste et arithmétique.

7.1 Compléments sur les effets croisés

Soient \mathcal{D} une catégorie abélienne et $d \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{D})$ des foncteurs qui sont additifs par rapport à chacune des d variables et $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ la catégorie des objets de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ multi-symétriques au sens suivant.

Plus précisément, pour un objet F de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, on pose $(F.\sigma)(a_1, \dots, a_d) := F(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)})$. Un objet de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ est un objet F de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ muni d'isomorphismes $\xi_\sigma : F.\sigma \simeq F$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, tels que pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_d$ la composée suivante soit égale à $\xi_{\sigma\tau}$:

$$F.(\sigma\tau) = (F.\sigma).\tau \xrightarrow{\xi_{\sigma.\tau}} F.\tau \xrightarrow{\xi_\tau} F .$$

Les morphismes de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ sont les morphismes des objets sous-jacents de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ qui sont compatibles aux isomorphismes structuraux ξ_σ . On dispose d'une paire de foncteurs :

$$\mathcal{O} : \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightleftarrows \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) : \mathcal{L}$$

où \mathcal{O} désigne le foncteur d'oubli, et \mathcal{L} envoie F sur l'objet $\mathcal{L}(F) = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.\tau$ muni de la structure symétrique donnée par les isomorphismes

$$\xi_\sigma : \mathcal{L}(F).\sigma = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.(\tau\sigma) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.\tau = \mathcal{L}(F)$$

fournis par l'isomorphisme d'échange des facteurs induit par la bijection $\tau \mapsto \tau\sigma$ de l'ensemble d'indexation \mathfrak{S}_d . Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 7.1. *Le foncteur \mathcal{L} est adjoint des deux côtés au foncteur \mathcal{O} .*

Le foncteur de d -ème effet croisé se restreint en un foncteur (toujours noté cr_d) $\mathcal{P}ol_d(A, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, qui se relève à travers \mathcal{O} en un foncteur que nous noterons Cr_d :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}ol_d(A, \mathcal{D}) & \xrightarrow{\text{Cr}_d} & \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \\ & \searrow cr_d & \downarrow \mathcal{O} \\ & & \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \end{array} .$$

Proposition 7.2 (Pirashvili, cf. [47]). *Soient \mathcal{D} une catégorie abélienne et $d \in \mathbb{N}$. Le foncteur $\text{Cr}_d : \text{Pol}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightarrow \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ est réflexif.*

Corollaire 7.3. *Si F est un foncteur simple de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$, polynomial de degré d , alors $\text{Cr}_d(F)$ est un objet simple de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ et le foncteur Cr_d induit un isomorphisme de corps $\text{End}(F) \simeq \text{End}(\text{Cr}_d(F))$.*

Démonstration. L'objet $\text{Cr}_d(F)$ est non nul car $\mathcal{O}(\text{Cr}_d(F)) = cr_d(F) \neq 0$. Le corollaire découle donc directement des propositions 1.4 et 7.2. \square

Les résultats de structure sur les foncteurs Cr_d et \mathcal{O} nous permettent d'obtenir dans la proposition suivante des renseignements importants sur la structure des foncteurs $cr_d(F)$ lorsque F est un foncteur simple.

Proposition 7.4. *Soit F un foncteur simple de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, polynomial de degré d .*

1. *Le foncteur $cr_d(F)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{E})$ est semi-simple : il existe un foncteur simple S de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{E})$, un sous-ensemble E de \mathfrak{S}_d , et un isomorphisme*

$$cr_d(F) \simeq \bigoplus_{\sigma \in E} S.\sigma .$$

2. *Il existe des entiers naturels n et m vérifiant $0 < nm \leq d!$ de sorte que l'anneau $\text{End}(cr_d(F))$ soit isomorphe au produit d'anneaux de matrices $\mathcal{M}_n(\text{End}(S))^m$.*
3. *Le morphisme d'anneaux $\text{End}(F) \rightarrow \text{End}(cr_d(F))$ induit par cr_d fait de $\text{End}(cr_d(F))$ un $\text{End}(F)$ -espace vectoriel de dimension au plus $d!$.*

Démonstration. Le foncteur \mathcal{O} est adjoint à gauche au foncteur \mathcal{L} , qui commute aux colimites. Par conséquent, \mathcal{O} préserve les objets de type fini. D'après le corollaire 7.3, $\text{Cr}_d F$ est un simple de $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, son image par \mathcal{O} est donc non nulle et de type fini, et possède donc un quotient simple T . Par adjonction il existe un morphisme non nul, donc injectif, $\text{Cr}_d F \rightarrow \mathcal{L}(T)$. D'où un morphisme :

$$cr_d(F) = \mathcal{O}(\text{Cr}_d F) \hookrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}(T) = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} T.\tau .$$

Les foncteurs $T.\tau$ sont des objets simples de $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, tout comme T ($-\cdot\tau$ définissant un automorphisme de la catégorie $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$). La première assertion en découle. En regroupant les termes isomorphes dans la décomposition de $cr_d(F)$ on obtient un isomorphisme $cr_d(F) \simeq \bigoplus_{i=1}^m S^{\oplus n}.\sigma_i$ pour des permutations σ_i convenables, de sorte que $S.\sigma_i$ et $S.\sigma_j$ ne soient jamais isomorphes pour $i \neq j$. Cela fournit la deuxième assertion. Pour la troisième assertion, on utilise que $\text{Cr}_d(F)$ est simple d'après le corollaire 7.3, donc $\mathcal{L}\mathcal{O}\text{Cr}_d(F) \simeq \text{Cr}_d(F)^{\oplus d!}$. Ainsi, le morphisme d'anneaux

$$\text{End}(F) \simeq \text{End}(\text{Cr}_d(F)) \rightarrow \text{End}(\mathcal{O}\text{Cr}_d(F)) \simeq \text{Hom}(\text{Cr}_d(F), \mathcal{L}\mathcal{O}\text{Cr}_d(F))$$

fait de $\text{End}(\mathcal{O}\text{Cr}_d(F)) = \text{End}(cr_d(F))$ un espace vectoriel de dimension au plus $d!$ sur $\text{End}(F)$. \square

7.2 Forme générale du corollaire 5.4

Nous pouvons maintenant établir la généralisation suivante du corollaire 5.4, où $\mathbf{P}(A)$ est remplacée par une petite catégorie additive quelconque \mathcal{A} .

Théorème 7.5. *Supposons que K est un corps de décomposition de \mathcal{A} . Un foncteur polynomial F de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n$$

où $n \in \mathbb{N}$, les π_i sont des foncteurs additifs simples deux à deux non isomorphes de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ et les E_i sont des foncteurs élémentaires non constants. (Le foncteur simple constant s'obtient comme un produit vide). De plus, l'entier n et les classes d'isomorphisme des E_i et des π_i sont uniques, à permutation des facteurs près. Enfin les foncteurs polynomiaux simples de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ sont absolument simples.

Démonstration. Le résultat est trivial pour les foncteurs de degré 0 (ils sont constants). Supposons F de degré $d > 0$. L'adjonction diagonale-effets croisés de la proposition 1.11 donne un morphisme non nul $\Delta^* cr_d(F) \rightarrow F$ qui est un épimorphisme par simplicité de S . D'après la proposition 7.4, $cr_d F$ est semi-simple. Comme K est un corps de décomposition de \mathcal{A} , il découle des propositions 2.1 et 2.6 que les facteurs directs de $cr_d(F)$ sont de la forme $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d$ pour des foncteurs π_i absolument simples. Ainsi F est un quotient d'un produit tensoriel $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ et le théorème 7.5 découle du théorème 5.3. \square

Remarque 7.6. Dans l'énoncé précédent, on ne peut généralement pas s'affranchir de l'hypothèse que K est un corps de décomposition de \mathcal{A} , même si F est absolument simple. Considérons par exemple le foncteur quadratique F de $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ associant à un \mathbb{C} -espace vectoriel V le \mathbb{R} -espace vectoriel des formes hermitiennes sur V^* . On vérifie facilement que F est absolument simple, mais il n'admet pas de décomposition à la Steinberg, car la catégorie $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(\mathbb{C}); \mathbb{R})$, qui est \mathbb{C} -linéaire, ne contient aucun foncteur absolument simple.

Le théorème 7.5, le corollaire 3.7 et la proposition 2.3 entraînent aussitôt le résultat suivant, dont nous ne connaissons pas de démonstration directe.

Corollaire 7.7. *Tout corps de décomposition de \mathcal{A} qui contient toutes les racines de l'unité est un corps de décomposition non additif de \mathcal{A} .*

Si le corps K n'est pas assez gros, on a le résultat plus faible suivant.

Théorème 7.8. *Soit F un foncteur polynomial simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$. Il existe une extension finie de corps commutatifs $K \subset L$ telle que le foncteur $F \otimes_K L$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont du type*

$$\pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n$$

où les π_i sont des foncteurs additifs absolument simples de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; L)$ et les E_i des foncteurs élémentaires non constants.

Démonstration. Soit S un sous-foncteur simple de $cr_d(F)$ (cf. proposition 7.4), où d est le degré de F . Par la proposition 2.5, il existe une extension finie $K \subset L$ telle que $S \otimes_K L$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont absolument simples (dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}^d; L)$).

Comme $cr_d(F)$ est somme directe d'un nombre fini de foncteurs du type $S.\sigma$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, et que le foncteur $-\otimes_K L : \mathcal{F}(\mathcal{A}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$ commute aux effets croisés, on voit que tous les sous-quotients simples de $cr_d(F \otimes_K L)$ (dans $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; L)$) sont absolument simples. Le foncteur $F \otimes_K L$ possède une filtration finie (de longueur bornée par le degré de L sur K) dont les sous-quotients T_i sont simples, polynomiaux, à valeurs de dimension finie. Par construction, les sous-quotients simples de $cr_d(T_i)$ sont absolument simples dans $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; L)$. On peut donc conclure que T_i a la forme souhaitée en procédant comme dans la démonstration du théorème 7.5. \square

Remarque 7.9. Si F est *absolument simple*, la proposition 7.4 montre qu'on peut choisir L de degré au plus $d!$ sur K , où d est le degré de F .

7.3 Simples polynomiaux de $\mathcal{F}(A, K)$ (A commutatif)

La proposition 7.10 étend le champ d'application du théorème 7.5 à des foncteurs dont on sait seulement qu'ils prennent *une* valeur de dimension finie.

Proposition 7.10. *Soient A un anneau **commutatif** et F un foncteur simple polynomial de degré d de $\mathcal{F}(A, K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le foncteur F est à valeurs de dimension finie.*
2. *Le foncteur F prend une valeur de dimension finie non nulle.*
3. *Le corps $\text{End}(F)$ est de dimension finie sur K .*
4. *Le foncteur $cr_d(F)$ est à valeurs de dimension finie.*

Si on suppose de plus que A est un anneau de type fini, alors F vérifie automatiquement les assertions précédentes.

Démonstration. La proposition 1.11 donne un morphisme $\Delta^* cr_d(F) \rightarrow F$ non nul, qui est un épimorphisme par simplicité de F . Ceci prouve l'implication $4 \Rightarrow 1$. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est immédiate, et $2 \Rightarrow 3$ est une conséquence du corollaire 1.6. Montrons $3 \Rightarrow 4$. La proposition 7.4 et l'hypothèse sur $\text{End}(F)$ donnent des extensions d'anneaux (non nécessairement commutatifs) de degrés finis

$$K \subset \text{End}(F) \subset \text{End}(cr_d(F)) \simeq \mathcal{M}_n(\text{End}(S))^m$$

pour des entiers $n, m > 0$ convenables (où S est un sous-foncteur simple de $cr_d(F)$). Ainsi, $\text{End}(S)$ est de degré fini sur K . Or S est un objet simple de $\mathbf{Add}_d(A, K) \simeq (A^{\otimes d} \otimes K)\text{-Mod}$ (où tous les produits tensoriels sont pris sur \mathbb{Z}), par une application itérée de la proposition 1.7. Comme l'anneau $A^{\otimes d} \otimes K$ est *commutatif*, un module simple sur celui-ci est un quotient qui est un corps *commutatif* L , et le corps des endomorphismes de ce module simple s'identifie à L . Par conséquent, le fait que $\text{End}(S)$ soit de degré fini sur K implique que S prend des valeurs de dimension finie. Comme $cr_d(F)$ est une somme directe *finie* de foncteurs du type $S.\sigma$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ (proposition 7.4), on en déduit que $cr_d(F)$ prend également des valeurs de dimension finie, ce qui achève la démonstration de $3 \Rightarrow 4$. Finalement si A est de type fini, alors $A^{\otimes d} \otimes K$ est une K -algèbre commutative de type fini, donc tout module simple sur cette algèbre est de dimension finie. Ainsi $cr_d(F)$ est à valeurs de dimension finie, car c'est une somme directe de simples de $\mathbf{Add}_d(A, K) \simeq (A^{\otimes d} \otimes K)\text{-Mod}$. \square

Remarque 7.11. Le résultat tombe en défaut si l'on omet l'hypothèse de commutativité de A . En effet l'implication $3 \Rightarrow 4$ est déjà fautive pour $d = 1$, car un $A^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ -bimodule simple peut être de dimension infinie sur K sans être absolument simple (sur K). Par exemple, si k est un corps de dimension infinie sur son centre K , le (k, k) -bimodule k est absolument simple mais de dimension infinie sur K .

Remarque 7.12. Dans la démonstration de la proposition 7.10, le fait que le corps des endomorphismes d'un foncteur simple de $\mathbf{Add}_d(A, K)$ est commutatif joue un rôle important. On notera toutefois que le corps des endomorphismes d'un foncteur simple polynomial de $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$ (avec A et K commutatifs) n'est pas nécessairement commutatif. Donnons-en un exemple quadratique dans $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$: on a un morphisme surjectif $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (donné par l'identité et la conjugaison) de $\mathbb{R}[\mathfrak{S}_2]$ -algèbres, où l'action de \mathfrak{S}_2 est donnée par l'échange des facteurs à la source et la conjugaison au but. On en déduit un morphisme surjectif de \mathbb{R} -algèbres de $\mathfrak{S}_2 \int \mathbb{C}$ (où \mathbb{C} est vu comme \mathbb{R} -algèbre) sur l'algèbre tordue (relativement à l'action de conjugaison) du groupe \mathfrak{S}_2 sur \mathbb{C} . Or cette algèbre tordue est isomorphe à la \mathbb{R} -algèbre \mathbb{H} des quaternions. Cela montre qu'il existe un $\mathfrak{S}_2 \int \mathbb{C}$ -module simple dont le corps d'endomorphismes est \mathbb{H} , d'où par prolongement intermédiaire un foncteur quadratique simple de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ ayant la même propriété.

7.4 Applications aux représentations polynomiales

Soit k un corps infini. On rappelle qu'une représentation V de dimension finie du monoïde multiplicatif $\mathcal{M}_n(k)$ est dite *polynomiale* si le morphisme d'action $\rho : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \text{End}_k(V)$ est un polynôme des coefficients des matrices. Les restrictions des représentations polynomiales de $\mathcal{M}_n(k)$ à $GL_n(k)$ sont les *représentations polynomiales de $GL_n(k)$* . Cette notion de représentation polynomiale, dont l'idée remonte à la thèse de Schur, et dont l'ouvrage de Green [29] fait une étude systématique, a fait l'objet d'une littérature intensive. La définition suivante donne une notion plus faible, mais plus souple, de représentation *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* (*EML-polynomiale* en abrégé).

Définition 7.13. Soient A un anneau, k un anneau commutatif, $n \in \mathbb{N}$ et M une représentation k -linéaire du monoïde multiplicatif $\mathcal{M}_n(A)$. On dit que M est une représentation *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* si le morphisme de monoïdes multiplicatifs $\rho : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow \text{End}_k(M)$ donnant l'action est une fonction polynomiale au sens d'Eilenberg-Mac Lane, cf. section 1.4.

Une représentation de $GL_n(A)$ ou de $SL_n(A)$ est dite *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* si elle est restriction d'une représentation EML-polynomiale de $\mathcal{M}_n(A)$.

La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane de ρ ne fait intervenir que la structure *additive* des anneaux $\mathcal{M}_n(A)$ et $\text{End}_k(V)$ (la structure multiplicative ne joue aucun rôle), tandis que le fait que ρ est une représentation signifie la compatibilité à leur structure *multiplicative* (avec préservation de l'unité; la structure additive ne joue aucun rôle). La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane est donc une forme de propriété *arithmétique* des représentations.

Exemple 7.14. On dispose des exemples élémentaires suivants.

1. Si A est un anneau fini dont la caractéristique est une puissance de celle de k , toute représentation de $\mathcal{M}_n(A)$ ou de $GL_n(A)$ est EML-polynomiale, d'après le théorème 6.1.
2. Si $A = k$ est un corps infini toute représentation polynomiale de $\mathcal{M}_n(A)$ ou de $GL_n(A)$ au sens classique est EML-polynomiale.
3. La notion de représentation EML-polynomiale est stable par restriction le long d'un morphisme d'anneaux. (En effet, c'est la cas pour la notion de fonction polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane).
4. La notion de représentation EML polynomiale est stable par sous-quotient et par produit tensoriel.

Notation 7.15. Si M est une représentation de $\mathcal{M}_n(B)$, $GL_n(B)$ ou $SL_n(B)$, on note $M^{[\phi]}$ la représentation de $\mathcal{M}_n(A)$, $GL_n(A)$ ou $SL_n(A)$ obtenue par restriction le long d'un morphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$.

La proposition suivante donne le lien entre représentations EML-polynomiales et foncteurs polynomiaux. Notons $\mathcal{P}ol(A, k)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(A, k)$, et $k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-}\mathcal{P}ol$ la sous-catégorie pleine des $k[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules qui sont EML-polynomiaux.

Proposition 7.16. *Soit A un anneau et k un anneau commutatif. L'évaluation sur A^n induit un foncteur plein et essentiellement surjectif :*

$$\mathcal{P}ol(A, k) \rightarrow k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-}\mathcal{P}ol .$$

De plus, toute représentation EML-polynomiale simple est l'évaluation sur A^n d'un foncteur polynomial simple uniquement déterminé à isomorphisme près.

Démonstration. Le caractère plein du foncteur est donné par la proposition 1.4. Soit $T : k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}(A, k)$ le foncteur de prolongement intermédiaire associé à l'évaluation sur A^n . Alors pour tout module M , l'objet A^n est un support et un cosupport du foncteur $T(M)$. La polynomialité de $T(M)$ découle alors du lemme 3.13. L'essentielle surjectivité découle alors de l'isomorphisme $T(M)(A^n) \simeq M$. Enfin, si M est simple, $T(M)$ est l'unique simple dont l'évaluation sur A^n donne M d'après la proposition 1.4. \square

Remarque 7.17. Soit k un corps infini. Les représentations polynomiales de $\mathcal{M}_n(k)$ au sens classique [29] s'obtiennent par évaluation sur k^n des foncteurs *strictement polynomiaux* au sens de Friedlander et Suslin [25] (qui forment une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}ol(k, k)$ si k est un corps infini).

Remarque 7.18. Bien que similaires et reliées par la proposition 7.16, les notions de polynomialité pour les foncteurs et pour les représentations présentent des différences significatives. Ainsi, à l'inverse des sous-catégories $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, k)$ qui sont épaisses dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}, k)$ (voir la section 1.4), une extension de deux représentations EML-polynomiales de $\mathcal{M}_n(A)$ n'est pas nécessairement EML-polynomiale.

Ceci se voit déjà pour $n = 1$, $A = k = \mathbb{R}$. Soit \mathbb{R} la représentation tautologique du monoïde multiplicatif $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. C'est une représentation qui est EML-polynomiale de degré 1. Pourtant, il existe une représentation $V = (\mathbb{R}^2, \rho)$ qui est une extension de \mathbb{R} par elle-même et qui n'est pas EML-polynomiale. Il suffit de prendre $\rho : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\rho(0) = 0$ et pour $x \neq 0$,

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} x & x \cdot \ln(|x|) \\ 0 & x \end{pmatrix} .$$

Dans la suite de la section 7.4, nous considérons les représentations linéaires sur un corps commutatif quelconque, qui est donc noté K selon les conventions générales de l'article.

Définition 7.19. Une représentation EML-polynomiale de $\mathcal{M}_n(K)$, de $GL_n(K)$, ou de $SL_n(K)$, est dite *élémentaire* (non triviale) si elle est de la forme $E(K^n)$ pour un foncteur élémentaire E (non constant).

Si K est infini, les représentations élémentaires de $\mathcal{M}_n(K)$ sont polynomiales au sens classique. L'énoncé suivant peut donc être interprété comme un résultat de rigidité, qui permet d'exprimer des représentations polynomiales à la Eilenberg-Mac Lane à partir de représentations polynomiales au sens classique.

Théorème 7.20. *Soient A un anneau commutatif, tel que K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$. Soit M une représentation K -linéaire de dimension finie de $\mathcal{M}_n(A)$. On suppose que M est EML-polynomiale. Alors M est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$$

où les M_i sont des représentations élémentaires non triviales de $\mathcal{M}_n(K)$, et les $\phi_i : A \rightarrow K$ sont des morphismes d'anneaux deux à deux distincts. (La représentation simple triviale s'obtient comme un produit vide). De plus, les morphismes ϕ_i et les M_i sont uniquement déterminés (à une permutation des indices près). Enfin, si M est simple, elle est absolument simple.

Démonstration. D'après la proposition 7.16, la représentation M peut se relever de manière unique en un foncteur polynomial simple F . Ce dernier prend des valeurs de dimensions finies dès que M est de dimension finie sur K d'après la proposition 7.10. Le théorème est alors une traduction directe du théorème de décomposition tensorielle 7.5 dans $\mathcal{F}(A, K)$ via l'évaluation sur A^n . \square

En restreignant l'action de $\mathcal{M}_n(A)$ au groupe $GL_n(A)$ on déduit du théorème 7.20 que toute représentation EML-polynomiale M de $GL_n(A)$ se décompose comme un produit tensoriel

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]} .$$

Cependant, il n'y a pas unicité d'une telle décomposition en général.

Exemple 7.21. Soit $\phi_a : K[X] \rightarrow K$ le morphisme de K -algèbres tel que $\phi_a(X) = a$. Les ϕ_a induisent tous le même isomorphisme $GL_1(K[X]) \rightarrow GL_1(K)$, de sorte que si K est la représentation tautologique de $GL_1(K)$, les représentations EML-polynomiales simples $K^{[\phi_a]}$ sont toutes isomorphes.

Ce genre de pathologie ne se produit pas pour $SL_n(A)$, grâce à certains résultats de densité. Nous nous placerons dans la situation suivante.

Situation 7.22. Soit A un anneau commutatif, K un corps commutatif, et $f : A \rightarrow K^d$ un morphisme d'anneaux (pour la structure d'anneau produit sur K^d) dont les composantes sont les morphismes d'anneaux notés $f_i : A \rightarrow K$, $1 \leq i \leq d$. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée.

(H1) $\text{Car}(K) = 0$.

(H2) $\text{Car}(K) = p > 0$, et pour tout couple $i \neq j$ et tout $t \in \mathbb{N}$ on a $\phi^t \circ f_i \neq f_j$, où $\phi : K \rightarrow K$ désigne le morphisme de Frobenius ($\phi(x) = x^p$).

La proposition suivante est due⁴ à Borel et Tits [8, Prop 2.1]. Elle est aussi un corollaire du théorème 7.20 pour $n = 1$ (voir la remarque 7.30).

Proposition 7.23. *On se place dans la situation 7.22 et on suppose de plus que les ensembles $f_i(A)$ sont tous de cardinal infini. Soit $P \in K[X_1, \dots, X_d]$. Si $P(f_1(x), \dots, f_d(x)) = 0$ pour tout $x \in A$, alors $P = 0$.*

Corollaire 7.24. *On se place dans la situation 7.22. La clôture de Zariski de $f(A)$ dans K^d est égale au produit des clôtures de Zariski des $f_i(A)$ dans K .*

Démonstration. Si tous les f_i sont d'images infinies, le corollaire est juste une reformulation de la proposition 7.23. Sinon, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que seules les $e > 0$ premières coordonnées f_i sont d'image finie. Les idéaux $\ker f_i$ sont alors maximaux, et comme l'hypothèse (H2) est satisfaite (l'hypothèse (H1) ne peut être satisfaite que si tous les f_i sont d'image infinie), les $\ker f_i$ sont deux à deux copremiers (pour $1 \leq i \leq e$), de sorte que le morphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq e} \text{Im } f_i$ dont les composantes sont les f_i est surjectif (lemme chinois). Ceci finit la preuve si $d = e$. On suppose donc par la suite $0 < e < d$.

Soit $I = \ker \phi$, et soit $I^+ = \mathbb{Z} \oplus I$ l'anneau obtenu en adjoignant formellement une unité à l'idéal I , et $\iota : I^+ \rightarrow A$ le morphisme d'anneaux induit par l'inclusion $I \subset A$. On vérifie facilement que la propriété (P) suivante est satisfaite.

(P) Si $g, h : A \rightarrow K$ sont deux morphismes d'anneaux distincts d'images infinies, alors $g \circ \iota$ et $h \circ \iota$ sont également distincts et d'images infinies.

Soit $P \in K[X_1, \dots, X_d]$ un polynôme s'annulant sur $f(A)$. Fixons $x \in \text{Im } \phi$. Soit $a \in A$ tel que $\phi(a) = x$, notons $(x_1, \dots, x_d) = f(a) \in K^d$ et

$$Q_x := (X_d - 1)P(x_1, \dots, x_e, x_{e+1} + X_{e+1}, \dots, x_d + X_d) \in K[X_{e+1}, \dots, X_d].$$

Notons $\psi : I^+ \rightarrow K^{d-e}$ le morphisme d'anneaux de coordonnées les $f_i \circ \iota$, $e < i \leq d$. Les $f_i \circ \iota$ sont d'images infinies et satisfont (H2) d'après la propriété (P). De plus, Q_x s'annule sur $\psi(I^+)$, donc $Q_x = 0$ d'après la proposition 7.23. Ceci étant valide pour tout $x \in \text{Im } \phi$, on obtient que P s'annule sur $\text{Im } \phi \times K^{d-e}$. \square

Corollaire 7.25. *On se place dans la situation 7.22. La clôture de Zariski de l'image du morphisme de groupes*

$$\begin{aligned} SL_n(f) : SL_n(A) &\rightarrow SL_n(K^d) = SL_n(K)^d \\ [a_{k,\ell}] &\mapsto ([f_i(a_{k,\ell})])_{1 \leq i \leq d} \end{aligned}$$

est égale au produit des groupes $SL_n(\overline{f_i(A)})$ où $\overline{f_i(A)}$ désigne la clôture de Zariski dans K de l'image de f_i .

Démonstration. Pour tout anneau B commutatif et tout couple d'entier (r, s) tel que $1 \leq r \neq s \leq n$, on note $e_{r,s}^B(\lambda) = 1_n + \lambda e_{r,s} \in SL_n(B)$ où $e_{r,s}$ est la matrice avec 1 en position (r, s) et 0 ailleurs. Soit $L = \prod_{1 \leq i \leq d} \overline{f_i(A)} \subset K^d$.

4. Borel et Tits énoncent la proposition 7.23 lorsque A est un corps infini, mais leur démonstration fonctionne pour un anneau quelconque.

Les $e_{r,s}^L(\lambda)$, $\lambda \in L$, $1 \leq r \neq s \leq n$, engendrent le sous-groupe $SL_n(L)$ de $SL_n(K^d) = SL_n(K)^d$. Pour démontrer le corollaire, il suffit donc de montrer que tout polynôme P défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)^d$ et s'annulant sur $SL_n(f)(A)$, s'annule sur l'image de l'application $e^L : L^N \rightarrow SL_n(L) \subset \mathcal{M}_n(K^d)$ définie par :

$$e^L(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{1 \leq k \leq N} e_{(i_k, j_k)}^L(\lambda_k),$$

et ceci pour tous les $N > 0$ et tous les couples (i_k, j_k) . Mais on a un carré commutatif (où e^A est la « même » application que e^L , définie sur A)

$$\begin{array}{ccc} A^N & \xrightarrow{f^N} & L^N \\ \downarrow e^A & & \downarrow e^L \\ SL_n(A) & \xrightarrow{SL_n(f)} & SL_n(L) \end{array}$$

de sorte que si P s'annule sur l'image de $SL_n(f)$, alors $P \circ e^L$ s'annule sur l'image de f^N . Comme $P \circ e^L$ est un polynôme, il s'annule sur L^N d'après le corollaire 7.24, donc P s'annule sur l'image de e^L . \square

Le théorème suivant généralise à un anneau quelconque (en ajoutant l'hypothèse de régularité « EML-polynomiale ») le cas spécial linéaire d'un résultat de Borel et Tits [8, Cor 10.4].

Théorème 7.26. *Soient A un anneau commutatif, tel que K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$. Soit M une représentation K -linéaire de dimension finie de $SL_n(A)$. On suppose que M est EML-polynomiale. Alors M est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$$

où les M_i sont des représentations élémentaires non triviales de $SL_n(K)$, et les $\phi_i : A \rightarrow K$ sont des morphismes d'anneaux. (La représentation simple triviale s'obtient comme un produit vide). De plus, les morphismes ϕ_i et les M_i sont uniquement déterminés (à une permutation des indices près). Enfin, si M est simple, elle est absolument simple.

Démonstration. L'existence de la décomposition se déduit du théorème 7.20 par restriction de $\mathcal{M}_n(A)$ à $SL_n(A)$.

Réciproquement, soit $M = M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$. Supposons tout d'abord $\text{car} K = 0$. D'après la propriété de densité du corollaire 7.25, il suffit de montrer que $M_1 \otimes \dots \otimes M_m$ est simple comme représentation de $SL_n(K)^m$. Pour cela, il suffit de montrer que chaque M_k est absolument simple comme représentation de $SL_n(K)$, ce qui suit du fait qu'en caractéristique nulle, les foncteurs élémentaires sont les foncteurs de Schur (proposition B.1), et induisent donc des représentations simples de $SL_n(K)$ (voir par exemple [26, Chap. 6]). Si K est de caractéristique $p > 0$, on se réduit de même en utilisant le corollaire 7.25 à démontrer que si $\mathbb{F} \subset K$ est un corps de cardinal supérieur à p^r , alors tout produit tensoriel $N_0^{[\phi^0]} \otimes \dots \otimes N_{r-1}^{[\phi^r]}$ où les N_i sont des représentations élémentaires de $SL_n(K)$, est encore simple après restriction à $SL_n(\mathbb{F})$. Mais les

représentations élémentaires du groupe algébrique $GL_{n,K}$ sont des représentations de plus haut poids p -restreints (cf proposition B.3), et donnent donc par restriction des représentations simples de $SL_{n,K}$ de plus haut poids p -restreints. L'absolue simplicité du produit tensoriel découle alors du théorème de Steinberg [55, Thm 7.4] [32, Thm 2.11] décrivant la restriction des représentations simples du groupe algébrique $SL_{n,K}$ aux groupes $SL_n(\mathbb{F})$.

Enfin, d'après le corollaire 7.25, si on considère deux produits tensoriels $M = M_1^{[f_1]} \otimes \cdots \otimes M_d^{[f_d]}$ et $N = N_1^{[f_1]} \otimes \cdots \otimes N_d^{[f_d]}$ où les M_i, N_i sont des représentations polynomiales au sens classique du groupe algébrique $GL_{n,K}$, alors la restriction le long de $f = \prod_{1 \leq i \leq d} f_i : A \rightarrow L = \prod_{1 \leq i \leq d} \overline{f_i(A)}$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{K[SL_n(L)]}(M_1 \otimes \cdots \otimes M_d, N_1 \otimes \cdots \otimes N_d) \simeq \mathrm{Hom}_{K[SL_n(A)]}(M, N).$$

Si les M_i et les N_i sont de dimension finie, alors le terme de gauche est lui-même isomorphe au produit tensoriel des $\mathrm{Hom}_{K[SL_n(\overline{f_i(A)})]}(M_i, N_i)$. L'unicité de la décomposition de M , et l'absolue simplicité de M en découlent. \square

Remarque 7.27. Le recours au théorème de Steinberg [55, Thm 7.4] dans la démonstration précédente n'est nécessaire que si des corps finis apparaissent comme quotients de A . Dans le cas contraire, on peut remplacer l'utilisation de ce théorème par l'observation élémentaire que sur un corps infini, les représentations (rationnelles) de $SL_{n,K}$ forment une sous-catégorie pleine stable par sous-quotient de $K[SL_n(K)]\text{-Mod}$.

7.5 Traductions arithmétiques

Proposition 7.28. *Soient A un anneau commutatif et $\varphi : A \rightarrow K$ une fonction polynomiale (au sens d'Eilenberg-Mac Lane) de degré $d > 0$ et multiplicative au sens où $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in A$. Alors il existe une extension finie de corps commutatifs $K \subset L$ de degré au plus $d!$ et des morphismes d'anneaux $f_i : A \rightarrow L$, pour $1 \leq i \leq d$, tels que*

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x).$$

De plus, on dispose du résultat d'unicité suivant : si $g_1, \dots, g_r : A \rightarrow L$ sont des morphismes d'anneaux tels que

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^r g_i(x),$$

on a $r = d$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ telle que $g_i = f_{\sigma(i)}$ pour tout i dans chacun des deux cas suivants :

1. $\mathrm{car}(K) = 0$;
2. $\mathrm{car}(K) = p > 0$ et pour tout indice i , l'ensemble $\{j \mid g_j = g_i\}$ est de cardinal strictement inférieur à p .

Démonstration. Le morphisme φ définit une représentation absolument simple EML-polynomiale de dimension 1 sur K du monoïde multiplicatif $\mathcal{M}_1(A)$, notée

$K^{[\phi]}$. Si K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$, alors d'après le théorème 7.20, $K^{[\phi]}$ se décompose comme un produit tensoriel $M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_n^{[\phi_n]}$, où les M_i sont des représentations élémentaires de degrés d_i et de dimension 1. Donc pour tout $a \in A$ on a $\varphi(a) = \phi_1(a)^{d_1} \dots \phi_n(a)^{d_n}$ avec $d = \sum d_i$, d'où l'existence.

Dans le cas où K n'est pas un corps de décomposition de $\mathbf{P}(A)$, La démonstration de l'existence de la décomposition est la même que dans le théorème 7.20 (pour $n = 1$), en utilisant le théorème 7.8 (et de la proposition 7.4 pour la borne sur le degré — cf. remarque 7.9) au lieu du théorème 7.5 (noter qu'il n'y a pas besoin de filtration car le foncteur considéré prend une valeur de dimension 1).

Pour établir le résultat d'unicité, quitte à plonger K dans sa clôture algébrique, on peut supposer K algébriquement clos. Écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^r g_i^{a_i}$ où les g_i sont des morphismes d'anneaux $A \rightarrow K$ deux à deux distincts et $a_i \in \mathbb{N}^*$ avec $\text{car}(K) = 0$, ou $a_i < \text{car}(K)$ pour tout i . Cela implique que la puissance symétrique S^{a_i} (sur K) est un endofoncteur élémentaire des K -espaces vectoriels, donc que $S^{a_i}(K)$ est une représentation élémentaire de $\mathcal{M}_1(K)$. Notre décomposition se traduit donc par un isomorphisme $K^{[\varphi]} \simeq S^{a_1}(K)^{[g_1]} \otimes \dots \otimes S^{a_r}(K)^{[g_r]}$ et l'unicité découle alors de l'unicité dans le théorème 7.20. \square

Remarque 7.29. En caractéristique $p > 0$, la décomposition n'est pas nécessairement unique si l'on ne fait aucune hypothèse. Toutefois, si l'on impose que le nombre r de facteurs égale le degré d (c'est-à-dire $\sum_i a_i = d$ avec les notations ci-dessus) de la fonction polynomiale φ , alors on a nécessairement unicité, car cela implique $a_i < p$ pour tout i — sinon, comme a_j^p est un morphisme d'anneaux, la fonction φ serait de degré polynomial au plus $(\sum_i a_i) + 1 - p < d$. Ainsi, la propriété d'unicité de la proposition 7.28 implique celle de la proposition 5 de l'introduction.

Remarque 7.30. La proposition 7.23 de Borel-Tits peut être obtenue comme conséquence de l'unicité de la proposition 7.28 de la façon suivante. Soient $f_i : A \rightarrow K$ des morphismes d'anneaux d'images infinies vérifiant les hypothèses (H1) ou (H2) de la situation 7.22. Si $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $\psi_d(a) = (a) = f_1(a)^{d_1} \dots f_n(a)^{d_n}$. Alors les fonctions $\psi_d : A \rightarrow K$ sont des caractères du monoïde multiplicatif A , qui sont deux à deux distincts d'après la proposition 7.28 (si $\text{Car}(K) = p > 0$, il faut écrire $f_i(a)_i^d = \prod_{1 \leq i \leq k} (\phi^k \circ f_i)(a)^{\alpha_k(d_i)}$, où ϕ désigne le morphisme de Frobenius et les $\alpha_k(d_i) \in [0, p-1]$ sont les chiffres de la décomposition p -adique de d_i , pour pouvoir appliquer la proposition). La proposition 7.23 découle alors de l'indépendance linéaire des caractères d'un monoïde [10, Chap V, §6, cor 1].

Dans ce qui suit, on reformule une partie des résultats de la proposition 7.28. Nous introduisons à cet effet quelques notations. Si A et B sont des anneaux, notons $\text{Pol}_\mu(A, B)$ l'ensemble des applications $f : A \rightarrow B$ polynomiales (au sens d'Eilenberg-Mac Lane) qui préservent la multiplication ($f(xy) = f(x)f(y)$) pour tous x, y dans A et l'unité. La multiplication (point par point) fait de $\text{Pol}_\mu(A, B)$ un sous-monoïde du monoïde multiplicatif sous-jacent à l'anneau $\text{Pol}(A, B)$. Si l'on suppose B commutatif, il est commutatif, de sorte que l'inclusion dans $\text{Pol}_\mu(A, B)$ de l'ensemble $\mathbf{Ann}(A, B)$ des morphismes d'anneaux de A dans B s'étend de façon unique en un morphisme de monoïdes commutatifs $\Phi_{A,B} : \mathbb{N}[\mathbf{Ann}(A, B)] \rightarrow \text{Pol}_\mu(A, B)$, où $\mathbb{N}[E]$ désigne le monoïde commutatif libre sur un ensemble E . L'énoncé suivant découle directement de la proposition 7.28.

Corollaire 7.31. *Soit A un anneau commutatif.*

1. *Si K est algébriquement clos, le morphisme de monoïdes $\Phi_{A,K}$ est surjectif.*
2. *Si K est de caractéristique nulle, alors $\Phi_{A,K}$ est injectif.*
3. *Si K est de caractéristique $p > 0$, notons $\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)$ le quotient de l'ensemble $\mathbf{Ann}(A, K)$ par la relation d'équivalence engendrée par $f \sim f^p$, et choisissons une section à la projection de façon à voir $\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{Ann}(A, K)$. Alors la restriction à $\mathbb{N}[\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)]$ de $\Phi_{A,K}$ est injective.*

Notons $G(K)$ le monoïde des endomorphismes de corps de K (qui est un groupe si K est algébriquement clos et de degré de transcendance fini sur son sous-corps premier, ou de degré fini sur son sous-corps premier). Comme précédemment, on dispose d'un morphisme d'anneaux $\chi_K : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \text{End}(K^\times)$, et l'image du sous-semi-anneau $\mathbb{N}[G(K)]$ de $\mathbb{Z}[G(K)]$ est incluse dans l'ensemble des morphismes multiplicatifs $K^\times \rightarrow K^\times$ qui se prolongent en une fonction polynomiale $K \rightarrow K$.

- Corollaire 7.32.**
1. *Si K est algébriquement clos, alors $\chi_K(\mathbb{N}[G(K)])$ est exactement l'ensemble des morphismes multiplicatifs $K^\times \rightarrow K^\times$ qui se prolongent en une fonction polynomiale $K \rightarrow K$.*
 2. *Si K est de caractéristique nulle, alors χ_K est injectif.*
 3. *Si K est de caractéristique $p > 0$, alors le noyau de χ_K est l'idéal (bilatère) de $\mathbb{Z}[G(K)]$ engendré par l'élément central $\phi - p$, où $\phi \in G(K)$ désigne le morphisme de Frobenius.*

8 Applications : propriétés de finitude

8.1 Contexte et résultats principaux

Un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est dit de longueur finie s'il possède une filtration finie dont les sous-quotients sont simples. Sous de fortes hypothèses de noethérianité locale⁵, on montre (très) facilement que les foncteurs de longueur finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ possèdent de bonnes propriétés, en particulier :

- si les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\text{op}}; K)$ sont localement noethériennes, alors le produit tensoriel de deux foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie est un foncteur de longueur finie (cf. proposition 8.37),
- si la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noethérienne, alors tout foncteur de longueur finie est pf_∞ , c'est-à-dire admet une résolution par des projectifs de type fini (cf. lemme 8.11).

Cependant, les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont rarement localement noethériennes. Ainsi, nous montrons dans la proposition 8.17 que si $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noethérienne, alors les ensembles de morphismes de \mathcal{A} sont nécessairement finis. Afin de traiter les cas où les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ ne sont pas localement noethériennes, nous introduisons les hypothèses suivantes.

⁵ Nous renvoyons le lecteur à la section 8.2 pour des rappels détaillés sur les propriétés de finitude classiques des catégories.

Notation 8.1. Soient \mathcal{A} une petite catégorie additive, K un corps commutatif et k un anneau commutatif. Nous considérerons les hypothèses suivantes :

- **LNC**(\mathcal{A}, K) : pour tout idéal K -cotrivial \mathcal{I} de \mathcal{A} , la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ est localement noethérienne.
- **LNA**(\mathcal{A}, k) : la catégorie **Add**($\mathcal{A}; k$) est localement noethérienne.
- **PFA**(\mathcal{A}, K) : tous les foncteurs simples à valeurs de dimension finie de la catégorie **Add**($\mathcal{A}; K$) sont de présentation finie dans **Add**($\mathcal{A}; K$).
- **TFA**(\mathcal{A}, K) : pour tout idéal K -cotrivial \mathcal{I} et tout objet x de \mathcal{A} , le foncteur $\mathcal{I}(x, -)$ est de type fini.

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, il nous arrivera de noter simplement **LNC** au lieu de **LNC**(\mathcal{A}, K), et de même pour **LNA**, **PFA** et **TFA**.

Remarque 8.2. i) Les lettres **LN** (resp. **PF**, **TF**) abrègent la propriété *localement noethérienne* (resp. *de présentation finie*, *de type fini*), et **A** (resp. **C**) indique qu'elle se rapporte aux foncteurs *additifs* (resp. aux idéaux *K -cotriviaux*).

ii) Pour l'hypothèse **TFA**(\mathcal{A}, K), il est équivalent de demander que $\mathcal{I}(x, -)$ soit de type fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ ou dans **Add**($\mathcal{A}; \mathbb{Z}$).

iii) Les trois dernières hypothèses sont reliées par des implications évidentes **LNA**(\mathcal{A}, K) \Rightarrow **PFA**(\mathcal{A}, K) et **LNA**(\mathcal{A}, \mathbb{Z}) \Rightarrow **TFA**(\mathcal{A}, K).

Nous donnons maintenant des exemples où les hypothèses de la notation 8.1 sont vérifiées. Le premier montre que ces hypothèses sont plus faibles que la noethérianité locale de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, K)$, les suivants donnent des cas intéressants où ces hypothèses sont vérifiées sans que $\mathcal{F}(\mathcal{A}, K)$ soit localement noethérienne.

Exemple 8.3. Si la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noethérienne, alors les hypothèses **LNC**(\mathcal{A}, K), **LNA**(\mathcal{A}, \mathbb{Z}), **LNA**(\mathcal{A}, K), **PFA**(\mathcal{A}, K) et **TFA**(\mathcal{A}, K) sont satisfaites. (Ce résultat sera démontré dans la proposition 8.16).

Exemple 8.4. Soient A un anneau, $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, K un corps commutatif, et k un anneau commutatif.

- L'hypothèse **LNC**($\mathbf{P}(A), K$) est vérifiée. En effet, comme les idéaux K -cotriviaux de $\mathbf{P}(A)$ proviennent d'idéaux bilatères à quotient fini de A , il suffit de vérifier que $\mathcal{F}(A, K)$ est localement noethérienne pour tout anneau fini A . Ce profond résultat de finitude a été démontré par Putman-Sam [50, théorème C] (voir aussi Sam-Snowden [51, corollaire 8.3.3]).
- L'hypothèse **LNA**($\mathbf{P}(A), k$) est vérifiée si et seulement si $A^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est un anneau noethérien à gauche. En effet, la proposition 1.7 fournit une équivalence de catégories **Add**($\mathbf{P}(A), k$) \simeq $(A^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} k)$ -**Mod**.

En revanche, la noethérianité locale de $\mathcal{F}(A, K)$ peut tomber en défaut, par exemple si A n'est pas un anneau fini, d'après la proposition 8.17.

Exemple 8.5. Soient K un corps commutatif, A une K -algèbre de dimension finie, et $\mathcal{A} = A\text{-mod}$ la catégorie des modules à gauche finis sur A .

- Les hypothèses **LNC**($A\text{-mod}, K$) et **TFA**($A\text{-mod}, K$) sont vérifiées. En effet, ceci se déduit facilement du fait que le seul idéal K -cotrivial de $A\text{-mod}$ est la catégorie $A\text{-mod}$ toute entière.
- L'hypothèse **PFA**($A\text{-mod}, K$) est vérifiée. Ceci est un résultat d'Auslander [3, corollaire 3.4 ou théorème 3.5].

En revanche, si A a un type de représentation infini, Auslander a montré [3, théorème 3.12 ou 3.13] que l'hypothèse **LNA**($A\text{-mod}, K$) n'est pas vérifiée. Ainsi $\mathcal{F}(A\text{-mod}, K)$ n'est pas localement noethérienne d'après l'exemple 8.3.

Exemple 8.6. Soient K un corps commutatif, et \mathcal{A} une petite catégorie additive qui n'a pas d'autre idéal K -cotrivial que \mathcal{A} (par exemple \mathcal{A} est une catégorie \mathbb{F} -linéaire, où \mathbb{F} est un corps infini, ou le corps premier de K). Alors les propriétés $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$ et $\mathbf{TFA}(\mathcal{A}, K)$ sont vérifiées.

En utilisant nos théorèmes de décomposition tensorielle 3.4 et 7.5, nous parvenons à établir des propriétés des foncteurs de longueur finie (en ajoutant l'hypothèse qu'ils prennent des valeurs de dimension finie) sous les hypothèses de la notation 8.1. Les résultats principaux sont les suivants.

Théorème 8.7. *Si les hypothèses $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$ et $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}^{\text{op}}, K)$ sont vérifiées, alors la classe des foncteurs de longueur finie de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ est stable par produit tensoriel.*

Le théorème 8.7 s'applique en particulier à $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, où A est un anneau arbitraire, d'après l'exemple 8.4.

Le théorème suivant concerne la propriété de présentation finie (une forme faible de la propriété pf_{∞}). La troisième assertion du théorème 8.8 est une réciproque partielle de la deuxième assertion, qui montre que les hypothèses \mathbf{LNC} , \mathbf{PFA} et \mathbf{TFA} ne sont pas loin d'être les hypothèses optimales pour obtenir que tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie sont de présentation finie.

- Théorème 8.8.**
1. *La propriété \mathbf{PFA} est vérifiée si et seulement si tous les foncteurs polynomiaux de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont de présentation finie.*
 2. *Si les propriétés \mathbf{LNC} , \mathbf{PFA} et \mathbf{TFA} sont vérifiées alors tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont de présentation finie.*
 3. *Si $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ pour un anneau A , et si tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont de présentation finie, alors les propriétés \mathbf{LNC} , \mathbf{PFA} et \mathbf{TFA} sont vérifiées.*

Le théorème 8.9 ci-dessous s'applique en particulier à $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$, si A est un anneau commutatif de type fini, ou plus généralement si les anneaux A^{op} et $A^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ sont noethériens à gauche, d'après l'exemple 8.4. Nous ne connaissons pas de démonstration directe de ce résultat, même lorsque $\mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathbb{Z})$.

Théorème 8.9. *Si les hypothèses $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$, $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$ et $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, K)$ sont vérifiées, alors tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont pf_{∞} .*

La suite de la section 8 est organisée de la façon suivante. Dans la section 8.2, nous rappelons des définitions et des énoncés classiques sur les propriétés de finitude des catégories.

Les sections 8.3 et 8.4 sont ensuite consacrées à la discussion de divers liens entre les propriétés \mathbf{LNA} , \mathbf{LNC} , \mathbf{PFA} et \mathbf{TFA} , ainsi que les propriétés de nothérianité locale et de finitude locale de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Nous en profitons pour démontrer (et placer dans une perspective plus large) un résultat qui n'est pas annoncé ci-dessus : la conjecture 6.13 sur les fonctions de dimensions, lorsque A est un p -anneau fini semi-simple.

Enfin, les sections 8.5 et 8.6 sont consacrées à la démonstration des trois théorèmes principaux énoncés ci-dessus. Hormis pour une partie de la démonstration du théorème 8.8, on n'y utilise pas les résultats des sections 8.3 et 8.6. Le lecteur souhaitant accéder directement aux démonstrations des théorèmes 8.7 et 8.9 peut donc sauter la lecture des sections 8.3 et 8.4.

8.2 Rappels sur les propriétés de finitude

Objets noethériens, artiniens et finis. Un objet d'une catégorie de Grothendieck \mathcal{E} est *noethérien* (resp. *artinien*) si toute famille de sous-objets possède un élément maximal (resp. minimal) pour l'inclusion. La classe des objets noethériens (resp. artiniens) de \mathcal{E} est stable par somme directe finie, sous-quotient et extensions. Un objet de \mathcal{E} est noethérien (resp. artinien) si et seulement si tous ses sous-objets (resp. tous ses quotients) sont de type fini (resp. de type cofini). Un objet de \mathcal{E} est de longueur finie (on dira souvent simplement *fini* dans la suite) si et seulement s'il est noethérien et artinien. De manière équivalente, un objet est fini si et seulement s'il possède une filtration finie dont les sous-quotients sont simples.

La catégorie \mathcal{E} est dite *localement noethérienne* (resp. *localement finie*, *localement artinienne*, *localement de type fini*) si elle est engendrée par ses objets noethériens (resp. finis, artiniens, de type fini). Par exemple, si A est un anneau, la catégorie des A -modules à gauche est localement noethérienne (resp. localement finie, ou localement artinienne) si et seulement si A est noethérien (resp. artinien) à gauche.

La propriété pf_n .

Définition 8.10. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un objet X de \mathcal{E} est dit de *n -présentation finie* ou, en abrégé, *pf_n* , si pour tout foncteur Φ d'une petite catégorie filtrante I vers \mathcal{E} , le morphisme canonique

$$\operatorname{colim}_I \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Phi \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, \operatorname{colim}_I \Phi)$$

est bijectif pour $i < n$ et est injectif pour $i = n$ (si $n < \infty$).

Par définition, les objets pf_0 sont les objets de type fini. Pour $n > 0$, il suffit d'exiger que les morphismes canoniques soient bijectifs pour $i < n$, ce qui implique l'injectivité pour $i = n$ par des arguments formels. En particulier, les objets pf_1 sont les objets de présentation finie.

Lorsque la catégorie \mathcal{E} est engendrée par des objets projectifs de type fini (comme c'est le cas pour $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ si \mathcal{C} est une petite catégorie et k est un anneau), un objet X est pf_n si et seulement s'il existe une suite exacte

$$\cdots \rightarrow P_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

où les P_i sont projectifs de type fini pour $i \leq n$. Le lemme suivant est classique.

Lemme 8.11. *Si \mathcal{E} est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, alors tous les objets de type fini (en particulier les objets finis) sont pf_{∞} .*

Le produit tensoriel de deux objets projectifs du type P_A^t est encore du même type, ce dont on déduit que le produit tensoriel de deux foncteurs pf_n de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est encore pf_n .

Changement de base. Les lemmes classiques suivants permettent de ramener l'étude des propriétés de finitude dans des catégories de foncteurs du type $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ ou $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$, au cas où le corps K est assez gros.

Lemme 8.12. *Soient \mathcal{C} une petite catégorie, $K \subset L$ une extension de corps commutatifs et F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$.*

1. *Si F est un foncteur de longueur finie de $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$, alors $F \otimes L$ est de longueur finie dans $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; L)$.*
2. *Si $F \otimes L$ est fini (resp. noethérien, artinien) dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$, alors il en est de même pour F dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Le foncteur F est pf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ si et seulement si $F \otimes L$ est pf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$.*

Démonstration. Notons $\alpha : \mathcal{F}(\mathcal{C}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ le foncteur de post-composition par le foncteur d'extension des scalaires $- \otimes L : K\text{-Mod} \rightarrow L\text{-Mod}$. Comme α est un foncteur exact, il suffit de montrer la première assertion lorsque F est *simple*, auquel cas $\text{End}(F)$ est un corps (non nécessairement commutatif) qui est une K -algèbre de dimension finie, disons d , puisque F est à valeurs de dimension finie. On voit alors, en utilisant des arguments déjà employés dans la section 2, que $\alpha(F)$ est fini, de longueur majorée par d : si T est un quotient de $\alpha(F)$, l'image G de T par le foncteur d'oubli $\beta : \mathcal{F}(\mathcal{C}; L) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est semi-simple isotypique de type F (comme celle de $\alpha(F)$). Il s'ensuit que le foncteur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)(\alpha(F), -) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)(F, -) \circ \beta : \mathcal{F}(\mathcal{C}; L) \rightarrow L\text{-Mod}$ a une restriction à la sous-catégorie pleine des sous-quotients de sommes directes finies de copies de F qui est exacte et fidèle. Comme l'image de F par ce foncteur est $L \otimes \text{End}(F)$, qui est de longueur finie d dans la catégorie des L -espaces vectoriels, on obtient bien le résultat souhaité.

Comme le foncteur α est exact et fidèle, il induit une fonction strictement croissante entre ensembles de sous-objets ordonnés par inclusion, ce qui établit la deuxième assertion. Du fait que α commute également aux colimites, on en déduit aussi que F est de type fini si c'est le cas de $\alpha(F)$.

Par ailleurs, α préserve les foncteurs projectifs de type fini (et est exact), de sorte que, si F est pf_n , alors $\alpha(F)$ est pf_n .

La réciproque se montre par récurrence sur n : le cas $n = 0$ est traité ci-dessus, et le cas général provient de ce que si F est de type fini, on peut trouver une suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ avec P projectif de type fini, de sorte que F est pf_n si et seulement si G est pf_{n-1} . L'application du foncteur exact α à cette suite et l'hypothèse de récurrence permettent de conclure. \square

Remarque 8.13. On notera que la petite catégorie source \mathcal{C} peut être quelconque (ce qui n'est pas le cas si l'on recherche un bon comportement de la propriété pf_n relativement au produit tensoriel, par exemple), et que l'extension de corps $K \subset L$ n'a pas besoin d'être finie. Si l'on suppose de plus l'extension finie, on peut s'affranchir de l'hypothèse de valeurs de dimension finie dans la première assertion.

La démonstration du résultat suivant est laissée au lecteur.

Lemme 8.14. *Soient $K \subset L$ une extension finie de corps commutatifs et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Notons $\Phi : \mathbf{Add}(\mathcal{A}; L) \rightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ le foncteur de restriction des scalaires au but.*

1. Le foncteur Φ préserve les foncteurs de longueur finie et les foncteurs à valeurs de dimension finie.
2. Un foncteur F de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$ est pf_n si et seulement si $\Phi(F)$ est pf_n .

Remarque 8.15. Les lemmes 8.12 et 8.14 sont susceptibles de généralisations dans lesquelles la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ (resp. $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$) est remplacée par une catégorie de Grothendieck K -linéaire \mathcal{E} et $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ (resp. $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$) par \mathcal{E}_L (cf. remarque 2.11). On notera de plus que toute catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est équivalente à une catégorie du type $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ (considérer la catégorie préadditive $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ et prendre pour \mathcal{A} la catégorie additive associée).

8.3 Propriétés de finitude des idéaux K -cotriviaux

Dans cette sous-section, on discute des propriétés **LNC**, **LNA**, **PFA** et **TFA**. On montre d'abord que ces propriétés sont plus faibles que la noéthérianité de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Puis on étudie les relations entre **LNC** et la propriété suivante :

- **LFC**(\mathcal{A}, K) : pour tout idéal K -cotrivial $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ est localement finie.

Nous discutons ensuite de l'optimalité des hypothèses du théorème 8.8. La propriété **LFC** joue un rôle clé dans la discussion de la nécessité de **TFA** pour obtenir des résultats sur les présentations finies dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$.

Conséquences de la noéthérianité locale de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. La proposition suivante montre que si $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noéthérienne, alors **LNC**($\mathcal{A}; K$), **LNA**(\mathcal{A}, \mathbb{Z}), et **LNA**($\mathcal{A}; K$) (et donc **PFA**($\mathcal{A}; K$) et **TFA**($\mathcal{A}; K$)) sont vérifiées.

Proposition 8.16. *Soit \mathcal{A} une petite catégorie additive et \mathcal{E} une catégorie de Grothendieck non nulle. Supposons que $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ est localement noéthérienne (resp. localement finie). Alors les catégories suivantes sont également localement noéthériennes (resp. localement finies) : (i) les catégories $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}/\mathcal{I}, \mathcal{E})$ pour tout idéal $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, (ii) la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, et (iii) la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Pour (i) et (ii), la propriété de noéthérianité locale provient du fait que les catégories en question s'identifient à des sous-catégories pleines de $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Pour (iii), on utilise que la catégorie \mathcal{E} est nécessairement localement noéthérienne (considérer les foncteurs constants), il existe donc un objet noéthérien non nul M dans \mathcal{E} . Le foncteur $M[\mathcal{A}(x, -)]$ est alors de type fini pour tout objet x de \mathcal{A} , donc noéthérien. Cela implique que le foncteur additif $\mathcal{A}(x, -)$ est noéthérien, car $M[-]$ définit un foncteur $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ qui induit des fonctions strictement croissantes entre ensembles de sous-foncteurs ordonnés par inclusion. Le cas localement fini se démontre de la même façon. \square

La proposition suivante montre que la noéthérianité locale de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est un phénomène relativement exceptionnel.

Proposition 8.17. *Si la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noéthérienne, alors tous les ensembles de morphismes de \mathcal{A} sont finis.*

Démonstration. Comme $\mathcal{A}(x, y) \subset \mathcal{A}(x \oplus y, x \oplus y)$, il suffit de montrer que pour tout objet x de \mathcal{A} , l'anneau $\text{End}_{\mathcal{A}}(x)$ est fini.

Si A est un anneau, on note A_μ le monoïde multiplicatif sous-jacent. Pour tout $n \geq 1$, on a un isomorphisme d'anneaux $\text{End}_{\mathcal{A}}(x^{\oplus n}) \simeq \mathcal{M}_n(\text{End}_{\mathcal{A}}(x))$.

Le foncteur $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K) \rightarrow K[\mathcal{M}_n(\text{End}_{\mathcal{A}}(x))_{\mu}]\text{-Mod}$ induit par l'évaluation sur $x^{\oplus n}$ est réflexif d'après la proposition 1.5. La noetherianité locale de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ induit donc la noethérianité locale de $K[\mathcal{M}_n(\text{End}_{\mathcal{A}}(x))_{\mu}]\text{-Mod}$. La finitude de $\text{End}_{\mathcal{A}}(x)$ découle alors du lemme 8.18 ci-dessous. \square

Lemme 8.18. *Soient un anneau A , un anneau k , et un entier $n \geq 2$. Notons $\mathcal{M}_n(A)_{\mu}$ le monoïde multiplicatif des matrices carrées à coefficients dans A . Si l'anneau $k[\mathcal{M}_n(A)_{\mu}]$ est noethérien à gauche, alors A est fini.*

Démonstration. L'anneau $B := \mathcal{M}_n(A)$ est noethérien (à gauche). En effet, on définit une fonction strictement croissante de l'ensemble des idéaux à gauche de B dans l'ensemble des idéaux à gauche de $k[B_{\mu}]$ en envoyant un idéal I de B sur le noyau de la projection $k[B] \rightarrow k[B/I]$.

Comme B est noethérien, le produit de deux éléments de B n'est inversible que si les éléments sont inversibles. On dispose donc d'un morphisme surjectif d'anneaux $k[B_{\mu}] \rightarrow k[GL_n(A)]$ (envoyant les matrices non inversibles sur 0). Ainsi $k[GL_n(A)]$ est noethérien.

Pour montrer que A est fini, on va utiliser la propriété (P) suivante (qui se prouve en utilisant l'extension des scalaires de $k[H]$ à $k[G]$, et le fait que $k[G]$ est un $k[H]$ -module fidèlement plat) :

(P) Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Si $K[G]$ est noethérien, alors $k[H]$ est noethérien. (car $k[G]$ est un)

Comme le groupe additif A_{add} sous-jacent à A se plonge dans $GL_n(A)$, la propriété (P) implique que $K[A_{add}]$ est noethérien, donc que le groupe abélien A_{add} est de type fini. Si le groupe A_{add} n'était pas fini, le morphisme canonique $\mathbb{Z} \rightarrow A$ serait injectif, d'où une injection $GL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_2(A)$, et pour tout sous-groupe H de $GL_n(\mathbb{Z})$, $K[H]$ serait noethérien d'après (P). Mais il est classique que pour $n \geq 2$, $GL_n(\mathbb{Z})$ contient un groupe libre à deux générateurs, donc un groupe libre de rang infini, dont la K -algèbre n'est pas noethérienne. On en conclut que A_{add} doit être fini. \square

Propriétés LNC et LFC. L'implication $\text{LFC}(\mathcal{A}; K) \Rightarrow \text{LNC}(\mathcal{A}; K)$ est évidente. La proposition 8.20 ci-dessous étudie les conditions d'une réciproque.

Lemme 8.19. *On suppose que, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)$ est fini et que $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est nul.*

1. *Si K contient les racines de l'unité, alors on dispose d'un isomorphisme $K[\mathcal{A}(x, -)] \simeq K^{\mathcal{A}(x, -)^{\sharp}}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ pour tout objet x de \mathcal{A} , où $(-)^{\sharp} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ désigne la dualité des groupes abéliens finis.*
2. *Si la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement artinienne, alors le foncteur $K[\mathcal{A}(x, -)]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est de type cofini pour tout objet x de \mathcal{A} .*

Démonstration. Si K contient les racines de l'unité et que V est un groupe abélien fini tel que $V \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$, alors V^{\sharp} est naturellement isomorphe au groupe abélien des morphismes de V vers le groupe multiplicatif K^{\times} . De plus, $K[V]$ est une K -algèbre semi-simple naturellement isomorphe à l'algèbre produit $K^{V^{\sharp}}$. Cela fournit la première assertion.

Commençons par montrer la deuxième assertion lorsque K contient les racines de l'unité : si $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement artinienne, alors le foncteur additif de type fini $\mathcal{A}(x, -)$ est artinien pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Il s'ensuit que son dual

$\mathcal{A}(x, -)^\sharp$ est un foncteur noethérien, donc de type fini, de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}^{op}; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à un quotient d'un foncteur du type $\mathcal{A}(-, t)$. Il s'ensuit que $K^{\mathcal{A}(x, -)^\sharp}$ est isomorphe à un sous-foncteur de $K^{\mathcal{A}(-, t)}$ (dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$), et est donc de type cofini.

Traisons maintenant le cas général : soit $K \subset L$ une extension de corps commutatifs, où L contient les racines de l'unité. Le foncteur $L[\mathcal{A}(x, -)]$ est de type cofini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$, donc à co-support fini. Il s'ensuit qu'il est également à co-support fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$, donc son sous-foncteur $K[\mathcal{A}(x, -)]$ possède la même propriété. Comme un foncteur à co-support fini et à valeurs de dimension finie est de type cofini, cela achève la démonstration. \square

Proposition 8.20. *On suppose que, pour tous objets x et y de \mathcal{A} , le groupe abélien $\mathcal{A}(x, y)$ est fini et que $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est nul. On suppose également que les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$ sont localement noethériennes. Il y a alors équivalence entre les assertions suivantes.*

1. La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement finie.
2. La catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement finie.
3. La catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ est localement artinienne.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$ est démontré dans la proposition 8.16. $2 \Rightarrow 3$ est évident. Il reste à démontrer $3 \Rightarrow 1$. Soit x un objet de \mathcal{A} . Le foncteur de type fini $P_{\mathcal{A}}^x$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est noethérien puisque cette catégorie est localement noethérienne. Le lemme 8.19 montre par ailleurs qu'il est de type cofini. Comme il est à valeurs de dimension finie, cela signifie que son dual $K^{\mathcal{A}(x, -)}$ est de type fini dans la catégorie localement noethérienne $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$, donc noethérien. En reprenant le dual on en déduit que $P_{\mathcal{A}}^x$ est artinien. Par conséquent, les générateurs $P_{\mathcal{A}}^x$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont finis et cette catégorie est localement finie. \square

Optimalité des hypothèses du théorème 8.7. La nécessité de **PFA** pour obtenir des présentations finies des foncteurs finis à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est facile à comprendre, et expliquée dans le lemme suivant.

Lemme 8.21. *Si tous les simples polynomiaux finis à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont de présentation finie, alors **PFA**($\mathcal{A}; K$) est satisfaite.*

Démonstration. Comme la sous-catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est pleine et stable par colimites, un objet de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ de présentation finie dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est automatiquement de présentation finie dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$. \square

Le rôle de **TFA** est plus délicat à comprendre. Le corollaire 8.25 ci-dessous montre que si **LNC** est satisfaite, alors **TFA** est bien nécessaire pour obtenir des présentations finies des foncteurs finis à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Dans les énoncés suivants, on note $\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$.

Lemme 8.22. *Soient k un anneau, $A, B : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ des foncteurs additifs. Le morphisme canonique de k -modules (où le premier Hom est pris dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ et le deuxième dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$)*

$$\varphi_{A, B} : k[\text{Hom}(A, B)] \rightarrow \text{Hom}(k[A], k[B])$$

est injectif. Il est bijectif si A est de type fini.

Démonstration. Si A est un foncteur représentable $\mathcal{A}(t, -)$, le lemme de Yoneda entraîne que $\varphi_{A,B}$ est un isomorphisme. Supposons maintenant que A est une somme directe $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}(t_i, -)$ de tels foncteurs. On a donc $\text{Hom}(A, B) \simeq \prod_{i \in I} B(t_i)$. Soit $x \neq 0$ un élément de $k[\text{Hom}(A, B)] \simeq k[\prod_{i \in I} B(t_i)]$: x peut s'écrire comme $\sum_{n=1}^m \lambda_n [\xi_n]$ où $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n \in k \setminus \{0\}$ et les ξ_n sont des éléments deux à deux distincts de $\prod_{i \in I} B(t_i)$. Il existe donc une partie finie J de I telle que les projections des ξ_n dans $\prod_{i \in J} B(t_i)$ soient deux à deux distinctes. Ainsi, l'image de x dans $k[\text{Hom}(A', B)]$, où $A' := \bigoplus_{i \in J} \mathcal{A}(t_i, -) \simeq \mathcal{A}(\bigoplus_{i \in J} t_i, -)$, par l'application induite par l'inclusion $A' \hookrightarrow A$ est non nulle. Comme $\varphi_{A',B}$ est injective d'après ce qui précède, la naturalité en A de $\varphi_{A,B}$ implique que l'image de x par $\varphi_{A,B}$ est non nulle : $\varphi_{A,B}$ est donc injective.

On en déduit l'injectivité de $\varphi_{A,B}$ pour *tout* foncteur additif A en écrivant A comme quotient d'une somme directe de foncteurs additifs représentables et en utilisant la préservation des monomorphismes par le foncteur $k[-]$.

Par ailleurs, toute suite exacte

$$Z \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{p} X \rightarrow 0 \quad (\text{resp. } 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z)$$

de groupes abéliens induit une suite exacte naturelle de k -modules

$$k[Y \oplus Z] \xrightarrow{\beta} k[Y] \xrightarrow{\alpha} k[X] \rightarrow 0 \quad (\text{resp. } 0 \rightarrow k[X] \rightarrow k[Y] \rightarrow k[Z])$$

où $\beta([(y, z)]) = [y + q(z)] - [y]$ et $\alpha([y]) = [p(y)]$ (l'autre cas est analogue).

Si A est de type fini, on peut trouver une suite exacte de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ du type $Q \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$, où P est représentable. On déduit de ce qui précède et de la naturalité de φ un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k[\text{Hom}(A, B)] & \longrightarrow & k[\text{Hom}(P, B)] & \longrightarrow & k[\text{Hom}(P \oplus Q, B)] \\ & & \varphi_{A,B} \downarrow & & \varphi_{P,B} \downarrow & & \varphi_{P \oplus Q, B} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(k[A], k[B]) & \longrightarrow & \text{Hom}(k[P], k[B]) & \longrightarrow & \text{Hom}(k[P \oplus Q], k[B]). \end{array}$$

D'après le début de la démonstration, $\varphi_{P,B}$ est bijectif et $\varphi_{P \oplus Q, B}$ est injectif, ce qui implique que $\varphi_{A,B}$ est bijectif, comme souhaité. \square

Lemme 8.23. *Soient k un anneau non nul et $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur additif. Si le foncteur $k[A]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est de type fini (resp. de présentation finie), alors le foncteur A est de type fini (resp. de présentation finie) dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Que $k[A]$ de type fini entraîne A de type fini résulte (cf. démonstration de la proposition 8.16) de ce que $k[-]$ induit une fonction strictement croissante entre ensembles ordonnés de sous-foncteurs.

Supposons maintenant $k[A]$ de présentation finie. Comme le foncteur $k[-] : \mathbf{Ab} \rightarrow k\text{-Mod}$ commute aux colimites filtrantes, il en est de même pour le foncteur $\text{Hom}(k[A], -) \circ k[-] : \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. Mais $k[A]$, donc A , est de type fini, d'après ce qu'on a vu plus haut. Par conséquent, le lemme 8.22 montre que $\text{Hom}(k[A], -) \circ k[-] \simeq k[-] \circ \text{Hom}(A, -)$. Comme le foncteur $k[-]$ commute

aux colimites filtrantes et reflète les isomorphismes (car $k \neq 0$), la commutation de cette composée aux colimites filtrantes entraîne la même propriété pour $\text{Hom}(A, -)$, c'est-à-dire que A est de présentation finie. \square

Proposition 8.24. *Soit $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ un idéal K -cotrivial. Supposons que la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ est localement finie. Si tous les foncteurs du type $\pi_{\mathcal{I}}^*(S)$ sont de présentation finie dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$, où S est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$, alors le foncteur $\mathcal{I}(x, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est de type fini pour tout objet x de \mathcal{A} .*

Démonstration. Comme la classe des foncteurs de présentation finie est stable par extensions, l'hypothèse implique que $\pi_{\mathcal{I}}^*(F)$ est un foncteur de présentation finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ pour tout foncteur fini F de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$. Comme cette dernière catégorie est supposée localement finie, pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{A}$, le foncteur de type fini $P_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}^x$ est fini, de sorte que $\pi_{\mathcal{I}}^*(P_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}^x) = K[\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)]$ est de présentation finie dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Le lemme 8.23 montre alors que $\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)$ est de présentation finie dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}(x, -)$ est de type fini. \square

Corollaire 8.25. *Supposons $\text{LNC}(\mathcal{A}; K)$ vérifiée. Si tous les foncteurs simples à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ (ou seulement ceux factorisant par la réduction modulo un idéal K -cotrivial) sont de présentation finie, alors la propriété $\mathbf{TFA}(\mathcal{A}; K)$ est vérifiée.*

8.4 La propriété localement finie dans $\mathcal{F}(A, K)$

D'après les travaux de Putman-Sam-Snowden, les catégories $\mathcal{F}(A, K)$ sont localement noethériennes pour tout anneau fini A , voir [50, théorème C] et [51, corollaire 8.3.3]. En revanche, ces catégories ne sont pas toujours localement finies : il est classique que $\mathcal{F}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$, où \mathbf{F} est un corps fini, est de dimension de Krull infinie (cela découle par exemple des travaux de Powell [49]). L'énoncé suivant donne une condition pour la finitude locale.

Proposition 8.26. *Soit A un anneau fini tel que $A \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$. La catégorie $\mathcal{F}(A, K)$ est localement finie.*

Démonstration. Les catégories $\mathcal{F}(A, K)$ et $\mathcal{F}(A^{op}, K)$ sont localement noethériennes, d'après les travaux de Putman-Sam-Snowden. De plus, $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$ est équivalente (proposition 1.7) à $A^{op}\text{-Mod}$, qui est localement finie puisque A est un anneau fini. La conclusion résulte donc de la proposition 8.20. \square

La proposition 8.26 peut se reformuler de la manière suivante en termes de la propriété \mathbf{LFC} introduite à la section 8.3.

Corollaire 8.27. *La propriété $\mathbf{LFC}(\mathbf{P}(A); K)$ est vérifiée pour tout anneau A .*

Comme conséquence de cet énoncé, nous pouvons produire des exemples de foncteurs simples qui ne sont pas de présentation finie.

Exemple 8.28 (Foncteurs simples qui ne sont pas de présentation finie). Soient k un corps fini de caractéristique différente de celle de K , A un anneau de polynômes en une infinité de variables sur k et I l'idéal d'augmentation de A . Alors I est un idéal K -cotrivial de A , qui n'est pas de type fini. Les corollaires 8.27 et 8.25 montrent donc qu'il existe un foncteur simple à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(A, K)$, qui se factorise par la réduction modulo I , qui n'est pas de présentation finie.

Dans la suite de cette section, nous nous intéressons à deux résultats autour de la proposition 8.26. Ces résultats sont d'un intérêt propre, mais ne sont pas utilisés pour la démonstration des théorèmes 8.7, 8.8 et 8.9. Nous allons tout d'abord pouvoir préciser la conjecture 6.13, et en démontrer un cas particulier (au corollaire 8.32). Nous étudierons ensuite à la proposition 8.33 une variante de la proposition 8.26, valable pour tout anneau A .

Retour sur la conjecture 6.13 sur les fonctions de dimension. Commençons par introduire, dans un cadre général, quelques notations (dont nous servirons également, dans un autre contexte, dans l'appendice A). Si A est un anneau, E un objet de $\mathbf{P}(A)$ et M une représentation de $\text{Aut}_A(E)$ de dimension finie sur K , définissons un foncteur de $\mathcal{F}(A, K)$

$$Q_M := K[\text{Inj}_A(E, -)] \otimes_{K[\text{Aut}_A(E)]} M \quad (12)$$

où $\text{Inj}_A(E, V)$ désigne l'ensemble des monomorphismes A -linéaires scindés $E \rightarrow V$ (on fait de $K[\text{Inj}_A(E, -)]$ un foncteur de $\mathcal{F}(A, K)$ quotient de $P_{\mathbf{P}(A)}^E$ en tuant, dans $P_{\mathbf{P}(A)}^E(V) = K[\text{Hom}_A(E, V)]$, les morphismes $E \rightarrow V$ qui ne sont pas des monomorphismes scindés). Cette construction a été introduite et étudiée (dans le cas où $A = K$ est un corps fini) par Powell [49].

Lemme 8.29. *Soit A un anneau fini tel que $A \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$. Alors pour toute représentation M de dimension finie de $\text{Aut}_A(E)$, le foncteur Q_M est fini.*

Démonstration. Le foncteur Q_M est de type fini, puisque c'est un quotient d'une somme directe finie de copies de $P_{\mathbf{P}(A)}^E$. Il est fini car $\mathcal{F}(A, K)$ est localement fini d'après la proposition 8.26. \square

Le lemme 8.29 nous permet de formuler la conjecture suivante.

Conjecture 8.30. *Sous les hypothèses du lemme 8.29, les classes des foncteurs Q_M , lorsque M parcourt les représentations simples sur K des différents groupes d'automorphismes d'objets de $\mathbf{P}(A)$, engendrent le groupe de Grothendieck des objets finis de $\mathcal{F}(A, K)$.*

Proposition 8.31. *La conjecture 8.30 implique la conjecture 6.13.*

Démonstration. Soit A un p -anneau fini, où p est un nombre premier différent de la caractéristique de K . Il suffit de démontrer que, si M est une représentation de dimension finie sur K de $\text{Aut}_A(E)$, pour un objet E de $\mathbf{P}(A)$, la fonction de dimension d_{Q_M} peut s'exprimer sous la forme $n \mapsto f(p^n)$ où f est une fonction polynomiale. Pour tout objet V de $\mathbf{P}(A)$, le $\text{Aut}_A(E)$ -ensemble à droite $\text{Inj}_A(E, V)$ est libre, de sorte que

$$d_{Q_M}(n) = \frac{|\text{Inj}_A(E, A^n)|}{|\text{Aut}_A(E)|} \cdot \dim_K(M)$$

où $|T|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini T . Il suffit donc de montrer que la fonction $n \mapsto |\text{Inj}_A(E, A^n)|$ est de la forme précédente.

Notons J le radical de Jacobson de A . La réduction modulo J induit, pour tout A -module à gauche V , une surjection $\text{Hom}_A(E, V) \rightarrow \text{Hom}_{A/J}(E/J.V, V/J.V)$ dont chaque fibre est équipotente à $\text{Hom}_A(E, J.V)$; de plus, un élément de

$\text{Hom}_A(E, V)$ appartient à $\text{Inj}_A(E, V)$ si et seulement si son image appartient à $\text{Inj}_{A/J}(E/J.V, V/J.V)$. Il s'en suit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\text{Inj}_A(E, A^n)| = |\text{Inj}_{A/J}(E/J.E, (A/J)^n)| \cdot |\text{Hom}_A(E, J)|^n ;$$

comme $\text{Hom}_A(E, J)$ est un p -groupe abélien fini, il suffit donc de vérifier que la fonction $n \mapsto |\text{Inj}_{A/J}(E/J.E, (A/J)^n)|$ est du type $n \mapsto f(p^n)$ pour une fonction polynomiale f . Mais le théorème de structure des anneaux artiniens montre que A/J est isomorphe à un produit d'anneaux de matrices sur des corps finis de caractéristique p , de sorte que le comptage classique des injections linéaires entre deux espaces vectoriels finis permet de conclure. \square

Corollaire 8.32. *La conjecture 6.13 est vraie pour un p -anneau fini semi-simple A (où $p \neq \text{car}(K)$).*

Démonstration. Si A est un corps, les résultats de Kuhn [42] montrent que les Q_M , où M parcourt $\text{Irr}(K[GL_n(A)]\text{-Mod})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) sont exactement (à isomorphisme près) les foncteurs simples de $\mathcal{F}(A, K)$, de sorte que les conjectures 8.30 et donc 6.13, par la proposition 8.31, sont vérifiées. Par équivalence de Morita, cela s'étend au cas où A est un anneau de matrices sur un corps fini de caractéristique p . Dans le cas général, A est isomorphe à un produit fini de tels anneaux, et les conjectures restent valables grâce aux résultats de la section 2 (le corollaire 2.8 suffit si K contient toutes les racines de l'unité, et un argument de changement de base au but tel que la proposition 2.5 permet de s'y ramener). \square

Finitude locale de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$. La proposition suivante propose une variante de la proposition 8.26 applicable aux anneaux infinis, qui remplace $\mathcal{F}(A; K)$ par $\mathcal{F}^{df}(A, K)$. (Notons que si A est infini, $\mathcal{F}(A; K)$ n'est *jamais* localement finie, d'après la proposition 8.17).

Proposition 8.33. *Soit A un anneau. On suppose le corps K de caractéristique 0. Alors la catégorie abélienne $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ est localement finie.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un foncteur F de type fini de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ est fini. En appliquant le lemme 3.10 et en raisonnant comme au début de la démonstration du théorème 3.4, on voit qu'il existe un idéal K -cotrivial $I \triangleleft A$ tel que F est isomorphe au tiré en arrière d'un bifoncteur B de $\mathcal{F}(A/I \times A, K)$ par le morphisme d'anneaux canonique $A \rightarrow A/I \times A$, où B est tel que, pour tous objets V, M, N de $\mathbf{P}(A)$, la fonction

$$\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_K(B(V, M), B(V, N))$$

est polynomiale. Mais comme K est de caractéristique nulle, toute fonction polynomiale f entre des K -espaces vectoriels se décompose de façon unique en somme presque nulle sur $d \in \mathbb{N}$ de fonctions polynomiales f_d homogènes de degré d au sens où elles sont de degré au plus d et vérifient $f_d(\lambda.x) = \lambda^d f_d(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ (on ne l'exige *pas* pour chaque $\lambda \in K$!). Il s'ensuit que B se décompose en somme directe sur $d \in \mathbb{N}$ de bifoncteurs B_d tels que chaque application

$$\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_K(B_d(V, M), B_d(V, N))$$

soit polynomiale homogène de degré d . En conséquence, via l'équivalence de catégories canonique $\mathcal{F}(A/I \times A, K) \simeq \mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A/I), \mathcal{F}(A, K))$, B_d appartient à la sous-catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A/I), \mathcal{P}ol_d^{df}(A, K))$, où $\mathcal{P}ol_d^{df}(A, K)$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ des foncteurs polynomiaux de degré au plus d . Le foncteur B_d est à support fini dans $\mathcal{F}(A/I \times A, K)$ (car F est à support fini), donc a fortiori dans $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A/I), \mathcal{F}(A, K))$ et dans la sous-catégorie épaisse $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A/I), \mathcal{P}ol_d^{df}(A, K))$. Il en résulte que la post-composition de B_d par le foncteur

$$ev_d : \mathcal{P}ol_d^{df}(A, K) \rightarrow K\text{-Mod} \quad F \mapsto F(A^d)$$

est à support fini dans $\mathcal{F}(A/I, K)$. Comme elle est également à valeurs de dimension finie, elle est de type fini, donc finie par la proposition 8.26. Or le foncteur ev_d est exact et fidèle⁶, il en est donc de même pour la post-composition par ce foncteur, de sorte qu'on en déduit que B_d est fini, ce qui achève la démonstration. \square

Si K est de caractéristique non nulle, l'absence de scindement par le degré des foncteurs polynomiaux rend la situation beaucoup plus délicate, et les foncteurs à valeurs de dimension finie ne sont généralement pas localement finis (voir les travaux de Powell [49]). Nous conjecturons alors les résultats suivants :

Conjecture 8.34. *Supposons que K est de caractéristique $p > 0$. Soit A un anneau.*

1. *La catégorie $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ est localement noethérienne.*
2. *Si A ne possède aucun idéal bilatère I tel que A/I soit un p -anneau fini, alors la catégorie $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ est localement finie.*

Lorsque $A \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$, la conjecture est vérifiée. En effet, il n'y a alors pas de foncteur polynomial non constant dans $\mathcal{F}(A, K)$ (proposition 1.10) de sorte que, raisonnant comme au début de la démonstration de la proposition 8.33, on voit que tout foncteur de type fini de $\mathcal{F}^{df}(A, K)$ se factorise par la réduction modulo un certain idéal K -cotrivial de A , ce qui permet de conclure en appliquant la proposition 8.26.

8.5 Produit tensoriel de foncteurs de longueur finie

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 8.7. On commence par traiter du cas de foncteurs *polynomiaux*.

Proposition 8.35. *Le produit tensoriel de deux foncteurs polynomiaux de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est de longueur finie.*

Démonstration. Supposons d'abord K algébriquement clos. Il suffit de montrer que le produit tensoriel de deux foncteurs simples polynomiaux à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est de longueur finie. Cela découle du théorème 7.5 et de la dernière assertion de la proposition B.2.

Le cas général se ramène au cas précédent par changement de base au but, en appliquant les deux premières assertions du lemme 8.12 à l'extension de

6. Cette propriété classique résulte de ce que $F(A^d) = 0$ entraîne $cr_d(F)(A, \dots, A) = 0$, donc $cr_d(F) = 0$ si F est polynomial de degré au plus d (car $cr_d(F)$ est alors additif par rapport à chaque variable), c'est-à-dire que F est en fait de degré strictement inférieur à d , ce qui permet de conclure par récurrence.

corps $K \subset \bar{K}$, où \bar{K} désigne une clôture algébrique de K (ou en utilisant le théorème 7.8). \square

Remarque 8.36. Il n'est pas vrai qu'un produit tensoriel de foncteurs polynomiaux finis, même *additifs*, reste toujours fini, car ce n'est déjà pas le cas pour un produit tensoriel (sur K) de modules finis (sur une K -algèbre) : prenant $K = \mathbb{Q}$, la catégorie $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(\bar{\mathbb{Q}}); \mathbb{Q})$ est équivalente à la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}$ -espaces vectoriels (proposition 1.7), or le produit tensoriel sur \mathbb{Q} de deux copies de $\bar{\mathbb{Q}}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension infinie, il n'est donc pas de longueur finie.

Proposition 8.37. *Si les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$ sont localement noethériennes, alors le produit tensoriel de deux foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est de longueur finie.*

Démonstration. Comme \mathcal{A} est additive, on a des isomorphismes $P_{\mathcal{A}}^a \otimes P_{\mathcal{A}}^b \simeq P_{\mathcal{A}}^{a \oplus b}$, qui montrent que le produit tensoriel de deux foncteurs de type fini de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ reste de type fini. Comme $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est localement noethérienne, il y a équivalence entre noethérianité et type-finitude dans cette catégorie, de sorte qu'un produit tensoriel de foncteurs noethériens y est également noethérien.

Un foncteur de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$ est artинien si et seulement si son dual, c'est-à-dire sa post-composition par le foncteur de dualité des K -espaces vectoriels, est un foncteur noethérien de $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}^{op}; K)$. Par conséquent, en appliquant ce qui précède à la catégorie additive \mathcal{A}^{op} , on voit que le produit tensoriel de deux foncteurs artинiens est artинien dans $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$.

La conclusion s'obtient du fait que les foncteurs finis sont exactement les foncteurs à la fois artинiens et noethériens. \square

Démonstration du théorème 8.7. Supposons d'abord que le corps K contient toutes les racines de l'unité. Il suffit de démontrer que le produit tensoriel de deux foncteurs simples à valeurs de dimension finie est de longueur finie. Le corollaire 3.7 permet de se ramener à démontrer deux cas distincts : (i) le cas où les deux foncteurs simples sont polynomiaux, et (ii) le cas où les deux foncteurs simples factorisent par un même idéal K -cotrivial \mathcal{I} . Le cas (i) est démontré dans la proposition 8.35. D'autre part, comme $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ s'identifie (via la restriction le long de $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$) à une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ stable par sous-quotient, on voit qu'un foncteur F est fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ si et seulement si $\pi_{\mathcal{I}}^*(F)$ est fini dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Le cas (ii) se déduit donc de la proposition 8.37.

Si K est un corps commutatif quelconque, le théorème 8.7 s'obtient par un argument de changement de base, en utilisant es deux premières assertions du lemme 8.12 comme à la fin de la démonstration de la proposition 8.35. \square

8.6 Présentation finie et généralisations

Dans cette section, on établit les théorèmes 8.8 et 8.9. Ces deux énoncés vont être obtenus comme conséquence des théorèmes 8.44 et 8.45, qui sont des résultats plus généraux sur les objets pf_n .

Lemme 8.38. *Soient $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur additif, k un anneau et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que A est pf_n dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Alors le foncteur $k[A]$ est pf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$.*

Démonstration. Cela découle de ce que, si P_\bullet est une résolution *simpliciale* de A par des foncteurs projectifs de type fini (jusqu'en degré n) de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$, alors $k[P_\bullet]$ est une résolution simpliciale de $k[A]$ par des foncteurs projectifs de type fini (jusqu'en degré n) de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. \square

Il en résulte :

Proposition 8.39. *Soient $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre petites catégories additives, k un anneau et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Supposons que, pour tout objet b de \mathcal{B} , le foncteur $\Phi^* \mathcal{B}(b, -)$ est pf_n dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Alors le foncteur $\Phi^* : \mathcal{F}(\mathcal{B}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ préserve les objets pf_n .*

Proposition 8.40. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, F un foncteur pf_n de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ et E un endofoncteur élémentaire des K -espaces vectoriels. Alors $E \circ F$ est un foncteur pf_n de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$.*

Démonstration. Un argument de résolution simpliciale (cf. démonstration du lemme 8.38) montre qu'il suffit de démontrer que $E \circ P_{\mathcal{A}}^t$ est pf_n pour tout objet t de \mathcal{A} . Un argument de changement de base immédiat permet de se ramener au cas où K est un corps premier. On montre alors par récurrence sur l'entier d que, si X est un endofoncteur polynomial fini de degré d des K -espaces vectoriels, alors $X \circ P_{\mathcal{A}}^t$ est toujours pf_n . C'est évident pour $d \leq 1$; on suppose donc $d > 1$ et l'assertion vérifiée pour des foncteurs de degré $< d$.

Soient M le $K[\mathfrak{S}_d]$ -module fini $\mathrm{cr}_d(X)(K, \dots, K)$ et $R_* \rightarrow M$ une résolution de M par des $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules libres finis. Considérons le complexe $(P_{\mathcal{A}}^t)^{\otimes d} \otimes_{\mathfrak{S}_d} R_*$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$: tous ses termes sont projectifs de type fini, et son homologie est $\mathrm{Tor}_*^{\mathfrak{S}_d}(T^d, M) \circ P_{\mathcal{A}}^t$, elle est donc du type $Y \circ P_{\mathcal{A}}^t$ pour un foncteur polynomial fini Y de degré $< d$ en degré strictement positif, tandis que son homologie en degré nul possède un morphisme vers $F \circ P_{\mathcal{A}}^t$ dont noyau et conoyau sont également du type $Y \circ P_{\mathcal{A}}^t$ avec Y polynomial fini de degré $< d$. L'hypothèse de récurrence et un argument standard de suite spectrale permettent de conclure. \square

La propriété classique suivante, indépendante du reste de l'article, nous sera nécessaire pour déduire de nos théorèmes à la Steinberg une généralisation du théorème 8.8 à la propriété pf_n , pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (théorèmes 8.44 et 8.45 ci-après). Pour la démonstration du seul théorème 8.8, un argument élémentaire de présentation du foncteur de linéarisation suffit.

Proposition 8.41 (Eilenberg-Mac Lane, Dold-Puppe...). *Il existe un complexe de chaînes Q_* de foncteurs $\mathbf{Ab} \rightarrow K\text{-Mod}$ possédant les propriétés suivantes.*

- (1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est un facteur direct du foncteur $V \mapsto K[V^{2^n}]$.*
- (2) *L'homologie de Q_* en degré nul est isomorphe à $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} K$.*
- (3) *Si K est de caractéristique nulle, l'homologie de Q_* est nulle en degrés strictement positifs.*
- (4) *Si K est de caractéristique $p > 0$, pour tout $n > 0$, l'homologie de Q_* en degré n est isomorphe à une somme directe finie de copies des foncteurs $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} K$ et $V \mapsto {}_p V \otimes_{\mathbb{Z}} K$, où ${}_p V := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)$.*

Démonstration. La *construction cubique* de Mac Lane [21, § 12] (on pourra aussi consulter la présentation plus récente de Johnson-McCarthy [35, § 6]) fournit le

complexe désiré. En effet ce complexe, évalué sur V , calcule l'homologie stable à coefficients dans K des espaces d'Eilenberg-Mac Lane associés à V , de sorte que (2) et (3) sont clairs; (1) résulte de la définition explicite du complexe.

Pour la dernière assertion, on peut supposer $K = \mathbb{Z}/p$ et s'appuyer sur la théorie des foncteurs dérivés non additifs de Dold-Puppe [18] : l'homologie de Q_* est isomorphe aux foncteurs dérivés stables à la Dold-Puppe du foncteur $K[-]$, mais aussi, d'après [18, *Satz* 4.16], à celle du foncteur $V \mapsto \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} K \simeq \text{Sym}_K(V \otimes_{\mathbb{Z}} K)$ (où Sym désigne le foncteur puissance symétrique). En chaque degré homologique, le dérivé stable à la Dold-Puppe du foncteur $\text{Sym}_{\mathbb{Z}/p}$ est une somme directe finie de copies de l'identité des \mathbb{Z}/p -espaces vectoriels (cf. [18, § 10] et [35, *Theorem* 4.12]). Comme le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{Z}/p\text{-Mod}$ est additif, exact à droite et a pour unique foncteur dérivé à gauche en degré non nul celui de degré 1, $V \mapsto {}_pV$, on en déduit par une suite exacte de Künneth que l'homologie de Q_* en chaque degré est une extension d'une somme directe finie de copies de $V \mapsto {}_pV := \text{Hom}(\mathbb{Z}/p, V)$ par une somme directe finie de copies de $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$, qui sont *projectifs* dans la catégorie des foncteurs additifs $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{Z}/p\text{-Mod}$, de sorte que l'extension est nécessairement triviale, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 8.42. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ préserve les objets pf_n si l'une des trois conditions suivantes est réalisée.*

1. $n = 1$.
2. La caractéristique de K est nulle.
3. La caractéristique de K est $p > 0$ et, pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ est pf_{n-2} dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout objet x de \mathcal{A} , $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est pf_n dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Si $n = 1$, cela résulte de la suite exacte usuelle :

$$P_{\mathcal{A}}^{a \oplus a} \rightarrow P_{\mathcal{A}}^a \rightarrow \mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K \rightarrow 0.$$

Si K est de caractéristique nulle, alors $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$ est une résolution du foncteur $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ par des projectifs de type fini.

Supposons maintenant $\text{car}(K) = p > 0$ et que ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ est pf_{n-2} dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Cela implique que l'homologie de $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$ est en chaque degré un objet pf_{n-2} de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$. On montre alors par récurrence sur $i \leq n$ que $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est pf_i , pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Pour $i = 0$ il n'y a rien à faire. Si cette propriété vaut à l'ordre $i - 1$, elle implique que l'inclusion $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ préserve les objets pf_{i-1} et montre donc que l'homologie de $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$ est, en chaque degré non nul, un foncteur pf_{i-2} dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$. Comme les termes de ce complexe sont projectifs de type fini, un argument standard de suite spectrale (ou de décalage) permet d'en déduire que son homologie en degré nul, c'est-à-dire $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$, est pf_i , d'où la conclusion. \square

Remarque 8.43. La troisième condition du corollaire 8.42 est en particulier vérifiée dans les cas suivants :

1. lorsque la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ est localement noethérienne,

2. lorsque la catégorie \mathcal{A} possède des conoyaux (car ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ est alors isomorphe au foncteur $\mathcal{A}(a/p, -)$, où a/p désigne le conoyau de l'endomorphisme de multiplication par p dans a).

Les travaux d'Auslander [3] donnent de nombreux exemples de petites catégories abéliennes \mathcal{D} telles que $\mathbf{Add}(\mathcal{D}; \mathbb{Z}/p)$ n'est pas localement noethérienne (par exemple $\mathcal{D} = A\text{-mod}$, où A est une \mathbb{Z}/p -algèbre finie de type de représentation infini), qui entrent donc dans le deuxième cas mais pas dans le premier.

Théorème 8.44. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que tous les objets simples à valeurs de dimension finie de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ sont pf_n . On suppose également que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

1. $n = 1$.
2. La caractéristique de K est nulle.
3. La caractéristique de K est $p > 0$ et, pour tout objet a de \mathcal{A} , le foncteur ${}_p\mathcal{A}(a, -)$ est pf_{n-2} dans la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$.

Alors tous les foncteurs polynomiaux de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont pf_n .

Démonstration. Si $K \subset L$ est une extension finie de corps commutatifs, tous les objets simples à valeurs de dimension finie de $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$ sont pf_n , grâce au lemme 8.14. Par conséquent, le théorème 7.8 et la stabilité de la classe des foncteurs pf_n par extensions et par produits tensoriels montrent qu'il suffit de vérifier la propriété pour les produits tensoriels de foncteurs du type $E \circ A$, où A est un foncteur additif simple à valeurs de dimension finie et E un foncteur élémentaire. La conclusion découle donc de la proposition 8.40 et du corollaire 8.42. \square

Théorème 8.45. *Faisons les mêmes hypothèses qu'au théorème 8.44 et supposons de plus que, pour tout idéal K -cotrivial $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, les deux hypothèses suivantes sont simultanément vérifiées :*

1. les foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ sont pf_n ;
2. pour chaque objet x de \mathcal{A} , le foncteur $\mathcal{I}(x, -)$ est pf_{n-1} dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$.

Alors tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont pf_n .

Démonstration. La deuxième hypothèse revient à dire que tous les foncteurs $\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)$ sont pf_n dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$. Par conséquent, la proposition 8.39 et la première hypothèse montrent que tout foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ qui se factorise par le foncteur canonique $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ est pf_n .

Il en résulte, par le théorème 8.44, que le produit tensoriel dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ entre un foncteur simple polynomial à valeurs de dimension finie et un foncteur simple se factorisant par $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ est pf_n . Par le théorème 3.4 (et les résultats de la section 2), on en déduit que tout foncteur *absolument* simple et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est pf_n . Le cas général se ramène au cas absolument simple par extension des scalaires au but (cf. proposition 2.5 et lemme 8.12). \square

Démonstration des théorèmes 8.8 et 8.9. Le sens direct de la première assertion du théorème 8.8 est le théorème 8.44 pour $n = 1$, la réciproque est le lemme 8.21. La deuxième assertion est le théorème 8.45 pour $n = 1$. La troisième assertion du théorème 8.8 est donnée par les corollaires 8.25 et 8.27.

Le théorème 8.9 découle quant-à-lui du théorème 8.45 pour $n = \infty$. \square

A Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie

A.1 Foncteurs simples prenant une valeur non nulle de dimension finie

On rappelle (corollaire 1.6) que, si F est un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ et t est un objet de \mathcal{A} tel que $F(t)$ soit non nul, alors F est isomorphe au prolongement intermédiaire associé au foncteur d'évaluation en t du $K[\text{End}(t)]$ -module $F(t)$. Cela permet théoriquement de disposer d'un contrôle sur les foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ qui prennent *une* valeur non nulle de dimension finie, à partir des représentations simples de dimension finie sur K des monoïdes multiplicatifs d'endomorphismes des objets de \mathcal{A} .

La propriété suivante, qui constitue un corollaire des résultats de la section 7, montre que, dans de nombreux cas, les foncteurs simples avec *une* valeur non nulle de dimension finie prennent *toutes* leurs valeurs de dimension finie si et seulement s'ils sont polynomiaux.

Proposition A.1. *Soient A un anneau commutatif, $n \in \mathbb{N}$ et M une représentation simple de dimension finie sur K du monoïde $\mathcal{M}_n(A)$. On suppose que A ne possède pas d'autre idéal K -cotrivial que A (par exemple, que A est un corps infini). Notons S_M le foncteur simple de $\mathcal{F}(A, K)$ obtenu en appliquant à M le prolongement intermédiaire associé au foncteur réflexif $\mathcal{F}(A, K) \rightarrow K[\mathcal{M}_n(A)]\text{-Mod}$ d'évaluation en A^n (cf. propositions 1.4 et 1.5).*

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) *Le foncteur S_M est polynomial.*
- (b) *Le foncteur S_M est à valeurs de dimension finie.*
- (c) *La représentation M de $\mathcal{M}_n(A)$ est polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. La proposition 1.4 montre que $S_M(A^n) \simeq M$ comme $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules. Il en résulte en particulier que (a) entraîne (c). La proposition 7.10 permet également d'en déduire que (a) implique (b).

Le lemme 3.13 montre que (c) entraîne (a) (en effet, A^n constitue un support et un co-support de S_M). L'implication (b) \Rightarrow (a) provient quant à elle du corollaire 3.5. \square

Convention : dans toute la suite de cet appendice, k désigne un corps commutatif infini.

Nous nous concentrerons sur la catégorie $\mathcal{F}(k, K)$, où adviennent déjà de nombreux phénomènes intéressants.

Pour $n > 0$, il est facile de construire des représentations simples de $\mathcal{M}_n(k)$ de dimension finie sur K qui ne sont pas polynomiales. Pour $n = 1$, tout morphisme de groupes $k^\times \rightarrow K^\times$ dont le prolongement par zéro fournit une fonction non polynomiale $k \rightarrow K$ en donne un cas.

Exemple A.2. Prenons $k = K = \mathbb{Q}$. Les seuls foncteurs simples non constants de $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ non nuls sur \mathbb{Q} sont les puissances symétriques S^d pour $d \in \mathbb{N}^*$. Ils sont associés aux endomorphismes $x \mapsto x^d$ du groupe \mathbb{Q}^\times . Mais ce groupe possède de nombreux autres endomorphismes, comme $x \mapsto x^d$ pour $d \leq 0$ — et encore bien d'autres puisque ce groupe abélien, isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$, a un anneau d'endomorphismes qui a la puissance du continu !

En fait, on peut souvent décrire de façon assez explicite les foncteurs simples obtenus par ce procédé, à l'aide des foncteurs Q_M construits en (12) (page 60). Tout d'abord, si M est une représentation de dimension finie m sur K du groupe $GL_n(k)$, nous noterons encore M , par abus, la représentation du monoïde $\mathcal{M}_n(k)$ obtenue en prolongeant l'action de $GL_n(k)$ par 0 aux matrices singulières de $\mathcal{M}_n(k)$, et désignerons par $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$ la fonction multiplicative correspondante obtenue en choisissant une K -base de M . Comme dans la proposition A.1, S_M désigne le foncteur de $\mathcal{F}(k, K)$ associé à M par prolongement intermédiaire; c'est naturellement un quotient de Q_M , et S_M est simple si M est une représentation simple de $GL_n(k)$.

Proposition A.3. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, M une représentation simple de dimension finie m sur K de $GL_n(k)$, $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$ le morphisme associé comme ci-dessus et $\varphi_1, \dots, \varphi_m : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow K^m$ les colonnes de φ . Le foncteur Q_M est simple (et donc isomorphe à S_M) si et seulement si la condition suivante est vérifiée : la famille des translatées $(\tau_a(\varphi_i))_{1 \leq i \leq m, a \in \mathcal{M}_n(k)}$ (où $\tau_a(\psi)(x) := \psi(a + x)$) est libre dans le K -espace vectoriel $K^{\mathcal{M}_n(k)}$.*

(Sous les hypothèses de la proposition, l'espace vectoriel $S_M(k^i)$ est donc de dimension finie non nulle si et seulement si $i = n$.)

Démonstration. Explicitement, S_M est l'image du morphisme $Q_M \rightarrow M^{\text{Hom}_k(V, k^n)}$ donné sur l'espace vectoriel V par

$$K[\text{Inj}_k(k^n, V)] \otimes_{K[GL_n(k)]} M \rightarrow M^{\text{Hom}_k(V, k^n)} \quad ([f] \otimes \xi) \mapsto (g \mapsto \varphi(g.f).\xi).$$

Comme $GL_n(k)$ opère librement sur $\text{Inj}_k(k^n, V)$ et que les orbites sont classifiées par les sous-espaces de dimension n de V via l'image d'une telle injection, les éléments non nuls de $Q_M(V)$ sont exactement les images par la projection canonique des éléments $\sum_{i=1}^r [f_i] \otimes \xi_i$ de $K[\text{Inj}_k(k^n, V)] \otimes M$, où $r \in \mathbb{N}^*$, les ξ_i sont des éléments non nuls de M , les $E_i := \text{Im } f_i$ sont des sous-espaces vectoriels deux à deux distincts de V et de dimension n . Comme k est infini, et qu'une réunion finie de sous-espaces stricts d'un k -espace vectoriel en est donc toujours un sous-ensemble strict, il existe une application linéaire $V \rightarrow k^n$ telle que les composées $E_i \hookrightarrow V \rightarrow k^n$ soient des isomorphismes pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Par conséquent, quitte à modifier les f_i (et les ξ_i) par l'action d'éléments de $GL_n(k)$, on peut supposer que V est de la forme $k^n \oplus E$ et que la première composante $k^n \rightarrow k^n$ des f_i est l'identité; nous noterons $g_i : k^n \rightarrow E$ leur deuxième composante. Les g_i sont donc deux à deux distincts. L'annulation de $\sum_{i=1}^r [f_i] \otimes \xi_i$ dans $M^{\text{Hom}_k(V, k^n)}$ signifie que, pour toute application linéaire $g : V = k^n \oplus E \rightarrow k^n$, dont nous noterons $u : k^n \rightarrow k^n$ et $v : E \rightarrow k^n$ les composantes, on a

$$\sum_{i=1}^r \varphi(u + v g_i).\xi_i = 0$$

dans M . Utilisant encore qu'une réunion finie de sous-espaces stricts d'un k -espace vectoriel en est un sous-ensemble strict, on voit que le fait que les g_i soient deux à deux distincts entraîne qu'il existe $v \in \text{Hom}_k(E, k^n)$ tel que les $v g_i$ soient deux à deux distincts.

Autrement dit, la projection $Q_M \rightarrow S_M$ est un isomorphisme si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, des éléments deux à deux distincts a_1, \dots, a_r de $\mathcal{M}_n(k)$ et

des éléments non nuls ξ_1, \dots, ξ_r de $M \simeq K^m$ tels que

$$\sum_{i=1}^r \tau_{a_i}(\varphi) \cdot \xi_i = 0$$

ce qui termine la démonstration. \square

Exemple A.4. La représentation triviale de $GL_n(k)$ dans K correspond à la fonction $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow K$ qui vaut 1 sur $GL_n(k)$ et 0 sur les matrices singulières. Celle-ci vérifie la condition d'indépendance linéaire des translatées requise dans l'énoncé précédent. Supposons en effet qu'on dispose d'une relation $\sum_{i=1}^r \tau_{a_i}(\varphi) = 0$ avec les $a_i \in \mathcal{M}_n(k)$ deux à deux distincts. Comme k est infini, on peut trouver $x \in \mathcal{M}_n(k)$ telle que toutes les matrices $a_i + x$ soient inversibles, d'où $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$. On peut également trouver, pour tout indice j , $x \in \mathcal{M}_n(k)$ telle que $a_i + x$ soit inversible si et seulement si $i \neq j$, ce qui fournit la relation $\sum_{i \neq j} \lambda_i = 0$ et donc $\lambda_j = 0$ pour tout j . Le foncteur simple qu'on en déduit est donné sur les objets par $V \mapsto K[\mathcal{G}r_n(V)]$, où $\mathcal{G}r_n(V)$ désigne l'ensemble des sous-espaces de dimension n de V ; ce foncteur envoie une flèche $f : V \rightarrow W$ sur l'application linéaire envoyant $[E]$, pour $E \in \mathcal{G}r_n(V)$, sur $[f(E)]$ si $f(E)$ est de dimension n , et sur 0 sinon.

Si k est un corps *fini*, le foncteur $K[\mathcal{G}r_n]$ est encore simple si K est de caractéristique différente de celle de k , mais la démonstration précédente ne s'applique plus. La simplicité se déduit des résultats de Kuhn [42] (reposant sur le travail de Kovács [36] sur les représentations des monoïdes multiplicatifs $\mathcal{M}_n(k)$) déjà invoqués au corollaire 8.32. En revanche, si k est fini et de même caractéristique que K , alors $K[\mathcal{G}r_n]$ n'est *jamais simple* si $n > 0$ — on peut même montrer qu'il est de dimension de Krull au moins n (et conjecturalement, de dimension de Krull exactement n — cf. [49, 14]).

Exemple A.5. Prenons $K = k$ et considérons l'endomorphisme $x \mapsto x^d$ de k^\times , où d est un entier strictement négatif. Son prolongement par 0 fournit un morphisme multiplicatif $f : k \rightarrow k$ qui vérifie la condition d'indépendance linéaire de la proposition A.3 par un argument de fractions rationnelles immédiat (on rappelle que k est un corps commutatif *infini*).

Pour $k = K = \mathbb{R}$, des arguments d'analyse élémentaires montrent que le prolongement par 0 à \mathbb{R} de tout endomorphisme *continu* f du groupe topologique \mathbb{R}^\times vérifie également cette condition, hormis si ce prolongement est polynomial, c'est-à-dire si f est de la forme $x \mapsto x^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$.

Remarque A.6. Nous ignorons s'il existe un morphisme de monoïdes $\mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$ fournissant une représentation simple *non EML-polynomiale* de $\mathcal{M}_n(k)$ et ne vérifiant pas la condition de la proposition A.3, même en nous restreignant à $n = m = 1$.

Remarque A.7. Le cas $n = m = 1$ est sans doute le plus important dans les constructions précédentes, en vertu des résultats de Steinberg [56] et de Bass-Milnor-Serre [4] (déjà mentionnés dans la section 3) dont notre théorème 3.4 s'inspire. Ainsi, pour $k = \mathbb{Q}$, toute représentation complexe de dimension finie de $SL_n(\mathbb{Q})$ est polynomiale, où $n \in \mathbb{N}$ est arbitraire, ce qui entraîne que toute représentation simple de dimension finie de $GL_n(\mathbb{Q})$ s'exprime comme le produit tensoriel entre une représentation polynomiale et une représentation se factorisant par le déterminant, donc provenant d'un morphisme de groupes

$\mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$: ce sont ces morphismes qui font apparaître une « partie non polynomiale », donnant lieu à des foncteurs dont les valeurs ne sont pas de dimension finie.

A.2 Foncteurs simples qui ne prennent aucune valeur de dimension finie non nulle

Il paraît très difficile de donner des résultats généraux sur les foncteurs simples dont aucune valeur non nulle n'est de dimension finie. Il est toutefois facile de voir qu'il en existe souvent beaucoup, dès lors que les ensembles de morphismes dans la catégorie source ne sont pas trop petits. L'énoncé suivant en donne une illustration.

Proposition A.8. *Soient A un anneau commutatif ou noethérien de caractéristique nulle et M un A -module projectif de type fini dont A^2 est facteur direct. Il existe un foncteur simple S de $\mathcal{F}(A, K)$ tel que, pour tout objet V de $\mathbf{P}(A)$:*

1. $\dim_K S(V) = \infty$ si M est facteur direct de V ;
2. $S(V) = 0$ sinon.

Démonstration. Comme A^2 est facteur direct de M , le groupe $G := \text{Aut}_{\mathbf{P}(A)}(M)$ contient $GL_2(A)$, qui contient $GL_2(\mathbb{Z})$ (car A est de caractéristique 0), et donc un groupe libre non abélien H . D'après Formanek [22, théorème 5], il existe un $K[H]$ -module simple et fidèle, donc de dimension infinie sur K , ce qui entraîne l'existence d'un $K[G]$ -module T simple et de dimension infinie. Comme A est commutatif ou noethérien, on peut prolonger l'action de G par 0 aux endomorphismes non inversibles de M (obtenant une représentation simple de dimension infinie de ce monoïde) et obtenir par prolongement intermédiaire un foncteur simple S de $\mathcal{F}(A, K)$ tel que $S(M) \simeq T$ comme $K[\text{End}_{\mathbf{P}(A)}(M)]$ -modules. Si M est facteur direct de V , alors $S(M)$ est facteur direct de $S(V)$, qui est donc de dimension infinie. Si M n'est pas facteur direct de V , le fait que les endomorphismes non inversibles de M opèrent par 0 sur T et l'expression du prolongement intermédiaire entraînent que $S(M)$ est nul. \square

Remarque A.9. La conclusion de la proposition vaut également dans d'autres cas, par exemple si A est la clôture algébrique d'un corps fini et que K est de caractéristique nulle (voir la remarque A.11 ci-dessous).

A.3 Notion intrinsèque : endofinitude (centrale)

Afin de montrer que la notion, pour un foncteur simple, de prendre des valeurs de dimension finie, est un cas particulier naturel d'une notion intrinsèque beaucoup plus générale dans les catégories abéliennes, nous commençons par rappeler la notion classique suivante d'*endofinitude*, qui remonte à Crawley-Boevey [12] (pour les catégories de modules au moins). Par souci de simplicité, nous nous contentons de l'introduire pour des objets simples.

Proposition et définition A.10. *Supposons que la catégorie \mathcal{E} est localement de type fini. Soit S un objet simple de \mathcal{E} . Notons $\text{Add}(S)$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{E} des objets semi-simples isotypiques de type S . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{Add}(S)$ est stable par produits ;

2. tout produit de copies de S est semi-simple ;
3. si X est un objet de type fini de \mathcal{E} , alors $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$;
4. les objets X tels que $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$ engendrent la catégorie abélienne \mathcal{E} .

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que S est **endofini**.

(Des généralisations et variantes beaucoup plus élaborées de cet énoncé se trouvent dans Krause [37, § 6.3 et 6.4].)

Démonstration. 1 \Rightarrow 2 : évident.

2 \Rightarrow 3 : soit X un objet de type fini de \mathcal{E} , considérons la flèche

$$X \rightarrow S^{\mathcal{E}(X, S)} \xrightarrow{\simeq} S^{\oplus E}$$

composée du morphisme tautologique et d'un isomorphisme donné, pour un ensemble E convenable, par l'hypothèse 2 (le socle d'un produit de copies de S est une toujours une somme directe de copies de S , donc 2 implique qu'un produit de copies de S est une somme directe de copies de S). Le foncteur $\mathcal{E}(X, -)$ commute aux sommes directes, puisque X est de type fini, donc il existe un nombre fini de morphismes $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow S$ tels que notre morphisme se factorise en la composée de $X \rightarrow S^n$ de composantes les f_i et une inclusion $S^n \rightarrow S^{\oplus E}$. Il s'ensuit que tout élément de $\mathcal{E}(X, S)$ est combinaison linéaire à coefficients dans le corps $\text{End}_{\mathcal{E}}(S)$ des f_i , comme souhaité.

3 \Rightarrow 4 : évident puisque \mathcal{E} est localement finie.

4 \Rightarrow 1 : il suffit de montrer qu'un sous-objet X d'un produit S^E de copies de S tel que $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$ appartient à $\text{Add}(S)$, puisque tout objet de cette catégorie est sous-objet d'un produit de copies de S et que cette sous-catégorie est stable par sous-objet. Soit (f_1, \dots, f_n) une base de $\mathcal{E}(X, S)$ sur $\text{End}(S)$: tout morphisme $X \rightarrow S$, donc tout morphisme $X \rightarrow S^E$, se factorise par le morphisme $X \rightarrow S^{\oplus n}$ qu'elle détermine. Par conséquent, X est isomorphe à un sous-objet de $S^{\oplus n}$, d'où le résultat. \square

Remarque A.11. Plusieurs caractérisations partielles des groupes dont toutes les représentations irréductibles sont endofinies sont disponibles dans la littérature, comme l'article de Snider [53]. On déduit par exemple du théorème 1 (et du lemme 1) de celui-ci que, si k est une clôture algébrique de \mathbb{Z}/p (où p est un nombre premier) et $n \geq 2$ un entier, alors $GL_n(k)$ possède une représentation irréductible non endofinie sur K , au moins si ce corps est de caractéristique nulle (en effet, le sous-groupe de $GL_2(k)$ constitué des matrices triangulaires supérieures, au sens large, est résoluble mais ne possède aucun sous-groupe abélien d'indice fini).

Soit A est anneau. On rappelle (cf. remarque 2.11) que les objets de \mathcal{E} munis d'une action de A forment une catégorie de Grothendieck \mathcal{E}_A . Elle est localement de type fini si c'est le cas de \mathcal{E} . Si M est un objet de \mathcal{E} , l'action canonique de son anneau d'endomorphismes fait de M un objet noté \widetilde{M} de $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$. Comme le foncteur d'oubli $\mathcal{E}_{\text{End}(M)} \rightarrow \mathcal{E}$ est exact et fidèle, si M est simple, il en est de même pour \widetilde{M} .

Proposition et définition A.12. *Supposons \mathcal{E} localement de type fini. Soit M un objet simple de \mathcal{E} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. l'objet simple \widetilde{M} de $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$ est endofini;
2. $\dim_{Z(\text{End}(M))} \mathcal{E}(X, M) < \infty$ pour tout objet X de type fini de \mathcal{E} , où $Z(\text{End}(M))$ désigne le centre du corps $\text{End}(M)$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que M est un objet centralement endofini de \mathcal{E} . Un tel objet est endofini.

Démonstration. Cela provient des deux observations suivantes : (i) l'anneau des endomorphismes de \widetilde{M} s'identifie à $Z(\text{End}(M))$ et (ii) l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{E}_{\text{End}(M)} \rightarrow \mathcal{E}$ envoie les objets de type fini de \mathcal{E} sur une classe de générateurs de type fini de $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$. \square

Plusieurs auteurs, dont Wehrfritz [63], se sont intéressés (avec une terminologie légèrement différente) aux groupes dont toutes les représentations irréductibles sont centralement endofinies.

Soient \mathcal{C} une petite catégorie et R un anneau. La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$ est une catégorie de Grothendieck localement de type fini. Si A est un anneau, on dispose d'une équivalence de catégories canonique $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)_A \simeq \mathcal{F}(\mathcal{C}; R \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ (cf. remarque 2.11).

Proposition A.13. *Soient \mathcal{C} une petite catégorie, R un anneau et F un foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$.*

1. *Le foncteur F est endofini si et seulement si $F(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\text{End}(F)$ pour tout objet x de \mathcal{C} , i.e. si F est à valeurs de dimension finie vu comme foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$. Si R est commutatif, F est nécessairement simple vu comme foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$.*
2. *Supposons R commutatif. Alors F est centralement endofini si et seulement si $F(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif $Z(\text{End}(F))$ pour tout objet x de \mathcal{C} , i.e. si F est à valeurs de dimension finie vu comme foncteur (simple) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; Z(\text{End}(F)))$.*

Ainsi, la notion d'endofinitude centrale est exactement celle qui permet, dans les catégories du type $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$ avec R commutatif, de ramener l'étude des foncteurs simples à celle de foncteurs simples à valeurs de dimension finie sur un corps commutatif.

Démonstration. La première assertion résulte de la considération des générateurs projectifs de type fini $P_{\mathcal{C}}^x$ de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$.

Si R est commutatif, alors $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$ est R -linéaire, et $\text{End}(F)$ est une R -algèbre ; \widetilde{F} appartient à l'image essentielle du foncteur $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F)) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; R \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End}(F))$ de post-composition par la restriction le long du morphisme d'anneaux $R \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End}(F) \rightarrow \text{End}(F)$ donné par la structure de R -algèbre de $\text{End}(F)$. Ce foncteur est pleinement fidèle et cette image essentielle est stable par sous-objet. Ainsi, si F est simple, \widetilde{F} peut être vu comme un objet simple de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$ de corps d'endomorphismes $Z(\text{End}(F))$. Le reste de la proposition en découle. \square

A.4 Produits infinis de foncteurs simples

Si S est un objet simple non endofini d'une catégorie de Grothendieck localement de type fini, un produit infini de copies de S peut avoir de nombreux sous-quotients simples non isomorphes à S . En voici une illustration élémentaire dans une catégorie de foncteurs dont les simples à valeurs de dimension finie sont décrits par nos résultats.

Exemple A.14. Soit $n \geq 2$ un entier. Toute droite $D \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$ du k -espace vectoriel k^n (on rappelle que k est un corps commutatif infini) fournit un morphisme $K[\mathrm{Hom}_k(k^n, -)] \rightarrow K[\mathrm{Hom}_k(D, -)]$ dans $\mathcal{F}(k, K)$, qui induit un morphisme $K[(\mathrm{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times] \rightarrow K[\mathbb{P}]$; de plus, le morphisme

$$K[(\mathrm{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times] \rightarrow K[\mathbb{P}^{\mathbb{P}^{n-1}(k)}]$$

qu'on en déduit est *injectif*. En effet, un élément non nul de $K[(\mathrm{Hom}_k(k^n, V) \setminus \{0\})/k^\times]$ (où V est un k -espace vectoriel de dimension finie sur k) s'écrit $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i [f_i]$, où $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \in K^\times$ et les $f_i : k^n \rightarrow V$ sont des applications linéaires deux à deux non proportionnelles. Par conséquent, pour $i \neq j$, l'ensemble $\{D \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \mid f_i(D) \neq f_j(D)\}$ est un *ouvert dense* de $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour la topologie de Zariski, de même que $\{D \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \mid f_i(D) \neq 0\}$. Par conséquent, on peut trouver une droite D de k^n telle que les $f_i(D)$ soient des droites deux à deux distinctes de V , ce qui montre que l'image de x par notre application est non nulle.

Le foncteur $K[(\mathrm{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times]$ se surjecte sur $K[\mathcal{G}r_n]$, qui est donc un sous-quotient d'un produit de copies de $K[\mathbb{P}] = K[\mathcal{G}r_1]$. Or on a vu dans l'exemple A.4 que tous les foncteurs $K[\mathcal{G}r_n]$ sont simples, et ils sont manifestement deux à deux non isomorphes.

D'autres exemples contre-intuitifs par rapport à la situation qui advient quand on ne se considère que des foncteurs à valeurs de dimension finie proviennent de la considération de produits infinis de foncteurs simples *deux à deux non isomorphes*. Remarquons déjà que, si $(S_i)_{i \in E}$ une famille infinie d'objets simples deux à deux non isomorphes de la catégorie de Grothendieck \mathcal{E} , l'objet $\prod_{i \in E} S_i$ de \mathcal{E} est semi-simple si et seulement s'il coïncide avec son sous-objet $\bigoplus_{i \in E} S_i$ (qui constitue toujours son socle). Pour $\mathcal{E} = \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$, où \mathcal{C} est une petite catégorie, si l'on suppose que les S_i sont à valeurs de dimension finie, cette condition équivaut à dire que $\bigoplus_{i \in E} S_i$ (ou $\prod_{i \in E} S_i$) est à valeurs de dimension finie.

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, l'objet $\prod_{i \in E} S_i$ peut avoir de nombreux sous-quotients simples qui ne sont isomorphes à aucun des S_i . En voici une illustration.

Exemple A.15. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, le foncteur projectif $P^\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[-]$ a pour plus grand quotient polynomial de degré au plus n la somme directe sur les entiers $0 \leq i \leq n$ des foncteurs S^i (i -ème puissance symétrique sur \mathbb{Q}). Chaque foncteur S^i est simple. De plus, le morphisme $P^\mathbb{Q} \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} S^i$ qu'on en déduit est injectif, car l'idéal d'augmentation de l'algèbre sur un corps de caractéristique nulle d'un groupe abélien sans torsion est résiduellement nilpotent. Mais $P^\mathbb{Q}$ a plein de quotients simples non polynomiaux : on dispose d'une injection de l'ensemble

(infini non dénombrable) des endomorphismes de \mathbb{Q}^\times dont l'extension par 0 à \mathbb{Q} n'est pas une fonction polynomiale dans l'ensemble de ces quotients — cf. exemple A.2.

Remarque A.16. La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ est engendrée par les foncteurs projectifs $P^{\mathbb{Q}^n} \simeq (P^{\mathbb{Q}})^{\otimes n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, qui s'injectent grâce à l'exemple précédent dans un produit dénombrable de foncteurs polynomiaux finis et à valeurs de dimension finie. On en déduit en particulier que la plus petite sous-catégorie *bilocalisante* (c'est-à-dire épaisse et stable par limites) de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ engendrée par $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, ou par les foncteurs polynomiaux, est $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$. A contrario, la sous-catégorie localisante de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ engendrée par $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, ou par les foncteurs polynomiaux, est exactement la catégorie des foncteurs *analytiques* (c'est-à-dire des colimites de foncteurs polynomiaux) de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, qui est classiquement équivalente à $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]\text{-Mod}$.

Dans d'autres catégories de foncteurs, comme $\mathcal{F}(k, K)$, avec $\text{car}(k) \neq \text{car}(K)$, il n'y a aucun foncteur polynomial non constant, de sorte que le corollaire 3.5 montre que la sous-catégorie bilocalisante de $\mathcal{F}(k, K)$ engendrée par $\mathcal{F}^{df}(k, K)$ est réduite, comme la sous-catégorie bilocalisante engendrée par les foncteurs polynomiaux, aux foncteurs constants.

B Foncteurs élémentaires

Cet appendice regroupe les principales propriétés des foncteurs élémentaires. Certaines sont établies dans la section 5, nous les complétons avec des énoncés basiques provenant de la théorie des représentations des groupes algébriques et des foncteurs associés (les foncteurs *strictement polynomiaux* [25]).

Soit K un corps commutatif quelconque. On rappelle qu'un foncteur $E : \mathbf{P}(K) \rightarrow K\text{-Mod}$ est dit *élémentaire* s'il existe un entier $d \geq 0$ et un $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple M tel que E soit isomorphe à l'image de la transformation naturelle N donnée par la norme :

$$(T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \xrightarrow{N} (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d},$$

où un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ agit via la transformation naturelle donnée par les endomorphismes K -linéaires de $T^d(V) \otimes M = V^{\otimes d} \otimes M$ qui envoient les éléments $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes m$ sur les éléments $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes \sigma m$. Nous avons démontré les faits suivants au lemme 5.9.

1. Les foncteurs élémentaires sont absolument simples.
2. Pour tout $d \geq 0$, les classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires de degré d sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules simples.
3. Les foncteurs élémentaires sont les quotients simples des T^d , $d \geq 0$.

Nous donnons maintenant une description plus précise des foncteurs élémentaires. Si K est de caractéristique nulle la norme est un isomorphisme, si bien que les foncteurs élémentaires de degré d sont isomorphes aux $(T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d}$ pour les $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules simples M . Ces derniers peuvent se décrire en termes de symétriseurs de Young [26, Chap. 4.2] et les foncteurs élémentaires sont donc les foncteurs de Schur classiques [26, Chap. 6.1]. On a ainsi le résultat suivant.

Proposition B.1. *On suppose que K est de caractéristique nulle.*

1. *Les foncteurs de Schur \mathbb{S}_λ , pour λ une partition, forment un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires.*
2. *Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une partition avec $\lambda_n \neq 0$, alors $\mathbb{S}_\lambda(V) \neq 0$ si et seulement si $\dim V \geq n$.*
3. *Le produit tensoriel de deux foncteurs de Schur se décompose comme une somme directe finie de foncteurs de Schur.*

Supposons maintenant que K est de caractéristique $p > 0$. Nous relierons les foncteurs élémentaires aux foncteurs de Schur d'Akin, Buchsbaum et Weyman [1]. Pour toute partition λ de d , soit $\tilde{\lambda}$ la partition conjuguée et soit \mathbb{S}_λ l'image de la transformation naturelle

$$\Lambda^{\tilde{\lambda}} \hookrightarrow T^d \xrightarrow{\cong} T^d \twoheadrightarrow S^\lambda$$

où l'isomorphisme est la permutation des facteurs de T^d qui envoie $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ sur $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}$, où $\sigma(i)$ est le i -ème terme dans la lecture en colonne du tableau de forme λ rempli en ligne par les nombres entiers $1, 2, \dots, d$. (Le foncteur de Schur \mathbb{S}_λ est noté $L_{\tilde{\lambda}}$ dans [1]). On rappelle qu'une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est p -restreinte si $\lambda_n < p$ et $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ pour $1 \leq i < n$.

Proposition B.2. *On suppose que K est de caractéristique $p > 0$.*

1. *Pour toute partition p -restreinte λ , le foncteur \mathbb{S}_λ a un socle simple \mathbb{L}_λ . Les foncteurs \mathbb{L}_λ indexés par les partitions p -restreintes λ forment une famille de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires.*
2. *Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une partition p -restreinte avec $\lambda_n \neq 0$, alors $\mathbb{L}_\lambda(V) \neq 0$ si et seulement si $\dim V \geq n$.*
3. *Le produit tensoriel de deux foncteurs élémentaires est de longueur finie dans $\mathcal{F}(K, K)$.*

Démonstration. L'énoncé de la proposition est bien connu dans la catégorie \mathcal{P}_K des foncteurs strictement polynomiaux de Friedlander et Suslin [25]. Plus précisément, la catégorie \mathcal{P}_K peut être décrite en termes d'algèbres de Schur [25, Thm 3.2], c'est donc une catégorie de plus haut poids. Les foncteurs de Schur \mathbb{S}_λ sont les objets costandard [59, Remark 6.1], ils ont un socle simple \mathbb{L}_λ , et les \mathbb{L}_λ forment un ensemble de représentants des simples de \mathcal{P}_K . Un théorème classique de Clausen et James [11, 34] (voir aussi [60, App. B] pour une démonstration fonctorielle) implique que les foncteurs \mathbb{L}_λ apparaissant comme sous-foncteurs des T^d , ou dualement comme quotients des T^d , sont ceux indexés par les partitions p -restreintes. Ceci prouve le premier point. Pour le deuxième point, on a $\mathbb{L}_\lambda(V) \subset \mathbb{S}_\lambda(V) = 0$ si $\dim V < n$ car $\mathbb{S}_\lambda(V)$ est un quotient de $\Lambda^{\tilde{\lambda}}(V)$ qui est alors nul. Réciproquement, \mathbb{L}_λ est un sous-foncteur de S^λ , donc par dualité un quotient de Γ^λ . Si $\dim V \geq n$, on a donc $\mathbb{L}_\lambda(V) \neq 0$ d'après [25, Cor. 2.12]. Enfin le troisième point est une conséquence de [25, Thm 3.2].

Nous montrons que l'énoncé dans \mathcal{P}_K implique la proposition B.2. Il y a un foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathcal{P}_K \rightarrow \mathcal{F}(K, K)$ fidèle et exact. Si K est infini, ce foncteur d'oubli identifie \mathcal{P}_K avec la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(K, K)$ dont les objets sont les foncteurs qu'on peut écrire comme des sous-quotients de sommes

directes finies de foncteurs T^d , en particulier l'image de \mathcal{U} est stable par sous-quotients et \mathcal{U} préserve les simples. L'énoncé de la proposition B.2 découle donc formellement de l'énoncé dans \mathcal{P}_K . Supposons K *fini*. Un argument classique de polynomialité (cf [38, Thm 4.14] ou [47]) montre que \mathcal{U} préserve les foncteurs de longueur finie, d'où le troisième point. La définition des foncteurs élémentaires montre qu'ils admettent une structure de foncteur strictement polynomial et qu'ils sont des sous-foncteurs strictement polynomiaux de T^d . Pour démontrer les deux premiers points, il reste donc à vérifier que les \mathbb{S}_λ indexés par des partitions p -restreintes ont un socle simple dans $\mathcal{F}(K, K)$. Comme T^d est injectif dans \mathcal{P}_K , le monomorphisme $\mathbb{L}_\lambda \hookrightarrow T^d$ s'étend en un monomorphisme $\mathbb{S}_\lambda \hookrightarrow T^d$. Le socle de \mathbb{S}_λ dans $\mathcal{F}(K, K)$ n'est donc constitué que de sous-foncteurs simples de T^d . Pour démontrer que le socle est simple, il suffit donc de montrer que pour toute partition p -restreinte μ de l'entier d , les espaces vectoriels $\mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda)$ et $\mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda)$ ont même dimension. Pour cela on considère le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et dont les injections verticales sont induites par le foncteur d'oubli :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, T^d) & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, T^d/\mathbb{S}_\lambda) \\
& & \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, T^d) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, T^d/\mathbb{S}_\lambda)
\end{array}$$

Le morphisme (2) est un isomorphisme car sa source et son but ont même dimension, égale à la dimension de $cr_d(L_\mu)(K, \dots, K)$, par la proposition 1.11. Le morphisme (1) est donc un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. \square

Revenons au cas général où K est un corps commutatif quelconque. Si K est de caractéristique nulle, on note $\mathbb{L}_\lambda := \mathbb{S}_\lambda$, pour toute partition λ . Si K est de caractéristique $p > 0$, les \mathbb{L}_λ sont définis, seulement pour λ p -restreinte, dans la proposition B.2. Dans tous les cas, la formule définissant les foncteurs \mathbb{L}_λ (ou bien celle définissant les foncteurs élémentaires) montre que les $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ sont des représentations polynomiales du *groupe algébrique* $GL_{n,K}$ (nous utilisons une notation légèrement différente pour distinguer le groupe algébrique de son groupe des K -points, le groupe abstrait $GL_n(K)$). Les représentations polynomiales (ou plus généralement rationnelles) du groupe algébrique $GL_{n,K}$ sont classifiées par la théorie des plus hauts poids (voir par exemple [32, Sections 2.1 et 2.2]). Plus précisément, toute représentation rationnelle V de $GL_{n,K}$ admet une base (v_1, \dots, v_N) , telle que l'action du groupe $D_{n,K}$ des matrices diagonales sur un élément de cette base est donnée par une formule du type $\text{diag}(x_1, \dots, x_n) \cdot v_i = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} v_i$, pour un certain uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$. Les uplets λ apparaissant ainsi ne dépendent pas du choix de la base, ce sont les *poids* de la représentation V . Si V est simple, il existe un poids λ de V maximal pour l'ordre lexicographique, qu'on appelle le *plus haut poids* de V , et qui caractérise V à isomorphisme près.

Proposition B.3. *Soit λ une partition telle que $\mathbb{L}_\lambda(K^n) \neq 0$. Alors c'est une représentation simple du groupe algébrique $GL_{n,K}$, de plus haut poids λ .*

Démonstration. La base de l'espace vectoriel $\mathbb{S}_\lambda(K^n)$ [1, Thm II.2.16] montre que c'est une représentation de plus haut poids λ . Comme $\mathbb{L}_\lambda \subset S^\lambda$ ou par dualité L_λ est un quotient de Γ^λ , [25, Cor 2.12] montre que λ est un poids de

$\mathbb{L}_\lambda(K^n)$. Ainsi $L_\lambda(K^n)$ est une représentation de plus haut poids λ . Il reste à montrer qu'elle est simple. Comme \mathbb{L}_λ est auto-dual (cf. par exemple [60, section 2.2]), la représentation $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ est auto-duale (pour la dualité utilisant la transposition de $GL_{n,K}$). Pour montrer que $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ est simple, il suffit donc de montrer que $\text{End}_{GL_{n,K}}(\mathbb{L}_\lambda(K^n))$ est de dimension (inférieure ou égale à) 1 sur K . Mais cet espace vectoriel est un sous-espace vectoriel $\text{Hom}_{GL_{n,K}}(\Gamma^\lambda(K^n), \mathbb{L}_\lambda(K^n))$. D'après [58, Lm 6.6] ce dernier est isomorphe à $\mathcal{P}_K(\Gamma^\lambda, \mathbb{L}_\lambda)$, qui est de dimension 1 sur K d'après [25, Cor. 2.12]. La simplicité de $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ en découle. \square

Proposition B.4. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une partition telle que $\lambda_n \neq 0$. Si $\mu = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$ on a des isomorphismes de $K[\mathcal{M}_n(K)]$ -modules*

$$\mathbb{L}_\lambda(K^n) \simeq \mathbb{L}_\mu(K^n) \otimes \det, \quad \mathbb{L}_\lambda(K^n) \simeq \mathbb{L}_\lambda(K^n) \otimes \delta,$$

où δ désigne le $K[\mathcal{M}_n(K)]$ -module K sur lequel les matrices inversibles (resp. singulières) opèrent par l'identité (resp. par 0).

Démonstration. Les représentations $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ et $\mathbb{L}_\mu(K^n) \otimes \det$ sont deux représentations simples de même plus haut poids de $GL_{n,K}$, elles sont donc isomorphes. Par Zariski-densité, elle sont isomorphes comme représentations du monoïde algébrique \mathcal{M}_n , donc comme représentations du monoïde des K -points $\mathcal{M}_n(K)$, ce qui donne le premier isomorphisme. Pour le deuxième isomorphisme, il suffit de remarquer que $\det \otimes \delta = \det$. \square

Références

- [1] Kaan Akin, David A. Buchsbaum, and Jerzy Weyman. Schur functors and Schur complexes. *Adv. in Math.*, 44(3) :207–278, 1982.
- [2] Maurice Auslander. Functors and morphisms determined by objects. pages 1–244. *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, Vol. 37, 1978.
- [3] Maurice Auslander. A functorial approach to representation theory. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 944 of *Lecture Notes in Math.*, pages 105–179. Springer, Berlin-New York, 1982.
- [4] H. Bass, J. Milnor, and J.-P. Serre. Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33) :59–137, 1967.
- [5] Stanislaw Betley. Stable K -theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.
- [6] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [7] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.
- [8] Armand Borel and Jacques Tits. Homomorphismes “abstrait” de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97 :499–571, 1973.

- [9] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples*. Springer, Berlin, 2012. Second revised edition of the 1958 edition.
- [10] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Algèbre. Chapitres 4 à 7. [Algebra. Chapters 4–7].
- [11] Michael Clausen. Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups. II. *Adv. in Math.*, 38(2) :152–177, 1980.
- [12] William Crawley-Boevey. Modules of finite length over their endomorphism rings. In *Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990)*, volume 168 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–184. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [13] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [14] Aurélien Djament. Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (111) :xxii+213 pp. (2008), 2007.
- [15] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [16] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. *Fund. Math.*, 233(3) :197–256, 2016.
- [17] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [18] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.
- [19] Samuel Eilenberg. Abstract description of some basic functors. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 24 :231–234 (1961), 1960.
- [20] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [21] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Homology theories for multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :294–330, 1951.
- [22] Edward Formanek. Group rings of free products are primitive. *J. Algebra*, 26 :508–511, 1973.
- [23] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [24] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [25] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [26] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

- [27] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [28] Pierre Gabriel. Représentations indécomposables. pages 143–169. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 431, 1975.
- [29] James A. Green. *Polynomial representations of GL_n* , volume 830 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [30] Nate Harman. Effective and infinite-rank superrigidity in the context of representation stability. arXiv :1902.05603.
- [31] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [32] James E. Humphreys. *Modular representations of finite groups of Lie type*, volume 326 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [33] G. D. James. *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1978.
- [34] Gordon D. James. The decomposition of tensors over fields of prime characteristic. *Math. Z.*, 172(2) :161–178, 1980.
- [35] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane’s Q -construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4) :1555–1593, 1998.
- [36] L. G. Kovács. Semigroup algebras of the full matrix semigroup over a finite field. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4) :911–919, 1992.
- [37] Henning Krause. The spectrum of a module category. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 149(707) :x+125, 2001.
- [38] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I. *Amer. J. Math.*, 116(2) :327–360, 1994.
- [39] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.
- [40] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.
- [41] Nicholas J. Kuhn. A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras. *K-Theory*, 26(1) :15–49, 2002.
- [42] Nicholas J. Kuhn. Generic representation theory of finite fields in non-describing characteristic. *Adv. Math.*, 272 :598–610, 2015.
- [43] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [44] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Math.*, 8 :1–161, 1972.
- [45] Rohit Nagpal. VI-modules in non-describing characteristic, part I. arXiv :1709.07591.
- [46] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

- [47] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.
- [48] Teimuraz Pirashvili and Friedhelm Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 82(1) :81–98, 1992.
- [49] Geoffrey M. L. Powell. The structure of indecomposable injectives in generic representation theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10) :4167–4193, 1998.
- [50] Andrew Putman and Steven V. Sam. Representation stability and finite linear groups. *Duke Math. J.*, 166(13) :2521–2598, 2017.
- [51] Steven V. Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(1) :159–203, 2017.
- [52] Jean-Pierre Serre. Le problème des groupes de congruence pour SL_2 . *Ann. of Math. (2)*, 92 :489–527, 1970.
- [53] Robert L. Snider. Group rings with finite endomorphism dimension. *Arch. Math. (Basel)*, 41(3) :219–225, 1983.
- [54] Benjamin Steinberg. *Representation theory of finite monoids*. Universitext. Springer, Cham, 2016.
- [55] Robert Steinberg. Representations of algebraic groups. *Nagoya Math. J.*, 22 :33–56, 1963.
- [56] Robert Steinberg. Some consequences of the elementary relations in SL_n . In *Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982)*, volume 45 of *Contemp. Math.*, pages 335–350. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [57] Ross Street. Ideals, radicals, and structure of additive categories. *Appl. Categ. Structures*, 3(2) :139–149, 1995.
- [58] Antoine Touzé. Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(1) :53–99, 2012.
- [59] Antoine Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9) :1642–1673, 2013.
- [60] Antoine Touzé. Connectedness of cup products for polynomial representations of GL_n and applications. *Ann. K-Theory*, 3(2) :287–329, 2018.
- [61] N. A. Vavilov and A. V. Stepanov. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 394(Voprosy Teorii Predstavlenii Algebr i Grupp. 22) :33–139, 295, 2011.
- [62] Charles E. Watts. Intrinsic characterizations of some additive functors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :5–8, 1960.
- [63] B. A. F. Wehrfritz. Group rings with finite central endomorphism dimension. *Glasgow Math. J.*, 24(2) :169–176, 1983.