



**HAL**  
open science

# Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive

Aurélien Djament, Antoine Touzé, Christine Vespa

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Antoine Touzé, Christine Vespa. Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive. 2019. hal-02103934v1

**HAL Id: hal-02103934**

**<https://hal.science/hal-02103934v1>**

Preprint submitted on 19 Apr 2019 (v1), last revised 30 Apr 2021 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive

Aurélien Djament\*, Antoine Touzé† et Christine Vespa‡

19 avril 2019

## Résumé

Nous donnons une description des foncteurs simples à valeurs de dimension finie allant d'une petite catégorie additive dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps. Ce résultat est l'analogie de théorèmes de décomposition tensorielle de Steinberg en théorie des représentations des groupes. Nos résultats reposent sur la notion de foncteur polynomial introduite par Eilenberg et Mac Lane. Nous en donnons des applications aux représentations des groupes linéaires ou aux propriétés de finitude des catégories de foncteurs.

## Abstract

We give a description of simple functors taking finitely generated values, from a small additive category to the category of vector spaces over a field. This result is analogous to Steinberg's tensor product theorems in group representation theory. Our results rest on the notion of polynomial functor introduced by Eilenberg and Mac Lane. We give applications to representations of general linear groups or to finiteness properties of functor categories.

*Mots-clefs* : représentations et foncteurs polynomiaux, représentations et foncteurs simples, catégories additives, décomposition tensorielle, présentation finie.

*Classification MSC 2010* : 18A25, 18E05, 18E15, 20C99, 20G05, 20J99.

## Introduction

Les théorèmes de décomposition tensorielle sont une pierre angulaire de la théorie des représentations des groupes. Un premier exemple est donné par un théorème de Steinberg [55] sur les représentations de dimension finie de  $SL_n(\mathbb{Z})$ .

---

\*CNRS, laboratoire Paul Painlevé (UMR8524), Université de Lille, Cité scientifique, bât. M2, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE, aurelien.djament@univ-lille.fr.

†Université de Lille, laboratoire Paul Painlevé (UMR8524), Cité scientifique, bât. M2, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE, antoine.touze@univ-lille.fr.

‡Université de Strasbourg, IRMA (UMR7501), 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France, vespa@math.unistra.fr.

Plus précisément, une représentation complexe  $M$  de dimension finie est simple si et seulement si elle se décompose sous la forme :

$$M \simeq S \otimes T \tag{1}$$

où  $S$  est une représentation simple factorisant par un groupe fini  $SL_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  et  $T$  est une représentation polynomiale simple. Une telle décomposition tensorielle est alors unique. Des cas particuliers de cette décomposition tensorielle avaient été obtenus préalablement par Bass-Milnor-Serre [4] et Serre [51]; les théorèmes de superrigidité de Margulis [42, chap. VII, §5] donnent des résultats nettement plus généraux en ce sens, à l'aide de méthodes beaucoup plus complexes. Un deuxième exemple, également dû à Steinberg [54], concerne les groupes finis de type Lie sur un corps fini de cardinal  $q = p^r$  (avec  $p$  premier), par exemple  $G(\mathbb{F}_q) = GL_n(\mathbb{F}_q)$ . Plus précisément, si  $k$  est un corps algébriquement clos contenant  $\mathbb{F}_q$ , une représentation  $k$ -linéaire  $M$  de  $G(\mathbb{F}_q)$  est simple si et seulement si elle se décompose comme un produit tensoriel

$$M \simeq M_0^{[0]} \otimes M_1^{[1]} \otimes \dots \otimes M_{r-1}^{[r-1]} \tag{2}$$

où les  $M_i$  sont des représentations simples  $p$ -restreintes de  $G(k)$ , et l'exposant  $[i]$  indique que l'on a restreint la représentation  $M_i$  le long du morphisme de groupes  $G(\mathbb{F}_q) \rightarrow G(k)$  induit par le plongement  $\mathbb{F}_q \rightarrow k$ ,  $x \mapsto x^{p^i}$ . Dans le cas de  $GL_n(\mathbb{F}_q)$  les représentations  $M_i$  sont uniquement déterminées à des puissances du déterminant près.

Les catégories de foncteurs de source une petite catégorie  $\mathcal{C}$  constituent une généralisation naturelle des représentations des groupes. En théorie des représentations, elles apparaissent par exemple dans l'étude des représentations indécomposables des algèbres de dimension finie, comme dans les travaux de Auslander [2, 3] ou de Gabriel [27], ou dans l'étude des propriétés de pureté pour les modules sur des anneaux généraux [36]. En topologie algébrique, elles sont notamment reliées aux modules sur l'algèbre de Steenrod [30, 37, 38, 39], à l'homologie de Hochschild topologique (THH) [47] ou à l'homologie stable des groupes [22, 5, 16, 14].

Dans cet article, nous obtenons des analogues des décompositions de Steinberg (1) et (2) pour les catégories de foncteurs d'une petite catégorie additive  $\mathcal{A}$  vers les espaces vectoriels sur un corps  $k$ . Nous noterons dans la suite  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  cette catégorie de foncteurs et  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$  sa sous-catégorie pleine des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie. Dans un souci de simplicité, bien que certains de nos résultats soient valables dans un cadre plus général, ***on suppose dans toute cette introduction que  $k$  est un corps commutatif algébriquement clos et  $\mathcal{A}$  une petite catégorie additive.*** On renvoie le lecteur aux énoncés dans le corps du texte pour connaître les hypothèses plus faibles sur  $k$  pour lesquelles nos résultats restent valides.

Nos résultats reposent sur la notion de *foncteur polynomial* introduite initialement par Eilenberg et Mac Lane [19] à des fins de topologie algébrique. Les foncteurs polynomiaux constituent une généralisation naturelle des foncteurs additifs (les foncteurs polynomiaux de degré 1 sont, à un terme constant près, les foncteurs additifs). Nous renvoyons le lecteur à la section 1.4 pour plus de détails sur cette notion classique qui intervient par exemple dans les différentes parties de la topologie algébrique mentionnées ci-dessus.

La notion d'*idéal* d'une petite catégorie additive  $\mathcal{A}$  (voir début de la section 3.1) étend celle pour un anneau  $A$ . Nous introduisons la notion d'*idéal  $k$ -cotrivial* de  $\mathcal{A}$  dans la définition 3.1. C'est un analogue catégorique de la condition qu'un anneau quotient  $A/I$  est fini et de caractéristique inversible dans  $k$ . Notre premier théorème principal est l'analogie fonctoriel de la décomposition tensorielle (1). Dans ce théorème (et dans tout l'article) le produit tensoriel de deux foncteurs est défini terme à terme :  $(F \otimes G)(a) = F(a) \otimes G(a)$ .

**Théorème 1** (Corollaire 3.7). *Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$  est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq S \otimes T,$$

où  $S$  est un foncteur simple factorisant par une catégorie quotient  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  pour un idéal  $k$ -cotrivial  $\mathcal{I}$ , et  $T$  est un foncteur simple polynomial de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$ . De plus,  $S$  et  $T$  sont *uniquement déterminés, à isomorphisme près*.

Un cas intéressant d'application du théorème 1 est celui où la catégorie  $\mathcal{A}$  ne possède pas d'idéal  $k$ -cotrivial autre que  $\mathcal{A}$  elle-même. Par exemple, lorsque  $\mathcal{A}$  est  $\mathbb{F}_p$ -linéaire et que  $k$  contient  $\mathbb{F}_p$ . Dans ce cas, le théorème 1 affirme que tous les simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}, k)$  sont polynomiaux.

Bien que la décomposition tensorielle (1) et le théorème 1 soient formellement analogues, les relations entre ces deux énoncés ne sont pas complètement comprises (voir les remarques 3.8 et A.7 pour plus de détails).

Nous passons maintenant à un analogue fonctoriel de la décomposition tensorielle (2). Il est bien connu que les représentations polynomiales simples des groupes  $GL_n(k)$  s'obtiennent par des constructions fonctorielles, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme  $F(k^n)$  où  $F$  est un endofoncteur simple des  $k$ -espaces vectoriels. Nous appelons *foncteurs élémentaires* les foncteurs  $F$  qui sont des quotients simples des puissances tensorielles. Nous renvoyons à la section 5 et l'appendice B pour des descriptions plus explicites, et mentionnons seulement que si  $k$  est de caractéristique nulle, les foncteurs élémentaires sont les foncteurs de Schur classiques [25, Chap. 6.1]. Si  $E$  est un foncteur élémentaire et  $\pi$  est un foncteur additif de  $\mathcal{A}$  vers la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels, on note  $\pi^*E$  la restriction de  $E$  le long de  $\pi$  (c'est-à-dire le foncteur composé  $E \circ \pi$ ). Notre deuxième théorème principal est le suivant.

**Théorème 2** (Théorème 7.5). *Un foncteur polynomial  $F$  de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$  est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n$$

où  $n \in \mathbb{N}$ , les  $\pi_i$  sont des foncteurs additifs simples deux à deux non isomorphes de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; k)$  et les  $E_i$  sont des foncteurs élémentaires non constants. De plus, l'entier  $n$  et les classes d'isomorphisme des  $E_i$  et des  $\pi_i$  sont *uniques, à permutation des facteurs près*.

Les théorèmes principaux 1 et 2 sont valables pour toutes les petites catégories additives  $\mathcal{A}$ , sans restriction. Nous illustrons nos théorèmes dans trois cas particuliers. Dans la suite,  $\mathbf{P}(A)$  désigne la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini sur un anneau  $A$ .

1. Si  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathbb{Z})$ , le foncteur  $\pi : \mathbf{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow k\text{-Mod}$  d'extension des scalaires est le seul foncteur additif simple. Les foncteurs simples à valeurs de dimensions finies sont donc les produits tensoriels  $S \otimes \pi^*E$ , où  $S$  est un foncteur simple factorisant par une catégorie  $\mathbf{P}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  avec  $m$  inversible dans  $k$ , et  $E$  est un foncteur élémentaire.
2. Si  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathbb{F}_q)$  et si  $k$  est un surcorps de  $\mathbb{F}_q$ , on obtient une nouvelle démonstration d'un théorème de Kuhn [38, Thm 5.23] et [40, Thm 7.11].
3. Pour  $\mathcal{A} = \Lambda\text{-mod}$ , la catégorie des modules de type fini sur une  $k$ -algèbre  $\Lambda$  de dimension finie, nos théorèmes montrent que les foncteurs simples à valeurs de dimensions finies sont les produits tensoriels de la forme  $\pi_1^*E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^*E_n$  où les  $E_i$  sont des foncteurs élémentaires et les  $\pi_i : \Lambda\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$  sont des foncteurs additifs simples. Ces foncteurs additifs simples ont été décrits par Auslander [3], nos théorèmes permettent donc d'étendre cette description aux foncteurs non additifs.

Nous décrivons maintenant quelques applications des théorèmes 1 et 2.

### Décomposition pour $GL_n(A)$ ( $A$ anneau fini)

Lorsque  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ , l'évaluation sur  $A^n$  d'un foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  donne naturellement une représentation de  $GL_n(A)$ . Dans le cas d'un  $p$ -anneau fini  $A$  (c'est-à-dire un anneau fini de caractéristique une puissance de  $p$ ), où  $p$  est la caractéristique de  $k$ , nous pouvons obtenir à partir des théorèmes 1 et 2 un théorème de décomposition tensorielle pour les groupes finis  $GL_n(A)$ . (L'énoncé du théorème 6.11 est légèrement plus précis sur la propriété d'unicité.)

**Théorème 3** (Théorème 6.11). *Si  $k$  est de caractéristique  $p \neq 0$ , soit  $A$  un  $p$ -anneau fini, et  $\{B_1, \dots, B_m\}$  un ensemble de représentants des classes de  $(k, A)$ -bimodules simples. Soit  $M$  une représentation  $k$ -linéaire de  $GL_n(A)$ . Alors  $M$  est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[B_1]} \otimes \cdots \otimes M_m^{[B_m]}$$

où les  $M_i$  sont des représentations polynomiales simples  $p$ -restreintes des groupes  $GL_{nd_i}(k)$  pour  $d_i = \dim B_i$ , et l'exposant  $^{[B_i]}$  signifie que l'on restreint la représentation  $M_i$  le long du morphisme de groupes  $GL_n(A) \rightarrow GL_{nd_i}(k)$  induit par le morphisme  $A \rightarrow M_{d_i}(k)$  correspondant au bimodule  $B_i$ . De plus, les  $M_i$  sont uniquement déterminés à tensorisation par une puissance du déterminant près.

Lorsque  $A = \mathbb{F}_q$ , le théorème 3 redonne la décomposition tensorielle de Steinberg (2). Les méthodes de notre article donnent donc une nouvelle démonstration de ce résultat fondamental. Dans le cas où  $A$  n'est pas un corps, le théorème 3 est nouveau, et semble suggérer que certains résultats bien connus pour les groupes classiques sur un corps pourraient se généraliser au cas d'un anneau fini. Il serait intéressant de savoir s'il existe des variantes du théorème 3 pour les groupes orthogonaux et symplectiques.

### Décomposition pour $GL_n(A)$ ( $A$ anneau commutatif) et représentations EML-polynomiales

On suppose maintenant que  $A$  est un anneau commutatif, éventuellement infini. Pour obtenir des décompositions tensorielles d'une représentation  $V$  de

$GL_n(A)$ , nous avons besoin d'hypothèses de régularité sur le morphisme d'action  $\rho : GL_n(A) \rightarrow \text{End}_k(V)$ . Nous introduisons la notion de *représentation polynomiale à la Eilenberg Mac Lane*, ou plus brièvement *représentation EML-polynomiale*, dans la définition 7.13. C'est une version affaiblie de la notion classique de représentation polynomiale [28], dans laquelle on demande que  $\rho$  soit une fonction polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane (par opposition à un polynôme). Les deux propriétés suivantes donnent un grand nombre d'exemples.

1. Toute représentation polynomiale de  $GL_n(k)$  au sens classique [28] est EML-polynomiale.
2. La notion de représentation polynomiale est stable par produit tensoriel, par sous-quotients et par restriction le long des morphismes d'anneaux.

Si  $M$  est une représentation de  $GL_n(k)$ , on note  $M^{[\phi]}$  la représentation de  $GL_n(A)$  obtenue par restriction de  $M$  le long du morphisme  $GL_n(A) \rightarrow GL_n(k)$  induit par un morphisme d'anneaux  $\phi$ . Nous obtenons (cf. théorème 7.19) le théorème de décomposition suivant.

**Théorème 4.** *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $M$  une représentation  $k$ -linéaire de dimension finie de  $GL_n(A)$ . On suppose que  $M$  est EML-polynomiale. Alors  $M$  est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$$

où les  $M_i$  sont des représentations polynomiales (au sens classique) simples de  $GL_n(k)$ , qui sont  $p$ -restreintes si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , et les  $\phi_i : A \rightarrow k$  sont des morphismes d'anneaux.

De plus, les morphismes  $\phi_i$  apparaissant dans une telle décomposition sont uniquement déterminés, et chaque  $M_i$  est uniquement déterminée si  $\phi_i$  est d'image infinie, ou uniquement déterminée à une puissance du déterminant près si  $\phi_i$  est d'image finie.

Tout comme pour le théorème 3, il serait intéressant de savoir s'il existe des versions du théorème 4 pour d'autres groupes classiques.

Notons que même lorsque  $A = k$ , il existe des représentations  $k$ -linéaires simples de  $GL_n(A)$  qui ne sont pas EML-polynomiales (par exemple une représentation fournie par un caractère  $\psi : GL_n(A) \rightarrow k^\times$  bien choisi, voir l'exemple A.2). Pour de telles représentations, on ne peut pas espérer de décomposition de Steinberg comme dans le théorème 4, l'hypothèse de régularité sur les représentations est donc nécessaire.

## Représentations EML-polynomiales et arithmétique

La notion de polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane utilisée dans la définition 7.13 ne fait intervenir que la structure *additive* des anneaux de matrices  $\mathcal{M}_n(A)$ , tandis que la notion de représentation concerne leur structure *multiplicative*. La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane constitue donc une forme de propriété *arithmétique*.

Le résultat arithmétique suivant fournit une illustration de cette observation. Nous l'obtenons comme conséquence du théorème 4 ou plutôt de l'analogie pour les représentations des monoïdes multiplicatifs  $\mathcal{M}_n(A)$ . Nous n'en connaissons pas de démonstration directe.

**Proposition 5** (Corollaire 7.20). *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $K$  un corps commutatif. Soit  $\varphi : A \rightarrow K$  une fonction EML-polynomiale de degré  $d > 0$ , et multiplicative au sens où  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$  pour tous  $x, y \in A$ . Alors il existe une extension finie de corps commutatifs  $K \subset L$  de degré au plus  $d!$  et des morphismes d'anneaux  $f_i : A \rightarrow L$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , tels que*

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x).$$

*De plus, les morphismes  $f_i$  sont uniques à l'ordre des facteurs près (et à agrandissement du corps  $L$  près).*

(On obtient en fait un résultat d'unicité un peu plus précis — voir la remarque 7.21.)

### Application aux propriétés de finitude des catégories de foncteurs

Nous appliquons également nos théorèmes principaux à l'étude de propriétés de finitude des catégories  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  (dans cette partie, le corps  $k$  peut être quelconque). Ces propriétés sont banales lorsque cette catégorie est localement noethérienne, mais elles valent sous des hypothèses bien plus faibles et faciles à vérifier. On rappelle qu'une catégorie abélienne est *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens, et qu'un objet est dit *fini* s'il est à la fois noethérien et artinien.

**Théorème 6** (Théorème 8.6). *Si, pour tout idéal  $k$ -cotrivial  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$ , les catégories  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; k)$  et  $\mathcal{F}((\mathcal{A}/\mathcal{I})^{op}; k)$  sont localement noethériennes, alors la classe des foncteurs finis de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$  est stable par produit tensoriel.*

L'hypothèse de ce théorème est en particulier vérifiée pour  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ , où  $A$  est un anneau quelconque (y compris non noethérien).

Notre section 8 s'intéresse ensuite à la propriété de présentation finie pour les foncteurs finis, et plus généralement à la propriété  $pf_\infty$  d'existence d'une résolution projective dont tous les termes sont de type fini. Rappelons qu'un lemme classique et important de L. Schwartz (cf. par exemple [23, proposition 10.1]) stipule que, si  $\mathbf{F}$  est un corps fini, tout foncteur fini de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}); \mathbf{F})$  possède la propriété  $pf_\infty$ . La démonstration, élémentaire, est indépendante des profonds résultats de noethérianité de Putman-Sam-Snowden [49, 50] (bien postérieurs); elle nécessite toutefois de façon cruciale la finitude de  $\mathbf{F}$ . Le lemme de Schwartz a des implications importantes sur la comparaison cohomologique de la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}); \mathbf{F})$  et de sa sous-catégorie pleine de foncteurs analytiques, étroitement liée à la topologie algébrique via les modules instables sur l'algèbre de Steenrod en vertu de [30]. Notre théorème 8.36 et son corollaire 8.37 fournissent une vaste généralisation du lemme de Schwartz, y compris dans des catégories de foncteurs non localement noethériennes (si l'on s'intéresse seulement à la présentation finie, on peut affaiblir les hypothèses — cf. théorème 8.7). Afin d'éviter toute condition technique, nous nous contenterons ici de donner un cas particulier du corollaire 8.37.

**Théorème 7.** *Soit  $A$  un anneau de type fini. Tout foncteur fini de  $\mathcal{F}^{df}(\mathbf{P}(A); k)$  possède la propriété  $pf_\infty$  dans  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$ .*

Noter que la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbb{Z}); k)$ , par exemple, n'est pas localement noethérienne.

## Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie

Les théorèmes 1 et 2 concernent les foncteurs simples prenant des valeurs de dimension finie. Sous de fortes hypothèses de finitude sur  $\mathcal{A}$ , tous les foncteurs simples de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  appartiennent à  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; k)$ , mais c'est loin d'être le cas en général. Nous discutons quelques aspects de cette question dans l'appendice A.

Dans la section A.1, nous donnons des exemples explicites de foncteurs simples de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(L); k)$  (pour  $L$  un corps commutatif infini) prenant une seule valeur non nulle de dimension finie.

Il semble en général hors de portée de décrire les foncteurs simples ne prenant aucune valeur de dimension finie non nulle. Nous constatons toutefois, dans la section A.2, qu'il en existe dans un cadre général, par exemple dans  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$ , où  $A$  est un anneau commutatif de caractéristique nulle.

Dans un souci de simplicité, nous avons fait le choix dans cet article de formuler nos résultats pour des foncteurs simples prenant des valeurs de dimensions finies. Notons néanmoins que cette propriété est un cas particulier de la notion plus générale et intrinsèque d'*endofinitude* dans les catégories abéliennes. Nous expliquons ce point dans la section A.3.

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels sur les catégories de foncteurs</b>   | <b>8</b>  |
| 1.1      | Catégories de Grothendieck . . . . .   | 8         |
| 1.2      | Catégories de foncteurs . . . . .  | 9         |
| 1.3      | Prolongements intermédiaires . . . . .   | 10        |
| 1.4      | Foncteurs polynomiaux . . . . .  | 11        |
| <b>2</b> | <b>Produits tensoriels et extension des scalaires</b>  | <b>13</b> |
| <b>3</b> | <b>Décomposition tensorielle globale</b>   | <b>17</b> |
| 3.1      | Définitions et énoncés . . . . .   | 17        |
| 3.2      | Démonstration du théorème 3.4 . . . . .  | 19        |
| <b>4</b> | <b>Décomposition tensorielle primaire</b>  | <b>25</b> |
| <b>5</b> | <b>Décomposition tensorielle des simples polynomiaux</b>                                       | <b>27</b> |
| 5.1      | Définitions et énoncés . . . . .   | 27        |
| 5.2      | Démonstration du théorème 5.3 . . . . .  | 28        |
| <b>6</b> | <b>Simplex de <math>\mathcal{F}(A, K)</math> pour <math>A</math> anneau fini</b>               | <b>32</b> |
| 6.1      | Décompositions tensorielles des foncteurs simples . . . . .                                    | 32        |
| 6.2      | Application aux monoïdes finis de matrices . . . . .   | 33        |
| 6.3      | Application aux groupes linéaires finis . . . . .  | 34        |
| 6.4      | Simplex polynomiaux et non polynomiaux. Conjecture sur les<br>fonctions de dimension . . . . . | 37        |
| <b>7</b> | <b>Renforcement et conséquences du théorème 5.3</b>  | <b>38</b> |
| 7.1      | Compléments sur les effets croisés . . . . .   | 38        |
| 7.2      | Forme générale du corollaire 5.4 . . . . .   | 40        |
| 7.3      | Simplex polynomiaux de $\mathcal{F}(A, K)$ ( $A$ commutatif) . . . . .                         | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 7.4      | Applications aux représentations polynomiales . . . . .                                | 43        |
| 7.5      | Traductions arithmétiques . . . . .  | 44        |
| <b>8</b> | <b>Applications : propriétés de finitude</b>   | <b>46</b> |
| 8.1      | Rappels sur les propriétés de finitude . . . . .                                       | 47        |
| 8.2      | Propriétés de finitude des idéaux $K$ -cotriviaux . . . . .                            | 49        |
| 8.3      | Produit tensoriel de foncteurs de longueur finie . . . . .                             | 54        |
| 8.4      | Présentation finie et généralisations . . . . .  | 55        |
| <b>A</b> | <b>Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie</b>                 | <b>59</b> |
| A.1      | Foncteurs simples prenant une valeur non nulle de dimension finie                      | 59        |
| A.2      | Foncteurs simples qui ne prennent aucune valeur de dimension finie non nulle . . . . . | 62        |
| A.3      | Notion intrinsèque : endofinitude (centrale) . . . . .                                 | 63        |
| A.4      | Produits infinis de foncteurs simples . . . . .  | 65        |
| <b>B</b> | <b>Foncteurs élémentaires</b>  | <b>66</b> |

**Conventions.** Dans tout l'article, on désigne par :

- $\mathcal{A}$  une petite catégorie additive ;
- $\mathcal{E}$  une catégorie de Grothendieck ;
- $K$  un corps commutatif ;
- $K[\mathcal{M}]$  la  $K$ -algèbre d'un monoïde (ou d'un groupe)  $\mathcal{M}$ , de sorte que les  $K[\mathcal{M}]$ -modules s'identifient aux représentations  $K$ -linéaires de  $\mathcal{M}$ .

Sauf mention explicite du contraire, les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur  $K$ .

## 1 Rappels sur les catégories de foncteurs

### 1.1 Catégories de Grothendieck

La plupart des catégories abéliennes considérées dans cet article seront des *catégories de Grothendieck* à l'instar des catégories considérées dans [26], c'est-à-dire des catégories abéliennes avec sommes arbitraires, colimites filtrantes exactes et un générateur. Le générateur assure en particulier que les sous-objets d'un objet donné forment un ensemble. La catégorie  $A\text{-Mod}$  des modules à gauche sur un anneau  $A$  est un exemple de catégorie de Grothendieck.

Un objet  $s$  de la catégorie de Grothendieck  $\mathcal{E}$  est *simple* s'il est non nul et n'admet aucun sous-objet trivial. L'anneau des endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{E}}(s)$  est alors un corps (généralement non commutatif). Les classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\mathcal{E}$  forment un ensemble, qu'on notera  $\text{Irr}(\mathcal{E})$ . Un objet de  $\mathcal{E}$  est dit *semi-simple* s'il est somme directe d'une famille d'objets simples de  $\mathcal{E}$ . Il est dit *semi-simple isotypique de type  $s$*  s'il est somme directe de copies d'un objet simple  $s$ . Les propriétés des objets semi-simples de  $\mathcal{E}$  sont analogues à celles des objets semi-simples dans les catégories de modules. Pour plus de détails nous renvoyons à [8, § 4], qui traite de catégories de modules, mais dont les démonstrations valent en fait dans toute catégorie de Grothendieck.

Un objet  $x$  de  $\mathcal{E}$  est *de type fini* si toute famille de sous-objets de  $x$ , filtrante croissante pour l'inclusion et de réunion  $x$ , contient  $x$ . De manière équivalente,

le foncteur  $\mathcal{E}(x, -)$  commute aux colimites filtrantes de monomorphismes. Un objet de type fini non nul possède toujours un quotient simple. Dualement, un objet  $x$  est *de type cofini* si toute famille de sous-objets, filtrante décroissante pour l'inclusion et d'intersection nulle, contient l'objet nul. Un objet de type cofini non nul possède toujours un sous-objet simple.

## 1.2 Catégories de foncteurs

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories, avec  $\mathcal{C}$  petite (ou essentiellement petite). On note  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ , les morphismes étant les transformations naturelles. On note  $\Phi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  le foncteur de précomposition par un foncteur  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ .

Si  $\mathcal{D}$  possède des limites ou des colimites, il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , où elles se calculent au *but*. En particulier, si  $\mathcal{D}$  est abélienne (resp. avec colimites filtrantes exactes), il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Pour une catégorie  $\mathcal{D}$  avec sommes arbitraires,  $M$  un objet de  $\mathcal{D}$  et  $E$  un ensemble, on note  $M[E]$  la somme de copies de  $M$  indexées par  $E$ . Une variation classique autour du lemme de Yoneda donne une bijection :

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(M[\mathcal{C}(t, -)], F) \simeq \mathcal{D}(M, F(t))$$

naturelle en les objets  $M$ ,  $t$  et  $F$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  respectivement. Il en résulte que si  $M$  est un objet générateur (resp. projectif) de  $\mathcal{D}$ , alors les foncteurs  $M[\mathcal{C}(t, -)]$  engendrent (resp. sont projectifs dans)  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  lorsque  $t$  parcourt un squelette de  $\mathcal{C}$ . Dualement, si  $\mathcal{D}$  possède des produits, on note  $M^E$  le produit de copies de  $M$  indexées par  $E$ , et on a une bijection naturelle en  $M$ ,  $t$  et  $F$  :

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(F, M^{\mathcal{C}(-, t)}) \simeq \mathcal{D}(F(t), M) .$$

En particulier, si  $M$  est un cogénérateur injectif de  $\mathcal{D}$ , alors les foncteurs  $M^{\mathcal{C}(-, t)}$  forment un cogénérateur injectif de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Ces considérations impliquent la proposition classique suivante.

**Proposition 1.1.** *Si  $\mathcal{D}$  est une catégorie de Grothendieck (resp. une catégorie abélienne avec assez de projectifs, resp. avec assez d'injectifs) alors  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  est une catégorie de Grothendieck (resp. une catégorie abélienne avec assez de projectifs, resp. avec assez d'injectifs).*

Si  $S$  est un ensemble d'objets de  $\mathcal{C}$ , on dit que  $S$  est un *support*<sup>1</sup> (resp. *co-support*) d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  si ce foncteur est isomorphe à un quotient (resp. sous-foncteur) d'une somme directe (resp. d'un produit) de foncteurs du type  $M[\mathcal{C}(s, -)]$  (resp.  $M^{\mathcal{C}(-, s)}$ ) où  $M$  est un objet de  $\mathcal{E}$  et  $s$  un élément de  $S$ .

Si  $k$  est un anneau, on note  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$  la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, k\text{-Mod})$ . C'est une catégorie de Grothendieck dont un générateur projectif est donné par la somme des foncteurs  $P_{\mathcal{C}}^t(-) = k[\mathcal{C}(t, -)]$ , qui représentent l'évaluation en  $t$ , et qu'on appelle projectifs standard. Un foncteur est de type fini si et seulement s'il est quotient d'une somme finie de projectifs standard.

Si  $A$  est un anneau, on note  $\mathbf{P}(A)$  la sous-catégorie pleine de  $A\text{-Mod}$  des  $A$ -modules projectifs de type fini. La catégorie  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(A); k)$  sera notée simplement  $\mathcal{F}(A, k)$ ; certains de nos énoncés ne vaudront que dans ce cadre.

1. Pour davantage de rappels sur cette notion, notamment une présentation plus conceptuelle en termes d'extensions de Kan, on pourra par exemple consulter [15, §2.3].

Si  $k$  est un corps, on note  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}; k)$  (resp.  $\mathcal{F}^{df}(A, k)$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$  (resp.  $\mathcal{F}(A, k)$ ) des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie sur  $k$ . La plupart de nos résultats ne traiteront que de tels foncteurs.

### 1.3 Prolongements intermédiaires

La propriété classique suivante peut se trouver dans [7, prop. 3.4.1 et 3.4.2]. Notre terminologie de foncteur *réflexif* s'inspire de [7, déf. 3.5.2].

**Proposition et définition 1.2.** *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un foncteur. On suppose que  $F$  possède un adjoint à gauche  $G$  et un adjoint à droite  $H$ .*

*Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *l'unité  $Id_{\mathcal{C}'} \rightarrow FG$  est un isomorphisme ;*
2. *la coïunité  $FH \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$  est un isomorphisme.*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, on dira que  $F$  est réflexif.*

La définition suivante provient de la théorie des recollements, qui est sous-jacente à ce paragraphe et à d'autres considérations de l'article, mais nous n'aurons explicitement besoin que de la notion de *prolongement intermédiaire*. Les recollements et prolongements intermédiaires ont d'abord été introduits dans le cadre des catégories triangulées dans [6]. Pour le contexte abélien, notamment de catégories de foncteurs, nous nous référons à [38].

**Définition 1.3.** Soient  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  des catégories abéliennes et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  un foncteur réflexif. On note  $G$  et  $H$  les adjoints à gauche et à droite respectivement de  $F$ . On appelle *prolongement intermédiaire* associé à  $F$  le foncteur  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$  image de la transformation naturelle  $G \rightarrow H$  dont l'adjointe  $Id_{\mathcal{D}'} \rightarrow FH$  est l'inverse de la coïunité.

Pour les propriétés élémentaires suivantes, on renvoie par exemple à [38, § 4].

**Proposition 1.4.** *Soient  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  un foncteur réflexif entre catégories abéliennes et  $T : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$  le prolongement intermédiaire associé.*

1. *L'image par le foncteur  $F$  d'un objet simple de  $\mathcal{D}$  est soit nulle, soit simple dans  $\mathcal{D}'$ .*
2. *L'endofoncteur  $FT$  de  $\mathcal{D}'$  est isomorphe à l'identité.*
3. *Le foncteur  $T$  est pleinement fidèle. Il est additif et préserve les monomorphismes et les épimorphismes.*
4. *Le foncteur  $T$  envoie un objet simple de  $\mathcal{D}'$  sur un objet simple de  $\mathcal{D}$ . De plus, deux objets simples non isomorphes ont des images par  $T$  non isomorphes.*

L'une des classes de prolongements intermédiaires les plus importantes dans la théorie des catégories de foncteurs est celle provenant de la proposition suivante, qui constitue un cas particulier de [7, proposition 3.7.3].

**Proposition 1.5.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $\mathcal{D}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ . Le foncteur de restriction  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  est réflexif.*

Si  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie à un objet, on déduit de la proposition 1.4 :

**Corollaire 1.6.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $t$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $k$  un anneau. Alors le foncteur  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k) \rightarrow k[\text{End}_{\mathcal{C}}(t)]\text{-Mod}$  d'évaluation en  $t$  envoie un objet simple  $F$  sur un objet nul ou simple, qui a alors le même corps d'endomorphismes que  $F$ .*

## 1.4 Foncteurs polynomiaux

Dans cet article nous ne traitons que des foncteurs polynomiaux sur une petite catégorie additive, cadre classique remontant à Eilenberg-Mac Lane [19, chapitre II]. Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie abélienne.

**Foncteurs additifs** On rappelle qu'un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  est *additif* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. pour tout couple  $(s, t)$  d'objets de  $\mathcal{A}$ , la fonction  $\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \mathcal{D}(F(s), F(t))$  induite par  $F$  est additive ;
2. On a  $F(0) = 0$  et pour tout couple  $(s, t)$  d'objets de  $\mathcal{A}$  le morphisme canonique  $F(s \oplus t) \rightarrow F(s) \oplus F(t)$  de  $\mathcal{D}$  est un monomorphisme ;
3. pour tout couple  $(s, t)$  d'objets de  $\mathcal{A}$ , le morphisme canonique  $F(s \oplus t) \rightarrow F(s) \oplus F(t)$  est un isomorphisme ;
4. pour tout couple  $(s, t)$  d'objets de  $\mathcal{A}$ , le morphisme canonique  $F(s) \oplus F(t) \rightarrow F(s \oplus t)$  est un isomorphisme.

On note  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  formée des foncteurs additifs. C'en est une sous-catégorie épaisse, stable par limites et colimites. On notera  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$  pour  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, k\text{-Mod})$ , lorsque  $k$  est un anneau. La propriété élémentaire suivante est classique [18, 61].

**Proposition 1.7.** *Soient  $A$  et  $k$  deux anneaux. L'évaluation en  $A$  induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A); k) \xrightarrow{\cong} (A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} k)\text{-Mod}$$

dont un quasi-inverse est donné par la tensorisation au-dessus de  $A$  avec un  $(k, A)$ -bimodule.

**Fonctions polynomiales entre groupes abéliens** Soient  $V$  et  $E$  des groupes abéliens,  $f : V \rightarrow E$  une fonction et  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ . La  $n$ -ème *dévi*ation de  $f$  [19, § 8]<sup>2</sup> est la fonction  $\delta_n(f) : V^n \rightarrow E$  définie par

$$\delta_n(f)(a_1, \dots, a_n) := \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|I|} f(a_I)$$

où  $|I|$  désigne le cardinal de l'ensemble  $I$  et  $a_I := \sum_{i \in I} a_i$ . On dit que  $f$  est une *fonction polynomiale* de degré au plus  $n$  si la fonction  $\delta_{n+1}(f)$  est identiquement nulle (ce qui implique que les déviations  $\delta_i(f)$  sont également nulles pour  $i \geq n+1$ ). Les fonctions polynomiales (resp. les fonctions polynomiales de degré au

---

2. Nous ne suivons pas l'indexation d'Eilenberg et Mac Lane pour les déviations (et plus tard, les effets croisés) : ce que nous nommons  $n$ -ème déviation (resp. effet croisé) correspond à leur  $(n-1)$ -ème déviation (resp. effet croisé). Cela nous permet de nous conformer aux conventions les plus courantes pour les effets croisés.

plus  $n$ ) forment un sous-groupe noté  $Pol(V, W)$  (resp.  $Pol_n(V, W)$ ) du groupe abélien des fonctions  $V \rightarrow W$ . Pour une étude systématique de ces fonctions polynomiales, on pourra consulter Passi [45, chap. V].

**Effets croisés** Soit  $n$  un entier strictement positif. Le  $n$ -ème effet croisé est le foncteur  $cr_n : \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}^n, \mathcal{D})$  défini par

$$cr_n(F)(t_1, \dots, t_n) := \text{Ker} \left( F \left( \bigoplus_{i=1}^n t_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F \left( \bigoplus_{j \neq i} t_j \right) \right)$$

(morphisms induits par les projections canoniques). Le multifoncteur en  $n$  variables  $cr_n(F)$  est *symétrique* au sens où l'on dispose d'isomorphismes  $cr_n(F)(t_1, \dots, t_n) \simeq cr_n(F)(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$  pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , isomorphismes vérifiant les propriétés de naturalité appropriées. On a une décomposition naturelle [19, théorème 9.1] :

$$F \left( \bigoplus_{i=1}^n t_i \right) \simeq \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} cr_d(F)(t_{j_1}, \dots, t_{j_d}).$$

**Foncteurs polynomiaux** Un foncteur  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  est *polynomial de degré au plus  $n$*  s'il vérifie les conditions suivantes, qui sont équivalentes d'après [19, Théorème 9.11] :

1. pour tout couple  $(s, t)$  d'objets de  $\mathcal{A}$ , la fonction  $\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \mathcal{D}(F(s), F(t))$  induite par  $F$  est polynomiale de degré au plus  $n$  ;
2.  $cr_{n+1}(F) = 0$ .

Un foncteur  $F$  est *de degré  $n$*  s'il est de degré au plus  $n$  et si  $cr_n F \neq 0$ .

*Exemple 1.8.* Les foncteurs constants sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus 0. Les foncteurs additifs sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus 1 et qui sont nuls sur l'objet nul.

On note  $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  dont les objets sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus  $n$ . C'est une sous-catégorie épaisse, stable par limites et colimites. Si  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un foncteur additif entre catégories additives essentiellement petites, le foncteur de précomposition  $\Phi^*$  envoie  $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{B}, \mathcal{D})$  dans  $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ .

Le rôle fondamental des fonctions additives (resp. foncteurs additifs) est mis en évidence par les propositions suivantes, qui découlent de ce que la dernière déviation (resp. le dernier effet croisé) non nul(le) d'une fonction (resp. d'un foncteur) est additive (resp. additif) par rapport à chaque variable.

**Proposition 1.9.** *Soient  $U$  et  $V$  deux groupes abéliens. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Le groupe abélien  $\mathbf{Ab}(U, V)$  est réduit à 0.
2. Toute fonction polynomiale de  $U$  dans  $V$  est constante.

**Proposition 1.10.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. La catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  est réduite à 0.
2. Tout foncteur polynomial  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  est constant.

Si  $\mathcal{D} = k\text{-Mod}$  pour un anneau  $k$ , ces assertions équivalent aussi aux suivantes :

1.  $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$  pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$  ;
2.  $\text{End}_{\mathcal{A}}(x) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ .

**Effets croisés comme adjoints, et produits tensoriels** Soit  $\mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)$  la catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^n; K)$  dont les objets sont les foncteurs multiréduits (c'est-à-dire les foncteurs  $F$  tels que  $F(a_1, \dots, a_n) = 0$  dès que l'un des  $a_i$  est nul). Cette catégorie est reliée à  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  par la paire de foncteurs suivante, où  $cr_n$  est le  $n$ -ème effet croisé, et  $\Delta^*$  est la précomposition par le foncteur diagonale  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^n$ , c'est-à-dire  $\Delta^*F(x) = F(x, \dots, x)$  :

$$cr_n : \mathcal{F}(\mathcal{A}; K) \rightleftarrows \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K) : \Delta^* .$$

**Proposition 1.11.** *Le foncteur  $cr_n$  est adjoint au foncteur  $\Delta^*$  des deux côtés. On a donc des isomorphismes naturels :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\Delta^*F, G) &\simeq \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)(F, cr_n G) , \\ \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(G, \Delta^*F) &\simeq \mathcal{F}^{red}(\mathcal{A}^n; K)(cr_n G, F) . \end{aligned}$$

Nous utiliserons souvent la proposition 1.11, qui découle de l'adjonction entre somme et diagonale, lorsque  $F_1, \dots, F_n$  sont des foncteurs réduits (c'est-à-dire nuls sur l'objet nul) et que  $F = F_1 \boxtimes \dots \boxtimes F_n$  est leur produit tensoriel externe, défini par  $(F_1 \boxtimes \dots \boxtimes F_n)(a_1, \dots, a_n) = F_1(a_1) \otimes \dots \otimes F_n(a_n)$ . Dans ce cas,  $\Delta^*F$  est égal au produit tensoriel des  $F_i$ , défini par  $(F_1 \otimes \dots \otimes F_n)(a) = F_1(a) \otimes \dots \otimes F_n(a)$ .

## 2 Produits tensoriels et extension des scalaires

Dans cette section, nous étendons aux catégories de foncteurs générales des résultats classiques sur les représentations simples des produits tensoriels d'algèbres, pour lesquels on pourra se référer à [8, § 12].

Dans toute la section,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  désignent deux petites catégories. On rappelle que  $K$  désigne un corps commutatif. Étant donné un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  et un foncteur  $G$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$  on note  $F \boxtimes G$  le foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$  tel que  $(F \boxtimes G)(c, c') := F(c) \otimes G(c')$ , les produits tensoriels étant pris comme d'habitude sur  $K$ .

**Proposition 2.1.** *Soit  $S$  un objet simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le morphisme canonique  $K \rightarrow \text{End}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)}(S)$  est un isomorphisme.*
2. *Pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}'$  et tout couple  $F, G$  d'objets de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ , le produit tensoriel par  $\text{Id}_S$  induit un isomorphisme :*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)(F, G) \xrightarrow{\text{Id}_S \boxtimes -} \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)(S \boxtimes F, S \boxtimes G).$$

3. *Pour toute petite catégorie  $\mathcal{C}'$  et tout foncteur simple  $T$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ , le produit tensoriel  $S \boxtimes T$  est un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$ .*
4. *Pour toute extension  $L$  de  $K$ ,  $S \otimes_K L$  est un objet simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ .*

*Démonstration.* (1) $\Rightarrow$ (3). Via l'isomorphisme canonique de catégories  $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$ , le foncteur  $S \boxtimes T$  prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  constituée des foncteurs semi-simples isotypiques de type  $S$ . Comme celle-ci est stable par sous-quotients, il suffit de montrer que le foncteur qu'on obtient en voyant  $S \boxtimes T$  comme objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{S})$  est simple. Mais  $\mathcal{S}$  est équivalente (via  $\text{Hom}(S, -)$ ) à la catégorie des espaces vectoriels sur  $K$ , et via cette équivalence,  $S \boxtimes T$  s'identifie au foncteur  $T$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ , qui est par hypothèse simple, d'où la simplicité de  $S \boxtimes T$ .

(3) $\Rightarrow$ (4) : soit  $\mathcal{C}'$  la catégorie à un objet associée au monoïde multiplicatif  $L_\mu$  sous-jacent à  $L$ . La catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$  s'identifie à la sous-catégorie pleine, qui est stable par sous-quotient (donc préserve la simplicité), de  $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$  constituée des foncteurs sur lesquels les éléments de  $K$  à la source (vus comme flèches de  $\mathcal{C}'$ ) agissent par l'homothétie correspondante au but et sur lesquels l'action de  $L$  à la source est additive, d'où le résultat en prenant pour  $T$  le  $K[L_\mu]$ -module simple  $L$ .

(4) $\Rightarrow$ (1) : pour toute extension  $L$  de  $K$ , le foncteur  $S \otimes_K L$  prend naturellement ses valeurs dans les modules à gauche *libres* sur l'anneau  $A_L := \text{End}(S) \otimes_K L$ . Comme par hypothèse  $S \otimes_K L$  est simple dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ , on en déduit que tout élément non nul de  $A_L$  définit un automorphisme de ce foncteur. Comme une homothétie sur un module libre non nul ne peut être inversible que si son rapport l'est, on en déduit que  $A_L$  est un *corps*. Supposons que  $\text{End}(S)$  contienne strictement  $K$  et considérons un élément  $\xi \in \text{End}(S) \setminus K$  : si  $\xi$  est algébrique sur  $K$ ,  $A_L$  n'est pas un corps si l'on prend pour  $L$  un corps de rupture d'un polynôme irréductible sur  $K$  annulant  $\xi$ , ce qui est absurde. Si  $\xi$  est transcendant,  $A_{K(x)}$  n'est pas un corps car son élément non nul  $\xi \otimes 1 - 1 \otimes x$  n'est pas inversible. On en déduit donc  $\text{End}(S) = K$ .

L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est évidente (prendre pour  $\mathcal{C}'$  la catégorie à un seul morphisme), et l'implication réciproque s'établit comme (1) $\Rightarrow$ (3).  $\square$

**Définition 2.2.** Un foncteur simple est *absolument simple* lorsqu'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 2.1. Un foncteur est *absolument semi-simple* s'il est somme directe d'une famille de foncteurs absolument simples.

**Proposition 2.3.** 1. Si  $K$  est algébriquement clos, alors tout foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  à valeurs de dimension finie (ou, plus généralement, prenant au moins une valeur de dimension finie non nulle) est absolument simple.

2. Si pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble  $\mathcal{C}(a, a)$  est fini, et si  $K$  contient toutes les racines de l'unité, alors tout foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  est absolument simple.

*Démonstration.* Soit  $F$  un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  tel qu'il existe un objet  $t$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $F(t)$  soit non nul et de dimension finie. Alors  $\text{End}(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F(t)$ , car  $F$  est un quotient de  $P_{\mathcal{C}}^t$  (on a une flèche non nulle  $P_{\mathcal{C}}^t \rightarrow F$  et  $F$  est simple), donc est de dimension finie sur  $K$ . Par conséquent, si  $K$  est algébriquement clos,  $\text{End}(F)$  est nécessairement réduit à  $K$ .

Démontrons la deuxième assertion. Si  $F$  est simple et  $F(t) \neq 0$  alors  $F(t)$  est un  $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(t)]$ -module simple qui a même corps d'endomorphismes que  $F$ , d'après le corollaire 1.6. Il suffit donc de vérifier que si  $M$  est un monoïde fini,  $S$  un  $K[M]$ -module simple et  $K$  contient les racines de l'unité, alors  $\text{End}(S) \simeq K$ .

Si le monoïde  $M$  est un *groupe*, il s'agit d'un corollaire classique du théorème d'induction de Brauer (voir par exemple [12, *Theorem* 17.1]). Le cas d'un monoïde fini quelconque s'y ramène (voir par exemple [53, théorème 5.5]).  $\square$

*Remarque 2.4.* La première propriété tombe en défaut si l'on omet l'hypothèse des valeurs de dimension finie. C'est déjà vrai pour des algèbres : si  $K$  est un corps algébriquement clos et  $A$  une  $K$ -algèbre, il peut exister des  $A$ -modules simples dont le corps des endomorphismes est strictement plus gros que  $K$ . N'importe quelle extension stricte du corps  $K$  fournit un tel  $A$ !

Il nous sera parfois utile de ramener l'étude de foncteurs simples à celle de foncteurs absolument simples, vu les bonnes propriétés dont jouissent ces derniers. On peut le faire, au prix d'une extension finie des scalaires et de dévissages, par l'intermédiaire de la propriété suivante.

**Proposition 2.5.** *Soit  $S$  un foncteur simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$ . Il existe une extension finie de corps commutatifs  $K \subset L$  telle que le foncteur  $S \otimes_K L$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$  possède une filtration finie dont les sous-quotients sont absolument simples.*

*Démonstration.* Comme  $S$  est à valeurs de dimension finie, le corps  $\text{End}(S)$  est de dimension finie sur  $K$  et donc a fortiori sur son centre  $Z$ . Soit  $L$  un corps *neutralisant* — cf. [8, § 15.3] — de  $\text{End}(S)$  (sur  $Z$ ) : c'est une extension finie de  $Z$  et donc de  $K$  telle que  $\text{End}(S) \otimes_Z L \simeq \mathcal{M}_n(L)$  comme  $L$ -algèbres pour un certain entier  $n > 0$ . Par conséquent,  $S \otimes_Z L$  est la somme directe de  $n$  copies d'un foncteur absolument simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ .

Quitte à remplacer  $L$  par une extension finie, on peut supposer que  $K \subset L$  est une extension normale. Alors  $S \otimes_K L$  possède une filtration de longueur au plus  $rn$ , où  $r$  est le degré de  $Z$  sur  $K$ , dont les sous-quotients sont absolument simples.  $\square$

La proposition 2.6 est une variante fonctorielle de [8, § 12.1, proposition 2].

**Proposition 2.6.** *Soit  $F$  un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$ . On suppose qu'il existe un objet  $(x, y)$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  tel que  $F(x, y)$  soit de dimension finie non nulle sur  $K$ . Alors il existe des foncteurs simples  $S$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  et  $T$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$ , uniques à isomorphisme près, tels que  $F$  soit isomorphe à un quotient de  $S \boxtimes T$ .*

*Démonstration.* Si  $S$  et  $T$  existent, alors pour tous les objets  $t$  de  $\mathcal{C}$  et  $u$  de  $\mathcal{C}'$ , le foncteur  $F(t, -)$ , resp.  $F(-, u)$  est semi-simple isotypique de type  $S$ , resp.  $T$ . Ceci prouve l'unicité de  $S$  et  $T$ . Montrons leur existence.

Notons que  $\{(x, y)\}$  est un support et un co-support de  $F$ . Il s'ensuit que  $\{x\}$  (resp.  $\{y\}$ ) est un support et un co-support de  $F(-, u)$  (resp.  $F(t, -)$ ) pour tout objet  $u$  de  $\mathcal{C}'$  (resp.  $t$  de  $\mathcal{C}$ ). Soit  $M$  un  $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(x)]$ -module simple contenu dans  $F(x, y)$  (il en existe car  $F(x, y)$  est de dimension finie non nulle sur  $K$ ) : alors  $F(-, y)$  contient le foncteur simple  $S$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  obtenu en appliquant à  $M$  le prolongement intermédiaire associé à la restriction de  $\mathcal{C}$  à sa sous-catégorie pleine constituée du seul objet  $t$  (cf. propositions 1.5 et 1.4), car le foncteur de prolongement intermédiaire préserve les monomorphismes, et l'hypothèse qu'un ensemble d'objets d'un foncteur en constitue un support et un co-support est équivalente à dire que ce foncteur s'identifie au prolongement intermédiaire de sa restriction à la sous-catégorie pleine déterminée par cet ensemble.

Ainsi, vu comme objet de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)) (\simeq \mathcal{F}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K))$ ,  $F$  prend une valeur contenant un objet simple  $S$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ . La simplicité de  $F$  montre alors que *toutes* les valeurs de ce foncteur sont des objets semi-simples isotypiques de type  $S$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ , puisque  $\{y\}$  constitue un support de  $F$  (vu dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}', \mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$ ). On obtient de même un simple  $T$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$  tel que  $F(c, -)$  soit un foncteur semi-simple isotypique de type  $T$  pour tout objet  $c$  de  $\mathcal{C}$ .

Pour voir que  $F$  est un quotient de  $S \boxtimes T$ , on raisonne comme au début de la démonstration de la proposition 2.1 : la sous-catégorie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, K)$  des foncteurs semi-simples isotypiques de type  $S$  est équivalente à  $\mathbf{End}(S)^{op}\text{-Mod}$ . Il existe donc un foncteur simple  $T'$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathbf{End}(S)^{op})$  tel que  $F \simeq S \boxtimes_{\mathbf{End}(S)^{op}} T'$ .

L'image de  $T'$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; K)$  (par le foncteur de restriction des scalaires au but) contient manifestement  $T$ , de sorte qu'on dispose dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}'; \mathbf{End}(S)^{op})$  d'un épimorphisme  $T \otimes_K \mathbf{End}(S) \rightarrow T'$ , d'où un épimorphisme  $S \boxtimes T \rightarrow F$ .  $\square$

*Remarque 2.7.* Le résultat tombe en général en défaut si l'on omet l'hypothèse d'une valeur de dimension finie. Là encore, c'est un problème d'algèbres : soient  $A$  l'algèbre de polynômes  $K[x]$  et  $B$  l'algèbre de polynômes  $K[t_P]$ , où les indéterminées  $t_P$  sont indexées par les polynômes irréductibles unitaires  $P$  de  $K[X]$ . On fait du corps  $K(x)$  un  $A \otimes_K B$ -module via les morphismes de  $K$ -algèbres  $K[x] \hookrightarrow K(x)$  (inclusion canonique) et  $K[t_P] \rightarrow K(x)$  envoyant  $t_P$  sur  $1/P$ . Ce module est simple car le morphisme  $A \otimes_K B \rightarrow K(x)$  ainsi défini est surjectif. Mais  $K(x)$  ne contient aucun  $K[x]$ -module simple !

**Corollaire 2.8.** *On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite.*

1. *Les ensembles de morphismes de  $\mathcal{C}$  sont finis et  $K$  contient toutes les racines de l'unité.*
2. *Le corps  $K$  est algébriquement clos.*

*Les simples de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}'; K)$  sont les bifoncteurs de la forme  $S \boxtimes T$  où  $S$  et  $T$  sont des simples de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}; K)$  et  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{C}'; K)$  respectivement. De plus, deux simples  $S \boxtimes T$  et  $S' \boxtimes T'$  sont isomorphes si et seulement si  $S \simeq S'$  et  $T \simeq T'$ .*

Afin de manier commodément ces notions liées à l'extension des scalaires au but des catégories de foncteurs, nous introduisons une terminologie directement inspirée (au vu de la proposition 1.7) de la théorie classique des représentations.

**Définition 2.9.** Nous dirons que  $K$  est un *corps de décomposition* (resp. *corps de décomposition non additif*) de la catégorie  $\mathcal{A}$  si tout foncteur simple à valeurs de dimension finie de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  (resp.  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$ ) est absolument simple.

Si  $A$  est un anneau,  $K$  est un corps de décomposition de la catégorie  $\mathbf{P}(A)$  si et seulement si  $K$  est un corps de décomposition (*splitting field* en anglais) de la  $K$ -algèbre  $A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} K$  au sens usuel de la théorie des représentations (où l'on suppose souvent cette  $K$ -algèbre de dimension finie — cf. par exemple [12, §7.B]), en vertu de la proposition 1.7.

*Exemple 2.10.* 1. La proposition 2.3 montre qu'un corps commutatif algébriquement clos est un corps de décomposition non additif d'une petite catégorie additive arbitraire.

2. Cette même proposition montre qu'un corps commutatif contenant toutes les racines de l'unité est un corps de décomposition non additif de toute petite catégorie additive  $\mathcal{A}$  telle que  $\mathcal{A}(a, a)$  soit fini pour tout  $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ .
3. Si  $k$  est un corps fini, tout surcorps commutatif de  $k$  est un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(k)$ . Tout corps commutatif est un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(\mathbb{Z})$  et de  $\mathbf{P}(\mathbb{Q})$ .

*Remarque 2.11.* Une grande partie des résultats de changement de base de cette section s'étend (avec les mêmes démonstrations) à la situation plus intrinsèque suivante : soient  $\mathcal{D}$  une catégorie abélienne  $k$ -linéaire (où  $k$  est un anneau commutatif) et  $A$  une  $k$ -algèbre. Les objets  $x$  de  $\mathcal{D}$  munis d'une action de  $A$  (c'est-à-dire d'un morphisme de  $k$ -algèbres  $A \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(x)$ ) forment une catégorie abélienne  $\mathcal{D}_L$ , qui est une catégorie de Grothendieck si c'est le cas de  $\mathcal{D}$ . On dispose d'un foncteur d'extension des scalaires  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_L$ , qui est adjoint à gauche au foncteur d'oubli.

Le lien avec la situation considérée dans cette section provient de l'observation suivante. Si  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) est une petite catégorie (resp. une petite catégorie additive), la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)_L$  (resp.  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)_L$ ) est équivalente à  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$  (resp.  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$ ), et les foncteurs d'oubli et d'extension des scalaires au sens abstrait précédent s'identifient à ceux considérés auparavant entre catégories de foncteurs.

## 3 Décomposition tensorielle globale

### 3.1 Définitions et énoncés

On rappelle (cf. Mitchell [43, § 3, p. 18], Street [56]) qu'un idéal  $\mathcal{I}$  d'une petite catégorie additive  $\mathcal{A}$  est un sous-foncteur de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Autrement dit,  $\mathcal{I}$  consiste en la donnée de sous-groupes  $\mathcal{I}(x, y)$  de  $\mathcal{A}(x, y)$  stables par composition à droite et à gauche par des morphismes quelconques. Un tel idéal détermine une catégorie additive  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  ayant les mêmes objets que  $\mathcal{A}$  et dont les morphismes sont donnés par  $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(x, y) := \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$ , la composition étant induite par celle de  $\mathcal{A}$ . On dispose ainsi d'un foncteur additif canonique plein et essentiellement surjectif (c'est l'identité sur les objets)  $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ . Réciproquement, tout foncteur additif depuis  $\mathcal{A}$  détermine un idéal en considérant les noyaux des morphismes induits entre groupes abéliens de flèches. Nous noterons parfois simplement  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  pour signifier que  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ .

La condition suivante apparaîtra de façon récurrente dans le présent article.

**Définition 3.1.** Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{A}$ . Nous dirons que  $\mathcal{I}$  est *K-cotrivial* si, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , les conditions suivantes sont vérifiées :

1. le groupe abélien  $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$  est fini ;
2. le groupe abélien  $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$  est nul.

*Exemple 3.2.* Dans un certain nombre de situations courantes,  $\mathcal{A}$  ne possède pas d'autre idéal *K-cotrivial* que  $\mathcal{A}$ . C'est notamment le cas si la catégorie additive  $\mathcal{A}$  est linéaire sur un corps  $L$ , si  $L$  est infini ou que  $\text{car}(L) = \text{car}(K)$ .

*Exemple 3.3.* Les idéaux bilatères d'un anneau  $A$  sont en bijection avec les idéaux de la catégorie  $\mathbf{P}(A)$ . La bijection envoie un idéal  $I$  sur le foncteur  $I.\text{Hom}_{\mathbf{P}(A)}$ . Elle induit une bijection entre les idéaux bilatères  $I$  de  $A$  tels que

$A/I$  est fini et  $K \otimes_{\mathbb{Z}} A/I$  est nul (que nous appellerons également *idéaux  $K$ -cotriviaux de  $A$* ) et les idéaux  $K$ -cotriviaux de  $\mathbf{P}(A)$ .

L'énoncé et la démonstration du théorème suivant s'inspirent de Steinberg [55, théorèmes 6 et 8], mentionné dans l'introduction de l'article. On y emploie la notation suivante. Pour  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ , on désigne par

$$\psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$$

le foncteur dont les composantes sont la projection canonique  $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$  et l'identité  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$  est contenu dans  $\mathcal{I}$ , on désigne par  $\rho_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$  le foncteur canonique  $\mathcal{A}/\mathcal{J} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  (produit de la projection  $\mathcal{A}/\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$  et de l'identité de  $\mathcal{A}$ ).

**Théorème 3.4.** *1. Soit  $F$  un foncteur de type fini et de type cofini de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ . Il existe un idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  et  $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$  tels que :*

- (a) *le foncteur  $B$  est polynomial par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire que pour tout  $x$ ,  $B(x, -)$  est un foncteur polynomial de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  ;*
- (b)  *$F \simeq B \circ \psi_{\mathcal{I}}$ .*

*2. De plus, si  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  et  $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$  sont  $K$ -cotriviaux et si  $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$  et  $B' : \mathcal{A}/\mathcal{J} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$  sont polynomiaux par rapport à la deuxième variable, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a)  *$B \circ \psi_{\mathcal{I}} \simeq B' \circ \psi_{\mathcal{J}}$  ;*
- (b) *il existe  $\mathcal{K} \triangleleft \mathcal{A}$ ,  $K$ -cotrivial, contenu dans  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ , tel que  $B \circ \rho_{\mathcal{I}, \mathcal{K}} \simeq B' \circ \rho_{\mathcal{J}, \mathcal{K}}$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{K} \times \mathcal{A}; K)$ .*

*3. Enfin, si  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  est  $K$ -cotrivial et que  $B : \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$  est polynomial par rapport à la deuxième variable, alors  $B$  est simple si et seulement si  $B \circ \psi_{\mathcal{I}}$  est un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ .*

On obtient en particulier le résultat suivant, qui s'applique aux situations de l'exemple 3.2 :

**Corollaire 3.5.** *Si  $\mathcal{A}$  est le seul idéal  $K$ -cotrivial de  $\mathcal{A}$ , alors tout foncteur simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  est polynomial.*

*Exemple 3.6.* Si  $k$  est un corps infini, tout foncteur simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$  est polynomial. En particulier, si  $\text{car}(k) \neq \text{car}(K)$ , le foncteur constant  $K$  est le seul foncteur simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$ , et  $\mathcal{F}^{\text{df}}(k, K)$  est réduite aux foncteurs constants.

Steinberg [55, theorem p. 343] a montré que toute représentation complexe de dimension finie d'un groupe  $SL_n(\mathbb{Q})$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) est polynomiale : la polynomialité des foncteurs simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathbb{Q}, \mathbb{C})$  est à mettre en parallèle de ce résultat.

**Corollaire 3.7.** *Si  $K$  contient toutes les racines de l'unité, alors un objet de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel  $\pi_{\mathcal{I}}^*(S) \otimes T$ , où  $\mathcal{I}$  est un idéal  $K$ -cotrivial de  $\mathcal{A}$ ,  $S$  est un simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$  et  $T$  est un simple polynomial de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ .*

*De plus, deux simples  $\pi_{\mathcal{I}}^*(S) \otimes T$  et  $\pi_{\mathcal{J}}^*(S') \otimes T'$  sont isomorphes si et seulement si on a des isomorphismes  $T \simeq T'$  et  $\pi_{\mathcal{I}}^*(S) \simeq \pi_{\mathcal{J}}^*(S')$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.8, si  $\mathcal{I}$  est  $K$ -cotrivial et  $K$  a toutes les racines de l'unité, les simples de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$  sont les bifoncteurs de la forme  $S \boxtimes T$  avec  $S$  et  $T$  simples (uniquement déterminés à isomorphisme près). De plus, un tel simple est polynomial en la deuxième variable si et seulement si  $T$  est polynomial. Le résultat découle alors directement du théorème 3.4.  $\square$

*Remarque 3.8.* Lorsque  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ , un foncteur donne par évaluation sur chaque  $A^n$  une représentation de  $GL_n(A)$ , et on peut donc penser  $\mathcal{F}(A, K)$  comme un avatar des représentations  $K$ -linéaires de  $GL_\infty(A)$ . Avec ce point de vue, le corollaire 3.7 pour  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$  est formellement analogue à la décomposition tensorielle de Steinberg [55] (la formule (1) de l'introduction de notre article) ou aux résultats similaires de Bass-Milnor-Serre [4]. Cependant, contrairement à ces résultats, le corollaire 3.7 ne requiert aucune hypothèse sur l'anneau  $A$ . Ceci est rapprocher de phénomènes de « stabilisation » classiques : il est plus facile de donner une présentation du groupe  $GL_\infty(A)$  que des groupes  $GL_n(A)$ ,  $n < \infty$ . Il ne semble donc pas qu'on puisse déduire directement les résultats de [55, 4] de ceux pour  $\mathcal{F}(A, K)$  ou inversement. À cet égard, la situation est différente de l'article [29] où Harman utilise les résultats de [4] pour obtenir des résultats de structure sur des catégories de foncteurs dont la source sont les groupes abéliens, mais avec des morphismes modifiés (monomorphismes munis d'un scindement).

### 3.2 Démonstration du théorème 3.4

Pour  $f \in \mathcal{A}(x, y)$ , on note  $u[f]$  (la lettre  $u$  est mise pour *unipotent*) l'automorphisme de  $x \oplus y$  donné matriciellement par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$ . Le lemme suivant, immédiat, énumère les propriétés des morphismes  $u[f]$  dont nous aurons besoin.

**Lemme 3.9.** *Soient  $x, y, z$  des objets de  $\mathcal{A}$ ,  $f, f' \in \mathcal{A}(x, y)$  et  $g \in \mathcal{A}(y, z)$ .*

1. *On a  $u[f]u[f'] = u[f']u[f] = u[f + f']$ .*
2. *On a des diagrammes commutatifs dans  $\mathcal{A}$  :*

$$\begin{array}{ccc} x \oplus y & \xrightarrow{u[f]} & x \oplus y \\ x \oplus g \downarrow & & \downarrow x \oplus g \\ x \oplus z & \xrightarrow{u[gf]} & x \oplus z \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} x \oplus z & \xrightarrow{u[gf]} & x \oplus z \\ f \oplus z \downarrow & & \downarrow f \oplus z \\ y \oplus z & \xrightarrow{u[g]} & y \oplus z \end{array} .$$

3. *Notons  $p(f, g) : x \oplus y \oplus z \rightarrow x \oplus z$  le morphisme dont les composantes  $x \rightarrow x$  et  $z \rightarrow z$  sont les identités, la composante  $y \rightarrow z$  est  $g$  et les autres composantes sont nulles. Alors  $p(f, g)$  est un épimorphisme scindé, et le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} x \oplus y \oplus z & \xrightarrow{p(f, g)} & x \oplus z \\ u[f] \oplus z \downarrow & & \downarrow u[gf] \\ x \oplus y \oplus z & \xrightarrow{p(f, g)} & x \oplus z \end{array}$$

4. Notons  $i(f, g) : x \oplus y \oplus z \rightarrow x \oplus z$  le morphisme dont les composantes  $x \rightarrow x$  et  $z \rightarrow z$  sont les identités, la composante  $x \rightarrow y$  est  $f$  et les autres composantes sont nulles. Alors  $i(f, g)$  est un monomorphisme scindé, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} x \oplus z & \xrightarrow{i(f,g)} & x \oplus y \oplus z \\ u[gf] \downarrow & & \downarrow x \oplus u[g] \\ x \oplus z & \xrightarrow{i(f,g)} & x \oplus y \oplus z \end{array}$$

Le lemme suivant est la clé de la démonstration du théorème 3.4.

**Lemme 3.10.** *Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ . On suppose que  $F$  est de type fini ou de type cofini. Alors il existe un idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$  tel que, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , la fonction*

$$\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_K(F(x), F(y))$$

qu'induit  $F$  soit la composée de l'application linéaire canonique

$$\pi_{\mathcal{I}}(x, y) : \mathcal{A}(x, y) \rightarrow (\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y)$$

et d'une fonction  $(\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_K(F(x), F(y))$  polynomiale par rapport à la deuxième variable.

De plus, cette factorisation est unique et fonctorielle en  $x$  et  $y$ .

*Démonstration.* Étant donné des objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , notons  $\mathcal{I}(x, y)$  l'ensemble des morphismes  $f$  de  $\mathcal{A}(x, y)$  tels que l'automorphisme  $F(u[f] \oplus t)$  de  $F(x \oplus y \oplus t)$  soit unipotent pour tout objet  $t$  de  $\mathcal{A}$ .

Comme le produit de deux automorphismes unipotents permutables est unipotent, le lemme 3.9.1 montre que  $\mathcal{I}(x, y)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{A}(x, y)$ .

Soient  $f \in \mathcal{I}(x, y)$  et  $g \in \mathcal{A}(y, z)$ , montrons que  $gf \in \mathcal{I}(x, z)$ . Soit  $t$  un objet de  $\mathcal{A}$ . En utilisant le lemme 3.9.3, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus z \oplus t) & \xrightarrow{F(p(f,g) \oplus t)} & F(x \oplus z \oplus t) \\ F(u[f] \oplus z \oplus t) \downarrow & & \downarrow F(u[gf] \oplus t) \\ F(x \oplus y \oplus z \oplus t) & \xrightarrow{F(p(f,g) \oplus t)} & F(x \oplus z \oplus t) \end{array} \quad (3)$$

dans lequel  $F(p(f, g) \oplus t)$  est un épimorphisme. Comme  $F(u[f] \oplus z \oplus t)$  est unipotent puisque  $f$  appartient à  $\mathcal{I}(x, y)$ , on en déduit que  $F(u[gf] \oplus t)$  est également unipotent. On a donc bien  $gf \in \mathcal{I}(x, z)$ .

On établit de façon analogue, à partir du lemme 3.9.4, que, pour  $f \in \mathcal{A}(x, y)$  et  $g \in \mathcal{I}(y, z)$ , on a  $gf \in \mathcal{I}(x, z)$ .

Par conséquent,  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ .

Comme  $F$  est supposé de type fini ou de type cofini, il existe un objet  $s$  de  $\mathcal{A}$  qui en constitue un support ou un co-support. Pour un tel  $s$ , un morphisme  $f \in \mathcal{A}(x, y)$  appartient à  $\mathcal{I}(x, y)$  dès que  $F(u[f] \oplus s)$  est unipotent. Montrons ce fait lorsque, par exemple,  $s$  est un support de  $F$  (l'autre cas se traite de

manière analogue). Cette hypothèse implique que  $s$  est également un support de  $\tau_a(F) := F \circ (a \oplus -)$  pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$  (cela résulte de l'effet du foncteur de translation  $\tau_a$  sur les foncteurs projectifs  $P_{\mathcal{A}}^b$ ). Par conséquent, pour tout objet  $t$  de  $\mathcal{A}$ , le morphisme  $\xi : F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s,t)} \rightarrow F(x \oplus y \oplus t)$  dont la composante indexée par un morphisme  $\alpha \in \mathcal{A}(s, t)$  est  $F(x \oplus y \oplus \alpha) : F(x \oplus y \oplus s) \rightarrow F(x \oplus y \oplus t)$  est un épimorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s,t)} & \xrightarrow{\xi} & F(x \oplus y \oplus t) \\ F(u[f] \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s,t)} \downarrow & & \downarrow F(u[f] \oplus t) \\ F(x \oplus y \oplus s)^{\oplus \mathcal{A}(s,t)} & \xrightarrow{\xi} & F(x \oplus y \oplus t) \end{array}$$

montre donc que  $F(u[f] \oplus t)$  est unipotent si c'est le cas de  $F(u[f] \oplus s)$ , de sorte que  $f \in \mathcal{I}(x, y)$  si  $F(u[f] \oplus s)$  est unipotent.

Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . Par ailleurs, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , notons  $d(x, y) := \dim_K F(x \oplus y \oplus s)$ . On dispose d'un morphisme de groupes  $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow (\bar{K}^\times)^{d(x,y)}$  obtenu en trigonalisant simultanément les automorphismes permutables  $\bar{K} \otimes_K F(u[f] \oplus s)$  (pour  $f \in \mathcal{A}(x, y)$ ) de  $\bar{K} \otimes_K F(x \oplus y \oplus s)$ , les composantes  $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \bar{K}^\times$  du morphisme étant les différents coefficients diagonaux des matrices ainsi obtenues.

Le noyau de ce morphisme est exactement  $\mathcal{I}(x, y)$  d'après ce qu'on vient de montrer sur  $s$ , de sorte qu'il induit un monomorphisme de groupes

$$\phi_{x,y} = (\phi_{x,y}^1, \dots, \phi_{x,y}^{d(x,y)}) : \mathcal{A}(x, y) / \mathcal{I}(x, y) \rightarrow (\bar{K}^\times)^{d(x,y)}.$$

Soient  $f \in \mathcal{A}(x, y)$  et  $g \in \mathcal{A}(y, z)$  des morphismes de  $\mathcal{A}$ . Si  $g$  est un épimorphisme scindé, alors le lemme 3.9.2 procure un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus y \oplus s) & \xrightarrow{F(u[f] \oplus s)} & F(x \oplus y \oplus s) \\ F(x \oplus g \oplus s) \downarrow & & \downarrow F(x \oplus g \oplus s) \\ F(x \oplus z \oplus s) & \xrightarrow{F(u[gf] \oplus s)} & F(x \oplus z \oplus s) \end{array}$$

où  $F(x \oplus g \oplus s)$  est un épimorphisme, ce qui implique l'existence d'une fonction injective  $\sigma : \{1, \dots, d(x, z)\} \rightarrow \{1, \dots, d(x, y)\}$  telle que  $\phi_{x,z}^i(gf) = \phi_{x,y}^{\sigma(i)}(f)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d(x, z)\}$ . De même, si  $f$  est un monomorphisme scindé, le lemme 3.9.2 implique l'existence d'une fonction injective  $\tau : \{1, \dots, d(x, z)\} \rightarrow \{1, \dots, d(y, z)\}$  telle que  $\phi_{x,z}^i(gf) = \phi_{y,z}^{\tau(i)}(g)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d(x, z)\}$ .

Comme tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{A}(x, y)$  se factorise en

$$x \xrightarrow{\alpha} x \oplus y \xrightarrow{Id} x \oplus y \xrightarrow{\beta} y$$

où  $\alpha$  a pour composantes l'identité  $x \rightarrow x$  et  $f : x \rightarrow y$ , et est donc un monomorphisme scindé, et  $\beta$  est la projection canonique, qui est un épimorphisme scindé, on en déduit (en appliquant ce qui précède à la composée  $\beta \circ Id$  puis à  $\beta \circ \alpha$ ) que l'image de  $\phi_{x,y}$  est *finie*, de cardinal majoré par le nombre de fonctions injectives de  $\{1, \dots, d(x, y)\}$  vers  $\{1, \dots, d(x \oplus y, x \oplus y)\}$ .

$\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$  est donc isomorphe à un sous-groupe fini d'un produit de copies de  $\bar{K}^\times$ , ce qui implique la nullité de  $K \otimes \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$ . Ainsi, l'idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$  est  $K$ -cotrivial.

Pour  $f \in \mathcal{A}(x, y)$  et  $t \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , considérons la décomposition de Jordan multiplicative de  $F(u[f] \oplus t)$  en produit permutable d'un automorphisme unipotent  $U(f)$  et d'un automorphisme absolument semi-simple  $D(f)$ . (Une telle décomposition existe toujours, car les valeurs propres de  $F(u[f] \oplus t)$  sont des racines de l'unité grâce à ce qui précède, elles sont donc *séparables* — cf. [9, chap. 7, § 5.9, th. 1 et prop. 17].) Comme les  $u[f]$  sont deux à deux permutable,  $U$  et  $D$  définissent des morphismes de groupes  $\mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$  dont les images commutent ; de plus, le noyau de  $D$  contient  $\mathcal{I}(x, y)$ , de sorte que ces morphismes induisent un morphisme de groupes  $(\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) \times \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$ . De plus, le morphisme  $U : \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \text{Aut}_K(F(x \oplus y \oplus t))$  est à valeurs dans les matrices triangulaires supérieures *strictes* pour un choix convenable de base, ce qui implique qu'il est polynomial, de degré strictement inférieur à  $\dim_K F(x \oplus y \oplus t)$ . En prenant  $t = 0$  et en écrivant tout morphisme  $f \in \mathcal{A}(x, y)$  comme la composée de l'inclusion canonique  $x \rightarrow x \oplus x \oplus y$  suivie de  $u[f]$  puis de la projection canonique  $x \oplus y \rightarrow y$  et en appliquant le foncteur  $F$ , on obtient l'existence de la factorisation recherchée. Son unicité découle du lemme 3.11 ci-après.

La functorialité en  $y$  de la décomposition obtenue se montre à partir du diagramme (3) (avec  $t = 0$ ), en appliquant la décomposition de Jordan aux flèches verticales. La functorialité en  $x$  s'établit de façon analogue.  $\square$

**Lemme 3.11.** *Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel,  $V$  un groupe abélien et  $U$  un sous-groupe de  $V$  tel quel  $K \otimes_{\mathbb{Z}} V/U = 0$ . Alors la restriction de la fonction  $E^{V/U \times V} \rightarrow E^V$  induite par l'application linéaire canonique  $V \rightarrow V/U \times V$  (dont les composantes sont la projection et l'identité) à l'espace vectoriel des fonctions  $V/U \times V \rightarrow E$  qui sont polynomiales par rapport à la deuxième variable est injective.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que la restriction de  $V$  à  $U$  définit une application linéaire *injective*  $\text{Pol}(V, E) \rightarrow \text{Pol}(U, E)$ . Supposons en effet qu'il existe une fonction polynomiale non nulle  $f : V \rightarrow E$  dont la restriction à  $U$  soit nulle ; soit  $n \geq 0$  le degré de  $f$ . Alors la  $n$ -déviation  $\delta_n(f) : V^n \rightarrow E$  est une fonction additive par rapport à chacune des  $n$  variables et non identiquement nulle. On voit par récurrence descendante sur l'entier  $r \in \{0, \dots, n\}$  que  $\delta_n(f)(a_1, \dots, a_n) = 0$  si au moins  $r$  des éléments  $a_1, \dots, a_n$  de  $V$  appartiennent à  $U$  : pour  $r = n$  cela résulte de la nullité de  $f$  sur  $U$ , et le pas de la récurrence s'obtient en utilisant que toute fonction *additive*  $V/U \rightarrow E$  est nulle, en raison de la nullité de  $K \otimes_{\mathbb{Z}} V/U$ . Pour  $r = 0$ , on voit que  $\delta_n(f)$  est identiquement nulle, contradiction qui établit l'injectivité souhaitée.

Considérons maintenant une fonction  $f : V/U \times V \rightarrow E$  polynomiale par rapport à la deuxième variable et telle que  $f(\bar{x}, x) = 0$  pour tout  $x \in V$ , où  $\bar{x}$  désigne la classe de  $x$  modulo  $U$ . Pour tout  $x \in V$ , la fonction  $V \rightarrow E$   $t \mapsto f(\bar{x}, x + t)$  est polynomiale et nulle sur  $U$ , elle est donc identiquement nulle d'après ce qui précède, d'où le lemme.  $\square$

**Lemme 3.12.** *Soit  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  tel que  $K \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)) = 0$  pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ .*

1. Si  $X$  est un foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$  polynomial par rapport à la deuxième variable, alors tout sous-foncteur de  $\psi_{\mathcal{I}}^*(X)$  est isomorphe à  $\psi_{\mathcal{I}}^*(Y)$  pour un sous-foncteur  $Y$  de  $X$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$ .
2. Soient  $X$  et  $Y$  des objets de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$  polynomiaux par rapport à la deuxième variable. Alors  $\psi_{\mathcal{I}}$  induit une bijection :

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)(X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\psi_{\mathcal{I}}^*X, \psi_{\mathcal{I}}^*Y) .$$

*Démonstration.* Les deux assertions se déduisent du lemme 3.11. On note au préalable que la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  constituée des objets du type  $(a, a)$  (où  $a$  est un objet de  $\mathcal{A}$ ) est équivalente au sens de Morita à  $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  : l'inclusion induit une équivalence  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\mathcal{B}; K)$ . En effet, tout objet de  $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  est facteur direct d'un objet de  $\mathcal{B}$ . On peut donc remplacer  $\psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  par le foncteur additif essentiellement surjectif  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  qu'il induit.

Pour la première assertion, soit  $F$  un sous-foncteur de  $\psi_{\mathcal{I}}^*X$  : pour tous objets  $r$  et  $s$  de  $\mathcal{A}$ , on dispose d'un diagramme commutatif ensembliste (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(a, b) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}_K(F(a), F(b)) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_K(F(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) \\ \downarrow j & & \nearrow & & \nearrow \beta \\ (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) & \xrightarrow{g} & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^*X(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) & & \end{array}$$

où les flèches  $f$  et  $g$  sont données par la functorialité de  $F$  et  $X$  respectivement,  $\alpha$  et  $\beta$  sont induites par les inclusions  $F(b) \subset \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)$  et  $F(a) \subset \psi_{\mathcal{I}}^*X(a)$  respectivement, et  $j$  est induite par  $\psi_{\mathcal{I}}$ . L'existence d'une fonction ensembliste en pointillé faisant commuter le diagramme, et naturelle en  $x$  et  $y$ , est équivalente au fait que  $F$  est isomorphe à la précomposition par  $\psi_{\mathcal{I}}$  d'un sous-foncteur de  $X$ . Comme  $\alpha$  est un monomorphisme de  $K$ -espaces vectoriels, l'existence de la flèche en pointillé équivaut à la nullité de la composée de  $\beta g$  et de la projection de  $\text{Hom}_K(F(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b))$  sur  $\text{Coker } \alpha$ . Or la précomposition de cette composée avec  $\mathcal{A}(a, b) \xrightarrow{j} (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b)$  est nulle (grâce à la commutativité du diagramme), de sorte que l'hypothèse faite sur  $X$  et le lemme 3.11 garantissent l'existence de la flèche en pointillé. Ce même lemme montre la naturalité en  $x$  et  $y$  des factorisations obtenues, d'où le premier point.

Pour la deuxième assertion, l'injectivité résulte de l'observation d'équivalence de Morita du début et de l'essentielle surjectivité du foncteur  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  qu'induit  $\psi_{\mathcal{I}}$ . Pour la surjectivité, considérons une transformation naturelle  $\psi_{\mathcal{I}}^*X \rightarrow \psi_{\mathcal{I}}^*Y$  : c'est une collection d'applications linéaires  $\psi_{\mathcal{I}}^*X(a) \rightarrow \psi_{\mathcal{I}}^*Y(a)$ , pour  $a$  objet de  $\mathcal{A}$ , telle que le diagramme ensembliste évident

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^*X(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) & (4) \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^*X(a), \psi_{\mathcal{I}}^*X(b)) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^*X(a), \psi_{\mathcal{I}}^*Y(b)) & \end{array}$$

commute pour tous objets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{A}$ . Le fait que cette transformation naturelle appartient à l'image du morphisme  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)(X, Y) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\psi_{\mathcal{I}}^*X, \psi_{\mathcal{I}}^*Y)$

équivalent à la commutativité du diagramme évident

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)), \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* X(b)) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* Y(b))
\end{array} \quad (5)$$

dans lequel les deux composées  $(\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b) \rightarrow \text{Hom}_K(\psi_{\mathcal{I}}^* X(a), \psi_{\mathcal{I}}^* Y(b))$  sont polynomiales par rapport à la deuxième variable. Comme le diagramme commutatif (4) s'obtient en composant (5) avec  $\mathcal{A}(a, b) \xrightarrow{j} (\mathcal{A}(a, b)/\mathcal{I}(a, b)) \times \mathcal{A}(a, b)$ , le lemme 3.11 implique la commutativité de (5), ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 3.13.** *Soient  $F$  un foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ ,  $S$  un support de  $F$  et  $T$  un co-support de  $F$  et  $d \in \mathbb{N}$ . Si pour tous  $s \in S$  et  $t \in T$ , la fonction*

$$\mathcal{A}(s, t) \rightarrow \text{Hom}_K(F(s), F(t))$$

*induite par  $F$  est polynomiale de degré au plus  $d$ , alors  $F$  est un foncteur polynomial de degré au plus  $d$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux objets de  $\mathcal{A}$ . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(x, y) & \longrightarrow & \text{Hom}_K(F(x), F(y)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod \mathcal{A}(s, t) & \longrightarrow & \prod \text{Hom}_K(F(s), F(t))
\end{array}$$

où les produits sont pris sur tous les  $s \in S$ ,  $t \in T$  et toutes les flèches  $f : s \rightarrow x$  et  $g : y \rightarrow t$  de  $\mathcal{A}$ , les flèches horizontales sont données par l'effet de  $F$  sur les morphismes, et les flèches verticales sont induites par l'image inverse le long de  $f$  et l'image directe le long de  $g$ .

Par hypothèse, la flèche horizontale inférieure est une fonction polynomiale de degré au plus  $d$ .

Les flèches verticales sont des morphismes de groupes abéliens, et celle de droite est *injective* puisque  $S$  (resp.  $T$ ) est un support (resp. co-support) de  $F$ . Il en résulte que la flèche horizontale supérieure est une fonction polynomiale de degré au plus  $d$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.4.* Montrons l'assertion 1. L'équivalence de Morita entre  $\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$  et sa sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}$  dont les objets sont les  $(x, x)$  pour  $x \in \text{Ob}\mathcal{A}$ , déjà observée au début de la démonstration du lemme 3.12, et le lemme 3.10 montrent que tout foncteur  $S$  de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$  est isomorphe à  $B \circ \psi_{\mathcal{I}}$  pour un idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I}$  et un foncteur  $B$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}; K)$  tel que, pour tout objet  $t$  de  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , le foncteur  $B(t, -)$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  induit une fonction polynomiale entre les groupes abéliens de morphismes. Si  $S$  est de type fini et de type cofini, ou simple, il en est de même pour  $B$  (car  $\psi_{\mathcal{I}}^*$  est fidèle et commute à toutes les limites et colimites), qui est donc polynomial grâce au lemme 3.13.

L'assertion 3 du théorème 3.4 découle de la première propriété du lemme 3.12.

Pour établir l'assertion 2, on note déjà que l'intersection  $\mathcal{K}$  de deux idéaux  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{A}$  (définie par  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{I}(x, y) \cap \mathcal{J}(x, y) \subset \mathcal{A}(x, y)$  pour tous objets  $x$  et

$y$  de  $\mathcal{A}$ ) est un idéal de  $\mathcal{A}$ , qui est  $K$ -cotrivial si  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  le sont (en effet, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , le groupe abélien  $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{K}(x, y)$  s'injecte canoniquement dans  $\mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y) \oplus \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{J}(x, y)$ ). Précomposant  $B$  et  $B'$  par  $\rho_{\mathcal{I}, \mathcal{K}}$  et  $\rho_{\mathcal{J}, \mathcal{K}}$  respectivement, on se ramène au cas où  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ , dans lequel il s'agit de montrer que  $B$  et  $B'$  sont isomorphes lorsque  $B$  et  $B'$  sont deux foncteurs polynomiaux par rapport à la deuxième variable tels que  $B \circ \psi_{\mathcal{I}} \simeq B' \circ \psi_{\mathcal{I}}$ . Cela résulte de la deuxième propriété du lemme 3.12.  $\square$

## 4 Décomposition tensorielle primaire

Cette section contient une généralisation (directe) aux catégories additives des décompositions classiques des algèbres données par des familles d'idempotents orthogonaux [12]. Nous obtenons en particulier la proposition 4.3, qui s'applique aux catégories  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  apparaissant dans le théorème 3.4, et permet une décomposition tensorielle plus fine des simples qui y apparaissent.

Appelons *idempotent* de  $\mathcal{A}$  un foncteur additif  $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  qui est l'identité sur les objets, et tel que  $e^2 = e$ . On note alors  $e\mathcal{A}$  la catégorie ayant les mêmes objets que  $\mathcal{A}$  avec  $\text{Hom}_{e\mathcal{A}}(a, b) = e\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)$  et avec la loi de composition  $(ef) \circ (eg) = e(f \circ g)$ . Cette loi est bien définie,  $e\mathcal{A}$  est une catégorie additive, et on a un foncteur quotient canonique

$$\pi_e : \mathcal{A} \rightarrow e\mathcal{A}.$$

Une *famille localement finie d'idempotents orthogonaux* de  $\mathcal{A}$  est une famille d'idempotents  $(e_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{A}$  telle que :

1.  $e_i e_j = 0 = e_j e_i$  si  $i \neq j$  ;
2. pour tous objets  $a, b$  de  $\mathcal{A}$ , seul un nombre fini d'idempotents induisent une application non nulle  $e_i : \mathcal{A}(a, b) \rightarrow \mathcal{A}(a, b)$  ;
3.  $\sum_{i \in I} e_i = 1$  (la somme signifie la somme sur les morphismes, et l'identité sur les objets. Cette somme éventuellement infinie a un sens car elle est en fait finie à cause de la condition précédente).

Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de catégories additives. La somme  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est la sous-catégorie pleine de  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ , dont les objets sont les familles  $(x_i)_{i \in I}$  telles que tous les  $x_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

**Lemme 4.1.** *Pour toute famille  $(e_i)_{i \in I}$  localement finie d'idempotents orthogonaux de  $\mathcal{A}$ , le foncteur*

$$\prod_{i \in I} \pi_{e_i} : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{i \in I} e_i \mathcal{A}$$

*est à valeurs dans la sous-catégorie  $\bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}$ , et pour toute catégorie abélienne  $\mathcal{D}$ , il induit une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Fct} \left( \bigoplus_{i \in I} e_i \mathcal{A}, \mathcal{D} \right) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D}).$$

*Démonstration.* La deuxième condition dans la définition des familles localement finies d'idempotents orthogonaux assure que pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , et

pour tous les  $i$  sauf un nombre fini,  $\pi_{e_i}(x)$  est nul dans  $e_i\mathcal{A}$ . Ainsi  $\prod_{i \in I} \pi_{e_i}$  est à valeurs dans  $\bigoplus_{i \in I} e_i\mathcal{A}$ . La troisième condition assure que  $\prod_{i \in I} \pi_{e_i}$  est pleinement fidèle. Il induit donc une équivalence de catégories entre  $\mathcal{A}$  et son image  $\Delta$ . L'équivalence de catégories du lemme découle alors du fait que tout objet de  $\bigoplus_{i \in I} e_i\mathcal{A}$  est facteur direct d'un objet de  $\Delta$ .  $\square$

**Proposition 4.2.** *Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une famille localement finie d'idempotents orthogonaux de  $\mathcal{A}$ ,  $J$  un sous-ensemble fini de  $I$ , et pour tout  $j \in J$  soit  $S_j$  un foncteur non constant de  $\mathcal{F}(e_j\mathcal{A}; K)$ .*

1. *Le foncteur  $\bigotimes_{j \in J} \pi_{e_j}^* S_j$  est absolument simple si et seulement si les foncteurs  $S_j$  sont absolument simples.*
2. *Si on a un isomorphisme entre deux foncteurs absolument simples :*

$$\bigotimes_{i \in J} \pi_{e_j}^* S_j \simeq \bigotimes_{k \in K} \pi_{e_k}^* T_k$$

*alors  $J = K$  et pour tout  $j \in J$ , le foncteur  $S_j$  est isomorphe à  $T_j$ .*

*Enfin, si les simples des catégories  $\mathcal{F}^{\text{df}}(e_j\mathcal{A}; K)$  sont tous absolument simples, alors tous les simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  sont absolument simples, et sont isomorphes à un produit tensoriel du type ci-dessus.*

*Démonstration.* Lorsque la famille d'idempotents est finie, le résultat découle du lemme précédent et des propositions 2.1 et 2.6. Le cas général s'en déduit car tout foncteur de type fini sur une catégorie somme directe de catégories additives se factorise par la projection sur la somme directe d'une sous-famille finie.  $\square$

Si  $V$  est un groupe abélien et  $p$  un nombre premier, on note  ${}_{(p)}V$  le sous-groupe de torsion  $p$ -primaire de  $V$ . On note  ${}_{(p)}\mathcal{A}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{A}$  avec les mêmes objets que  $\mathcal{A}$  et dont les groupes abéliens de morphismes sont donnés par  ${}_{(p)}\mathcal{A}(x, y) = {}_{(p)}(\mathcal{A}(x, y))$ . On a un foncteur canonique (qui est l'identité sur les objets et qui envoie un morphisme sur sa composante  $p$ -primaire) :

$$\pi_p : \mathcal{A} \rightarrow {}_{(p)}\mathcal{A} .$$

**Proposition 4.3.** *Soit  $S$  un foncteur non constant de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ . Si les groupes abéliens de morphismes  $\mathcal{A}(x, y)$  sont finis pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$  et que  $K$  contient toutes les racines de l'unité, alors  $S$  est simple si et seulement s'il existe un ensemble fini  $P$  de nombres premiers, et des simples non constants  $S_p$  de  $\mathcal{F}({}_{(p)}\mathcal{A}; K)$ , pour tout  $p \in P$ , tels que*

$$S \simeq \bigotimes_{p \in P} \pi_p^* S_p .$$

*De plus, dans une telle décomposition tensorielle, l'ensemble  $P$  est uniquement déterminé, et les  $S_p$  sont uniquement déterminés à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Comme les ensembles de morphismes sont finis dans  $\mathcal{A}$ , tout foncteur de type fini de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  prend des valeurs de dimension finie. De plus, les foncteurs simples sont tous absolument simples d'après la proposition 2.3. Par conséquent, la proposition découle de la proposition 4.2 et de la décomposition primaire des groupes abéliens finis.  $\square$

## 5 Décomposition tensorielle des simples polynomiaux

### 5.1 Définitions et énoncés

Pour tout  $K[\mathfrak{S}_d]$ -module  $M$  on définit  $E_M : K\text{-Mod} \rightarrow K\text{-Mod}$  par :

$$E_M(V) := \text{Im} \left( (V^{\otimes d} \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \xrightarrow{N} (V^{\otimes d} \otimes M)^{\mathfrak{S}_d} \right) .$$

Le morphisme  $N$  apparaissant dans cette formule est la norme, qui est l'application  $M_G \rightarrow M^G$  définie pour tout groupe fini  $G$  agissant  $K$ -linéairement sur  $M$ , et qui à un coinvariant  $m$  associe l'invariant  $N(m) = \sum_{g \in G} gm$ . L'action de  $\mathfrak{S}_d$  sur le  $K$ -module  $V^{\otimes d} \otimes M$  est donnée par

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes \sigma m .$$

**Définition 5.1.** Un *foncteur élémentaire*  $E$  est un endofoncteur de  $K\text{-Mod}$  tel qu'il existe un  $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple  $M$  et un isomorphisme  $E \simeq E_M$ .

*Remarque 5.2.* Les foncteurs élémentaires sont intimement reliés aux foncteurs de Schur classiques. Nous n'utiliserons que la définition élémentaire donnée ci-dessus dans la section 5, et renvoyons le lecteur à l'appendice B pour des détails sur les relations avec les foncteurs de Schur et les représentations de  $GL_n(K)$ .

Le but de la section est d'établir le théorème suivant de décomposition tensorielle à la Steinberg pour les foncteurs absolument simples polynomiaux. Contrairement au théorème 3.4, il n'utilise pas d'hypothèse de dimension finie sur les foncteurs.

**Théorème 5.3.** *Soit  $S$  un foncteur polynomial de degré  $d > 0$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Le foncteur  $S$  est simple, et il existe des foncteurs additifs absolument simples  $\pi_i$  tels que  $S$  soit un quotient de  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ .*
- (2) *Le foncteur  $S$  est simple, et il existe des foncteurs additifs absolument simples  $A_i$  tels que  $S$  soit un sous-foncteur de  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ .*
- (3) *Il existe un entier  $n$  strictement positif, des foncteurs additifs absolument simples  $\pi_i$  deux-à-deux non isomorphes, des foncteurs élémentaires  $E_i$  non constants, et un isomorphisme :*

$$S \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n ,$$

*De plus, si  $S$  vérifie les conditions équivalentes précédentes, les foncteurs  $\pi_i$  et  $E_i$  sont uniquement déterminés (à isomorphisme près et à une permutation des indices près), et  $S$  est absolument simple.*

Le corollaire 5.4 ci-dessous donne une situation où le théorème 5.3 s'applique facilement. Des illustrations de ce corollaire seront données dans la section 6, et une généralisation en sera donnée dans la section 7, au théorème 7.5.

**Corollaire 5.4.** *Soit  $A$  un anneau. On suppose que le corps  $K$  est algébriquement clos (ou  $A$  fini et  $K$  contient toutes les racines de l'unité). Tout foncteur*

simple  $S$  polynomial non constant de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$  s'écrit de manière unique (à permutation des indices près) comme produit tensoriel :

$$S \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n ,$$

où les  $E_i$  sont des foncteurs élémentaires non constants, et les  $\pi_i : \mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$  sont des foncteurs additifs simples à valeurs de dimensions finies, deux-à-deux non isomorphes. Réciproquement, tout produit tensoriel de ce type définit un simple polynomial de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$ . (Le foncteur simple constant s'obtient par le produit tensoriel vide.)

*Démonstration.* Soit  $d = \deg S$ . Alors  $cr_d S$  est additif en chaque variable, et à valeurs de dimension finie. Les simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathbf{P}(A)^{\times d}, K)$  additifs en chaque variable sont de la forme  $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d$ , où les  $\pi_i$  sont absolument simples additifs, d'après le corollaire 2.8. En particulier,  $cr_d S$  admet une filtration finie (de longueur bornée par  $\dim_K cr_d S(A, \dots, A)$ ) dont les sous-quotients sont de la forme  $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_d$ . En utilisant l'adjonction diagonale-effets croisés et la simplicité de  $S$ , on obtient que  $S$  est un quotient du foncteur  $\Delta^* cr_d S(x) = cr_d S(x, \dots, x)$ , où  $d$  est le degré de  $S$ . Ainsi  $S$  est un quotient d'un des facteurs  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$  de la filtration de  $\Delta^* cr_d S$ . L'existence et l'unicité de la décomposition découlent du théorème 5.3.  $\square$

## 5.2 Démonstration du théorème 5.3

Nous démontrons le théorème 5.3 en une série de propositions. De manière plus précise, l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est démontrée dans la proposition 5.5, l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) est démontrée dans la proposition 5.11, l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est démontrée dans la proposition 5.13. Enfin, l'unicité de la décomposition et l'absolue simplicité des simples sont démontrées dans la proposition 5.10.

**Proposition 5.5** (Démonstration de (1) $\Leftrightarrow$ (2)). *Soit  $S$  un foncteur simple de  $\mathcal{F}(A; K)$ ,  $d \geq 0$ . Soient  $\pi_1, \dots, \pi_d$  des foncteurs absolument simples additifs. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes.*

1. *Le foncteur  $S$  est un quotient de  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ .*
2. *Le foncteur  $cr_d S$  est un facteur direct de  $\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_{\sigma(d)}$ .*
3. *Le foncteur  $S$  est un sous-foncteur de  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$ .*

*Démonstration.* Soit  $B = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$  et  $C = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_{\sigma(d)}$ . On a  $C = cr_d B$ . Montrons (1) $\Rightarrow$ (2) Par exactitude des effets croisés,  $cr_d S$  est quotient de  $cr_d B = C$ . D'après la troisième condition de la proposition 2.1,  $C$  est absolument semi-simple, donc  $S$  est un facteur direct de  $C$ . Montrons (2) $\Rightarrow$ (1). Par adjonction entre diagonale et effets croisés, il existe un morphisme non nul  $\Delta_d^* cr_d S \rightarrow S$ . Mais  $\Delta_d^* cr_d S$  est un facteur direct de  $\Delta_d^* C$  et ce dernier est isomorphe à une somme directe de  $d!$  copies de  $B$ . Il existe donc un morphisme non nul (donc un épimorphisme)  $B \rightarrow S$ . La démonstration de (2) $\Leftrightarrow$ (3) est similaire.  $\square$

Notons  $\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}^{\times n}; K)$  la catégorie des foncteurs  $F$  de  $K\text{-Mod}^{\times n}$  vers  $K\text{-Mod}$ , tels que pour tout  $(v_1, \dots, v_n)$ ,  $F(v_1, \dots, v_n)$  est la colimite des sous-espaces vectoriels  $F(u_1, \dots, u_n)$  où les  $u_i$  sont les sous-espaces de dimension finie des  $v_i$ . Par exemple, les foncteurs élémentaires sont des objets de  $\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}; K)$ .

Le lemme suivant est évident, et justifie pourquoi nous ne distinguerons pas dans la suite un foncteur élémentaire et sa restriction à la sous-catégorie  $\mathbf{P}(K)$ .

**Lemme 5.6.** *Le foncteur de restriction de  $K\text{-Mod}^{\times n}$  à  $\mathbf{P}(K)^{\times n}$  induit une équivalence de catégories :*

$$\mathcal{F}^c(K\text{-Mod}^{\times n}; K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)$$

dont un quasi-inverse  $L$  est donné en prolongeant les foncteurs par colimite sur les sous-espaces de dimension finie.

Si  $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  est un  $n$ -uplet de foncteurs additifs  $\pi_i : \mathcal{A} \rightarrow K\text{-Mod}$ , on définit un foncteur d'évaluation :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}} : \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$$

par la formule :  $\text{ev}_{\mathbb{P}}F(a) := LF(\pi_1(a), \dots, \pi_n(a))$ .

*Exemple 5.7.* Notons  $T^d : \mathbf{P}(K) \rightarrow K\text{-Mod}$  le foncteur de  $d$ -ème puissance tensorielle :  $T^d(V) = V^{\otimes d}$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $T^\lambda = T^{\lambda_1} \boxtimes \dots \boxtimes T^{\lambda_n}$ , où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers positifs. On a alors :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda = \pi_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes \pi_n^{\otimes \lambda_n} .$$

Si  $E_{\mathbb{M}} = E_{M_1} \boxtimes \dots \boxtimes E_{M_n}$  où chaque  $M_i$  est un  $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ -module simple, on a :

$$\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}} = \pi_1^*E_{M_1} \otimes \dots \otimes \pi_n^*E_{M_n} .$$

**Lemme 5.8.** *Soient  $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  et  $\mathbb{R} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$  deux uplets de foncteurs additifs absolument simples, dont les éléments sont deux-à-deux non isomorphes. Soient  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  deux uplets d'entiers strictement positifs. Soit  $F : \mathbf{P}(K)^{\times n} \rightarrow K\text{-Mod}$  un quotient d'une somme directe de copies de  $T^\lambda$  et soit  $G : \mathbf{P}(K)^{\times m} \rightarrow K\text{-Mod}$  un sous-foncteur d'un produit de copies de  $T^\mu$ .*

1. Si  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}F, \text{ev}_{\mathbb{R}}G) \neq 0$ , alors  $n = m$  et il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$  et  $\pi_i \simeq \rho_{\sigma(i)}$ .
2. Si  $\mathbb{P} = \mathbb{R}$  et  $\lambda = \mu$ , alors le foncteur  $\text{ev}_{\mathbb{P}}$  induit un isomorphisme :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)(F, G) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}F, \text{ev}_{\mathbb{P}}G) .$$

*Démonstration.* Pour les deux affirmations, il suffit de traiter le cas de  $F = T^\lambda$  et  $G = T^\mu$ , le cas général s'en déduit par exactitude à gauche des Hom.

Démontrons le premier point. Notons  $d = \sum \lambda_i$  et  $e = \sum \mu_j$ . Le foncteur  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$  est de degré  $d$  et  $\text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$  est de degré  $e$ . Par la proposition 1.11, l'existence d'un morphisme non nul  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda \rightarrow \text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$  implique  $d = e$ . Pour  $1 \leq k \leq d$ , on pose  $\pi^k := \pi_{i(k)}$  où  $i(k)$  est l'unique indice tel que  $\sum_{j < i(k)} \lambda_j \leq k < \sum_{j \leq i(k)} \lambda_j$ . On définit  $\pi : \mathcal{A}^{\times d} \rightarrow K\text{-Mod}$  par  $\pi(a_1, \dots, a_d) = \pi^1(a_1) \otimes \dots \otimes \pi^d(a_d)$ . De même, on définit  $\rho : \mathcal{A}^{\times d} \rightarrow K\text{-Mod}$  à partir du  $m$ -uplet  $\mu$  et on note  $\rho^\tau(a_1, \dots, a_d) = \rho(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(d)})$ . La proposition 1.11 et le fait qu'il n'y a pas de morphisme non nul entre un foncteur additif et un foncteur constant donne :

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda, \text{ev}_{\mathbb{P}}T^\mu) \simeq \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \rho^\tau) . \quad (*)$$

Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \rho^\tau)$ . Si on fixe toutes les variables sauf la  $k$ -ème,  $f$  induit un morphisme d'une somme directe de copies de  $\pi^k$  vers une somme directe de copies de  $\rho^{\tau^{-1}(k)}$ . En particulier, si  $f$  est non nulle alors il y a un morphisme non nul (donc un isomorphisme) de  $\pi^k$  vers  $\rho^{\tau^{-1}(k)}$ , et ceci pour tout indice  $k$  tel que  $1 \leq k \leq d$ . On en déduit qu'à permutation des facteurs près et à isomorphisme près, les facteurs des produits tensoriels  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$  et  $\text{ev}_{\mathbb{R}}T^\mu$  sont les mêmes, ce qui démontre le premier point.

Pour le deuxième point, le foncteur  $\text{ev}_{\mathbb{P}}$  est clairement fidèle, il suffit donc de montrer que les deux cotés de l'isomorphisme ont même dimension. Pour calculer la dimension du membre de droite, on utilise l'isomorphisme (\*), avec  $\lambda = \mu$  et  $\rho = \pi$ . Un terme  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)(\pi, \pi^\tau)$  est non nul si et seulement si  $\tau$  est un élément du sous-groupe de Young  $\mathfrak{S}_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_d$ , et dans ce cas  $\pi = \pi^\tau$  de sorte que le terme est de dimension 1 d'après le troisième point de la proposition 2.1. La dimension du membre de droite de l'isomorphisme vaut donc  $\lambda_1! \dots \lambda_n!$ . On montre que la dimension du membre de gauche vaut  $\lambda_1! \dots \lambda_n!$  avec la même méthode (c'est-à-dire en utilisant les propositions 1.11 et 2.1).  $\square$

Le lemme suivant est une version fonctorielle d'un théorème classique de Clausen et James, voir [10, 33, 59]. Il montre en particulier que le lemme 5.8 s'applique à des foncteurs  $F$  et  $G$  du type  $\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}$  comme dans l'exemple 5.7.

**Lemme 5.9.** *Les foncteurs élémentaires sont absolument simples. De plus pour tout  $d \geq 0$ , tout quotient simple de  $T^d$  est isomorphe à un foncteur élémentaire.*

*Démonstration.* Si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}(K, K)$ , on note  $cF = cr_d F(K, \dots, K)$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_d$  agit sur  $cF$  en permutant les copies de  $K$  en argument de  $cr_d F$ . Ceci définit un foncteur exact  $c : \mathcal{F}(K, K) \rightarrow K[\mathfrak{S}_d]\text{-Mod}$ .

Le foncteur  $c$  est *réflexif* (cf. définition 1.2). En effet, la proposition 1.11 fournit des isomorphismes de  $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules naturels en  $F$

$$cF \simeq \mathcal{F}(K, K)(T^d, F) \quad \text{et} \quad (cF)^* \simeq \mathcal{F}(K, K)(F, T^d), \quad (6)$$

l'action sur les espaces de morphismes étant induite par l'action de  $\mathfrak{S}_d$  sur  $T^d$ . Ainsi,  $c$  possède des adjoints à gauche et à droite donnés respectivement par

$$M \mapsto (T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \quad \text{et} \quad M \mapsto (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d},$$

de sorte qu'un calcul direct d'effets croisés montre la réflexivité de  $c$ , et le fait que le prolongement intermédiaire associé est la norme. L'absolue simplicité de  $E_M$  se déduit alors de la proposition 1.4 et de l'absolue simplicité des représentations simples des groupes symétriques [32, théorème 11.5].

Si  $S$  est un quotient simple de  $T^d$ , alors  $c(S)$  est non nul (utiliser le premier isomorphisme de (6)), donc la proposition 1.4 montre également que  $S$  est isomorphe à  $E_M$  pour un  $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple  $M$ .  $\square$

**Proposition 5.10** (Démonstration de l'unicité et de l'absolue simplicité). *Soient  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  deux uplets d'entiers strictement positifs. Soient  $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  et  $\mathbb{R} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$  deux uplets de foncteurs additifs absolument simples. On suppose que les éléments de  $\mathbb{P}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) sont deux-à-deux non isomorphes. Soit  $\mathbb{L} = (L_1, \dots, L_n)$  un  $n$ -uplet où chaque  $L_i$  est une représentation simple de  $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ , et soit  $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_m)$  un  $m$ -uplet où chaque  $M_i$  est une représentation simple de  $K[\mathfrak{S}_{\mu_i}]$ .*

1. Si  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \neq 0$  alors  $n = m$  et il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ ,  $A_i \simeq B_{\sigma(i)}$ , et  $L_i \simeq M_{\sigma(i)}$ .
2.  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}, \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}) \simeq K$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \neq 0$  alors, d'après le lemme 5.8,  $\lambda$  et  $\mu$  sont égaux à une permutation  $\sigma$  près, et  $\pi_i \simeq \rho_{\sigma(i)}$ . En notant  $\mathbb{M}\sigma = (M_{\sigma(1)}, \dots, M_{\sigma(n)})$  on a alors un isomorphisme de foncteurs  $\text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}} \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}\sigma}$ . Donc d'après le lemme 5.8, on a un isomorphisme :

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)(\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{L}}, \text{ev}_{\mathbb{R}}E_{\mathbb{M}}) \simeq \mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)(E_{\mathbb{L}}, E_{\mathbb{M}\sigma}) . \quad (*)$$

Puisque les deux foncteurs élémentaires  $E_L$  et  $E_M$  sont isomorphes si et seulement si  $L$  et  $M$  sont isomorphes, la non-nullité du membre de droite implique l'existence d'isomorphismes  $L_i \simeq M_{\sigma(i)}$ . Finalement, si  $\lambda = \mu$ ,  $\mathbb{P} = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{L} = \mathbb{M}$ , alors  $\sigma$  est l'identité donc  $\mathbb{M}\sigma = \mathbb{M}$  et d'après l'absolue simplicité des  $E_L$  (cf. lemme 5.9 et proposition 2.1) le membre de droite de (\*) est isomorphe à  $K$ .  $\square$

**Proposition 5.11** (Démonstration de (1) $\Rightarrow$ (3)). *Soient  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs, et  $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  un  $n$ -uplet de foncteurs additifs absolument simples et deux à deux non isomorphes. Alors tout quotient simple de  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$  est isomorphe à un foncteur de la forme  $\text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}$ , où  $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_n)$  est un uplet dont chaque  $M_i$  est un  $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ -module simple.*

*Démonstration.* D'après le lemme 5.5, un quotient simple  $S$  de  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$  est aussi un sous-foncteur de  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ . Le foncteur  $S$  est donc l'image d'un endomorphisme de  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ . Mais  $\text{ev}_{\mathbb{P}}$  induit un isomorphisme entre les endomorphismes de  $T^\lambda$  et les endomorphismes de  $\text{ev}_{\mathbb{P}}T^\lambda$ . De plus,  $\text{ev}_{\mathbb{P}}$  est exact, donc préserve les images. On en déduit que  $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}S'$ , où  $S'$  est l'image d'un endomorphisme de  $T^\lambda$ .

Comme  $\text{ev}_{\mathbb{P}}$  est exact et fidèle, la simplicité de  $S$  implique que  $S'$  est simple. Donc  $S'$  est un simple de  $\mathcal{F}(\mathbf{P}(K)^{\times n}; K)$  et un quotient de  $T^\lambda$ . Or les simples quotients de  $T^d$  sont les  $E_M$ , avec  $M$  représentation simple de  $K[\mathfrak{S}_d]$ . D'après la proposition 2.6, cela implique que  $S'$  est un quotient d'un foncteur  $E_M$ . Comme les  $E_M$  sont absolument simples,  $E_{\mathbb{M}}$  est simple d'après la proposition 2.1. Donc  $S' \simeq E_{\mathbb{M}}$ , et ainsi  $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}}E_{\mathbb{M}}$ .  $\square$

**Lemme 5.12.** *Soient  $\pi_1, \dots, \pi_d$  des foncteurs absolument simples additifs, et  $F$  un sous-foncteur de  $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d$ . Alors  $F$  admet un sous-foncteur simple.*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $F$  n'admet pas de sous-foncteur simple. Le foncteur  $F$  lui-même n'est donc pas simple, et il admet un sous-foncteur propre  $F_1$ . Le foncteur  $cr_d F_1$  est donc un facteur direct du foncteur semi-simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\times d}; K)$

$$cr_d(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \pi_{\sigma(1)} \boxtimes \dots \boxtimes \pi_{\sigma(d)},$$

donc il est semi-simple. La proposition 1.11 donne un morphisme non nul  $cr_d F_1 \rightarrow \pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_d = T$ , et comme  $T$  est simple, il existe un morphisme  $T \rightarrow cr_d F_1$ , donc un morphisme non nul  $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d \rightarrow F_1$  par la proposition 1.11. On note  $\phi_1$  la composée

$$\phi_1 : \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d \rightarrow F_1 \hookrightarrow \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_d .$$

Le foncteur  $\text{Im } \phi_1$  est un sous-foncteur de  $F_1$ , donc de  $F$ , et n'est donc pas simple. Ainsi, il existe  $F_2$  tel que  $F_2 \subsetneq \text{Im } \phi_1 \subsetneq F_1$ . En itérant ce raisonnement, on peut construire une suite infinie  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  d'endomorphismes de  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d$  tels que  $\text{Im } \phi_{n+1} \subsetneq \text{Im } \phi_n$  pour tout  $n$ . Une telle suite de morphismes est nécessairement une famille libre de  $\text{End}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_d)$ . Ceci contredit la finitude de la dimension de cette algèbre (la dimension se calcule en utilisant les propositions 1.11 et 2.1 comme dans la démonstration du lemme 5.8).  $\square$

**Proposition 5.13** (Démonstration de (3) $\Rightarrow$ (1)). *Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs, soit  $\mathbb{P} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  un  $n$ -uplet de foncteurs additifs absolument simples et deux à deux non isomorphes, et soit  $\mathbb{M} = (M_1, \dots, M_n)$  un uplet dont chaque  $M_i$  est une représentation simple de  $K[\mathfrak{S}_{\lambda_i}]$ . Alors le foncteur  $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$  est un quotient simple de  $\text{ev}_{\mathbb{P}} T^{\lambda}$ .*

*Démonstration.* Le foncteur  $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$  est clairement un quotient de  $\text{ev}_{\mathbb{P}} T^{\lambda}$ . Montrons qu'il est simple. D'après le lemme 5.12,  $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$  admet un sous-foncteur simple  $S$ . D'après la proposition 5.11,  $S \simeq \text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{L}}$  pour un certain  $n$ -uplet  $\mathbb{L}$  de représentations de groupes symétriques. Les calculs d'espaces de morphismes de la proposition 5.10 forcent alors le monomorphisme  $S \hookrightarrow \text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$  à être un isomorphisme. Ainsi  $\text{ev}_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{M}}$  est simple.  $\square$

## 6 Simples de $\mathcal{F}(A, K)$ pour $A$ anneau fini

### 6.1 Décompositions tensorielles des foncteurs simples

Nous appelons  $p$ -anneau un anneau  $A$  de caractéristique  $p^r$ , pour un nombre premier  $p$  et un entier  $r > 0$ . Si  $A$  est un anneau fini, on note  ${}_{(p)}A$  la partie  $p$ -primaire du groupe abélien  $A$ , munie de l'unique structure de  $p$ -anneau pour laquelle la surjection canonique  $A \rightarrow {}_{(p)}A$  est un morphisme d'anneaux. On note  $\pi_p : \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbf{P}({}_{(p)}A)$  le foncteur qui envoie un  $A$ -module projectif de type fini sur sa partie  $p$ -primaire. Le théorème suivant résume les résultats démontrés dans les sections 3, 4 et 5 dans le cas particulièrement simple où la catégorie source est  $\mathbf{P}(A)$  pour un anneau fini  $A$ , et où  $K$  est suffisamment gros.

**Théorème 6.1.** *Soit  $A$  un anneau fini; notons  $q$  la caractéristique de  $K$ .*

1. *Les valeurs des foncteurs simples de  $\mathcal{F}(A, K)$  sont de dimension finie.*
2. *Si  $A$  est un  $p$ -anneau et  $q = p$ , alors tous les simples sont polynomiaux. En particulier  $K$  est un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(A)$  si et seulement si c'en est un corps de décomposition non additif.*
3. *Si  $A$  est un  $p$ -anneau et  $q \neq p$ , le seul simple polynomial est le foncteur constant de valeur  $K$ .*

*Supposons de plus que  $K$  est un corps de décomposition non additif pour  $\mathbf{P}(A)$ . Notons  $P$  l'ensemble (fini) des nombres premiers tels que  ${}_{(p)}A \neq 0$ , et  $\mathcal{S}$  un ensemble fini de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs additifs  $\mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$  simples. Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}(A, K)$  est simple si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel :*

$$F \simeq \left( \bigotimes_{p \in P, p \neq q} \pi_p^* S_p \right) \otimes \left( \bigotimes_{\pi \in \mathcal{S}} \pi^* E_{\pi} \right).$$

où les  $S_p$  sont des simples de  $\mathcal{F}_{(p)}A, K$  et les  $E_\pi$  sont des foncteurs élémentaires. De plus, dans une telle décomposition, les  $S_p$  et les  $E_\pi$  sont uniquement déterminés à isomorphisme près.

*Démonstration.* Comme  $A$  est fini, les projectifs standard de  $\mathcal{F}(A, K)$  sont à valeurs de dimensions finies, donc leurs quotients (en particulier les simples) sont à valeurs de dimensions finies. Ceci prouve la première assertion. Si  $A$  est un  $p$ -anneau et  $q = p$ , la polynomialité des simples découle du corollaire 3.5. La propriété sur le corps de décomposition provient du corollaire 5.4. Si  $A$  est un  $p$ -anneau et  $q \neq p$ , alors  $\mathbf{P}(A)(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$  et il n'y a pas de foncteurs polynomiaux non constants d'après la proposition 1.10. Finalement, si  $K$  est un corps de décomposition non additif de  $\mathbf{P}(A)$ , les simples s'écrivent de manière unique comme un produit tensoriel de simples de la forme  $\pi_p^* S_p$  où les  $S_p$  sont des simples de  $\mathcal{F}_{(p)}A, K$ , d'après la proposition 4.3, et le corollaire 5.4 donne une décomposition tensorielle du simple  $\pi_q^* S_q$ .  $\square$

## 6.2 Application aux monoïdes finis de matrices

Nous donnons maintenant les conséquences du théorème 6.1 sur la structure des  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples, pour un  $p$ -anneau fini  $A$ . Se donner un  $(K, A)$ -bimodule  $B$  de dimension finie  $\ell$  sur  $K$  équivaut à se donner un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \mathcal{M}_\ell(K)$ . On en déduit pour tout  $n \geq 1$  un morphisme d'anneaux

$$\psi_B : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_\ell(K)) \simeq \mathcal{M}_{n\ell}(K) .$$

**Notation 6.2.** Pour tout  $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -module  $M$ , on note  $M^{[B]}$  le  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module obtenu par restriction le long de  $K[\psi_B] : K[\mathcal{M}_n(A)] \rightarrow K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ .

Pour un module  $M$  de la forme  $M \simeq E(K^{n\ell})$  avec  $E$  un endofoncteur des  $K$ -espaces vectoriels, on a donc un isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules  $M^{[B]} \simeq (\pi_B^* E)(A^n)$  où  $\pi_B : \mathbf{P}(A) \rightarrow K\text{-Mod}$  est le foncteur additif  $\pi_B(-) = B \otimes_A -$  (d'après la proposition 1.7, tous les foncteurs additifs sont de cette forme).

**Définition 6.3.** Un  $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -module est *élémentaire* s'il est non nul et isomorphe à un module de la forme  $E(K^{n\ell})$ , où  $E$  est un foncteur élémentaire.

Le corollaire 1.6 assure que les  $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$ -modules élémentaires sont simples, et donne une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations élémentaires de  $K[\mathcal{M}_{n\ell}(K)]$  et les classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires ne s'annulant pas sur  $K^{n\ell}$ . La traduction de théorème 6.1 en termes de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples est donc directe et donne le théorème suivant.

**Théorème 6.4.** Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini, et  $K$  un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(A)$ , de caractéristique  $p$ . Soit  $\{B_1, \dots, B_m\}$  un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de  $(K, A)$ -bimodules simples.

Un  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module  $M$  est simple si et seulement s'il existe des modules élémentaires  $M_1, \dots, M_m$  et un isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules :

$$M \simeq M_1^{[B_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[B_m]} .$$

De plus, les  $M_i$  apparaissant dans une telle décomposition sont uniquement déterminés, à isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_{n \dim_K(B_i)}(K)]$ -modules près. Enfin tous les  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples sont absolument simples.

### 6.3 Application aux groupes linéaires finis

Nous commençons par des observations élémentaires reliant un monoïde unitaire  $\mathcal{M}$  et son sous-monoïde  $\mathcal{M}^\times$  des éléments inversibles. Soit  $\iota : K[\mathcal{M}^\times] \rightarrow K[\mathcal{M}]$  l'inclusion d'anneaux. On définit deux applications  $K$ -linéaires :

$$r : K[\mathcal{M}] \rightarrow K[\mathcal{M}^\times], \quad \delta : K[\mathcal{M}] \rightarrow K \simeq \text{End}_K(K)$$

nulles sur les éléments non inversibles de  $\mathcal{M}$ , et respectivement égales à l'identité et à 1 sur  $\mathcal{M}^\times$ . Les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) le produit de deux éléments de  $\mathcal{M}$  est inversible si et seulement si les deux éléments sont inversibles,
- (ii) l'application  $r$  est un morphisme d'anneaux,
- (iii) l'application  $\delta$  est un morphisme d'anneaux.

Lorsque ces conditions sont satisfaites,  $\delta$  définit un  $K[\mathcal{M}]$ -module de dimension 1 qu'on note encore  $\delta$ .

*Exemple 6.5.* Si  $\mathcal{M}$  est un monoïde fini, ou si  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(A)$  pour un anneau commutatif  $A$ , alors  $r$  est un morphisme d'anneaux.

**Lemme 6.6.** *On suppose que  $r$  est un morphisme d'anneaux.*

1. *La restriction le long de  $r$  induit un foncteur pleinement fidèle*

$$r^* : K[\mathcal{M}^\times]\text{-Mod} \rightarrow K[\mathcal{M}]\text{-Mod}$$

*De plus  $r^*$  préserve les simples et induit une injection  $\text{Irr}(K[\mathcal{M}^\times]) \hookrightarrow \text{Irr}(K[\mathcal{M}])$  entre les classes d'isomorphismes de modules simples.*

2. *La restriction le long de  $\iota$  induit un foncteur essentiellement surjectif*

$$\iota^* : K[\mathcal{M}]\text{-Mod} \rightarrow K[\mathcal{M}^\times]\text{-Mod}.$$

*De plus  $\iota^*$  préserve les simples si et seulement si  $\delta$  préserve les  $K[\mathcal{M}]$ -modules simples. Si c'est le cas, alors  $\iota^*$  induit bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules simples  $M \otimes \delta$  et  $\text{Irr}(K[\mathcal{M}^\times])$ .*

*Démonstration.* L'énoncé est une conséquence directe des identités  $\iota^* r^* M = M$  et  $r^* \iota^* M = M \otimes \delta$ .  $\square$

Pour transporter le théorème de décomposition tensorielle 6.4 au niveau des  $K[GL_n(A)]$ -modules, nous allons calculer explicitement l'effet de la tensorisation par  $\delta$  des  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules simples. Pour cela nous avons besoin de comprendre l'effet de la torsion de Frobenius sur les  $(K, A)$ -bimodules. Soit  $B$  un  $(K, A)$ -bimodule donné par  $\psi_B : A \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell}(K)$ . Pour tout entier naturel  $r$ , on note  $\phi^r$  l'endomorphisme de Frobenius de  $\mathcal{M}_{n\ell}(K)$  donné par  $\phi^r([a_{ij}]) = [a_{ij}^r]$ . On note  $B^{(r)}$  le  $(K, A)$ -bimodule donné par  $\phi^r \circ \psi_B$ .

**Définition 6.7.** On définit l'*exposant*  $r_B$  d'un bimodule  $B$  par

$$r_B = \inf\{r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid B \simeq B^{(r)}\} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}.$$

On rappelle que si  $K$  est un surcorps de  $\mathbb{F}_q$ , le  $(K, A)$ -bimodule  $B$  est *défini* sur  $\mathbb{F}_q$  si  $\psi_B$  est conjugué à un morphisme  $\psi : A \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell}(\mathbb{F}_q)$ .

**Lemme 6.8.** Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini,  $K$  un corps de caractéristique  $p$  et  $B$  un  $(K, A)$ -bimodule simple. Alors l'exposant  $r_B$  de  $B$  est fini,  $B$  est défini sur  $\mathbb{F}_q$ ,  $q = p^{r_B}$ , et les  $B^{(k)}$ ,  $0 \leq k < r_B$  sont des bimodules simples deux-à-deux non isomorphes.

*Démonstration.* D'après [12, (7.13)]  $B$  est défini sur un sous-corps fini  $\mathbb{F}_q \subset K$ ,  $q = p^r$ , qu'on choisit minimal. Alors  $\psi_B$  est conjugué à  $\psi : A \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell}(\mathbb{F}_q)$ . Ainsi  $\phi^r \circ \psi_B$  est conjugué à  $\phi^r \circ \psi = \psi$  donc à  $\psi_B$ , d'où  $B \simeq B^{(r)}$ . Ainsi les  $B^{(k)}$ ,  $k \geq 0$ , sont tous simples, et  $r_B \leq r$ . De plus, si  $B \simeq B^{(t)}$  pour  $t < r$ , alors  $t = 0$  (sinon  $\psi$  est conjugué à  $\phi^t \circ \psi$  qui est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n\ell}(\mathbb{F}_{p^{r-t}})$ , contredisant la minimalité de  $r$ ). Donc  $r_B = r$ . Enfin si  $B^{(s)} \simeq B^{(t)}$  avec  $0 \leq s \leq t < r_B$  alors en appliquant  $(r-s)$  on obtient  $B \simeq B^{(t-s)}$  donc  $t = s$  par ce qui précède.  $\square$

**Définition 6.9.** Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini, et  $K$  un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(A)$ , de caractéristique  $p$ . Un *système fondamental* de  $(K, A)$ -bimodules simples est un ensemble  $\mathbb{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  de bimodules simples d'exposants respectifs  $r_i$ , tel que les  $B_i^{(k)}$ , pour  $1 \leq i \leq m$  et  $0 \leq k < r_i$ , forment un système de représentants des classes d'isomorphisme de  $(K, A)$ -bimodules simples.

Rappelons qu'une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est  $p^r$ -restreinte si on a  $\lambda_n < p^r$  et pour tout  $i < n$ ,  $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p^r$ . Toute partition  $p^r$ -restreinte  $\lambda$  se décompose de manière unique en une somme  $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \dots + p^{r-1}\lambda^{r-1}$  où les  $\lambda^i$  sont des partitions  $p$ -restreintes. D'après la proposition B.2 de l'appendice B, les foncteurs élémentaires sont isomorphes aux socles  $\mathbb{L}_\lambda$  des foncteurs de Schur  $\mathbb{S}_\lambda$  indexés par les partitions  $p$ -restreintes.

**Notation 6.10.** Soit  $\lambda$  une partition  $p^r$ -restreinte, et  $\lambda^0 + \dots + p^{r-1}\lambda^{r-1}$  sa décomposition à l'aide de partitions  $p$ -restreintes  $\lambda^i$ . On note :

$$L_\lambda(K^n) = L_{\lambda^0}(K^n)^{[0]} \otimes \dots \otimes L_{\lambda^{r-1}}(K^n)^{[r-1]},$$

où l'exposant  $^{[k]}$  indique la restriction d'un module le long de  $K[\phi^k]$  où  $\phi^k$  est l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$  tel que  $\phi^k([a_{ij}]) = [a_{ij}^k]$ .

**Théorème 6.11.** Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini et  $K$  un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(A)$ , de caractéristique  $p$ . Soit  $\mathbb{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  un système fondamental de  $(K, A)$ -bimodules simples. On note  $r_i$  l'exposant de  $B_i$  et  $\ell_i = \dim_K(B_i)$ .

Un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des  $K[GL_n(A)]$ -modules simples est donné par les produits tensoriels

$$\mathbb{L}_{\lambda(1)}(K^{n\ell_1})^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}_{\lambda(m)}(K^{n\ell_m})^{[B_m]}$$

où les  $\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \dots, \lambda(i)_{n\ell_i})$  parcourent l'ensemble des partitions  $p^{r_i}$ -restreintes telles que  $\lambda(i)_{n\ell_i} \neq 0$ . De plus, tous les  $K[GL_n(A)]$ -modules simples sont absolument simples.

*Démonstration.* On note  $L(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$  le  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module :

$$L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) := \mathbb{L}_{\lambda(1)}(K^{n\ell_1})^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}_{\lambda(m)}(K^{n\ell_m})^{[B_m]}.$$

Le théorème 6.11 découle directement du deuxième point du lemme 6.6 une fois démontrée la propriété (P) suivante.

(P) : Pour tout module  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module simple  $M$ , il existe un unique uplet  $(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$  de partitions  $p^{r_i}$ -restreintes  $\lambda(i)$  avec  $\lambda(i)_{n\ell_i} \neq 0$ , tel que

$$M \otimes \delta \simeq L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) .$$

D'après le théorème 6.4, les simples  $L(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$ , indexés par les partitions  $p^{r_i}$ -restreintes  $\lambda(i)$ , forment un système de représentants des classes d'isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -module simples. Pour démontrer (P), il suffit donc de calculer les modules  $L(\lambda(1), \dots, \lambda(m)) \otimes \delta$ .

D'après le lemme 6.8, on peut supposer que les bimodules  $B_i \in \mathbb{B}$  sont définis par un morphisme  $\psi_i : A \rightarrow \mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})$ . Soit  $\psi_{\mathbb{B}}$  le morphisme d'anneaux dont les composantes sont les  $\psi$ . Comme  $\mathbb{B}$  est un système fondamental de  $(K, A)$ -bimodules simples,  $\psi_{\mathbb{B}}$  admet une factorisation épi-mono :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(A) & \xrightarrow{\psi_{\mathbb{B}}} & \prod_{1 \leq i \leq m} \mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{M}_n(A)/\text{rad } \mathcal{M}_n(A) \simeq \mathcal{M}_n(A/\text{rad } A) & \end{array}$$

On en déduit que  $\psi_{\mathbb{B}}(x)$  est inversible si et seulement si  $x$  est inversible. On a donc un isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules :

$$(*) \quad \delta \simeq \delta_1^{[B_1]} \otimes \dots \otimes \delta_m^{[B_m]}$$

où chaque  $\delta_i$  désigne la représentation  $\delta$  relative à  $K[\mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})]$ .

La proposition (P) découle alors de l'isomorphisme (\*) et de la formule suivante. Pour toute partition  $p^{r_i}$ -restreinte  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n\ell_i})$  on a un isomorphisme de  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules

$$(**) \quad \mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} \simeq \begin{cases} \mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} & \text{si } \lambda_{n\ell_i} \neq 0, \\ \mathbb{L}_{\mu}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} & \text{si } \lambda_{n\ell_i} = 0, \end{cases}$$

où  $\mu$  est la partition  $p^{r_i}$ -restreinte  $\mu = (\lambda_1 + p^{r_i} - 1, \dots, \lambda_{n\ell_i} + p^{r_i} - 1)$ .

Pour achever la démonstration du théorème 6.11, il nous reste à démontrer la formule (\*). Supposons d'abord que  $\lambda_{n\ell_i} \neq 0$ . Alors, l'une au moins des partitions  $p$ -restreintes intervenant dans la décomposition de  $\lambda$  a un  $n\ell_i$ -ème terme non nul. Alors la proposition B.4 de l'appendice B donne un isomorphisme :

$$\mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} = (\mathbb{L}_{\lambda^i}(K^{n\ell_i}) \otimes \delta_i)^{[B_i]} \simeq \mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} .$$

Supposons maintenant  $\lambda_{n\ell_i} = 0$ . Alors  $\text{Im } \psi_i$  est contenue dans  $\mathcal{M}_{n\ell_i}(\mathbb{F}_{p^{r_i}})$ , et la restriction de  $\delta_i$  à ce sous-anneau coïncide avec le caractère  $\det^{\otimes p^{r_i} - 1}$ . Donc :

$$\mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i})^{[B_i]} \otimes \delta_i^{[B_i]} = (\mathbb{L}_{\lambda^i}(K^{n\ell_i}) \otimes \delta_i)^{[B_i]} = (\mathbb{L}_{\lambda}(K^{n\ell_i}) \otimes \det^{\otimes p^{r_i} - 1})^{[B_i]} .$$

De plus, comme  $p^{r_i} - 1 = \sum_{0 \leq k < r_i} (p-1)p^k$  on a

$$\det^{\otimes p^{r_i} - 1} = \det^{\otimes p-1} \otimes (\det^{\otimes p-1})^{[1]} \otimes \dots \otimes (\det^{\otimes p-1})^{[r_i-1]} ,$$

de sorte que la proposition B.4 de l'appendice B nous donne le calcul désiré.  $\square$

## 6.4 Simples polynomiaux et non polynomiaux. Conjecture sur les fonctions de dimension

Le théorème 6.1 permet d'exprimer un foncteur simple de  $\mathcal{F}(A, K)$  en un produit tensoriel de simples de deux types différents : des simples polynomiaux, et des simples non polynomiaux.

Il y a une dichotomie dans l'étude de ces deux types de simples, qui se voit déjà au niveau de la paramétrisation des objets simples. En effet, le théorème 6.1 permet de paramétriser les simples polynomiaux en termes de partitions et des  $(K, A)$ -bimodules simples.

*Exemple 6.12.* Si  $K$  est un corps de caractéristique  $p$  et  $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ , les simples polynomiaux de  $\mathcal{F}(A, K)$  sont paramétrisés par les partitions  $p$ -restreintes.

A contrario, la proposition 6.13 ci-dessous montre la difficulté à donner une paramétrisation combinatoire des simples non polynomiaux, même pour  $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  avec  $p$  inversible dans  $K$ . En effet, la proposition 6.13 montre qu'une paramétrisation des foncteurs simples donnerait une paramétrisation des  $K[GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})]$ -modules simples (pour tous les  $n$ ). Mais la description des classes de conjugaison des différents groupes  $GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$  est un problème sauvage, d'après un théorème de Bondarenko-Nagornyj cité dans [60, § 4].

**Proposition 6.13.** *Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie dont les idempotents se scindent, et telle que  $\mathcal{C}(x, y)$  soit fini pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ . On a une bijection*

$$\Phi : \bigsqcup_{[a] \in \text{Iso}(\mathcal{C})} \text{Irr}(K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod}) \xrightarrow{\cong} \text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)).$$

De plus,  $\Phi$  envoie les représentations absolument simples sur les foncteurs absolument simples.

*Démonstration.* Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}$ , on a un morphisme d'anneaux  $r_a : K[\text{End}_{\mathcal{C}}(a)] \rightarrow K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$  qui est l'identité sur les éléments inversibles de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(a)$  et nul sur les éléments non inversibles. On note  $T_a : K[\text{End}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  le prolongement intermédiaire associé à l'évaluation d'un foncteur sur  $a$ . D'après le lemme 6.6 et le corollaire 1.6, le foncteur  $\Phi_a = T_a \circ r_a^*$  est pleinement fidèle et induit une injection (toujours notée  $\Phi_a$ ) :

$$\Phi_a : \text{Irr}(K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]\text{-Mod}) \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)) \quad [M] \rightarrow [T_a(r_a^*M)].$$

Pour démontrer la proposition, il reste à montrer que tout élément de  $\text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$  est dans l'image de  $\Phi_a$  pour un élément  $a$  unique à isomorphisme près.

Pour voir que tout élément  $[S]$  de  $\text{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{C}; K))$  est dans l'image d'un  $\Phi_a$ , prenons un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $S(x) \neq 0$ . Par le corollaire 1.6,  $S(x)$  est un  $K[\text{End}_{\mathcal{C}}(x)]$ -module simple. Comme le monoïde  $\text{End}_{\mathcal{C}}(x)$  est fini, [53, thm 5.5] donne un idempotent  $e \in \text{End}_{\mathcal{C}}(x)$  tel que  $eS(x)e \neq 0$  et tel que les éléments non inversibles du monoïde  $e\text{End}_{\mathcal{C}}(x)e$  opèrent par 0 sur  $S(x)$ . Soit  $a$  l'image de  $e$  dans  $\mathcal{C}$  (qui existe par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ ). On déduit que  $S(a)$  est un  $K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$ -module simple et que  $S$  est isomorphe à l'image par  $\Phi_a$  de  $S(a) (\simeq eS(x))$ .

Il reste à voir que si  $a$  et  $b$  sont deux éléments non isomorphes de  $\mathcal{C}$ , les images de  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  sont disjointes. Cela peut se déduire facilement des résultats de [53, § 5.2], ou s'établir directement en observant que la formule donnant le prolongement intermédiaire  $T_a$  montre que, si  $M$  est un  $K[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(a)]$ -module (non nécessairement simple), alors  $T_a(r_a^*M)(x)$  ne peut être non nul que si  $a$  est facteur direct de  $x$ .  $\square$

La dichotomie entre simples polynomiaux et non polynomiaux se voit également au niveau des fonctions de dimension. Rappelons que si  $F$  est un foncteur de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$ , sa *fonction de dimension* est la fonction

$$d_F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \dim_K F(A^n) .$$

Une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est dite *polynomiale* si elle est la restriction d'une fonction  $\mathbf{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  polynomiale au sens d'Eilenberg-Mac Lane rappelé au § 1.4. De manière équivalente,  $\mathbf{f}$  est un polynôme numérique, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers de coefficients binomiaux  $n \mapsto C_n^k$  (ou  $n \mapsto \binom{n}{k}$  en notation anglo-saxonne). Le lemme suivant, bien connu, est conséquence directe de la décomposition de  $F(A^n)$  à l'aide des effets croisés (cf. la section 1.4).

**Lemme 6.14.** *Soit  $A$  un anneau et soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(A, K)$ . Si  $F$  est polynomiale, alors  $d_F$  est une fonction polynomiale de même degré que  $F$ , sinon  $d_F$  croît plus vite que toute fonction polynomiale.*

Nous formulons toutefois une conjecture restreignant fortement les valeurs possibles pour les dimensions prises par les foncteurs simples dans ce contexte. Cette conjecture est valide lorsque  $A$  est un  $p$ -anneau fini *semi-simple*. Nous verrons, au corollaire 8.20, que ceci peut s'établir facilement<sup>3</sup> à partir des résultats de Kuhn [41]. Nous montrerons en fait pour les  $p$ -anneaux finis semi-simples une version plus précise de la conjecture (la conjecture 8.18).

**Conjecture 6.15.** *Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini. On suppose  $\text{car}(K) \neq p$ . Alors pour tout foncteur simple  $F$  de  $\mathcal{F}(A, K)$ , il existe une fonction polynomiale  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_F(n) = f(p^n)$ .*

## 7 Renforcement et conséquences du théorème 5.3

Dans cette section, nous montrons comment étendre le champ d'application des résultats de la section 5. Cela repose sur une étude fine des effets croisés (§ 7.1), qui nous permet (§ 7.2) d'affaiblir les hypothèses du théorème 5.3 pour parvenir à la même conclusion — nous donnons aussi un énoncé pour un corps de coefficients pas assez gros qui nous servira dans la section 8. Au § 7.3, nous affaiblissons encore les hypothèses nécessaires lorsque la catégorie source est de la forme  $\mathbf{P}(A)$ , où  $A$  est un anneau *commutatif*. Les § 7.4 et 7.5 sont dédiés à des applications à connotations représentationniste et arithmétique.

### 7.1 Compléments sur les effets croisés

Soient  $\mathcal{D}$  une catégorie abélienne et  $d \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{D})$  des foncteurs qui sont additifs par rapport à chacune des  $d$  variables et  $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  la catégorie des objets de  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  multi-symétriques au sens suivant.

Plus précisément, pour un objet  $F$  de  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , on pose  $(F.\sigma)(a_1, \dots, a_d) := F(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)})$ . Un objet de  $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  est un objet

<sup>3</sup> Nagpal a démontré [44, théorème 1.1], à l'aide de méthodes différentes, un résultat analogue pour les foncteurs de type fini des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini *avec injections* vers les espaces vectoriels sur un corps d'une autre caractéristique.

$F$  de  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  muni d'isomorphismes  $\xi_\sigma : F.\sigma \simeq F$ , pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , tels que pour tous  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_d$  la composée suivante soit égale à  $\xi_{\sigma\tau}$  :

$$F.(\sigma\tau) = (F.\sigma).\tau \xrightarrow{\xi_{\sigma.\tau}} F.\tau \xrightarrow{\xi_\tau} F .$$

Les morphismes de  $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  sont les morphismes des objets sous-jacents de  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  qui sont compatibles aux isomorphismes structuraux  $\xi_\sigma$ . On dispose d'une paire de foncteurs :

$$\mathcal{O} : \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightleftarrows \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) : \mathcal{L}$$

où  $\mathcal{O}$  désigne le foncteur d'oubli, et  $\mathcal{L}$  envoie  $F$  sur l'objet  $\mathcal{L}(F) = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.\tau$  muni de la structure symétrique donnée par les isomorphismes

$$\xi_\sigma : \mathcal{L}(F).\sigma = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.(\tau\sigma) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} F.\tau = \mathcal{L}(F)$$

fournis par l'isomorphisme d'échange des facteurs induit par la bijection  $\tau \mapsto \tau\sigma$  de l'ensemble d'indexation  $\mathfrak{S}_d$ . Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 7.1.** *Le foncteur  $\mathcal{L}$  est adjoint des deux côtés au foncteur  $\mathcal{O}$ .*

Le foncteur de  $d$ -ème effet croisé se restreint en un foncteur (toujours noté  $cr_d$ )  $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ , qui se relève à travers  $\mathcal{O}$  en un foncteur que nous noterons  $\mathbf{Cr}_d$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) & \xrightarrow{\mathbf{Cr}_d} & \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \\ & \searrow^{cr_d} & \downarrow \mathcal{O} \\ & & \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \end{array} .$$

**Proposition 7.2** (Pirashvili, cf. [46]). *Soient  $\mathcal{D}$  une catégorie abélienne et  $d \in \mathbb{N}$ . Le foncteur  $\mathbf{Cr}_d : \mathcal{P}ol_d(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \rightarrow \Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  est réflexif.*

**Corollaire 7.3.** *Si  $F$  est un foncteur simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ , polynomial de degré  $d$ , alors  $\mathbf{Cr}_d(F)$  est un objet simple de  $\Sigma\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{D})$  et le foncteur  $\mathbf{Cr}_d$  induit un isomorphisme de corps  $\text{End}(F) \simeq \text{End}(\mathbf{Cr}_d(F))$ .*

*Démonstration.* L'objet  $\mathbf{Cr}_d(F)$  est non nul car  $\mathcal{O}(\mathbf{Cr}_d(F)) = cr_d(F) \neq 0$ . Le corollaire découle donc directement des propositions 1.4 et 7.2.  $\square$

Les résultats de structure sur les foncteurs  $\mathbf{Cr}_d$  et  $\mathcal{O}$  nous permettent d'obtenir dans la proposition suivante des renseignements importants sur la structure des foncteurs  $cr_d(F)$  lorsque  $F$  est un foncteur simple.

**Proposition 7.4.** *Soit  $F$  un foncteur simple de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , polynomial de degré  $d$ .*

1. *Le foncteur  $cr_d(F)$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{E})$  est semi-simple : il existe un foncteur simple  $S$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^d, \mathcal{E})$ , un sous-ensemble  $E$  de  $\mathfrak{S}_d$ , et un isomorphisme*

$$cr_d(F) \simeq \bigoplus_{\sigma \in E} S.\sigma .$$

2. Il existe des entiers naturels  $n$  et  $m$  vérifiant  $0 < nm \leq d!$  de sorte que l'anneau  $\text{End}(cr_d(F))$  soit isomorphe au produit d'anneaux de matrices  $\mathcal{M}_n(\text{End}(S))^m$ .
3. Le morphisme d'anneaux  $\text{End}(F) \rightarrow \text{End}(cr_d(F))$  induit par  $cr_d$  fait de  $\text{End}(cr_d(F))$  un  $\text{End}(F)$ -espace vectoriel de dimension au plus  $d!$ .

*Démonstration.* Le foncteur  $\mathcal{O}$  est adjoint à gauche au foncteur  $\mathcal{L}$ , qui commute aux colimites. Par conséquent,  $\mathcal{O}$  préserve les objets de type fini. D'après le corollaire 7.3,  $\text{Cr}_d F$  est un simple de  $\Sigma \mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , son image par  $\mathcal{O}$  est donc non nulle et de type fini, et possède donc un quotient simple  $T$ . Par adjonction il existe un morphisme non nul, donc injectif,  $\text{Cr}_d F \rightarrow \mathcal{L}(T)$ . D'où un morphisme :

$$cr_d(F) = \mathcal{O}(\text{Cr}_d F) \hookrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}(T) = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{S}_d} T.\tau.$$

Les foncteurs  $T.\tau$  sont des objets simples de  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , tout comme  $T(-.\tau)$  définissant un automorphisme de la catégorie  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ . La première assertion en découle. En regroupant les termes isomorphes dans la décomposition de  $cr_d(F)$  on obtient un isomorphisme  $cr_d(F) \simeq \bigoplus_{i=1}^m S^{\oplus n}.\sigma_i$  pour des permutations  $\sigma_i$  convenables, de sorte que  $S.\sigma_i$  et  $S.\sigma_j$  ne soient jamais isomorphes pour  $i \neq j$ . Cela fournit la deuxième assertion. Pour la troisième assertion, on utilise que  $\text{Cr}_d(F)$  est simple d'après le corollaire 7.3, donc  $\mathcal{L}\mathcal{O}\text{Cr}_d(F) \simeq \text{Cr}_d(F)^{\oplus d!}$ . Ainsi, le morphisme d'anneaux

$$\text{End}(F) \simeq \text{End}(\text{Cr}_d(F)) \rightarrow \text{End}(\mathcal{O}\text{Cr}_d(F)) \simeq \text{Hom}(\text{Cr}_d(F), \mathcal{L}\mathcal{O}\text{Cr}_d(F))$$

fait de  $\text{End}(\mathcal{O}\text{Cr}_d(F)) = \text{End}(cr_d(F))$  un espace vectoriel de dimension au plus  $d!$  sur  $\text{End}(F)$ .  $\square$

## 7.2 Forme générale du corollaire 5.4

Nous pouvons maintenant établir la généralisation suivante du corollaire 5.4, dans laquelle la catégorie  $\mathbf{P}(\mathcal{A})$  est remplacée par une petite catégorie additive quelconque  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 7.5.** *Supposons que  $K$  est un corps de décomposition de  $\mathcal{A}$ . Un foncteur polynomial  $F$  de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  est simple si et seulement s'il est isomorphe à un produit tensoriel*

$$F \simeq \pi_1^* E_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n^* E_n$$

où  $n \in \mathbb{N}$ , les  $\pi_i$  sont des foncteurs additifs simples deux à deux non isomorphes de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  et les  $E_i$  sont des foncteurs élémentaires non constants. De plus, l'entier  $n$  et les classes d'isomorphisme des  $E_i$  et des  $\pi_i$  sont uniques, à permutation des facteurs près. Enfin les foncteurs polynomiaux simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$  sont absolument simples.

*Démonstration.* Soit  $n$  le degré de  $F$ . L'adjonction diagonale-effets croisés de la proposition 1.11 donne un morphisme non nul  $\Delta^* cr_n(F) \rightarrow F$  qui est un épimorphisme par simplicité de  $S$ . D'après la proposition 7.4,  $cr_n F$  est semi-simple. Comme  $K$  est un corps de décomposition de  $\mathcal{A}$ , il découle des propositions 2.1 et 2.6 que les facteurs directs de  $cr_d(F)$  sont de la forme  $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_n$  pour des foncteurs  $\pi_i$  absolument simples. Ainsi  $F$  est un quotient d'un produit tensoriel  $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n$  et le théorème 7.5 découle du théorème 5.3.  $\square$

*Remarque 7.6.* Dans l'énoncé précédent, on ne peut généralement pas s'affranchir de l'hypothèse que  $K$  est un corps de décomposition de  $\mathcal{A}$ , même si  $F$  est *absolument* simple. Considérons par exemple le foncteur quadratique  $F$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$  associant à un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes hermitiennes sur  $V^*$ . On vérifie facilement que  $F$  est absolument simple, mais il n'admet pas de décomposition à la Steinberg, car la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(\mathbb{C}); \mathbb{R})$ , qui est  $\mathbb{C}$ -linéaire, ne contient *aucun* foncteur absolument simple.

Le théorème 7.5, le corollaire 3.7 et la proposition 2.3 entraînent aussitôt le résultat suivant, dont nous ne connaissons pas de démonstration directe.

**Corollaire 7.7.** *Tout corps de décomposition de  $\mathcal{A}$  qui contient toutes les racines de l'unité est un corps de décomposition non additif de  $\mathcal{A}$ .*

Dans le cas où le corps  $K$  n'est pas assez gros, on a le résultat plus faible suivant.

**Théorème 7.8.** *Soit  $F$  un foncteur polynomial simple de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; K)$ . Il existe une extension finie de corps commutatifs  $K \subset L$  telle que le foncteur  $F \otimes_K L$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$  possède une filtration finie dont les sous-quotients sont du type*

$$(E_1 \circ A_1) \otimes \cdots \otimes (E_n \circ A_n)$$

où les  $A_i$  sont des foncteurs additifs absolument simples de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{A}; L)$  et les  $E_i$  des foncteurs élémentaires non constants.

*Démonstration.* Soit  $S$  un sous-foncteur simple de  $cr_d(F)$  (cf. proposition 7.4), où  $d$  est le degré de  $F$ . Par la proposition 2.5, il existe une extension finie  $K \subset L$  telle que  $S \otimes_K L$  possède une filtration finie dont les sous-quotients sont absolument simples (dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^d; L)$ ).

Comme  $cr_d(F)$  est somme directe d'un nombre fini de foncteurs du type  $S \cdot \sigma$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , et que le foncteur  $- \otimes_K L : \mathcal{F}(\mathcal{A}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$  commute aux effets croisés, on voit que tous les sous-quotients simples de  $cr_d(F \otimes_K L)$  (dans  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; L)$ ) sont absolument simples. Le foncteur  $F \otimes_K L$  possède une filtration finie (de longueur bornée par le degré de  $L$  sur  $K$ ) dont les sous-quotients  $T_i$  sont simples, polynomiaux, à valeurs de dimension finie. Par construction, les sous-quotients simples de  $cr_d(T_i)$  sont absolument simples dans  $\mathbf{Add}_d(\mathcal{A}; L)$ , de sorte qu'on conclut que  $T_i$  a la forme souhaitée comme dans la démonstration du théorème précédent.  $\square$

*Remarque 7.9.* Si  $F$  est *absolument* simple, la proposition 7.4 montre qu'on peut choisir  $L$  de degré au plus  $d!$  sur  $K$ , où  $d$  est le degré de  $F$ .

### 7.3 Simples polynomiaux de $\mathcal{F}(A, K)$ ( $A$ commutatif)

La proposition 7.10 étend le champ d'application du théorème 7.5 à des foncteurs dont on sait seulement qu'ils prennent *une* valeur de dimension finie.

**Proposition 7.10.** *Soient  $A$  un anneau **commutatif** et  $F$  un foncteur simple polynomial de degré  $d$  de  $\mathcal{F}(A, K)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le foncteur  $F$  est à valeurs de dimension finie.*

2. Le foncteur  $F$  prend une valeur de dimension finie non nulle.
3. Le corps  $\text{End}(F)$  est de dimension finie sur  $K$ .
4. Le foncteur  $cr_d(F)$  est à valeurs de dimension finie.

Si on suppose de plus que  $A$  est un anneau de type fini, alors  $F$  vérifie automatiquement les assertions précédentes.

*Démonstration.* La proposition 1.11 donne un morphisme  $\Delta^* cr_d(F) \rightarrow F$  non nul, qui est un épimorphisme par simplicité de  $F$ . Ceci prouve l'implication  $4 \Rightarrow 1$ . L'implication  $1 \Rightarrow 2$  est immédiate, et  $2 \Rightarrow 3$  est une conséquence du corollaire 1.6. Montrons  $3 \Rightarrow 4$ . La proposition 7.4 et l'hypothèse sur  $\text{End}(F)$  donnent des extensions d'anneaux (non nécessairement commutatifs) de degrés finis

$$K \subset \text{End}(F) \subset \text{End}(cr_d(F)) \simeq \mathcal{M}_n(\text{End}(S))^m$$

pour des entiers  $n, m > 0$  convenables (où  $S$  est un sous-foncteur simple de  $cr_d F$ ). Ainsi,  $\text{End}(S)$  est de degré fini sur  $K$ . Or  $S$  est un objet simple de  $\mathbf{Add}_d(A, K) \simeq (A^{\otimes d} \otimes K)\text{-Mod}$  (où tous les produits tensoriels sont pris sur  $\mathbb{Z}$ ), par une application itérée de la proposition 1.7. Comme l'anneau  $A^{\otimes d} \otimes K$  est commutatif, un module simple sur celui-ci est un quotient qui est un corps commutatif  $L$ , et le corps des endomorphismes de ce module simple s'identifie à  $L$ . Par conséquent, le fait que  $\text{End}(S)$  soit de degré fini sur  $K$  implique que  $S$  prend des valeurs de dimension finie. Comme  $cr_d(F)$  est une somme directe finie de foncteurs du type  $S \cdot \sigma$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  (proposition 7.4), on en déduit que  $cr_d(F)$  prend également des valeurs de dimension finie, ce qui achève la démonstration de  $3 \Rightarrow 4$ . Finalement si  $A$  est de type fini, alors  $A^{\otimes d} \otimes K$  est une  $K$ -algèbre commutative de type fini, donc tout module simple sur cette algèbre est de dimension finie. Ainsi  $cr_d(F)$  est à valeurs de dimension finie, car c'est une somme directe de simples de  $\mathbf{Add}_d(A, K) \simeq (A^{\otimes d} \otimes K)\text{-Mod}$ .  $\square$

*Remarque 7.11.* Le résultat tombe en défaut si l'on omet l'hypothèse de commutativité de  $A$ . En effet l'implication  $3 \Rightarrow 4$  est déjà fautive pour  $d = 1$ , car un  $A^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ -bimodule simple peut être de dimension infinie sur  $K$  sans être absolument simple (sur  $K$ ). Par exemple, si  $k$  est un corps de dimension infinie sur son centre  $K$ , le  $(k, k)$ -bimodule  $k$  est absolument simple mais de dimension infinie sur  $K$ .

*Remarque 7.12.* Dans la démonstration de la proposition 7.10, le fait que le corps des endomorphismes d'un foncteur simple de  $\mathbf{Add}_d(A, K)$  est commutatif joue un rôle important. On notera toutefois que le corps des endomorphismes d'un foncteur simple polynomial de  $\mathcal{F}^{df}(A, K)$  (avec  $A$  et  $K$  commutatifs) n'est pas nécessairement commutatif. Donnons-en un exemple quadratique dans  $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$  : on a un morphisme surjectif  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (donné par l'identité et la conjugaison) de  $\mathbb{R}[\mathfrak{S}_2]$ -algèbres, où l'action de  $\mathfrak{S}_2$  est donnée par l'échange des facteurs à la source et la conjugaison au but. On en déduit un morphisme surjectif de  $\mathbb{R}$ -algèbres de  $\mathfrak{S}_2 \int \mathbb{C}$  (où  $\mathbb{C}$  est vu comme  $\mathbb{R}$ -algèbre) sur l'algèbre tordue (relativement à l'action de conjugaison) du groupe  $\mathfrak{S}_2$  sur  $\mathbb{C}$ . Or cette algèbre tordue est isomorphe à la  $\mathbb{R}$ -algèbre  $\mathbb{H}$  des quaternions. Cela montre qu'il existe un  $\mathfrak{S}_2 \int \mathbb{C}$ -module simple dont le corps d'endomorphismes est  $\mathbb{H}$ , d'où par prolongement intermédiaire un foncteur quadratique simple de  $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$  ayant la même propriété.

## 7.4 Applications aux représentations polynomiales

Soit  $k$  un corps infini. On rappelle qu'une représentation  $V$  de dimension finie du monoïde multiplicatif  $\mathcal{M}_n(k)$  est dite *polynomiale* si le morphisme d'action  $\rho : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \text{End}_k(V)$  est un polynôme des coefficients des matrices. Les restrictions des représentations polynomiales de  $\mathcal{M}_n(k)$  à  $GL_n(k)$  sont les *représentations polynomiales de  $GL_n(k)$* . Cette notion de représentation polynomiale, dont l'idée remonte à la thèse de Schur, et dont l'ouvrage de Green [28] fait une étude systématique, a fait l'objet d'une littérature intensive. La définition suivante donne une notion plus faible, mais plus souple, de représentation *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* (*EML-polynomiale* en abrégé).

**Définition 7.13.** Soient  $A$  un anneau,  $k$  un anneau commutatif,  $n \in \mathbb{N}$  et  $M$  une représentation  $k$ -linéaire du monoïde multiplicatif  $\mathcal{M}_n(A)$ . On dit que  $M$  est une représentation *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* si le morphisme de monoïdes multiplicatifs  $\rho : \mathcal{M}_n(A) \rightarrow \text{End}_k(M)$  donnant l'action est une fonction polynomiale au sens d'Eilenberg-Mac Lane, cf. section 1.4.

Une représentation de  $GL_n(A)$  est dite *polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane* si elle est restriction d'une représentation EML-polynomiale de  $\mathcal{M}_n(A)$ .

La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane de  $\rho$  ne fait intervenir que la structure *additive* des anneaux  $\mathcal{M}_n(A)$  et  $\text{End}_k(V)$  (la structure multiplicative ne joue aucun rôle), tandis que le fait que  $\rho$  est une représentation signifie la compatibilité à leur structure *multiplicative* (avec préservation de l'unité; la structure additive ne joue aucun rôle). La polynomialité à la Eilenberg-Mac Lane est donc une forme de propriété *arithmétique* des représentations.

*Exemple 7.14.* On dispose des exemples élémentaires suivants.

1. Si  $A$  est un anneau fini, toute représentation de  $\mathcal{M}_n(A)$  ou de  $GL_n(A)$  est EML-polynomiale.
2. Si  $A = k$  est un corps infini toute représentation polynomiale de  $\mathcal{M}_n(A)$  ou de  $GL_n(A)$  au sens classique est EML-polynomiale.
3. La notion de représentation EML-polynomiale est stable par restriction le long d'un morphisme d'anneaux. (En effet, c'est la cas pour la notion de fonction polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane).
4. La notion de représentation EML polynomiale est stable par sous-quotient et par produit tensoriel.

**Notation 7.15.** Si  $M$  est une représentation de  $\mathcal{M}_n(B)$  ou de  $GL_n(B)$ , on note  $M^{[\phi]}$  la représentation de  $\mathcal{M}_n(A)$  ou  $GL_n(A)$  obtenue par restriction le long d'un morphisme d'anneaux  $\phi : A \rightarrow B$ .

La proposition suivante donne le lien entre représentations EML-polynomiales et foncteurs polynomiaux. Notons  $\mathcal{P}ol(A, k)$  la sous-catégorie pleine des foncteurs polynomiaux de  $\mathcal{F}(A, k)$ , et  $k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-}\mathcal{P}ol$  la sous-catégorie pleine des  $k[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules qui sont EML-polynomiaux.

**Proposition 7.16.** *Soit  $A$  un anneau et  $k$  un anneau commutatif. L'évaluation sur  $A^n$  induit un foncteur plein et essentiellement surjectif :*

$$\mathcal{P}ol(A, k) \rightarrow k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-}\mathcal{P}ol .$$

*De plus, toute représentation EML-polynomiale simple est l'évaluation sur  $A^n$  d'un foncteur polynomial simple uniquement déterminé à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Le caractère plein du foncteur est donné par la proposition 1.4. Soit  $T : k[\mathcal{M}_n(A)]\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{F}(A, k)$  le foncteur de prolongement intermédiaire associé à l'évaluation sur  $A^n$ . Alors pour tout module  $M$ , l'objet  $A^n$  est un support et un cosupport du foncteur  $T(M)$ . La polynomialité de  $T(M)$  découle alors du lemme 3.13. L'essentielle surjectivité découle alors de l'isomorphisme  $T(M)(A^n) \simeq M$ . Enfin, si  $M$  est simple,  $T(M)$  est l'unique simple dont l'évaluation sur  $A^n$  donne  $M$  d'après la proposition 1.4.  $\square$

*Remarque 7.17.* Soit  $k$  un corps infini. Les représentations polynomiales au sens classique de  $\mathcal{M}_n(k)$  s'obtiennent par évaluation sur  $k^n$  des foncteurs *strictement polynomiaux* au sens de Friedlander et Suslin [24].

**Définition 7.18.** Une représentation EML-polynomiale de  $\mathcal{M}_n(K)$  est dite *élémentaire* si elle est de la forme  $E(K^n)$  pour un foncteur élémentaire  $E$ .

Les représentations élémentaires de  $\mathcal{M}_n(K)$  sont polynomiales au sens classique. L'énoncé suivant peut donc être interprété comme un résultat de rigidité, qui permet d'exprimer des représentations polynomiales à la Eilenberg-Mac Lane à partir de représentations polynomiales au sens classique.

**Théorème 7.19.** *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $M$  une représentation  $K$ -linéaire de dimension finie de  $\mathcal{M}_n(A)$ . On suppose que  $M$  est EML-polynomiale et que  $K$  est un corps de décomposition de  $\mathbf{P}(A)$ . Alors  $M$  est simple si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit tensoriel*

$$M \simeq M_1^{[\phi_1]} \otimes \dots \otimes M_m^{[\phi_m]}$$

où les  $M_i$  sont des représentations élémentaires de  $\mathcal{M}_n(K)$ , et les  $\phi_i : A \rightarrow k$  sont des morphismes d'anneaux. De plus, les morphismes  $\phi_i$  et les  $M_i$  sont *uniquement déterminés* (à une permutation des indices près). Enfin, si  $M$  est simple, elle est *absolument simple*.

*Démonstration.* D'après la proposition 7.16, la représentation  $M$  peut se relever de manière unique en un foncteur polynomial simple  $F$ . Ce dernier prend des valeurs de dimensions finies dès que  $M$  est de dimension finie sur  $K$  d'après la proposition 7.10. Le théorème est alors une traduction directe du théorème de décomposition tensorielle 7.5 dans  $\mathcal{F}(A, K)$  via l'évaluation sur  $A^n$ .  $\square$

En restreignant l'action du monoïde  $\mathcal{M}_n(A)$  au groupe  $GL_n(A)$ , on en déduit le théorème 4 de l'introduction (en raisonnant comme au § 6.3 pour l'unicité).

## 7.5 Traductions arithmétiques

**Corollaire 7.20.** *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $\varphi : A \rightarrow K$  une fonction polynomiale (au sens d'Eilenberg-Mac Lane) de degré  $d > 0$  et multiplicative au sens où  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$  pour tous  $x, y \in A$ . Alors il existe une extension finie de corps commutatifs  $K \subset L$  de degré au plus  $d!$  et des morphismes d'anneaux  $f_i : A \rightarrow L$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , tels que*

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x).$$

De plus, on dispose du résultat d'unicité suivant : si  $g_1, \dots, g_r : A \rightarrow L$  sont des morphismes d'anneaux tels que

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) = \prod_{i=1}^r g_i(x),$$

on a  $r = d$  et il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  telle que  $g_i = f_{\sigma(i)}$  pour tout  $i$  dans chacun des deux cas suivants :

1.  $\text{car}(K) = 0$  ;
2.  $\text{car}(K) = p > 0$  et pour tout indice  $i$ , l'ensemble  $\{j \mid g_j = g_i\}$  est de cardinal strictement inférieur à  $p$ .

*Démonstration.* Le morphisme  $\varphi$  définit une représentation absolument simple EML-polynomiale de dimension 1 sur  $K$  du monoïde multiplicatif  $A$ . La démonstration de l'existence de la décomposition est la même que dans le théorème 7.19, en utilisant le théorème 7.8 (et de la proposition 7.4 pour la borne sur le degré — cf. remarque 7.9) au lieu du théorème 7.5 (noter qu'il n'y a pas besoin de filtration car le foncteur considéré prend une valeur de dimension 1).

Pour établir le résultat d'unicité, quitte à agrandir  $K$ , on peut supposer  $K = L$ . Écrivons

$$\varphi = \prod_{i=1}^r g_i^{a_i}$$

où les  $g_i$  sont des morphismes d'anneaux  $A \rightarrow K$  deux à deux distincts et  $a_i \in \mathbb{N}^*$ . On suppose également  $\text{car}(K) = 0$ , ou  $a_i < \text{car}(K)$  pour tout  $i$ .

Cela implique que la puissance symétrique  $S^{a_i}$  (sur  $K$ ) est un endofoncteur élémentaire des  $K$ -espaces vectoriels. Ainsi, notre décomposition se traduit par un isomorphisme

$$F \simeq \bigotimes_{i=1}^r g_i^* S^{a_i}$$

(c'est vrai lorsqu'on évalue  $F$  sur  $A$ , et l'on conclut par un argument de prolongement intermédiaire) de sorte que l'unicité dans la décomposition de Steinberg pour les foncteurs simples polynomiaux établit notre assertion.  $\square$

*Remarque 7.21.* En caractéristique  $p > 0$ , la décomposition n'est pas nécessairement unique si l'on ne fait aucune hypothèse. Toutefois, si l'on impose que le nombre  $r$  de facteurs égale le degré  $d$  (c'est-à-dire  $\sum_i a_i = d$  avec les notations ci-dessus) de la fonction polynomiale  $\varphi$ , alors on a nécessairement unicité, car cela implique  $a_i < p$  pour tout  $i$  — sinon, comme  $a_j^p$  est un morphisme d'anneaux, la fonction  $\varphi$  serait de degré polynomial au plus  $(\sum_i a_i) + 1 - p < d$ . Ainsi, la propriété d'unicité du corollaire 7.20 implique celle de la proposition 5 de l'introduction.

Dans ce qui suit, on reformule une partie des résultats du corollaire 7.20.

Introduisons à cet effet quelques notations.

Si  $A$  et  $B$  sont des anneaux, notons  $\text{Pol}_\mu(A, B)$  l'ensemble des applications  $f : A \rightarrow B$  polynomiales (au sens d'Eilenberg-Mac Lane) qui préservent la multiplication ( $f(xy) = f(x)f(y)$  pour tous  $x, y$  dans  $A$ ) et l'unité. La multiplication (point par point) fait de  $\text{Pol}_\mu(A, B)$  un sous-monoïde du monoïde multiplicatif sous-jacent à l'anneau  $\text{Pol}(A, B)$ . Si l'on suppose  $B$  commutatif, il est commutatif, de sorte que l'inclusion dans  $\text{Pol}_\mu(A, B)$  de l'ensemble  $\mathbf{Ann}(A, B)$  des

morphismes d'anneaux de  $A$  dans  $B$  s'étend de façon unique en un morphisme de monoïdes commutatifs  $\Phi_{A,B} : \mathbb{N}[\mathbf{Ann}(A, B)] \rightarrow \text{Pol}_\mu(A, B)$ , où  $\mathbb{N}[E]$  désigne le monoïde commutatif libre sur un ensemble  $E$ .

La proposition suivante découle directement du corollaire 7.20.

**Proposition 7.22.** *Soit  $A$  un anneau commutatif.*

1. *Si  $K$  est algébriquement clos, le morphisme de monoïdes  $\Phi_{A,K}$  est surjectif.*
2. *Si  $K$  est de caractéristique nulle, alors  $\Phi_{A,K}$  est injectif.*
3. *Si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ , notons  $\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)$  le quotient de l'ensemble  $\mathbf{Ann}(A, K)$  par la relation d'équivalence engendrée par  $f \sim f^p$ , et choisissons une section à la projection de façon à voir  $\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)$  comme un sous-ensemble de  $\mathbf{Ann}(A, K)$ . Alors la restriction à  $\mathbb{N}[\overline{\mathbf{Ann}}(A, K)]$  de  $\Phi_{A,K}$  est injective.*

Notons  $G(K)$  le monoïde des endomorphismes de corps de  $K$  (qui est un groupe si  $K$  est algébriquement clos et de degré de transcendance fini sur son sous-corps premier, ou de degré fini sur son sous-corps premier). Comme précédemment, on dispose d'un morphisme d'anneaux  $\chi_K : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \text{End}(K^\times)$ , et l'image du sous-semi-anneau  $\mathbb{N}[G(K)]$  de  $\mathbb{Z}[G(K)]$  est incluse dans l'ensemble des morphismes multiplicatifs  $K^\times \rightarrow K^\times$  qui se prolongent en une fonction polynomiale  $K \rightarrow K$ .

**Corollaire 7.23.** *1. Si  $K$  est algébriquement clos, alors  $\chi_K(\mathbb{N}[G(K)])$  est exactement l'ensemble des morphismes multiplicatifs  $K^\times \rightarrow K^\times$  qui se prolongent en une fonction polynomiale  $K \rightarrow K$ .*

2. *Si  $K$  est de caractéristique nulle, alors  $\chi_K$  est injectif.*
3. *Si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ , alors le noyau de  $\chi_K$  est l'idéal (bilatère) de  $\mathbb{Z}[G(K)]$  engendré par l'élément central  $\text{Fr} - p$ , où  $\text{Fr} \in G(K)$  désigne le morphisme de Frobenius.*

## 8 Applications : propriétés de finitude

On rappelle qu'un objet  $x$  d'une catégorie de Grothendieck  $\mathcal{E}$  est dit *de longueur finie*, ou simplement *fini*, s'il possède une filtration finie dont les sous-quotients sont simples, et qu'il est dit *de présentation finie* si le foncteur  $\mathcal{E}(x, -) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Ab}$  commute aux colimites filtrantes.

**Notation 8.1.** Dans cette section, nous considérerons les hypothèses suivantes :

- **LNC**( $\mathcal{A}, K$ ) : pour tout idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$ , la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$  est localement noethérienne.
- **PFA**( $\mathcal{A}, K$ ) : tous les foncteurs simples à valeurs de dimension finie de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  sont de présentation finie.
- **TFA**( $\mathcal{A}, K$ ) : pour tout idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I}$  et tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , le foncteur  $\mathcal{I}(x, -)$  est de type fini.

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur  $\mathcal{A}$  et  $K$ , il nous arrivera de noter simplement **LNC** au lieu de **LNC**( $\mathcal{A}, K$ ), et de même pour **PFA** et **TFA**.

Les lettres **LN** (resp. **PF**, **TF**) abrègent la propriété *localement noethérienne* (resp. *de présentation finie*, *de type fini*), et **A** (resp. **C**) indique qu'elle se rapporte aux foncteurs *additifs* (resp. aux idéaux  *$K$ -cotriviaux*).

*Exemple 8.2.* Si  $\mathcal{A}$  ne possède pas d'autre idéal  $K$ -cotrivial que  $\mathcal{A}$  (cf. exemple 3.2), alors **LNC** et **TFA** sont trivialement vérifiées.

*Exemple 8.3.* Si  $A$  est un anneau quelconque, alors la catégorie  $\mathbf{P}(A)$  vérifie la propriété **LNC** (pour tout corps commutatif  $K$ ). Vu que les idéaux  $K$ -cotriviaux de  $\mathbf{P}(A)$  proviennent d'idéaux bilatères à quotient fini de  $A$ , il suffit pour le voir de vérifier que  $\mathcal{F}(A, K)$  est localement noethérienne pour tout anneau fini  $A$  et tout corps commutatif  $K$ . Ce profond résultat de finitude a été démontré par Putman-Sam [49, théorème C] (voir aussi Sam-Snowden [50, corollaire 8.3.3]).

*Exemple 8.4.* La propriété **PFA** est vérifiée si la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  est localement noethérienne. C'est notamment le cas si  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$  où  $A$  est un anneau tel que l'anneau  $A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} K$  soit noethérien à gauche, d'après la proposition 1.7.

*Exemple 8.5.* Les travaux d'Auslander fournissent de nombreux exemples de cas où la propriété **PFA** est vérifiée sans que la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  soit localement noethérienne. Soient  $A$  une  $K$ -algèbre de dimension finie et  $A\text{-mod}$  la catégorie des modules à gauche finis sur  $A$ . La propriété **PFA**( $A\text{-mod}$ ,  $K$ ) est toujours vérifiée, d'après [3, corollaire 3.4 ou théorème 3.5]. En revanche,  $\mathbf{Add}(A\text{-mod}; K)$  n'est pas localement noethérienne si  $A$  a un type de représentation infini, en vertu de [3, théorème 3.12 ou 3.13].

**Théorème 8.6.** *Si les hypothèses  $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$  et  $\mathbf{LNC}(A^{op}, K)$  sont vérifiées, alors la classe des foncteurs de longueur finie de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$  est stable par produit tensoriel.*

Le théorème 8.6 s'applique en particulier à  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ , où  $A$  est un anneau arbitraire, d'après l'exemple 8.3.

**Théorème 8.7.** *1. La propriété **PFA** est vérifiée si et seulement si tous les foncteurs polynomiaux finis à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont de présentation finie.*

*2. Si les propriétés **PFA**, **LNC** et **TFA** sont vérifiées, alors tous les foncteurs finis à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont de présentation finie.*

Dans la suite de cette section, nous démontrons ces deux théorèmes et discutons de leurs conditions d'application. Nous donnerons également des généralisations du théorème 8.7 en termes de propriétés de finitude des résolutions projectives des foncteurs finis à valeurs de dimension finie.

## 8.1 Rappels sur les propriétés de finitude

On rappelle que  $\mathcal{E}$  désigne une catégorie de Grothendieck et qu'un objet de  $\mathcal{E}$  est dit *noethérien* (resp. *artinien*) si toute famille de sous-objets possède un élément maximal (resp. minimal) pour l'inclusion. La classe des objets noethériens (resp. artiniens) de  $\mathcal{E}$  est stable par somme directe finie, sous-quotient et extensions. Un objet de  $\mathcal{E}$  est noethérien (resp. artinien) si et seulement si tous ses sous-objets (resp. tous ses quotients) sont de type fini (resp. de type cofini).

Un objet de  $\mathcal{E}$  est de longueur finie (on dira souvent simplement *fini* dans la suite) si et seulement s'il est noethérien et artinien. La catégorie  $\mathcal{E}$  est dite *localement noethérienne* (resp. *localement finie*, *localement artinienne*, *localement de type fini*) si elle est engendrée par ses objets noethériens (resp. finis, artiniens, de type fini). Par exemple, si  $A$  est un anneau, la catégorie des  $A$ -modules à gauche

est localement noethérienne (resp. localement finie, ou localement artinienne) si et seulement si  $A$  est noethérien (resp. artinien) à gauche.

**Définition 8.8.** Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Un objet  $X$  de  $\mathcal{E}$  est dit de *n-présentation finie* ou, en abrégé, *pf<sub>n</sub>*, si pour tout foncteur  $\Phi$  d'une petite catégorie filtrante  $I$  vers  $\mathcal{E}$ , le morphisme canonique

$$\operatorname{colim}_I \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, -) \circ \Phi \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}}^i(X, \operatorname{colim}_I \Phi)$$

bijectif pour  $i < n$  et injectif pour  $i = n$  (si  $n < \infty$ ).

Pour  $n > 0$ , il suffit d'exiger que ces applications soient bijectives pour  $i < n$ , ce qui implique l'injectivité pour  $i = n$  par des arguments formels. En particulier, les objets *pf<sub>1</sub>* sont les objets de présentation finie.

Les objets *pf<sub>0</sub>* sont les objets de type fini. Lorsque la catégorie  $\mathcal{E}$  est engendrée par des objets projectifs de type fini, comme c'est le cas pour  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$  (où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie et  $k$  un anneau), il est équivalent de demander qu'existe une suite exacte

$$\cdots \rightarrow P_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

où les  $P_i$  sont projectifs de type fini pour  $i \leq n$ .

Le produit tensoriel de deux objets projectifs du type  $P_{\mathcal{A}}^t$  est encore du même type, ce dont on déduit que le produit tensoriel de deux foncteurs *pf<sub>n</sub>* de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est encore *pf<sub>n</sub>*.

Si la catégorie  $\mathcal{E}$  est localement noethérienne, alors tous ses objets de type fini sont noethériens et de présentation finie. Si  $\mathcal{E}$  possède de plus assez d'objets projectifs de type fini, comme c'est le cas de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ , alors ils sont même *pf<sub>∞</sub>*.

Les lemmes classiques suivants nous permettront de nous ramener, pour l'étude de propriétés de finitude dans des catégories de foncteurs du type  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  ou  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ , au cas où le corps  $K$  est assez gros.

**Lemme 8.9.** Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $K \subset L$  une extension de corps commutatifs et  $F$  un foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ .

1. Si  $F$  est un foncteur de longueur finie de  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$ , alors  $F \otimes L$  est de longueur finie dans  $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; L)$ .
2. Si  $F \otimes L$  est fini (resp. noethérien, artinien) dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ , alors il en est de même pour  $F$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Le foncteur  $F$  est *pf<sub>n</sub>* dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  si et seulement si  $F \otimes L$  est *pf<sub>n</sub>* dans  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$ .

*Démonstration.* Notons  $\alpha : \mathcal{F}(\mathcal{C}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$  le foncteur de post-composition par le foncteur d'extension des scalaires  $- \otimes L : K\text{-Mod} \rightarrow L\text{-Mod}$ . Comme  $\alpha$  est un foncteur exact, il suffit de montrer la première assertion lorsque  $F$  est *simple*, auquel cas  $\operatorname{End}(F)$  est un corps (non nécessairement commutatif) qui est une  $K$ -algèbre de dimension finie, disons  $d$ , puisque  $F$  est à valeurs de dimension finie. On voit alors, en utilisant des arguments déjà employés dans la section 2, que  $\alpha(F)$  est fini, de longueur majorée par  $d$  : si  $T$  est un quotient de  $\alpha(F)$ , l'image  $G$  de  $T$  par le foncteur d'oubli  $\beta : \mathcal{F}(\mathcal{C}; L) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  est semi-simple isotypique de type  $F$  (comme celle de  $\alpha(F)$ ). Il s'ensuit que le foncteur  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)(\alpha(F), -) \simeq \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)(F, -) \circ \beta : \mathcal{F}(\mathcal{C}; L) \rightarrow L\text{-Mod}$  a une restriction à la

sous-catégorie pleine des sous-quotients de sommes directes finies de copies de  $F$  qui est exacte et fidèle. Comme l'image de  $F$  par ce foncteur est  $L \otimes \text{End}(F)$ , qui est de longueur finie  $d$  dans la catégorie des  $L$ -espaces vectoriels, on en obtient bien le résultat souhaité.

Comme le foncteur  $\alpha$  est exact et fidèle, il induit une fonction strictement croissante entre ensembles de sous-objets ordonnés par inclusion, ce qui établit la deuxième assertion. Du fait que  $\alpha$  commute également aux colimites, on en déduit aussi que  $F$  est de type fini si c'est le cas de  $\alpha(F)$ .

Par ailleurs,  $\alpha$  préserve les foncteurs projectifs de type fini (et est exact), de sorte que, si  $F$  est  $pf_n$ , alors  $\alpha(F)$  est  $pf_n$ .

La réciproque se montre par récurrence sur  $n$  : le cas  $n = 0$  est traité ci-dessus, et le cas général provient de ce que si  $F$  est de type fini, on peut trouver une suite exacte courte  $0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$  avec  $P$  projectif de type fini, de sorte que  $F$  est  $pf_n$  si et seulement si  $G$  est  $pf_{n-1}$ . L'application du foncteur exact  $\alpha$  à cette suite et l'hypothèse de récurrence permettent de conclure.  $\square$

*Remarque 8.10.* On notera que la petite catégorie source  $\mathcal{C}$  peut être quelconque (ce qui n'est pas le cas si l'on recherche un bon comportement de la propriété  $pf_n$  relativement au produit tensoriel, par exemple), et que l'extension de corps  $K \subset L$  n'a pas besoin d'être finie. Si l'on suppose de plus l'extension finie, on peut s'affranchir de l'hypothèse de valeurs de dimension finie dans la première assertion.

La démonstration du résultat suivant est laissée au lecteur.

**Lemme 8.11.** *Soient  $K \subset L$  une extension finie de corps commutatifs et  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Notons  $\Phi : \mathbf{Add}(\mathcal{A}; L) \rightarrow \mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  le foncteur de restriction des scalaires au but.*

1. *Le foncteur  $\Phi$  préserve les foncteurs de longueur finie et les foncteurs à valeurs de dimension finie.*
2. *Un foncteur  $F$  de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$  est  $pf_n$  si et seulement si  $\Phi(F)$  est  $pf_n$ .*

*Remarque 8.12.* Les lemmes 8.9 et 8.11 sont susceptibles de généralisations dans lesquelles la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  (resp.  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ ) est remplacée par une catégorie de Grothendieck  $K$ -linéaire  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; L)$  (resp.  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$ ) par  $\mathcal{E}_L$  (cf. remarque 2.11). On notera de plus que toute catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$  est équivalente à une catégorie du type  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  (considérer la catégorie préadditive  $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$  et prendre pour  $\mathcal{A}$  la catégorie additive associée).

## 8.2 Propriétés de finitude des idéaux $K$ -cotriviaux

On discute dans cette sous-section des liens entre les propriétés **LNC**, **TFA** et **PFA** (ainsi que d'une propriété similaire qu'on introduit ci-dessous) et de certaines de leurs conséquences générales sur la structure des catégories de foncteurs qu'on étudie. Cela sera utilisé d'abord pour discuter plus en détails la conjecture 6.15, puis pour établir une réciproque partielle du théorème 8.7 (qui justifie l'introduction de nos conditions de finitude).

Si  $k$  est un anneau commutatif, nous aurons parfois à considérer (notamment dans le corollaire 8.37) la propriété suivante :

- **LNA**( $\mathcal{A}, k$ ) : la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$  est localement noethérienne.

On note que  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  implique  $\mathbf{TFA}(\mathcal{A}, K)$ . On remarque par ailleurs que la propriété  $\mathbf{TFA}(\mathcal{A}, K)$  ne dépend que de la caractéristique de  $K$  (c'est également le cas de la propriété  $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$ , mais c'est nettement moins immédiat). En revanche,  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, k)$  dépend bien plus de  $k$  : par exemple, si le corps  $K$  n'est pas de type fini sur son sous-corps premier  $k$ ,  $\mathbf{LNA}(\mathbf{P}(K), k)$  est vérifiée, mais pas  $\mathbf{LNA}(\mathbf{P}(K), K)$ . La propriété  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, K)$  entraîne également  $\mathbf{PFA}(\mathcal{A}, K)$ . Si  $K$  est un corps fini ou un corps de nombres, alors  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  implique  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, K)$ .

La raison de la considération de la propriété  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, k)$  (notamment pour  $k = \mathbb{Z}$ ) n'est pas seulement d'obtenir une condition suffisante pour garantir que certaines hypothèses du théorème 8.7 sont satisfaites : elle apparaîtra dans les généralisations que nous en donnerons à la propriété  $pf_n$  pour  $n > 1$  (corollaire 8.37). Une autre raison pour laquelle la condition  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  est raisonnable dans ce contexte (au vu de la condition  $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$ ) est la suivante :

**Proposition 8.13.** *Si  $\mathcal{E}$  est non nulle et si la catégorie  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  est localement noethérienne (resp. localement finie), alors  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  est vérifiée (resp.  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est localement finie).*

*Démonstration.* La catégorie  $\mathcal{E}$  est nécessairement localement noethérienne (considérer les foncteurs constants), il existe donc un objet noethérien non nul  $M$  dans  $\mathcal{E}$ . Le foncteur  $M[\mathcal{A}(x, -)]$  est alors de type fini pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , donc noethérien. Cela implique que le foncteur additif  $\mathcal{A}(x, -)$  est noethérien, car  $M[-]$  définit un foncteur  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  qui induit des fonctions strictement croissantes entre ensembles de sous-foncteurs ordonnés par inclusion. Le cas localement fini se démontre de la même façon.  $\square$

**Lemme 8.14.** *On suppose que, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , le groupe abélien  $\mathcal{A}(x, y)$  est fini et que  $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K$  est nul.*

1. *Si  $K$  contient les racines de l'unité, alors on dispose d'un isomorphisme  $K[\mathcal{A}(x, -)] \simeq K^{\mathcal{A}(x, -)^{\sharp}}$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , où  $(-)^{\sharp} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  désigne la dualité des groupes abéliens finis.*
2. *Si la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est localement artinienne, alors le foncteur  $K[\mathcal{A}(x, -)]$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est de type cofini pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Si  $K$  contient les racines de l'unité et que  $V$  est un groupe abélien fini tel que  $V \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$ , alors  $V^{\sharp}$  est naturellement isomorphe au groupe abélien des morphismes de  $V$  vers le groupe multiplicatif  $K^{\times}$ . De plus,  $K[V]$  est une  $K$ -algèbre semi-simple naturellement isomorphe à l'algèbre produit  $K^{V^{\sharp}}$ . Cela fournit la première assertion.

Commençons par montrer la deuxième assertion lorsque  $K$  contient les racines de l'unité : si  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est localement artinienne, alors le foncteur additif de type fini  $\mathcal{A}(x, -)$  est artinien pour tout  $x \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$ . Il s'ensuit que son dual  $\mathcal{A}(x, -)^{\sharp}$  est un foncteur noethérien, donc de type fini, de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}^{op}; \mathbb{Z})$ , c'est-à-dire qu'il est isomorphe à un quotient d'un foncteur du type  $\mathcal{A}(-, t)$ . Il s'ensuit que  $K^{\mathcal{A}(x, -)^{\sharp}}$  est isomorphe à un sous-foncteur de  $K^{\mathcal{A}(-, t)}$  (dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ ), et est donc de type cofini.

Traitons maintenant le cas général : soit  $K \subset L$  une extension de corps commutatifs, où  $L$  contient les racines de l'unité. Le foncteur  $L[\mathcal{A}(x, -)]$  est de type cofini dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; L)$ , donc à co-support fini. Il s'ensuit qu'il est également à co-support fini dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ , donc son sous-foncteur  $K[\mathcal{A}(x, -)]$  possède la

même propriété. Comme un foncteur à co-support fini et à valeurs de dimension finie est de type cofini, cela achève la démonstration.  $\square$

Ce lemme nous permet de discuter la condition  $\text{LNC}(\mathcal{A}, K)$  par l'intermédiaire de l'énoncé suivant :

**Proposition 8.15.** *On suppose que, pour tous objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{A}$ , le groupe abélien  $\mathcal{A}(x, y)$  est fini et que  $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} K$  est nul.*

*On suppose également que les catégories  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$  sont localement noethériennes.*

*Il y a alors équivalence entre :*

1. *la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est localement finie ;*
2. *la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est localement finie ;*
3. *la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est localement artinienne.*

*Démonstration.*  $1 \Rightarrow 2$  est contenu dans la proposition 8.13.

$2 \Rightarrow 3$  est évident.

$3 \Rightarrow 1$  : soit  $x$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Le foncteur de type fini  $P_{\mathcal{A}}^x$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est noethérien puisque cette catégorie est localement noethérienne. Le lemme 8.14 montre par ailleurs qu'il est de type cofini. Comme il est à valeurs de dimension finie, cela signifie que son dual  $K^{\mathcal{A}(x, -)}$  est de type fini dans la catégorie localement noethérienne  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$ , donc noethérien. En reprenant le dual on en déduit que  $P_{\mathcal{A}}^x$  est artinien. Par conséquent, les générateurs  $P_{\mathcal{A}}^x$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont finis et cette catégorie est localement finie.  $\square$

### Retour sur les catégories $\mathcal{F}(A, K)$ ( $A$ anneau fini)

**Corollaire 8.16.** *Soient  $A$  un anneau fini tel que  $A \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$ . La catégorie  $\mathcal{F}(A, K)$  est localement finie.*

*Démonstration.* Nous avons déjà vu (exemple 8.3) que  $\mathcal{F}(A, K)$  et  $\mathcal{F}(A^{op}, K)$  sont localement noethériennes, grâce aux travaux de Putman-Sam-Snowden. Par ailleurs, la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A); \mathbb{Z})$  est équivalente (proposition 1.7) à  $A^{op}\text{-Mod}$ , qui est localement finie puisque  $A$  est un anneau fini. La conclusion résulte donc de la proposition précédente.  $\square$

*Remarque 8.17.* Les travaux de Putman-Sam-Snowden montrent que  $\mathcal{F}(A, k)$  est localement noethérienne pour tout anneau fini  $A$  et tout anneau commutatif noethérien  $k$ , y compris lorsque  $A \otimes_{\mathbb{Z}} k$  n'est pas nul. En revanche, le corollaire précédent nécessite de façon cruciale la nullité de ce produit tensoriel. En effet, il est classique que la catégorie  $\mathcal{F}(\mathbf{F}, \mathbf{F})$ , où  $\mathbf{F}$  est un corps fini, est de dimension de Krull infinie (cela découle par exemple des travaux de Powell [48]).

Le corollaire 8.16 nous permet de préciser la conjecture 6.15 comme suit.

Commençons par introduire, dans un cadre général, quelques notations (dont nous nous servirons également, dans un autre contexte, dans l'appendice A).

Si  $A$  est un anneau,  $E$  un objet de  $\mathbf{P}(A)$  et  $M$  une représentation de  $\text{Aut}_A(E)$  de dimension finie sur  $K$ , définissons un foncteur de  $\mathcal{F}(A, K)$

$$Q_M := K[\text{Inj}_A(E, -)] \otimes_{K[\text{Aut}_A(E)]} M \quad (7)$$

où  $\text{Inj}_A(E, V)$  désigne l'ensemble des monomorphismes  $A$ -linéaires scindés  $E \rightarrow V$  (on fait de  $K[\text{Inj}_A(E, -)]$  un foncteur de  $\mathcal{F}(A, K)$  quotient de  $P_{\mathbf{P}(A)}^E$  en tuant, dans  $P_{\mathbf{P}(A)}^E(V) = K[\text{Hom}_A(E, V)]$ , les morphismes  $E \rightarrow V$  qui ne sont pas des monomorphismes scindés). Cette construction a été introduite et étudiée (dans le cas où  $A = K$  est un corps fini) par Powell [48]. Le foncteur  $Q_M$  est de type fini, puisque c'est un quotient d'une somme directe finie de copies de  $P_{\mathbf{P}(A)}^E$ . Il est donc *fini* sous les hypothèses du corollaire 8.16, ce qui nous permet de formuler la conjecture suivante.

**Conjecture 8.18.** *Sous les hypothèses du corollaire 8.16, les classes des foncteurs  $Q_M$ , lorsque  $M$  parcourt les représentations simples sur  $K$  des différents groupes d'automorphismes d'objets de  $\mathbf{P}(A)$ , engendrent le groupe de Grothendieck des objets finis de  $\mathcal{F}(A, K)$ .*

**Proposition 8.19.** *La conjecture 8.18 implique la conjecture 6.15.*

*Démonstration.* Soit  $A$  un  $p$ -anneau fini, où  $p$  est un nombre premier différent de la caractéristique de  $K$ .

Il suffit de démontrer que, si  $M$  est une représentation de dimension finie sur  $K$  de  $\text{Aut}_A(E)$ , pour un objet  $E$  de  $\mathbf{P}(A)$ , la fonction de dimension  $d_{Q_M}$  peut s'exprimer sous la forme  $n \mapsto f(p^n)$  où  $f$  est une fonction polynomiale. Pour tout objet  $V$  de  $\mathbf{P}(A)$ , le  $\text{Aut}_A(E)$ -ensemble à droite  $\text{Inj}_A(E, V)$  est *libre*, de sorte que

$$d_{Q_M}(n) = \frac{|\text{Inj}_A(E, A^n)|}{|\text{Aut}_A(E)|} \cdot \dim_K(M)$$

où  $|T|$  désigne le cardinal d'un ensemble fini  $T$ . Il suffit donc de montrer que la fonction  $n \mapsto |\text{Inj}_A(E, A^n)|$  est de la forme précédente.

Notons  $J$  le radical de Jacobson de  $A$ . La réduction modulo  $J$  induit, pour tout  $A$ -module à gauche  $V$ , une surjection  $\text{Hom}_A(E, V) \rightarrow \text{Hom}_{A/J}(E/J.V, V/J.V)$  dont chaque fibre est équipotente à  $\text{Hom}_A(E, J.V)$ ; de plus, un élément de  $\text{Hom}_A(E, V)$  appartient à  $\text{Inj}_A(E, V)$  si et seulement si son image appartient à  $\text{Inj}_{A/J}(E/J.V, V/J.V)$ . Il s'en suit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\text{Inj}_A(E, A^n)| = |\text{Inj}_{A/J}(E/J.E, (A/J)^n)| \cdot |\text{Hom}_A(E, J)|^n ;$$

comme  $\text{Hom}_A(E, J)$  est un  $p$ -groupe abélien fini, il suffit donc de vérifier que la fonction  $n \mapsto |\text{Inj}_{A/J}(E/J.E, (A/J)^n)|$  est du type  $n \mapsto f(p^n)$  pour une fonction polynomiale  $f$ . Mais le théorème de structure des anneaux artiniens montre que  $A/J$  est isomorphe à un produit d'anneaux de matrices sur des corps finis de caractéristique  $p$ , de sorte que le comptage classique des injections linéaires entre deux espaces vectoriels finis permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 8.20.** *La conjecture 6.15 est vraie pour un  $p$ -anneau fini semi-simple  $A$  (où  $p \neq \text{car}(K)$ ).*

*Démonstration.* Si  $A$  est un corps, les résultats de Kuhn [41] montrent que les  $Q_M$ , où  $M$  parcourt  $\text{Irr}(K[GL_n(A)]\text{-Mod})$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) sont exactement (à isomorphisme près) les foncteurs simples de  $\mathcal{F}(A, K)$ , de sorte que les conjectures 8.18 et donc 6.15, par la proposition 8.19, sont vérifiées. Par équivalence de Morita, cela s'étend au cas où  $A$  est un anneau de matrices sur un corps fini de caractéristique  $p$ . Dans le cas général,  $A$  est isomorphe à un produit fini de

tels anneaux, et les conjectures restent valables grâce aux résultats de la section 2 (le corollaire 2.8 suffit si  $K$  contient toutes les racines de l'unité, et un argument de changement de base au but tel que la proposition 2.5 permet de s'y ramener).  $\square$

### Une réciproque du théorème 8.7

**Lemme 8.21.** *Soient  $k$  un anneau,  $A, B : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  des foncteurs additifs. Le morphisme canonique*

$$\varphi_{A,B} : k[\mathrm{Hom}(A, B)] \rightarrow \mathrm{Hom}(k[A], k[B])$$

*est injectif. Il est bijectif si  $A$  est de type fini.*

*Démonstration.* Si  $A$  est un foncteur représentable  $\mathcal{A}(t, -)$ , le lemme de Yoneda entraîne que  $\varphi_{A,B}$  est un isomorphisme. Supposons maintenant que  $A$  est une somme directe  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}(t_i, -)$  de tels foncteurs. On a donc  $\mathrm{Hom}(A, B) \simeq \prod_{i \in I} B(t_i)$ .

Soit  $x \neq 0$  un élément de  $k[\mathrm{Hom}(A, B)] \simeq k[\prod_{i \in I} B(t_i)]$  :  $x$  peut s'écrire comme

$\sum_{n=1}^m \lambda_n [\xi_n]$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_n \in k \setminus \{0\}$  et les  $\xi_n$  sont des éléments deux à deux distincts de  $\prod_{i \in I} B(t_i)$ . Il existe donc une partie finie  $J$  de  $I$  telle que les

projections des  $\xi_n$  dans  $\prod_{i \in J} B(t_i)$  soient deux à deux distinctes. Ainsi, l'image

de  $x$  dans  $k[\mathrm{Hom}(A', B)]$ , où  $A' := \bigoplus_{i \in J} \mathcal{A}(t_i, -) \simeq \mathcal{A}(\bigoplus_{i \in J} t_i, -)$ , par l'application

induite par l'inclusion  $A' \hookrightarrow A$  est non nulle. Comme  $\varphi_{A',B}$  est injective d'après ce qui précède, la naturalité en  $A$  de  $\varphi_{A,B}$  implique que l'image de  $x$  par  $\varphi_{A,B}$  est non nulle :  $\varphi_{A,B}$  est donc injective.

On en déduit l'injectivité de  $\varphi_{A,B}$  pour *tout* foncteur additif  $A$  en écrivant un tel foncteur comme quotient d'une somme directe de foncteurs additifs représentables et en utilisant la préservation des monomorphismes par le foncteur  $k[-]$ .

Par ailleurs, toute suite exacte

$$Z \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{p} X \rightarrow 0 \quad (\text{resp. } 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z)$$

de groupes abéliens induit une suite exacte naturelle de  $k$ -modules

$$k[Y \oplus Z] \xrightarrow{\beta} k[Y] \xrightarrow{\alpha} k[X] \rightarrow 0 \quad (\text{resp. } 0 \rightarrow k[X] \rightarrow k[Y] \rightarrow k[Z])$$

où  $\beta([(y, z)]) = [y + q(z)] - [y]$  et  $\alpha([y]) = [p(y)]$  (l'autre cas est analogue).

Si  $A$  est de type fini, on peut trouver une suite exacte de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  du type  $Q \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$ , où  $P$  est représentable. On déduit de ce qui précède et de la naturalité de  $\varphi$  un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k[\mathrm{Hom}(A, B)] & \longrightarrow & k[\mathrm{Hom}(P, B)] & \longrightarrow & k[\mathrm{Hom}(P \oplus Q, B)] \\ & & \varphi_{A,B} \downarrow & & \varphi_{P,B} \downarrow & & \varphi_{P \oplus Q, B} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k[A], k[B]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k[P], k[B]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k[P \oplus Q], k[B]). \end{array}$$

D'après le début de la démonstration,  $\varphi_{P,B}$  est bijectif et  $\varphi_{P \oplus Q, B}$  est injectif, ce qui implique que  $\varphi_{A,B}$  est bijectif, comme souhaité.  $\square$

**Lemme 8.22.** *Soient  $k$  un anneau non nul et  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un foncteur additif. Si le foncteur  $k[A]$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  est de type fini (resp. de présentation finie), alors le foncteur  $A$  est de type fini (resp. de présentation finie) dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Que  $k[A]$  de type fini entraîne  $A$  de type fini résulte (cf. démonstration de la proposition 8.13) de ce que  $k[-]$  induit une fonction strictement croissante entre ensembles ordonnés de sous-foncteurs.

Supposons maintenant  $k[A]$  de présentation finie. Comme le foncteur  $k[-] : \mathbf{Ab} \rightarrow k\text{-Mod}$  commute aux colimites filtrantes, il en est de même pour  $\text{Hom}(k[A], -) \circ k[-] : \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ . Mais  $k[A]$ , donc  $A$ , est de type fini, d'après ce qu'on a vu plus haut. Par conséquent, le lemme 8.21 montre que  $\text{Hom}(k[A], -) \circ k[-] \simeq k[-] \circ \text{Hom}(A, -)$ . Comme le foncteur  $k[-]$  commute aux colimites filtrantes et reflète les isomorphismes (car  $k \neq 0$ ), la commutation de cette composée aux colimites filtrantes entraîne la même propriété pour  $\text{Hom}(A, -)$ , c'est-à-dire que  $A$  est de présentation finie.  $\square$

La proposition et le corollaire suivants établissent une réciproque partielle à la deuxième assertion du théorème 8.7.

**Proposition 8.23.** *Soit  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  un idéal  $K$ -cotrivial. Supposons que la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$  est localement finie. Si tous les foncteurs du type  $\pi_{\mathcal{I}}^*(S)$  sont de présentation finie dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ , où  $S$  est un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ , alors le foncteur  $\mathcal{I}(x, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  est de type fini pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Comme la classe des foncteurs de présentation finie est stable par extensions, l'hypothèse implique que  $\pi_{\mathcal{I}}^*(F)$  est un foncteur de présentation finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  pour tout foncteur fini  $F$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ . Comme cette dernière catégorie est supposée localement finie, pour tout  $x \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , le foncteur de type fini  $P_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}^x$  est fini, de sorte que  $\pi_{\mathcal{I}}^*(P_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}^x) = K[\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)]$  est de présentation finie dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ . Le lemme 8.22 montre alors que  $\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)$  est de présentation finie dans  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{I}(x, -)$  est de type fini.  $\square$

**Corollaire 8.24.** *Soit  $A$  un anneau. Si tous les foncteurs simples à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(A, K)$  (ou seulement ceux factorisant par la réduction modulo un idéal  $K$ -cotrivial) sont de présentation finie, alors la propriété  $\mathbf{TFA}(\mathbf{P}(A); K)$  est vérifiée.*

*Démonstration.* Combiner la proposition 8.23 et le corollaire 8.16.  $\square$

*Exemple 8.25.* Soient  $k$  un corps fini de caractéristique différente de celle de  $K$ ,  $A$  un anneau de polynômes en une infinité de variables sur  $k$  et  $I$  l'idéal d'augmentation de  $A$ . Alors  $I$  est un idéal  $K$ -cotrivial de  $A$ , qui n'est pas de type fini. Le corollaire précédent montre donc qu'il existe un foncteur simple à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(A, K)$ , qui se factorise par la réduction modulo  $I$ , qui n'est pas de présentation finie.

### 8.3 Produit tensoriel de foncteurs de longueur finie

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 8.6. On commence par traiter du cas de foncteurs *polynomiaux*.

**Proposition 8.26.** *Le produit tensoriel de deux foncteurs polynomiaux de longueur finie et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est de longueur finie.*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $K$  algébriquement clos. Il suffit de montrer que le produit tensoriel de deux foncteurs simples polynomiaux à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est de longueur finie. Cela découle du théorème 7.5 et de la dernière assertion de la proposition B.2.

Le cas général se ramène au cas précédent par changement de base au but, en appliquant les deux premières assertions du lemme 8.9 à l'extension de corps  $K \subset \bar{K}$ , où  $\bar{K}$  désigne une clôture algébrique de  $K$  (ou en utilisant le théorème 7.8).  $\square$

*Remarque 8.27.* Il n'est pas vrai qu'un produit tensoriel de foncteurs polynomiaux finis, même *additifs*, reste toujours fini, car ce n'est déjà pas le cas pour un produit tensoriel (sur  $K$ ) de modules finis (sur une  $K$ -algèbre) : prenant  $K = \mathbb{Q}$ , la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathbf{P}(\bar{\mathbb{Q}}); \mathbb{Q})$  est équivalente à la catégorie des  $\bar{\mathbb{Q}}$ -espaces vectoriels (proposition 1.7), or le produit tensoriel sur  $\mathbb{Q}$  de deux copies de  $\bar{\mathbb{Q}}$  est un  $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension infinie, il n'est donc pas de longueur finie.

**Proposition 8.28.** *Si les catégories  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; K)$  sont localement noethériennes, alors le produit tensoriel de deux foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est de longueur finie.*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{A}$  est additive, on dispose d'isomorphismes naturels  $P_{\mathcal{A}}^a \otimes P_{\mathcal{A}}^b \simeq P_{\mathcal{A}}^{a \oplus b}$  qui montrent que le produit tensoriel de deux foncteurs de type fini de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  reste de type fini. Comme  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est localement noethérienne, il y a équivalence entre noethérianité et type-finitude dans cette catégorie, de sorte qu'un produit tensoriel de foncteurs noethériens y est également noethérien.

Un foncteur de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$  est artинien si et seulement si son dual, c'est-à-dire sa post-composition par le foncteur de dualité des  $K$ -espaces vectoriels, est un foncteur noethérien de  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}^{op}; K)$ . Par conséquent, en appliquant ce qui précède à la catégorie additive  $\mathcal{A}^{op}$ , on voit que le produit tensoriel de deux foncteurs artiniens est artинien dans  $\mathcal{F}^{df}(\mathcal{A}; K)$ .

La conclusion s'obtient du fait que les foncteurs finis sont exactement les foncteurs à la fois artiniens et noethériens.  $\square$

*Démonstration du théorème 8.6.* Si  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$  et  $F$  un foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$ , alors  $F$  est fini dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$  si et seulement si  $\pi_{\mathcal{I}}^*(F)$  est fini dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ , car le foncteur de précomposition  $\pi_{\mathcal{I}}^* : \mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est exact et fidèle.

Lorsque le corps  $K$  contient les racines de l'unité, le théorème 8.6 s'obtient donc en combinant les propositions 8.26 et 8.28 et le corollaire 3.7. Le cas général s'en déduit, comme à la fin de la démonstration de la proposition 8.26, par un argument d'extension des scalaires au but, à l'aide des deux premières assertions du lemme 8.9.  $\square$

## 8.4 Présentation finie et généralisations

Dans cette section, on établit le théorème 8.7, et surtout un critère pour que les simples de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  soient  $pf_{\infty}$ , dont la démonstration exige plus d'efforts.

**Lemme 8.29.** Soient  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un foncteur additif,  $k$  un anneau et  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Supposons que  $A$  est  $pf_n$  dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ . Alors le foncteur  $k[A]$  est  $pf_n$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ .

*Démonstration.* Cela découle de ce que, si  $P_\bullet$  est une résolution simpliciale de  $A$  par des foncteurs projectifs de type fini (jusqu'en degré  $n$ ) de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ , alors  $k[P_\bullet]$  est une résolution simpliciale de  $k[A]$  par des foncteurs projectifs de type fini (jusqu'en degré  $n$ ) de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ .  $\square$

Il en résulte :

**Proposition 8.30.** Soient  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif entre petites catégories additives,  $k$  un anneau et  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Supposons que, pour tout objet  $b$  de  $\mathcal{B}$ , le foncteur  $\Phi^* \mathcal{B}(b, -)$  est  $pf_n$  dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ . Alors le foncteur  $\Phi^* : \mathcal{F}(\mathcal{B}; k) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  préserve les objets  $pf_n$ .

**Proposition 8.31.** Soient  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $F$  un foncteur  $pf_n$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  et  $E$  un endofoncteur élémentaire des  $K$ -espaces vectoriels. Alors  $E \circ F$  est un foncteur  $pf_n$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ .

*Démonstration.* Un argument de résolution simpliciale (cf. démonstration du lemme 8.29) montre qu'il suffit de démontrer que  $E \circ P_{\mathcal{A}}^t$  est  $pf_\infty$  pour tout objet  $t$  de  $\mathcal{A}$ . Un argument de changement de base immédiat permet de se ramener au cas où  $K$  est un corps premier. On montre alors par récurrence sur l'entier  $d$  que, si  $X$  est un endofoncteur polynomial fini de degré  $d$  des  $K$ -espaces vectoriels, alors  $X \circ P_{\mathcal{A}}^t$  est toujours  $pf_\infty$ . C'est évident pour  $d \leq 1$ ; on suppose donc  $d > 1$  et l'assertion vérifiée pour des foncteurs de degré  $< d$ .

Soient  $M$  le  $K[\mathfrak{S}_d]$ -module fini  $cr_d(X)(K, \dots, K)$  et  $R_* \rightarrow M$  une résolution de  $M$  par des  $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules libres finis. Considérons le complexe  $(P_{\mathcal{A}}^t)^{\otimes d} \otimes_{\mathfrak{S}_d} R_*$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  : tous ses termes sont projectifs de type fini, et son homologie est  $\mathrm{Tor}_*^{\mathfrak{S}_d}(T^d, M) \circ P_{\mathcal{A}}^t$ , elle est donc du type  $Y \circ P_{\mathcal{A}}^t$  pour un foncteur polynomial fini  $Y$  de degré  $< d$  en degré strictement positif, tandis que son homologie en degré nul possède un morphisme vers  $F \circ P_{\mathcal{A}}^t$  dont noyau et conoyau sont également du type  $Y \circ P_{\mathcal{A}}^t$  avec  $Y$  polynomial fini de degré  $< d$ . L'hypothèse de récurrence et un argument standard de suite spectrale permettent de conclure.  $\square$

La propriété classique suivante, indépendante du reste de l'article, nous sera nécessaire pour déduire de nos théorèmes à la Steinberg une généralisation du théorème 8.7 à la propriété  $pf_n$ , pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  (théorèmes 8.35 et 8.36 ci-après). Pour la démonstration du seul théorème 8.7, un argument élémentaire de présentation du foncteur de linéarisation suffit.

**Proposition 8.32** (Eilenberg-Mac Lane, Dold-Puppe...). *Il existe un complexe de chaînes  $Q_*$  de foncteurs  $\mathbf{Ab} \rightarrow K\text{-Mod}$  possédant les propriétés suivantes.*

- (1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n$  est un facteur direct du foncteur  $V \mapsto K[V^{2^n}]$ .
- (2) L'homologie de  $Q_*$  en degré nul est isomorphe à  $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} K$ .
- (3) Si  $K$  est de caractéristique nulle, l'homologie de  $Q_*$  est nulle en degrés strictement positifs.
- (4) Si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ , pour tout  $n > 0$ , l'homologie de  $Q_*$  en degré  $n$  est isomorphe à une somme directe finie de copies des foncteurs  $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} K$  et  $V \mapsto {}_p V \otimes_{\mathbb{Z}} K$ , où  ${}_p V := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)$ .

*Démonstration.* La *construction cubique* de Mac Lane [20, § 12] (on pourra aussi consulter la présentation plus récente de Johnson-McCarthy [34, § 6]) fournit le complexe désiré. Ce complexe, évalué sur  $V$ , calcule l'homologie stable à coefficients dans  $K$  des espaces d'Eilenberg-Mac Lane associés à  $V$ , de sorte que (2) et (3) sont clairs; (1) résulte de la définition explicite du complexe.

Pour la dernière assertion, on peut supposer  $K = \mathbb{Z}/p$  et s'appuyer sur la théorie des foncteurs dérivés non additifs de Dold-Puppe [17] : l'homologie de  $Q_*$  est isomorphe aux foncteurs dérivés stables à la Dold-Puppe du foncteur  $K[-]$ , mais aussi, d'après [17, Satz 4.16], à celle du foncteur  $V \mapsto \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} K \simeq \text{Sym}_K(V \otimes_{\mathbb{Z}} K)$  (où  $\text{Sym}$  désigne le foncteur puissance symétrique). En chaque degré homologique, le dérivé stable à la Dold-Puppe du foncteur  $\text{Sym}_{\mathbb{Z}/p}$  est une somme directe finie de copies de l'identité des  $\mathbb{Z}/p$ -espaces vectoriels (cf. [17, § 10] et [34, Theorem 4.12]). Comme le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{Z}/p\text{-Mod}$  est additif, exact à droite et a pour unique foncteur dérivé à gauche en degré non nul celui de degré 1,  $V \mapsto {}_pV$ , on en déduit par une suite exacte de Künneth que l'homologie de  $Q_*$  en chaque degré est une extension d'une somme directe finie de copies de  $V \mapsto {}_pV := \text{Hom}(\mathbb{Z}/p, V)$  par une somme directe finie de copies de  $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ , qui sont *projectifs* dans la catégorie des foncteurs additifs  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{Z}/p\text{-Mod}$ , de sorte que l'extension est nécessairement triviale, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 8.33.** *Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors l'inclusion  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  préserve les objets  $pf_n$  si l'une des trois conditions suivantes est réalisée.*

1.  $n = 1$ .
2. La caractéristique de  $K$  est nulle.
3. La caractéristique de  $K$  est  $p > 0$  et, pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , le foncteur  ${}_p\mathcal{A}(a, -)$  est  $pf_{n-2}$  dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$  est  $pf_n$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ .

Si  $n = 1$ , cela résulte de la suite exacte usuelle

$$P_{\mathcal{A}}^{a \oplus a} \rightarrow P_{\mathcal{A}}^a \rightarrow \mathcal{A}(a, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K \rightarrow 0.$$

Si  $K$  est de caractéristique nulle, alors  $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$  est une résolution de ce foncteur par des projectifs de type fini.

Supposons maintenant  $\text{car}(K) = p > 0$  et  ${}_p\mathcal{A}(a, -) pf_{n-2}$  dans  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$  pour tout  $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Cela implique que l'homologie de  $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$  est en chaque degré un objet  $pf_{n-2}$  de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ . On montre alors par récurrence sur  $i \leq n$  que  $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$  est  $pf_i$ , pour tout  $x \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Pour  $i = 0$  il n'y a rien à faire. Si cette propriété vaut à l'ordre  $i - 1$ , elle implique que l'inclusion  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  préserve les objets  $pf_{i-1}$  et montre donc que l'homologie de  $Q_* \circ \mathcal{A}(x, -)$  est, en chaque degré non nul, un foncteur  $pf_{i-2}$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ . Comme les termes de ce complexe sont projectifs de type fini, un argument standard de suite spectrale (ou de décalage) permet d'en déduire que son homologie en degré nul, c'est-à-dire  $\mathcal{A}(x, -) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ , est  $pf_i$ , d'où la conclusion.  $\square$

*Remarque 8.34.* La dernière hypothèse du corollaire est en particulier vérifiée lorsque la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$  est localement noethérienne.

Elle l'est également lorsque la catégorie  $\mathcal{A}$  est *abélienne*, ou plus généralement possède des conoyaux, car  ${}_p\mathcal{A}(a, -)$  est alors isomorphe au foncteur  $\mathcal{A}(a/p, -)$ , où  $a/p$  désigne le conoyau de l'endomorphisme de multiplication par  $p$  dans  $a$ . Les travaux d'Auslander [3] donnent de nombreux exemples de petites catégories abéliennes  $\mathcal{D}$  telles que  $\mathbf{Add}(\mathcal{D}; \mathbb{Z}/p)$  n'est pas localement noethérienne (comme la catégorie  $A\text{-mod}$ , où  $A$  est une  $\mathbb{Z}/p$ -algèbre finie qui n'a pas un type de représentation fini), et qui n'entrent donc pas dans le cas précédent.

**Théorème 8.35.** *Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On suppose que tous les objets simples à valeurs de dimension finie de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  sont  $pf_n$ . On suppose également que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

1.  $n = 1$ .
2. *La caractéristique de  $K$  est nulle.*
3. *La caractéristique de  $K$  est  $p > 0$  et, pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , le foncteur  ${}_p\mathcal{A}(a, -)$  est  $pf_{n-2}$  dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}/p)$ .*

*Alors tous les foncteurs polynomiaux de longueur finie et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont  $pf_n$ .*

*Démonstration.* Si  $K \subset L$  est une extension finie de corps commutatifs, tous les objets simples à valeurs de dimension finie de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; L)$  sont  $pf_n$ , grâce au lemme 8.11.

Par conséquent, le théorème 7.8 et la stabilité de la classe des foncteurs  $pf_n$  par extensions et par produits tensoriels montrent qu'il suffit de vérifier la propriété pour les produits tensoriels de foncteurs du type  $E \circ A$ , où  $A$  est un foncteur additif simple à valeurs de dimension finie et  $E$  un foncteur élémentaire. La conclusion découle donc de la proposition 8.31 et du corollaire 8.33.  $\square$

**Théorème 8.36.** *Faisons les mêmes hypothèses qu'au théorème 8.35 et supposons de plus que, pour tout idéal  $K$ -cotrivial  $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$  :*

1. *les foncteurs simples de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}/\mathcal{I}; K)$  sont  $pf_n$  ;*
2. *pour chaque objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ , le foncteur  $\mathcal{I}(x, -)$  est  $pf_{n-1}$  dans  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ .*

*Alors tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont  $pf_n$ .*

*Démonstration.* La deuxième hypothèse revient à dire que tous les foncteurs  $\mathcal{A}(x, -)/\mathcal{I}(x, -)$  sont  $pf_n$  dans  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ . Par conséquent, la proposition 8.30 et la première hypothèse montrent que tout foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  qui se factorise par le foncteur canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$  est  $pf_n$ .

Il en résulte, par le théorème 8.35, que le produit tensoriel dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  entre un foncteur simple polynomial à valeurs de dimension finie et un foncteur simple se factorisant par  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$  est  $pf_n$ . Par le théorème 3.4 (et les résultats de la section 2), on en déduit que tout foncteur *absolument* simple et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est  $pf_n$ . Le cas général se ramène au cas absolument simple par extension des scalaires au but (cf. proposition 2.5 et lemme 8.9).  $\square$

Le théorème 8.7 est un cas particulier du résultat précédent (la réciproque de la première assertion est immédiate : comme la sous-catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$

de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est pleine et stable par colimites, un objet de  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$  de présentation finie dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  est automatiquement de présentation finie dans  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; K)$ .

**Corollaire 8.37.** *Si les hypothèses  $\mathbf{LNC}(\mathcal{A}, K)$ ,  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, \mathbb{Z})$  et  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, K)$  sont vérifiées, alors tous les foncteurs de longueur finie et à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  sont  $pf_\infty$ .*

*Exemple 8.38.* Si  $A$  est un anneau, on a vu que la condition  $\mathbf{LNC}(\mathbf{P}(A), K)$  est automatiquement vérifiée; pour tout anneau commutatif  $k$ , la condition  $\mathbf{LNA}(\mathcal{A}, k)$  signifie que l'anneau  $A^{op} \otimes_{\mathbb{Z}} k$  est noethérien à gauche. En particulier, si  $K$  est un corps fini ou un corps de nombres et que l'anneau  $A$  est noethérien à droite, alors tous les objets finis à valeurs de dimension finie de  $\mathcal{F}(A, K)$  sont  $pf_\infty$ .

## A Foncteurs simples ne prenant pas des valeurs de dimension finie

### A.1 Foncteurs simples prenant une valeur non nulle de dimension finie

On rappelle (corollaire 1.6) que, si  $F$  est un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  et  $t$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $F(t)$  soit non nul, alors  $F$  est isomorphe au prolongement intermédiaire associé au foncteur d'évaluation en  $t$  du  $K[\mathbf{End}(t)]$ -module  $F(t)$ . Cela permet théoriquement de disposer d'un contrôle sur les foncteurs simples de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$  qui prennent *une* valeur non nulle de dimension finie, à partir des représentations simples de dimension finie sur  $K$  des monoïdes multiplicatifs d'endomorphismes des objets de  $\mathcal{A}$ .

La propriété suivante, qui constitue un corollaire des résultats de la section 7, montre que, dans de nombreux cas, les foncteurs simples avec *une* valeur non nulle de dimension finie prennent *toutes* leurs valeurs de dimension finie si et seulement s'ils sont polynomiaux.

**Proposition A.1.** *Soient  $A$  un anneau commutatif,  $n \in \mathbb{N}$  et  $M$  une représentation simple de dimension finie sur  $K$  du monoïde  $\mathcal{M}_n(A)$ . On suppose que  $A$  ne possède pas d'autre idéal  $K$ -cotrivial que  $A$  (par exemple, que  $A$  est un corps infini). Notons  $S_M$  le foncteur simple de  $\mathcal{F}(A, K)$  obtenu en appliquant à  $M$  le prolongement intermédiaire associé au foncteur réflexif  $\mathcal{F}(A, K) \rightarrow K[\mathcal{M}_n(A)]\text{-Mod}$  d'évaluation en  $A^n$  (cf. propositions 1.4 et 1.5).*

*Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Le foncteur  $S_M$  est polynomial.*
- (b) *Le foncteur  $S_M$  est à valeurs de dimension finie.*
- (c) *La représentation  $M$  de  $\mathcal{M}_n(A)$  est polynomiale à la Eilenberg-Mac Lane.*

*Démonstration.* La proposition 1.4 montre que  $S_M(A^n) \simeq M$  comme  $K[\mathcal{M}_n(A)]$ -modules. Il en résulte en particulier que (a) entraîne (c). La proposition 7.10 permet également d'en déduire que (a) implique (b).

Le lemme 3.13 montre que (c) entraîne (a) (en effet,  $A^n$  constitue un support et un co-support de  $S_M$ ). L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) provient quant à elle du corollaire 3.5.  $\square$

**Convention :** dans toute la suite de cet appendice,  $k$  désigne un corps commutatif infini.

Nous nous concentrerons sur la catégorie  $\mathcal{F}(k, K)$ , où adviennent déjà de nombreux phénomènes intéressants.

Pour  $n > 0$ , il est facile de construire des représentations simples de  $\mathcal{M}_n(k)$  de dimension finie sur  $K$  qui ne sont pas polynomiales. Pour  $n = 1$ , tout morphisme de groupes  $k^\times \rightarrow K^\times$  dont le prolongement par zéro fournit une fonction non polynomiale  $k \rightarrow K$  en donne un cas.

*Exemple A.2.* Prenons  $k = K = \mathbb{Q}$ . Les seuls foncteurs simples non constants de  $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  non nuls sur  $\mathbb{Q}$  sont les puissances symétriques  $S^d$  pour  $d \in \mathbb{N}^*$ . Ils sont associés aux endomorphismes  $x \mapsto x^d$  du groupe  $\mathbb{Q}^\times$ . Mais ce groupe possède de nombreux autres endomorphismes, comme  $x \mapsto x^d$  pour  $d \leq 0$  — et encore bien d'autres puisque ce groupe abélien, isomorphe à  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$ , a un anneau d'endomorphismes qui a la puissance du continu !

En fait, on peut souvent décrire de façon assez explicite les foncteurs simples obtenus par ce procédé, à l'aide des foncteurs  $Q_M$  construits en (7) (page 51). Tout d'abord, si  $M$  est une représentation de dimension finie  $m$  sur  $K$  du groupe  $GL_n(k)$ , nous noterons encore  $M$ , par abus, la représentation du monoïde  $\mathcal{M}_n(k)$  obtenue en prolongeant l'action de  $GL_n(k)$  par 0 aux matrices singulières de  $\mathcal{M}_n(k)$ , et désignerons par  $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$  la fonction multiplicative correspondante obtenue en choisissant une  $K$ -base de  $M$ . Comme dans la proposition A.1,  $S_M$  désigne le foncteur de  $\mathcal{F}(k, K)$  associé à  $M$  par prolongement intermédiaire ; c'est naturellement un quotient de  $Q_M$ , et  $S_M$  est simple si  $M$  est une représentation simple de  $GL_n(k)$ .

**Proposition A.3.** Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $M$  une représentation simple de dimension finie  $m$  sur  $K$  de  $GL_n(k)$ ,  $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$  le morphisme associé comme ci-dessus et  $\varphi_1, \dots, \varphi_m : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow K^m$  les colonnes de  $\varphi$ . Le foncteur  $Q_M$  est simple (et donc isomorphe à  $S_M$ ) si et seulement si la condition suivante est vérifiée : la famille des translatées  $(\tau_a(\varphi_i))_{1 \leq i \leq m, a \in \mathcal{M}_n(k)}$  (où  $\tau_a(\psi)(x) := \psi(a + x)$ ) est libre dans le  $K$ -espace vectoriel  $K^{\mathcal{M}_n(k)}$ .

(Sous les hypothèses de la proposition, l'espace vectoriel  $S_M(k^i)$  est donc de dimension finie non nulle si et seulement si  $i = n$ .)

*Démonstration.* Explicitement,  $S_M$  est l'image du morphisme  $Q_M \rightarrow M^{\text{Hom}_k(V, k^n)}$  donné sur l'espace vectoriel  $V$  par

$$K[\text{Inj}_k(k^n, V)] \otimes_{K[GL_n(k)]} M \rightarrow M^{\text{Hom}_k(V, k^n)} \quad ([f] \otimes \xi) \mapsto (g \mapsto \varphi(g.f).\xi).$$

Comme  $GL_n(k)$  opère librement sur  $\text{Inj}_k(k^n, V)$  et que les orbites sont classifiées par les sous-espaces de dimension  $n$  de  $V$  via l'image d'une telle injection, les éléments non nuls de  $Q_M(V)$  sont exactement les images par la projection canonique des éléments  $\sum_{i=1}^r [f_i] \otimes \xi_i$  de  $K[\text{Inj}_k(k^n, V)] \otimes M$ , où  $r \in \mathbb{N}^*$ , les  $\xi_i$  sont des éléments non nuls de  $M$ , les  $E_i := \text{Im } f_i$  sont des sous-espaces vectoriels deux à deux distincts de  $V$  et de dimension  $n$ . Comme  $k$  est infini, et qu'une réunion finie de sous-espaces stricts d'un  $k$ -espace vectoriel en est donc toujours un sous-ensemble strict, il existe une application linéaire  $V \rightarrow k^n$  telle que les composées  $E_i \hookrightarrow V \rightarrow k^n$  soient des isomorphismes pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Par conséquent, quitte à modifier les  $f_i$  (et les  $\xi_i$ ) par l'action d'éléments de  $GL_n(k)$ ,

on peut supposer que  $V$  est de la forme  $k^n \oplus E$  et que la première composante  $k^n \rightarrow k^n$  des  $f_i$  est l'identité; nous noterons  $g_i : k^n \rightarrow E$  leur deuxième composante. Les  $g_i$  sont donc deux à deux distincts. L'annulation de  $\sum_{i=1}^r [f_i] \otimes \xi_i$  dans  $M^{\text{Hom}_k(V, k^n)}$  signifie que, pour toute application linéaire  $g : V = k^n \oplus E \rightarrow k^n$ , dont nous noterons  $u : k^n \rightarrow k^n$  et  $v : E \rightarrow k^n$  les composantes, on a

$$\sum_{i=1}^r \varphi(u + vg_i) \cdot \xi_i = 0$$

dans  $M$ . Utilisant encore qu'une réunion finie de sous-espaces stricts d'un  $k$ -espace vectoriel en est un sous-ensemble strict, on voit que le fait que les  $g_i$  soient deux à deux distincts entraîne qu'il existe  $v \in \text{Hom}_k(E, k^n)$  tel que les  $vg_i$  soient deux à deux distincts.

Autrement dit, la projection  $Q_M \rightarrow S_M$  est un isomorphisme si et seulement s'il existe  $r \in \mathbb{N}^*$ , des éléments deux à deux distincts  $a_1, \dots, a_r$  de  $\mathcal{M}_n(k)$  et des éléments non nuls  $\xi_1, \dots, \xi_r$  de  $M \simeq K^m$  tels que

$$\sum_{i=1}^r \tau_{a_i}(\varphi) \cdot \xi_i = 0$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Exemple A.4.* La représentation triviale de  $GL_n(k)$  dans  $K$  correspond à la fonction  $\varphi : \mathcal{M}_n(k) \rightarrow K$  qui vaut 1 sur  $GL_n(k)$  et 0 sur les matrices singulières. Celle-ci vérifie la condition d'indépendance linéaire des translatées requise dans l'énoncé précédent. Supposons en effet qu'on dispose d'une relation  $\sum_{i=1}^r \tau_{a_i}(\varphi) = 0$  avec les  $a_i \in \mathcal{M}_n(k)$  deux à deux distincts. Comme  $k$  est infini, on peut trouver  $x \in \mathcal{M}_n(k)$  telle que toutes les matrices  $a_i + x$  soient inversibles, d'où  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$ . On peut également trouver, pour tout indice  $j$ ,  $x \in \mathcal{M}_n(k)$  telle que  $a_i + x$  soit inversible si et seulement  $i \neq j$ , ce qui fournit la relation  $\sum_{i \neq j} \lambda_i = 0$  et donc  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j$ . Le foncteur simple qu'on en déduit est donné sur les objets par  $V \mapsto K[\mathcal{G}r_n(V)]$ , où  $\mathcal{G}r_n(V)$  désigne l'ensemble des sous-espaces de dimension  $n$  de  $V$ ; ce foncteur envoie une flèche  $f : V \rightarrow W$  sur l'application linéaire envoyant  $[E]$ , pour  $E \in \mathcal{G}r_n(V)$ , sur  $[f(E)]$  si  $f(E)$  est de dimension  $n$ , et sur 0 sinon.

Si  $k$  est un corps *fini*, le foncteur  $K[\mathcal{G}r_n]$  est encore simple *si*  $K$  est de caractéristique différente de celle de  $k$ , mais la démonstration précédente ne s'applique plus. La simplicité se déduit des résultats de Kuhn [41] (reposant sur le travail de Kovács [35] sur les représentations des monoïdes multiplicatifs  $\mathcal{M}_n(k)$ ) déjà invoqués au corollaire 8.20. En revanche, si  $k$  est fini et de même caractéristique que  $K$ , alors  $K[\mathcal{G}r_n]$  n'est *jamais simple* si  $n > 0$  — on peut même montrer qu'il est de dimension de Krull au moins  $n$  (et conjecturalement, de dimension de Krull exactement  $n$  — cf. [48, 13]).

*Exemple A.5.* Prenons  $K = k$  et considérons l'endomorphisme  $x \mapsto x^d$  de  $k^\times$ , où  $d$  est un entier strictement négatif. Son prolongement par 0 fournit un morphisme multiplicatif  $f : k \rightarrow k$  qui vérifie la condition d'indépendance linéaire de la proposition A.3 par un argument de fractions rationnelles immédiat (on rappelle que  $k$  est un corps commutatif *infini*).

Pour  $k = K = \mathbb{R}$ , des arguments d'analyse élémentaires montrent que le prolongement par 0 à  $\mathbb{R}$  de tout endomorphisme *continu*  $f$  du groupe topologique

$\mathbb{R}^\times$  vérifie également cette condition, hormis si ce prolongement est polynomial, c'est-à-dire si  $f$  est de la forme  $x \mapsto x^d$  avec  $d \in \mathbb{N}^*$ .

*Remarque A.6.* Nous ignorons s'il existe un morphisme de monoïdes  $\mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_m(K)$  fournissant une représentation simple *non EML-polynomiale* de  $\mathcal{M}_n(k)$  et ne vérifiant pas la condition de la proposition A.3, même en nous restreignant à  $n = m = 1$ .

*Remarque A.7.* Le cas  $n = m = 1$  est sans doute le plus important dans les constructions précédentes, en vertu des résultats de Steinberg [55] et de Bass-Milnor-Serre [4] (déjà mentionnés dans la section 3) dont notre théorème 3.4 s'inspire. Ainsi, pour  $k = \mathbb{Q}$ , toute représentation complexe de dimension finie de  $SL_n(\mathbb{Q})$  est polynomiale, où  $n \in \mathbb{N}$  est arbitraire, ce qui entraîne que toute représentation simple de dimension finie de  $GL_n(\mathbb{Q})$  s'exprime comme le produit tensoriel entre une représentation polynomiale et une représentation se factorisant par le déterminant, donc provenant d'un morphisme de groupes  $\mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  : ce sont ces morphismes qui font apparaître une « partie non polynomiale », donnant lieu à des foncteurs dont les valeurs ne sont pas de dimension finie.

## A.2 Foncteurs simples qui ne prennent aucune valeur de dimension finie non nulle

Il paraît très difficile de donner des résultats généraux sur les foncteurs simples dont aucune valeur non nulle n'est de dimension finie. Il est toutefois facile de voir qu'il en existe souvent beaucoup, dès lors que les ensembles de morphismes dans la catégorie source ne sont pas trop petits. L'énoncé suivant en donne une illustration.

**Proposition A.8.** *Soient  $A$  un anneau commutatif ou noethérien de caractéristique nulle et  $M$  un  $A$ -module projectif de type fini dont  $A^2$  est facteur direct. Il existe un foncteur simple  $S$  de  $\mathcal{F}(A, K)$  tel que, pour tout objet  $V$  de  $\mathbf{P}(A)$  :*

1.  $\dim_K S(V) = \infty$  si  $M$  est facteur direct de  $V$  ;
2.  $S(V) = 0$  sinon.

*Démonstration.* Comme  $A^2$  est facteur direct de  $M$ , le groupe  $G := \text{Aut}_{\mathbf{P}(A)}(M)$  contient  $GL_2(A)$ , qui contient  $GL_2(\mathbb{Z})$  (car  $A$  est de caractéristique 0), et donc un groupe libre non abélien  $H$ . D'après Formanek [21, théorème 5], il existe un  $K[H]$ -module simple et fidèle, donc de dimension infinie sur  $K$ , ce qui entraîne l'existence d'un  $K[G]$ -module  $T$  simple et de dimension infinie. Comme  $A$  est commutatif ou noethérien, on peut prolonger l'action de  $G$  par 0 aux endomorphismes non inversibles de  $M$  (obtenant une représentation simple de dimension infinie de ce monoïde) et obtenir par prolongement intermédiaire un foncteur simple  $S$  de  $\mathcal{F}(A, K)$  tel que  $S(M) \simeq T$  comme  $K[\text{End}_{\mathbf{P}(A)}(M)]$ -modules. Si  $M$  est facteur direct de  $V$ , alors  $S(M)$  est facteur direct de  $S(V)$ , qui est donc de dimension infinie. Si  $M$  n'est pas facteur direct de  $V$ , le fait que les endomorphismes non inversibles de  $M$  opèrent par 0 sur  $T$  et l'expression du prolongement intermédiaire entraînent que  $S(M)$  est nul.  $\square$

*Remarque A.9.* La conclusion de la proposition vaut également dans d'autres cas, par exemple si  $A$  est la clôture algébrique d'un corps fini et que  $K$  est de caractéristique nulle (voir la remarque A.11 ci-dessous).

### A.3 Notion intrinsèque : endofinitude (centrale)

Afin de montrer que la notion, pour un foncteur simple, de prendre des valeurs de dimension finie, est un cas particulier naturel d'une notion intrinsèque beaucoup plus générale dans les catégories abéliennes, nous commençons par rappeler la notion classique suivante d'*endofinitude*, qui remonte à Crawley-Boevey [11] (pour les catégories de modules au moins). Par souci de simplicité, nous nous contentons de l'introduire pour des objets simples.

**Proposition et définition A.10.** *Supposons que la catégorie  $\mathcal{E}$  est localement de type fini. Soit  $S$  un objet simple de  $\mathcal{E}$ . Notons  $\text{Add}(S)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}$  des objets semi-simples isotypiques de type  $S$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Add}(S)$  est stable par produits ;
2. tout produit de copies de  $S$  est semi-simple ;
3. si  $X$  est un objet de type fini de  $\mathcal{E}$ , alors  $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$  ;
4. les objets  $X$  tels que  $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$  engendrent la catégorie abélienne  $\mathcal{E}$ .

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que  $S$  est **endofini**.

(Des généralisations et variantes beaucoup plus élaborées de cet énoncé se trouvent dans Krause [36, § 6.3 et 6.4].)

*Démonstration.* 1 $\Rightarrow$ 2 : évident.

2 $\Rightarrow$ 3 : soit  $X$  un objet de type fini de  $\mathcal{E}$ , considérons la flèche

$$X \rightarrow S^{\mathcal{E}(X, S)} \xrightarrow{\cong} S^{\oplus E}$$

composée du morphisme tautologique et d'un isomorphisme donné, pour un ensemble  $E$  convenable, par l'hypothèse 2 (le socle d'un produit de copies de  $S$  est une toujours une somme directe de copies de  $S$ , donc 2 implique qu'un produit de copies de  $S$  est une somme directe de copies de  $S$ ). Le foncteur  $\mathcal{E}(X, -)$  commute aux sommes directes, puisque  $X$  est de type fini, donc il existe un nombre fini de morphismes  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow S$  tels que notre morphisme se factorise en la composée de  $X \rightarrow S^n$  de composantes les  $f_i$  et une inclusion  $S^n \rightarrow S^{\oplus E}$ . Il s'ensuit que tout élément de  $\mathcal{E}(X, S)$  est combinaison linéaire à coefficients dans le corps  $\text{End}_{\mathcal{E}}(S)$  des  $f_i$ , comme souhaité.

3 $\Rightarrow$ 4 : évident puisque  $\mathcal{E}$  est localement finie.

4 $\Rightarrow$ 1 : il suffit de montrer qu'un sous-objet  $X$  d'un produit  $S^E$  de copies de  $S$  tel que  $\dim_{\text{End}(S)} \mathcal{E}(X, S) < \infty$  appartient à  $\text{Add}(S)$ , puisque tout objet de cette catégorie est sous-objet d'un produit de copies de  $S$  et que cette sous-catégorie est stable par sous-objet. Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $\mathcal{E}(X, S)$  sur  $\text{End}(S)$  : tout morphisme  $X \rightarrow S$ , donc tout morphisme  $X \rightarrow S^E$ , se factorise par le morphisme  $X \rightarrow S^{\oplus n}$  qu'elle détermine. Par conséquent,  $X$  est isomorphe à un sous-objet de  $S^{\oplus n}$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque A.11.* Plusieurs caractérisations partielles des groupes dont toutes les représentations irréductibles sont endofinies sont disponibles dans la littérature, comme l'article de Snider [52]. On déduit par exemple du théorème 1 (et du lemme 1) de celui-ci que, si  $k$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{Z}/p$  (où  $p$  est un nombre premier) et  $n \geq 2$  un entier, alors  $GL_n(k)$  possède une représentation

irréductible non endofinie sur  $K$ , au moins si ce corps est de caractéristique nulle (en effet, le sous-groupe de  $GL_2(k)$  constitué des matrices triangulaires supérieures, au sens large, est résoluble mais ne possède aucun sous-groupe abélien d'indice fini).

Soit  $A$  est anneau. On rappelle (cf. remarque 2.11) que les objets de  $\mathcal{E}$  munis d'une action de  $A$  forment une catégorie de Grothendieck  $\mathcal{E}_A$ . Elle est localement de type fini si c'est le cas de  $\mathcal{E}$ . Si  $M$  est un objet de  $\mathcal{E}$ , l'action canonique de son anneau d'endomorphismes fait de  $M$  un objet noté  $\widetilde{M}$  de  $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$ . Comme le foncteur d'oubli  $\mathcal{E}_{\text{End}(M)} \rightarrow \mathcal{E}$  est exact et fidèle, si  $M$  est simple, il en est de même pour  $\widetilde{M}$ .

**Proposition et définition A.12.** *Supposons  $\mathcal{E}$  localement de type fini. Soit  $M$  un objet simple de  $\mathcal{E}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'objet simple  $\widetilde{M}$  de  $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$  est endofini ;*
2.  *$\dim_{Z(\text{End}(M))} \mathcal{E}(X, M) < \infty$  pour tout objet  $X$  de type fini de  $\mathcal{E}$ , où  $Z(\text{End}(M))$  désigne le centre du corps  $\text{End}(M)$ .*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que  $M$  est un objet centralement endofini de  $\mathcal{E}$ . Un tel objet est endofini.*

*Démonstration.* Cela provient des deux observations suivantes :

- l'anneau des endomorphismes de  $\widetilde{M}$  s'identifie à  $Z(\text{End}(M))$  ;
- l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $\mathcal{E}_{\text{End}(M)} \rightarrow \mathcal{E}$  envoie les objets de type fini de  $\mathcal{E}$  sur une classe de générateurs de type fini de  $\mathcal{E}_{\text{End}(M)}$ . □

Plusieurs auteurs, dont Wehrfritz [62], se sont intéressés (avec une terminologie légèrement différente) aux groupes dont toutes les représentations irréductibles sont centralement endofinies.

Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $R$  un anneau. La catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$  est une catégorie de Grothendieck localement de type fini. Si  $A$  est un anneau, on dispose d'une équivalence de catégories canonique  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)_A \simeq \mathcal{F}(\mathcal{C}; R \otimes_{\mathbb{Z}} A)$  (cf. remarque 2.11).

**Proposition A.13.** *Soient  $\mathcal{C}$  une petite catégorie,  $R$  un anneau et  $F$  un foncteur simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$ .*

1. *Le foncteur  $F$  est endofini si et seulement si  $F(x)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $\text{End}(F)$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , i.e. si  $F$  est à valeurs de dimension finie vu comme foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$ . Si  $R$  est commutatif,  $F$  est nécessairement simple vu comme foncteur de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$ .*
2. *Supposons  $R$  commutatif. Alors  $F$  est centralement endofini si et seulement si  $F(x)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif  $Z(\text{End}(F))$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , i.e. si  $F$  est à valeurs de dimension finie vu comme foncteur (simple) de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; Z(\text{End}(F)))$ .*

Ainsi, la notion d'endofinitude centrale est exactement celle qui permet, dans les catégories du type  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$  avec  $R$  commutatif, de ramener l'étude des foncteurs simples à celle de foncteurs simples à valeurs de dimension finie sur un corps commutatif.

*Démonstration.* La première assertion résulte de la considération des générateurs projectifs de type fini  $P_{\mathcal{C}}^x$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$ .

Si  $R$  est commutatif, alors  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; R)$  est  $R$ -linéaire, et  $\text{End}(F)$  est une  $R$ -algèbre;  $\tilde{F}$  appartient à l'image essentielle du foncteur  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F)) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}; R \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End}(F))$  de post-composition par la restriction le long du morphisme d'anneaux  $R \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End}(F) \rightarrow \text{End}(F)$  donné par la structure de  $R$ -algèbre de  $\text{End}(F)$ . Ce foncteur est pleinement fidèle et cette image essentielle est stable par sous-objet. Ainsi, si  $F$  est simple,  $\tilde{F}$  peut être vu comme un objet simple de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}; \text{End}(F))$  de corps d'endomorphismes  $Z(\text{End}(F))$ . Le reste de la proposition en découle.  $\square$

## A.4 Produits infinis de foncteurs simples

Si  $S$  est un objet simple non endofini d'une catégorie de Grothendieck localement de type fini, un produit infini de copies de  $S$  peut avoir de nombreux sous-quotients simples non isomorphes à  $S$ . En voici une illustration élémentaire dans une catégorie de foncteurs dont les simples à valeurs de dimension finie sont décrits par nos résultats.

*Exemple A.14.* Soit  $n \geq 2$  un entier. Toute droite  $D \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$  du  $k$ -espace vectoriel  $k^n$  (on rappelle que  $k$  est un corps commutatif infini) fournit un morphisme  $K[\text{Hom}_k(k^n, -)] \rightarrow K[\text{Hom}_k(D, -)]$  dans  $\mathcal{F}(k, K)$ , qui induit un morphisme  $K[(\text{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times] \rightarrow K[\mathbb{P}]$ ; de plus, le morphisme

$$K[(\text{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times] \rightarrow K[\mathbb{P}]^{\mathbb{P}^{n-1}(k)}$$

qu'on en déduit est *injectif*. En effet, un élément non nul de  $K[(\text{Hom}_k(k^n, V) \setminus \{0\})/k^\times]$  (où  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie sur  $k$ ) s'écrit  $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i [f_i]$ , où  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_i \in K^\times$  et les  $f_i : k^n \rightarrow V$  sont des applications linéaires deux à deux non proportionnelles. Par conséquent, pour  $i \neq j$ , l'ensemble  $\{D \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \mid f_i(D) \neq f_j(D)\}$  est un *ouvert dense* de  $\mathbb{P}^{n-1}(k)$  pour la topologie de Zariski, de même que  $\{D \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \mid f_i(D) \neq 0\}$ . Par conséquent, on peut trouver une droite  $D$  de  $k^n$  telle que les  $f_i(D)$  soient des droites deux à deux distinctes de  $V$ , ce qui montre que l'image de  $x$  par notre application est non nulle.

Le foncteur  $K[(\text{Hom}_k(k^n, -) \setminus \{0\})/k^\times]$  se surjecte sur  $K[\mathcal{G}r_n]$ , qui est donc un sous-quotient d'un produit de copies de  $K[\mathbb{P}] = K[\mathcal{G}r_1]$ . Or on a vu dans l'exemple A.4 que tous les foncteurs  $K[\mathcal{G}r_n]$  sont simples, et ils sont manifestement deux à deux non isomorphes.

D'autres exemples contre-intuitifs par rapport à la situation qui advient quand on ne se considère que des foncteurs à valeurs de dimension finie proviennent de la considération de produits infinis de foncteurs simples *deux à deux non isomorphes*. Remarquons déjà que, si  $(S_i)_{i \in E}$  une famille infinie d'objets simples deux à deux non isomorphes de la catégorie de Grothendieck  $\mathcal{E}$ , l'objet  $\prod_{i \in E} S_i$  de  $\mathcal{E}$  est semi-simple si et seulement s'il coïncide avec son sous-objet  $\bigoplus_{i \in E} S_i$  (qui constitue toujours son socle). Pour  $\mathcal{E} = \mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ , où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, si l'on suppose que les  $S_i$  sont à valeurs de dimension finie, cette condition équivaut à dire que  $\bigoplus_{i \in E} S_i$  (ou  $\prod_{i \in E} S_i$ ) est à valeurs de dimension finie.

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, l'objet  $\prod_{i \in E} S_i$  peut avoir de nombreux sous-quotients simples qui ne sont isomorphes à aucun des  $S_i$ . En voici une illustration.

*Exemple A.15.* Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ , le foncteur projectif  $P^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[-]$  a pour plus grand quotient polynomial de degré au plus  $n$  la somme directe sur les entiers  $0 \leq i \leq n$  des foncteurs  $S^i$  ( $i$ -ème puissance symétrique sur  $\mathbb{Q}$ ). Chaque foncteur  $S^i$  est simple. De plus, le morphisme  $P^{\mathbb{Q}} \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} S^i$  qu'on en déduit est injectif, car l'idéal d'augmentation de l'algèbre sur un corps de caractéristique nulle d'un groupe abélien sans torsion est résiduellement nilpotent. Mais  $P^{\mathbb{Q}}$  a plein de quotients simples non polynomiaux : on dispose d'une injection de l'ensemble (infini non dénombrable) des endomorphismes de  $\mathbb{Q}^{\times}$  dont l'extension par 0 à  $\mathbb{Q}$  n'est pas une fonction polynomiale dans l'ensemble de ces quotients — cf. exemple A.2.

*Remarque A.16.* La catégorie  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  est engendrée par les foncteurs projectifs  $P^{\mathbb{Q}^n} \simeq (P^{\mathbb{Q}})^{\otimes n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , qui s'injectent grâce à l'exemple précédent dans un produit dénombrable de foncteurs polynomiaux finis et à valeurs de dimension finie. On en déduit en particulier que la plus petite sous-catégorie *bilocalisante* (c'est-à-dire épaisse et stable par limites) de  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  engendrée par  $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ , ou par les foncteurs polynomiaux, est  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ . A contrario, la sous-catégorie localisante de  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  engendrée par  $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ , ou par les foncteurs polynomiaux, est exactement la catégorie des foncteurs *analytiques* (c'est-à-dire des colimites de foncteurs polynomiaux) de  $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ , qui est classiquement équivalente à  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]\text{-Mod}$ .

Dans d'autres catégories de foncteurs, comme  $\mathcal{F}(k, K)$ , avec  $\text{car}(k) \neq \text{car}(K)$ , il n'y a aucun foncteur polynomial non constant, de sorte que le corollaire 3.5 montre que la sous-catégorie bilocalisante de  $\mathcal{F}(k, K)$  engendrée par  $\mathcal{F}^{df}(k, K)$  est réduite, comme la sous-catégorie bilocalisante engendrée par les foncteurs polynomiaux, aux foncteurs constants.

## B Foncteurs élémentaires

Cet appendice regroupe les principales propriétés des foncteurs élémentaires. Certaines sont établies dans la section 5, nous les complétons avec des énoncés basiques provenant de la théorie des représentations des groupes algébriques et des foncteurs associés (les foncteurs *strictement polynomiaux* [24]).

On rappelle qu'un foncteur  $E : \mathbf{P}(K) \rightarrow K\text{-Mod}$  est dit *élémentaire* s'il existe un entier  $d \geq 0$  et un  $K[\mathfrak{S}_d]$ -module simple  $M$  tel que  $E$  soit isomorphe à l'image de la transformation naturelle  $N$  donnée par la norme :

$$(T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d} \xrightarrow{N} (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d},$$

où un élément  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  agit via la transformation naturelle donnée par les endomorphismes  $K$ -linéaires de  $T^d(V) \otimes M = V^{\otimes d} \otimes M$  qui envoient les éléments  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes m$  sur les éléments  $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes \sigma m$ . Nous avons démontré les faits suivants au lemme 5.9.

1. Les foncteurs élémentaires sont absolument simples.

2. Pour tout  $d \geq 0$ , les classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires de degré  $d$  sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de  $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules simples.
3. Les foncteurs élémentaires sont les quotients simples des  $T^d$ ,  $d \geq 0$ .

Nous donnons maintenant une description plus précise des foncteurs élémentaires. Si  $K$  est de caractéristique nulle la norme est un isomorphisme, si bien que les foncteurs élémentaires de degré  $d$  sont isomorphes aux  $(T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d}$  pour les  $K[\mathfrak{S}_d]$ -modules simples  $M$ . Ces derniers peuvent se décrire en termes de symétriseurs de Young [25, Chap. 4.2] et les foncteurs élémentaires sont donc les foncteurs de Schur classiques [25, Chap. 6.1]. On a ainsi le résultat suivant.

**Proposition B.1.** *On suppose que  $K$  est de caractéristique nulle.*

1. Les foncteurs de Schur  $\mathbb{S}_\lambda$ , pour  $\lambda$  une partition, forment un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires.
2. Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est une partition avec  $\lambda_n \neq 0$ , alors  $\mathbb{S}_\lambda(V) \neq 0$  si et seulement si  $\dim V \geq n$ .
3. Le produit tensoriel de deux foncteurs de Schur se décompose comme une somme directe finie de foncteurs de Schur.

Supposons maintenant que  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ . Nous relient les foncteurs élémentaires aux foncteurs de Schur d'Akin, Buchsbaum et Weyman [1]. Pour toute partition  $\lambda$  de  $d$ , soit  $\tilde{\lambda}$  la partition conjuguée et soit  $\mathbb{S}_\lambda$  l'image de la transformation naturelle

$$\Lambda^{\tilde{\lambda}} \hookrightarrow T^d \xrightarrow{\simeq} T^d \twoheadrightarrow \mathcal{S}^\lambda$$

où l'isomorphisme est la permutation des facteurs de  $T^d$  qui envoie  $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$  sur  $v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}$ , où  $\sigma(i)$  est le  $i$ -ème terme dans la lecture en colonne du tableau de forme  $\lambda$  rempli en ligne par les nombres entiers  $1, 2, \dots, d$ . (Le foncteur de Schur  $\mathbb{S}_\lambda$  est noté  $L_{\tilde{\lambda}}$  dans [1]). On rappelle qu'une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est  $p$ -restreinte si  $\lambda_n < p$  et  $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$  pour  $1 \leq i < n$ .

**Proposition B.2.** *On suppose que  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ .*

1. Pour toute partition  $p$ -restreinte  $\lambda$ , le foncteur  $\mathbb{S}_\lambda$  a un socle simple  $\mathbb{L}_\lambda$ . Les foncteurs  $\mathbb{L}_\lambda$  indexés par les partitions  $p$ -restreintes  $\lambda$  forment une famille de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs élémentaires.
2. Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est une partition  $p$ -restreinte avec  $\lambda_n \neq 0$ , alors  $\mathbb{L}_\lambda(V) \neq 0$  si et seulement si  $\dim V \geq n$ .
3. Le produit tensoriel de deux foncteurs élémentaires est de longueur finie dans  $\mathcal{F}(K, K)$ .

*Démonstration.* L'énoncé de la proposition est bien connu dans la catégorie  $\mathcal{P}_K$  des foncteurs strictement polynomiaux de Friedlander et Suslin [24]. Plus précisément, la catégorie  $\mathcal{P}_K$  peut être décrite en termes d'algèbres de Schur [24, Thm 3.2], c'est donc une catégorie de plus haut poids. Les foncteurs de Schur  $\mathbb{S}_\lambda$  sont les objets costandard [58, Remark 6.1], ils ont un socle simple  $\mathbb{L}_\lambda$ , et les  $\mathbb{L}_\lambda$  forment un ensemble de représentants des simples de  $\mathcal{P}_K$ . Un théorème classique de Clausen et James [10, 33] (voir aussi [59, App. B] pour une

démonstration fonctorielle) implique que les foncteurs  $\mathbb{L}_\lambda$  apparaissant comme sous-foncteurs des  $T^d$ , ou dualement comme quotients des  $T^d$ , sont ceux indexés par les partitions  $p$ -restreintes. Ceci prouve le premier point. Pour le deuxième point, on a  $\mathbb{L}_\lambda(V) \subset \mathbb{S}_\lambda(V) = 0$  si  $\dim V < n$  car  $\mathbb{S}_\lambda(V)$  est un quotient de  $\Lambda^{\tilde{\lambda}}(V)$  qui est alors nul. Réciproquement,  $\mathbb{L}_\lambda$  est un sous-foncteur de  $S^\lambda$ , donc par dualité un quotient de  $\Gamma^\lambda$ . Si  $\dim V \geq n$ , on a donc  $\mathbb{L}_\lambda(V) \neq 0$  d'après [24, Cor. 2.12]. Enfin le troisième point est une conséquence de [24, Thm 3.2].

Nous montrons que l'énoncé dans  $\mathcal{P}_K$  implique la proposition B.2. Il y a un foncteur d'oubli  $\mathcal{U} : \mathcal{P}_K \rightarrow \mathcal{F}(K, K)$  fidèle et exact. Si  $K$  est infini, ce foncteur d'oubli identifie  $\mathcal{P}_K$  avec la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(K, K)$  dont les objets sont les foncteurs qu'on peut écrire comme des sous-quotients de sommes directes finies de foncteurs  $T^d$ , en particulier l'image de  $\mathcal{U}$  est stable par sous-quotients et  $\mathcal{U}$  préserve les simples. L'énoncé de la proposition B.2 découle donc formellement de l'énoncé dans  $\mathcal{P}_K$ . Supposons  $K$  fini. Un argument classique de polynomialité (cf [37, Thm 4.14] ou [46]) montre que  $\mathcal{U}$  préserve les foncteurs de longueur finie, d'où le troisième point. La définition des foncteurs élémentaires montre qu'ils admettent une structure de foncteur strictement polynomial et qu'ils sont des sous-foncteurs strictement polynomiaux de  $T^d$ . Pour démontrer les deux premiers points, il reste donc à vérifier que les  $\mathbb{S}_\lambda$  indexés par des partitions  $p$ -restreintes ont un socle simple dans  $\mathcal{F}(K, K)$ . Comme  $T^d$  est injectif dans  $\mathcal{P}_K$ , le monomorphisme  $\mathbb{L}_\lambda \hookrightarrow T^d$  s'étend en un monomorphisme  $\mathbb{S}_\lambda \hookrightarrow T^d$ . Le socle de  $\mathbb{S}_\lambda$  dans  $\mathcal{F}(K, K)$  n'est donc constitué que de sous-foncteurs simples de  $T^d$ . Pour démontrer que le socle est simple, il suffit donc de montrer que pour toute partition  $p$ -restreinte  $\mu$  de l'entier  $d$ , les espaces vectoriels  $\mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda)$  et  $\mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda)$  ont même dimension. Pour cela on considère le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et dont les injections verticales sont induites par le foncteur d'oubli :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, T^d) & \longrightarrow & \mathcal{P}_K(\mathbb{L}_\mu, T^d/\mathbb{S}_\lambda) \\
& & \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, \mathbb{S}_\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, T^d) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, K)(\mathbb{L}_\mu, T^d/\mathbb{S}_\lambda)
\end{array}$$

Le morphisme (2) est un isomorphisme car sa source et son but ont même dimension, égale à la dimension de  $cr_d(L_\mu)(K, \dots, K)$ , par la proposition 1.11. Le morphisme (1) est donc un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.  $\square$

Revenons au cas général. Si  $K$  est de caractéristique nulle, on note  $\mathbb{L}_\lambda := \mathbb{S}_\lambda$ . La formule définissant les foncteurs  $\mathbb{L}_\lambda$  (ou bien celle définissant les foncteurs élémentaires) montre que les  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  sont des représentations polynomiales du groupe algébrique  $GL_n$  sur  $K$ . Les représentations de  $GL_n$  sont classifiées par la théorie des plus hauts poids (voir par exemple [31, Section 31]).

**Proposition B.3.** *Soit  $\lambda$  une partition telle que  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  est non nulle. Alors c'est une représentation simple de plus haut poids  $\lambda$  de  $GL_n$ .*

*Démonstration.* La base de l'espace vectoriel  $\mathbb{S}_\lambda(K^n)$  [1, Thm II.2.16] montre que c'est une représentation de plus haut poids  $\lambda$ . Comme  $\mathbb{L}_\lambda \subset S^\lambda$  ou par dualité  $L_\lambda$  est un quotient de  $\Gamma^\lambda$ , [24, Cor 2.12] montre que  $\lambda$  est un poids de  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$ . Ainsi  $L_\lambda(K^n)$  est une représentation de plus haut poids  $\lambda$ . Il reste à

montrer qu'elle est simple. Comme  $\mathbb{L}_\lambda$  est auto-dual (cf. par exemple [59, section 2.2]), la représentation  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  est auto-duale (pour la dualité utilisant la transposition de  $GL_n$ ). Pour montrer que  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  est simple, il suffit donc de montrer que  $\text{End}_{GL_n}(\mathbb{L}_\lambda(K^n))$  est de dimension (inférieure ou égale à) 1 sur  $K$ . Mais cet espace vectoriel est un sous-espace vectoriel  $\text{Hom}_{GL_n}(\Gamma^\lambda(K^n), \mathbb{L}_\lambda(K^n))$ . D'après [57, Lm 6.6] ce dernier est isomorphe à  $\mathcal{P}_K(\Gamma^\lambda, \mathbb{L}_\lambda)$ , qui est de dimension 1 sur  $K$  d'après [24, Cor. 2.12]. La simplicité de  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  en découle.  $\square$

**Proposition B.4.** *Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une partition telle que  $\lambda_n \neq 0$ . Si  $\mu = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$  on a des isomorphismes de  $K[\mathcal{M}_n(K)]$ -modules*

$$\mathbb{L}_\lambda(K^n) \simeq \mathbb{L}_\mu(K^n) \otimes \det, \quad \mathbb{L}_\lambda(K^n) \simeq \mathbb{L}_\lambda(K^n) \otimes \delta,$$

où  $\delta$  désigne le  $K[\mathcal{M}_n(K)]$ -module  $K$  sur lequel les matrices inversibles (resp. singulières) opèrent par l'identité (resp. par 0).

*Démonstration.* Les représentations  $\mathbb{L}_\lambda(K^n)$  et  $\mathbb{L}_\mu(K^n) \otimes \det$  sont deux représentations simples de même plus haut poids de  $GL_n$ , elles sont donc isomorphes. Par Zariski-densité, elle sont isomorphes comme représentations du monoïde algébrique  $\mathcal{M}_n$ , donc comme représentations du monoïde des  $K$ -points  $\mathcal{M}_n(K)$ , ce qui donne le premier isomorphisme. Pour le deuxième isomorphisme, il suffit de remarquer que  $\det \otimes \delta = \det$ .  $\square$

## Références

- [1] Kaan Akin, David A. Buchsbaum, and Jerzy Weyman. Schur functors and Schur complexes. *Adv. in Math.*, 44(3) :207–278, 1982.
- [2] Maurice Auslander. Functors and morphisms determined by objects. pages 1–244. *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, Vol. 37, 1978.
- [3] Maurice Auslander. A functorial approach to representation theory. In *Representations of algebras (Puebla, 1980)*, volume 944 of *Lecture Notes in Math.*, pages 105–179. Springer, Berlin-New York, 1982.
- [4] H. Bass, J. Milnor, and J.-P. Serre. Solution of the congruence subgroup problem for  $SL_n$  ( $n \geq 3$ ) and  $Sp_{2n}$  ( $n \geq 2$ ). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33) :59–137, 1967.
- [5] Stanislaw Betley. Stable  $K$ -theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.
- [6] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [7] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.
- [8] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples*. Springer, Berlin, 2012. Second revised edition of the 1958 edition.
- [9] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Algèbre. Chapitres 4 à 7. [Algebra. Chapters 4–7].

- [10] Michael Clausen. Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups. II. *Adv. in Math.*, 38(2) :152–177, 1980.
- [11] William Crawley-Boevey. Modules of finite length over their endomorphism rings. In *Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990)*, volume 168 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–184. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [12] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [13] Aurélien Djament. Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (111) :xxii+213 pp. (2008), 2007.
- [14] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [15] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. *Fund. Math.*, 233(3) :197–256, 2016.
- [16] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [17] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.
- [18] Samuel Eilenberg. Abstract description of some basic functors. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 24 :231–234 (1961), 1960.
- [19] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups  $H(\Pi, n)$ . II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [20] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Homology theories for multiplicative systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 :294–330, 1951.
- [21] Edward Formanek. Group rings of free products are primitive. *J. Algebra*, 26 :508–511, 1973.
- [22] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [23] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [24] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [25] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [26] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [27] Pierre Gabriel. Représentations indécomposables. pages 143–169. Lecture Notes in Math., Vol. 431, 1975.

- [28] James A. Green. *Polynomial representations of  $GL_n$* , volume 830 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [29] Nate Harman. Effective and infinite-rank superrigidity in the context of representation stability. arXiv :1902.05603.
- [30] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [31] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [32] G. D. James. *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1978.
- [33] Gordon D. James. The decomposition of tensors over fields of prime characteristic. *Math. Z.*, 172(2) :161–178, 1980.
- [34] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane’s  $Q$ -construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4) :1555–1593, 1998.
- [35] L. G. Kovács. Semigroup algebras of the full matrix semigroup over a finite field. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4) :911–919, 1992.
- [36] Henning Krause. The spectrum of a module category. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 149(707) :x+125, 2001.
- [37] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I. *Amer. J. Math.*, 116(2) :327–360, 1994.
- [38] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.
- [39] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.
- [40] Nicholas J. Kuhn. A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras. *K-Theory*, 26(1) :15–49, 2002.
- [41] Nicholas J. Kuhn. Generic representation theory of finite fields in non-describing characteristic. *Adv. Math.*, 272 :598–610, 2015.
- [42] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [43] Barry Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Math.*, 8 :1–161, 1972.
- [44] Rohit Nagpal. VI-modules in non-describing characteristic, part I. arXiv :1709.07591.
- [45] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [46] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.
- [47] Teimuraz Pirashvili and Friedhelm Waldhausen. Mac Lane homology and topological Hochschild homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 82(1) :81–98, 1992.
- [48] Geoffrey M. L. Powell. The structure of indecomposable injectives in generic representation theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10) :4167–4193, 1998.

- [49] Andrew Putman and Steven V. Sam. Representation stability and finite linear groups. *Duke Math. J.*, 166(13) :2521–2598, 2017.
- [50] Steven V. Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(1) :159–203, 2017.
- [51] Jean-Pierre Serre. Le problème des groupes de congruence pour  $SL_2$ . *Ann. of Math. (2)*, 92 :489–527, 1970.
- [52] Robert L. Snider. Group rings with finite endomorphism dimension. *Arch. Math. (Basel)*, 41(3) :219–225, 1983.
- [53] Benjamin Steinberg. *Representation theory of finite monoids*. Universitext. Springer, Cham, 2016.
- [54] Robert Steinberg. Representations of algebraic groups. *Nagoya Math. J.*, 22 :33–56, 1963.
- [55] Robert Steinberg. Some consequences of the elementary relations in  $SL_n$ . In *Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982)*, volume 45 of *Contemp. Math.*, pages 335–350. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [56] Ross Street. Ideals, radicals, and structure of additive categories. *Appl. Categ. Structures*, 3(2) :139–149, 1995.
- [57] Antoine Touzé. Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(1) :53–99, 2012.
- [58] Antoine Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9) :1642–1673, 2013.
- [59] Antoine Touzé. Connectedness of cup products for polynomial representations of  $GL_n$  and applications. *Ann. K-Theory*, 3(2) :287–329, 2018.
- [60] N. A. Vavilov and A. V. Stepanov. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 394(Voprosy Teorii Predstavlenii Algebr i Grupp. 22) :33–139, 295, 2011.
- [61] Charles E. Watts. Intrinsic characterizations of some additive functors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :5–8, 1960.
- [62] B. A. F. Wehrfritz. Group rings with finite central endomorphism dimension. *Glasgow Math. J.*, 24(2) :169–176, 1983.