La propriété "power stable range one" et un problème "diophantien inverse"

Jean Fresnel, Michel Matignon

La propriété "power stable range one" et un problème "diophantien inverse"

Jean Fresnel et Michel Matignon

Résumé. La propriété (*) suivante a été définie par Khurana, Lam et Wang en 2011.
(*) *Un anneau A commutatif unitaire satisfait la propriété* "power stable range one" *, si pour tout $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe un entier $N=N(a,b)\geq 1$, $\lambda\in A$ tel que $a^N+\lambda b\in A^\times$, où $A^\times$ est le groupe des inversibles de A .*
On montre que cette propriété (*) est équivalente à la propriété (**) suivante.
(**) *Un anneau A commutatif unitaire satisfait la propriété* "diophantien inverse" *si pour tout $n\geq 1$, $(x_i,y_i)\in A^2$ et $x_iA+y_iA=A$ pour $1\leq i\leq n$, alors il existe $P(X,Y)\in A[X,Y]$ avec $P(X,Y)$ homogène,* $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et $P(x_i,y_i)\in A^\times$ pour $1\leq i\leq n$.*
Si A est un anneau commutatif unitaire de pictorsion, notion due à Gabber, Lorenzini et Liu en 2002, alors A satisfait (*) et par conséquent (**).
Toutefois, la réciproque est fausse, un contre-exemple est construit à partir d'un anneau de Dedekind exhibé par Goldman en 1963.

Abstract. In 2011 Khurana, Lam and Wang define the following property.
(**) *A commutaive unitary ring A satifies the property* "power stable range one" *if for all $a,b\in A$ with $aA+bA=A$ there is an integer $N=N(a,b)\geq 1$, $\lambda\in A$ with $a^N+\lambda b\in A^\times$, where $A^\times$ is the group of units of A .*
We show that property (*) is equivalent to the following property.
(**) *A commutative unitary ring A satisfies the property* "diophantian inverse" *if for all $n\geq 1$, $(x_i,y_i)\in A^2$, $x_iA+y_iA=A$ with $1\leq i\leq n$, there is $P(X,Y)\in A[X,Y]$ with P homogenous,* $\deg P\geq 1$ *and $P(x_i,y_i)\in A^\times$ for $1\leq i\leq n$.*
When A is a commutative unitary ring of pictorsion as defined by Gabber, Lorenzini and Liu in 2002, then A satisfies (*) and consequently (**).
We give a counterexample to the reciprocal by using a Dedekind ring built by Goldman in 1963.

Introduction

Tous les anneaux considérés dans cette note sont commutatifs et unitaires et les homomorohismes d'anneaux envoient 1 sur 1.

Dans un article de 2011 , Khurana, Lam et Wang ([K.L.W.]) se sont intéressés à la notion de "rings of square stable range one" qui peut être considérée comme une extension de la notion "n est dans le stable range of a ring" définie à l'origine par H. Bass en 1964 ([B]).

On dit qu'un anneau A satisfait la propriété "square stable rang one" si pour tout $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe $\lambda\in A$ tel que $a^2+\lambda b\in A^\times$, où $A^\times$ est le groupe des inversibles de A .

Dans l'épilogue de leur article, ils font allusion à une généralisation de cette notion appelée "power stable range one".

Elle se définit comme il suit.

Un anneau A satisfait la propriété "power stable range one" *que l'on écrit* $\mathrm{psr}(A)=1$ *, si pour tout $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe $N=N(a,b)\geq 1$, $\lambda\in A$ tel que $a^N+\lambda b\in A^\times$, où $A^\times$ est le groupe des inversibles de A .*

La première curiosité est qu'un anneau A satisfait $\mathrm{psr}(A)=1$, si et seulement si le problème suivant que l'on pourrait appeler "diophantien inverse" admet toujours une solution. Précisons d'abord le contexte.

Soit A un anneau commutatif, unitaire, $A^\times$ le groupe des inversibles de A , $m\geq 1$, $P(X,Y)=a_0Y^m+a_1XY^{m-1}+\ldots+a_mX^m\in A[X,Y]$, un polynôme homogène à coefficients dans A , de degré $m\geq 1$.

Soit $(x,y)\in A^2$, avec $P(x,y)\in A^\times$, alors on a $xA+yA=A$; sinon il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A tel que $xA+yA\subset\mathfrak{M}$, il suit facilement de cela que $P(x,y)\in\mathfrak{M}$, ce qui est en contradiction avec $P(x,y)\in A^\times$. Réciproquement si $xA+yA=A$, on a $u,v\in A$ avec $ux+vy=1$, si donc $W(X,Y):=uX+vY$, alors $W(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré 1 avec $W(x,y)=1$. En termes simples, si un couple $(x,y)\in A^2$ satisfait une relation de Bézout, c'est équivalent à l'existence d'un polynôme homogène $W(X,Y)\in A[X,Y]$, de degré 1 tel que $W(x,y)=1$ et en particulier $W(x,y)\in A^\times$.

Ainsi notre problème "diophantien inverse" s'énonce comme il suit.

(*) *Soient $n\geq 1$, $(x_i,y_i)\in A^2$ avec $1\leq i\leq n$, et $x_iA+y_iA=A$ pour $1\leq i\leq n$. Alors il existe $P(X,Y)\in A[X,Y]$ avec $P(X,Y)$ homogène,* $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et $P(x_i,y_i)\in A^\times$ pour $1\leq i\leq n$.*

Ainsi on a $\mathrm{psr}(A)=1$ si et seulement si (*) est satisfait pour tout $n\geq 1$ et $(x_i,y_i)\in A^2$ avec $1\leq i\leq n$, et $x_iA+y_iA=A$ pour $1\leq i\leq n$.

On peut aussi interpréter la propriété $\mathrm{psr}(A)=1$ de façon géométrique comme il suit.

Soient $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$. *Soient* $A[x,y]:=\dfrac{A[X,Y]}{X(aY-bX)A[X,Y]}$ *où* x (resp. y) *est l'image de* X (resp. Y), *de plus la graduation de* $A[x,y]$ *est induite par celle de* $A[X,Y]$. *Soit* $S=S(a,b):=\mathrm{Proj}(A[x,y])$, *alors* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ *est un* A*-module libre de rang* 2 .
De plus on a $\mathrm{psr}(A)=1$ *si et seulement si pour tout* $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$ *et pour tout* $S=S(a,b)$, *le* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$*-module* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(1)(S(a,b))$ *est un élément de torsion du groupe de Picard de* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.

Il suit en particulier de cela que si pour tout $a,b\in A$, le groupe de Picard de $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ est de torsion, alors on a $\mathrm{psr}(A)=1$.

De façon encore plus particulière supposons que A est de pictorsion ; ce qui veut dire que pour tout anneau B qui est fini sur A , alors $\mathrm{Pic}(B)$ est de torsion ([G.L.L.]). Sachant que $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ est un A-module libre de rang 2 (proposition 3) , cela implique que $\mathbb{O}_{S(a,b)}(1)(S(a,b))$ est un élément de torsion du groupe de Picard de $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.
Il suit donc de cela que tout anneau A *qui est de pictorsion est tel que* $\mathrm{psr}(A)=1$.

La question est de savoir s'il existe des anneaux A tels que $\mathrm{psr}(A)=1$ et pour lesquels $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b)))$ n'est pas de torsion.

La réponse est donnée dans la littérature de 1963. En effet Goldman a mis en évidence des anneaux de Dedekind A tels que $\mathbb{Z}[X]\subset A\subset\mathbb{Q}(X)$ avec $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ qui est fini pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ et dont le groupe des classes d'idéaux n'est pas de torsion, ainsi A n'est pas de pictorsion. Par ailleurs si $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$ et $b\neq 0$, alors l'anneau $\dfrac{A}{bA}$ est fini, il suit que le groupe des inversibles de $\dfrac{A}{bA}$ est fini, ce qui montre que l'ordre de l'image de a dans $\left(\dfrac{A}{bA}\right)^{\times}$ est fini, ainsi il existe $N=N(a,b)\geq 1$, $\lambda\in A$ tel que $a^N+\lambda b=1$ et donc $\mathrm{psr}(A)=1$.
A la remarque 2 , on montre alors que $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b)))$ n'est pas de torsion.

1. Existence de polynômes homogènes à deux variables, à coefficients dans un anneau A et prenant des valeurs inversibles sur une partie finie de A^2

Proposition et définition de la propriété "power stable range one"
Soient A un anneau commutatif, unitaire, $A^\times$ le groupe des inversibles de A. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) Pour tout $z\in A$, soit $\rho_z : A \to \frac{A}{zA}$ la surjection canonique, alors le groupe quotient $\frac{(\rho_z(A))^\times}{\rho_z(A^\times)}$ est de torsion ; ici $(\rho_z(A))^\times$ désigne le groupe des inversibles de $\rho_z(A)$,
ii) pour tout $a, b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe $N\geq 1$, $\lambda\in A$ avec $b^N-\lambda a\in A^\times$.
Un anneau qui possède les propriétés *i)* et *ii)* est dit avoir *"power stable range one"* et *on le notera* $\mathrm{psr}(A)=1$.

Proposition 1 *Soient A un anneau commutatif, unitaire, $A^\times$ le groupe des inversibles de A. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Pour tout $a, b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe $N\geq 1$, $\lambda\in A$ avec $b^N-\lambda a\in A^\times$, i.e. $\mathrm{psr}(A)=1$,
ii) pour tout $n\geq 1$ et pour toute famille finie $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A^2 avec $x_iA+y_iA=A$ pour $1\leq i\leq n$, il existe un polynôme $P(X,Y)\in A[X,Y]$ avec $P(X,Y)$ homogène, $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et* $P(x_i,y_i)\in A^\times$, *pour* $1\leq i\leq n$.

Démonstration (par récurrence sur n)

1) Montrons *i)* implique *ii)* (par récurrence sur n).

1.1) Le cas $n=1$, c'est la relation $x_1A+y_1A=A$ qui dit qu'il existe $u, v\in A$ avec $ux_1+vy_1=1$; ainsi $P(X,Y)=uX+vY$ convient.

On suppose l'implication i) donne ii) satisfaite pour n.
On a donc $P(X,Y)\in A[X,Y]$ homogène, $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et $P(x_i,y_i)\in A^\times$ pour $1\leq i\leq n$.*
Quitte à changer $P(X,Y)$ en $P(X,Y)^\alpha$, $\alpha\geq 1$, on peut supposer que $\deg P(X,Y)\geq n$ *; en effet, sachant que $P(X,Y)$ est homogène et que $P(x_1,y_1)^\alpha\in A^\times$, donc $P(X,Y)^\alpha\neq 0$, on a* $\deg P(X,Y)^\alpha=\alpha\deg P(X,Y)$.

1.2) Soit $(x_{n+1},y_{n+1})\in A^2$ et $x_{n+1}A+y_{n+1}A=A$.
On a donc $W(X,Y)\in A[X,Y]$ homogène de degré 1 avec $W(x_{n+1},y_{n+1})=1$. Soit $Q(X,Y):=\prod_{i=1}^{n}(y_iX-x_iY)$.
Soient $b:=P(x_{n+1},y_{n+1})$, $a:=Q(x_{n+1},y_{n+1})$.
Montrons que $aA+bA=A$.
Supposons le contraire, il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A tel que $aA+bA\subset\mathfrak{M}$.
Soit $\rho:A\to\frac{A}{\mathfrak{M}}$ la surjection canonique, on a donc $\rho(a)=0$, ce qui veut dire que $\prod_{i=1}^{n}\rho(y_ix_{n+1}-x_iy_{n+1})=0$, sachant que $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est un corps , cela veut dire qu'il existe i avec $1\le i\le n$ tel que $\rho(y_ix_{n+1}-x_iy_{n+1})=0$. Alors il existe $\lambda\in A$ tel que
(1) $\qquad(\rho(x_{n+1},\rho(y_{n+1}))=\rho(\lambda)(\rho(x_i),\rho(y_i))$ avec $\rho(\lambda)\neq 0$.
En effet, comme $x_iA+y_iA=A$, on a $\rho(x_i)\rho(A)+\rho(y_i)\rho(A)=\rho(A)$, cela implique $(\rho(x_i),\rho(y_i))\neq(0,0)$; ainsi il existe $\lambda\in A$ tel que
$\qquad(\rho(x_{n+1},\rho(y_{n+1}))=\rho(\lambda)(\rho(x_i),\rho(y_i))$.
Comme $x_{n+1}A+y_{n+1}A=A$, on a on a $u,v\in A$ avec $x_{n+1}u+y_{n+1}v=1$, donc $\rho(x_{n+1})\rho(u)+\rho(y_{n+1})\rho(v)=1$ et alors $\rho(\lambda)(\rho(x_i)\rho(u)+\rho(y_i)\rho(v))=1$; ce qui montre que $\rho(\lambda)\neq 0$.
Sachant que $P(x_i,y_i)=\varepsilon_i\in A^\times$, on a donc $\rho(P(x_i,y_i))=\rho(\varepsilon_i)\in(\rho(A))^\times$; il suit facilement de (1) que
(2) $\quad\rho(P(x_{n+1},y_{n+1}))=\rho(\lambda)^{\deg P}\rho(P(x_i,y_i))=\rho(\lambda)^{\deg P}\rho(\varepsilon_i)\neq 0$,
où $\varepsilon_i=P(x_i,y_i)\in A^\times$.
Ainsi $\rho(b)\neq 0$ et donc $b\notin\mathfrak{M}$; ce qui est une contradiction.
On a bien $aA+bA=A$.

1.3) Il suit alors de l'hypothèse *ii)* qu'il existe $N\ge 1$, $\varepsilon\in A^\times$, $\lambda\in A$ avec $b^N-\lambda a=\varepsilon$.
Soit alors $R(X,Y):=P(X,Y)^N-\lambda Q(X,Y)W(X,Y)^{N\deg P-n}$. Facilement $R(x_i,y_i)\in A^\times$ pour $1\le i\le n$. Cela montre d'une part que $R(X,Y)\neq 0$ et que $R(X,Y)$ est homogène de degré $N\deg P(X,Y)\ge 1$. De plus $R(x_{n+1},y_{n+1})=b^N-\lambda a=\varepsilon$; ce qui montre *iii)* pour $n+1$.

2) Pour montrer que *ii)* implique *i)* , il suffit de montrer que non *i)* implique non *ii)*.
On suppose donc qu'il existe $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$ et que pour tout $N\ge 1$ et pour tout $\lambda\in A$, on a $b^N-\lambda a\notin A^\times$. Suposons qu'il existe un polynôme homogène $P(X,Y)\in A[X,Y]$, de degré $n\ge 1$ avec $P(0,1)\in A^\times$

et $P(a,b)\in A^\times$. On a donc $P(X,Y)=a_0Y^n+a_1XY^{n-1}+...+a_nX^n$. Alors $P(0,1)=\varepsilon_1\in A^\times$ veut dire que $\varepsilon_1=a_0\in A^\times$ et en plus $P(a,b)=\varepsilon_2\in A^\times$ impliquent que $\varepsilon_2=\varepsilon_1 b^n+\mu a$ avec $\mu\in A$; cela montre que $b^n+(\varepsilon_1)^{-1}\mu a=\varepsilon_2(\varepsilon_1)^{-1}$; ce qui est une contradiction.

On pourrait renforcer la condition $\mathrm{psr}(A)=1$ par le suivant.
Pour tout $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$, *il existe* $N\geq 1$, $\lambda\in A$ *avec* $b^N-\lambda a=1$.
Cela donnerait la proposition qui suit.

Proposition 2 *Soit* A *un anneau commutatif, unitaire,* $A^\times$ *le groupe des inversibles de* A. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Pour tout $z\in A$, *le groupe des inversibles de* $\frac{A}{zA}$ *est de torsion,* i.e. *tout élément du groupe des inversibles de* $\frac{A}{zA}$ *est d'ordre fini,*
ii) pour tout $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$, *il existe* $N\geq 1$, $\lambda\in A$ *avec* $b^N-\lambda a=1$,
iii) pour tout $n\geq 1$ *et pour toute famille finie* $(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}$ *d'éléments de* A^2 *avec* $x_iA+y_iA=A$ *pour* $1\leq i\leq n$, *il existe un polynôme* $P(X,Y)\in A[X,Y]$ *(qui dépend de la famille) avec* $P(X,Y)$ *homogène,* $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et* $P(x_i,y_i)=1$, *pour* $1\leq i\leq n$.

Démonstration (par récurrence sur n)
0) L'équivalence entre *i)* et *ii)* est immédiate.

1) Montrons *ii)* implique *iii)* (par récurrence sur n).

1.1) Le cas $n=1$, c'est la relation $x_1A+y_1A=A$ qui dit qu'il existe $u,v\in A$ avec $ux_1+vy_1=1$; ainsi $P(X,Y)=uX+vY$ convient.
On suppose l'implication ii) donne iii) satisfaite pour n.
On a donc $P(X,Y)\in A[X,Y]$ *homogène,* $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et* $P(x_i,y_i)=1$ *pour* $1\leq i\leq n$.
Quitte à changer $P(X,Y)$ *en* $P(X,Y)^\alpha$, $\alpha\geq 1$, *on peut supposer que* $\deg P(X,Y)\geq n$ *; en effet, sachant que* $P(X,Y)$ *est homogène et que* $P(x_1,y_1)^\alpha=1$, *donc* $P(X,Y)^\alpha\neq 0$, *on a* $\deg P(X,Y)^\alpha=\alpha\deg P(X,Y)$.

1.2) Soit $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in A^2$ et $x_{n+1}A + y_{n+1}A = A$.
On a donc $W(X,Y) \in A[X,Y]$ homogène de degré 1 avec $W(x_{n+1}, y_{n+1}) = 1$. Soit $Q(X,Y) := \prod_{i=1}^{n} (y_i X - x_i Y)$.
Soient $b := P(x_{n+1}, y_{n+1})$, $a := Q(x_{n+1}, y_{n+1})$.
Montrons que $aA + bA = A$.
Le démonstration est analogue à celle de la proposition 1.

1.3) Il suit alors de l'hypothèse *ii)* qu'il existe $N \geq 1$, $\varepsilon \in A^{\times}$, $\lambda \in A$ avec $b^N - \lambda a = 1$.
Soit alors $R(X,Y) := P(X,Y)^N - \lambda Q(X,Y) W(X,Y)^{N \deg P - n}$. Facilement $R(x_i, y_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Cela montre d'une part que $R(X,Y) \neq 0$ et que $R(X,Y)$ est homogène de degré $N \deg P(X,Y) \geq 1$. De plus $R(x_{n+1}, y_{n+1}) = b^N - \lambda a = 1$; ce qui montre *iii)* pour $n+1$.

2) Pour montrer que *ii)* implique *iii)*, il suffit de montrer que non *ii)* implique non *iii)*.
On suppose donc qu'il existe $a, b \in A$ avec $aA + bA = A$ et que pour tout $N \geq 1$ et pour tout $\lambda \in A$, on a $b^N - \lambda a \neq 1$. Suposons qu'il existe un polynôme homogène $P(X,Y) \in A[X,Y]$, de degré $n \geq 1$ avec $P(0,1) = 1$ et $P(a,b) = 1$. On a donc $P(X,Y) = a_0 Y^n + a_1 X Y^{n-1} + \ldots + a_n X^n$. Alors $a_0 = P(0,1) = 1$ et en plus $P(a,b) = 1$ impliquent qu'il existe $\mu \in A$ avec $b^n = 1 + \mu a$; ce qui est une contradiction.

2. Interprétation de l'existence de polynômes homogènes à deux variables, satisfaisant la proposition 1 avec le groupe de Picard

Proposition 3 *Soient* A *un anneau commutatif, unitaire,* $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$. *Soient* $A[x,y]:=\dfrac{A[X,Y]}{X(aY-bX)A[X,Y]}$ *où* x (resp. y) *est l'image de* X (resp. Y), *de plus la graduation de* $A[x,y]$ *est induite par celle de* $A[X,Y]$. *Soit* $S(a,b):=\mathrm{Proj}(A[x,y])$.

1. *Il existe* $\theta\in\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ *avec* $\theta|_{D_+(x)}=0$, $\theta|_{D_+(y)}=\dfrac{ay-bx}{y}$ *de plus on a* $\theta^2=a\theta$. *Ensuite on a* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))=A\oplus A\theta$ *et* $(1,\theta)$ *est une base du* A*-module* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$. *Enfin* $S(a,b)$ *est affine et isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b)))$.

2. Si $Z:=\mathrm{Proj}(A[X,Y])=\mathrm{P}^1_A$, *la surjection canonique* $A[X,Y]\to A[x,y]$ *induit un homomorphisme* $\mathbb{O}_Z(d)\to\mathbb{O}_{S(a,b)}(d)$ *et pour* d *assez grand l'homomorphisme* $\mathbb{O}_Z(d)(Z)\to\mathbb{O}_{S(a,b)}(d)(S(a,b))$ *est surjectif. Cela veut dire que pour* d *assez grand* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(d)(S(a,b))$ *est constitué des éléments de* $A[x,y]$ *qui sont homogènes de degré* d .

3. *Soit* $\mathrm{W}_1:=\mathrm{Proj}(\dfrac{A[X,Y]}{XA[X,Y]})\simeq\mathrm{Spec}(A)$,
$\mathrm{W}_2:=\mathrm{Proj}(\dfrac{A[X,Y]}{(aY-bX)A[X,Y]})\simeq\mathrm{Spec}(A)$.
Comme $aA+bA=A$, *il existe* $a',b'\in A$ *avec* $aa'+bb'=1$; *facilement* $A[X,Y]=A[aY-bX,a'X+b'Y]$ *où* $aY-bX$ *et* $a'X+b'Y$ *peuvent être considérés comme deux variables . Alors*

$$\mathbb{O}_{W_1}(d)(W_1)=AY^d\ ,\ \mathbb{O}_{W_2}(d)(W_1)=A(a'X+b'Y)^d\ .$$

Alors l'homomorphisme canonique $\dfrac{A[X,Y]}{X(aY-bX)A[X,Y]}\to\dfrac{A[X,Y]}{XA[X,Y]}\times\dfrac{A[X,Y]}{(aY-bX)A[X,Y]}$ *induit un homomorphisme* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))\to\mathbb{O}_{W_1}(W_1)\times\mathbb{O}_{W_2}(W_2)$ *défini par* $\alpha+\beta\theta\to(\alpha+a\beta,\alpha)$. *Et ce même homomorphisme canonique induit un homomorphisme* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(d)(S(a,b))\to\mathbb{O}_{W_1}(d)(W_1)\times\mathbb{O}_{W_2}(d)(W_2)$ *qui pour* d *assez grand selon* **2.** *est de la forme* $P(x,y)\mapsto(P(0,1)Y^d,P(a,b)(a'X+b'Y)^d)$.

Démonstration

0) *Quelques rappels sur l'anneau* $A[X,Y]$.

0.1) *Les éléments* $X,Y,(aY-bX),(a'X+b'Y)$ *ne sont pas diviseurs de zéro dans* $A[X,Y]$,

Les éléments X et Y ne sont pas diviseurs de zéro dans $A[X,Y]$, en d'autres termes, si $XP(X,Y)=0$ (resp. $YP(X,Y)=0$) , alors $P(X,Y)=0$.
Soient $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$, il existe donc $a',b'\in A$ avec $aa'+bb'=1$. Alors on a

$$X=-b'(aY-bX)+a(a'X+b'Y)\ ,\ Y=a'(aY-bX)+b(a'X+b'Y)\ .$$

Soit $A[U,V]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A en les variables U,V . Soit $s:A[U,V]\to A[X,Y]$ défini par $s(U)=aY-bX$, $s(V)=a'X+b'Y$ et $s(\lambda)=\lambda$ pour $\lambda\in A$. Soit $t:A[X,Y]\to A[U,V]$ défini par $t(X)=-b'U+aV$, $t(Y)=a'U+bV$ et $s(\lambda)=\lambda$ pour $\lambda\in A$ **.** Facilement $ts(U)=U$, $ts(V)=V$ et $st(X)=X$, $st(Y)=Y$, ce qui implique que s et t sont des A-isomorphismes.
Ainsi $A[X,Y]$ est aussi un anneau de polynôme à coefficients dans A en les variables $aY-bX$ et $a'X+b'Y$. En particulier $aY-bX$ et $a'X+b'Y$ ne sont pas diviseurs de zéro dans $A[X,Y]$, en d'autres termes si $(aY-bX)P(X,Y)=0$ (resp. $(a'X+b'Y)P(X,Y)=0$) , alors $P(X,Y)=0$.

0.2) *Soit* $P(X,Y)\in A[X,Y]$, *homogène avec* $P(a,b)=0$, *alors il existe* $Q(X,Y)\in A[X,Y]$ *homogène avec* $P(X,Y)=(aY-bX)Q(X,Y)$.
En effet si $P(X,Y)$ est homogène de degré d par 0.1) , on peut écrire $P(X,Y)$ sous la forme
$P(X,Y)=a_0(a'X+b'Y)^d+a_1(a'X+b'Y)^{d-1}(aY-bX)+\ldots+(aY-bX)^d$.
Il suit de cela que $P(a,b)=a_0$ et donc $P(a,b)=0$ implique $a_0=0$, ce qui veut dire que

$$P(X,Y)=(aY-bX)\,Q(X,Y) \quad \text{avec}$$

$$Q(X,Y)=(a_1(a'X+b'Y)^{d-1}+a_2(a'X+b'Y)^{d-2}(aY-bX)\ldots+(aY-bX)^{d-1})\ .$$

1) *Montrons* **1.**
1.1) *Le calcul de* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.
1.1.1) Soit $f\in\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$. On a donc

$$f|_{D_+(x)}=\frac{P(a'x+b'y,ay-bx)}{x^n}\ ,\ \text{avec}$$

$$P(a'x+b'y,ay-bx)=a_0(a'x+b'y)^n+a_1(a'x+b'y)^{n-1}(ay-bx)+\ldots+a_n(ay-bx)^n\ .$$

Sachant que $x(ay-bx)=0$, on a

(1) $$f|_{D_+(x)}=\frac{a_0(a'x+b'y)^n}{x^n}.$$

De même on a $f|_{D_+(y)}=\dfrac{Q(a'x+b'y,ay-bx)}{y^m}$, avec

$Q(a'x+b'y, ay-bx) =$

$$b_0(a'x+b'y)^m + b_1(a'x+b'y)^{m-1}(ay-bx) + \ldots + b_m(ay-bx)^m .$$

Sachant que $x(ay-bx)=0$, on a

(2) $$f|_{D_+(y)} = \frac{b_0(a'x+b'y)^m + b_1(a'x+b'y)^{m-1}(ay-bx) + \ldots + b_m(ay-bx)^m}{y^m}$$

Sachant que $x(ay-bx)=0$, on a

(3) $$(f|_{D_+(y)})|_{D_+(xy)} = \frac{b_0(a'x+b'y)^m}{y^m} .$$

Il suit donc de (1) et (3) que sur $D_+(x) \cap D_+(x)$, on a l'égalité

(4) $$\frac{a_0(a'x+b'y)^n}{x^n} = \frac{b_0(a'x+b'y)^m}{y^m} .$$

Cela veut dire qu'il existe $k \geq 1$ avec

$$(XY)^k((a_0(a'X+b'Y)^n Y^m - b_0(a'X+b'Y)^m X^n) \in X(aY-bX)A[X,Y] .$$

Ainsi en spécialisant X en a et Y en b , on obtient

(5) $$(ab)^k(a_0 b^m - b_0 a^n) = 0 .$$

(6) Si donc $T := \mathrm{Spec}A$, cela veut dire qu'il existe $\alpha \in A$ avec

$$\alpha|_{D(a)} = \frac{a_0}{a^n} \text{ et } \alpha|_{D(b)} = \frac{b_0}{b^m} .$$

Soit toujours f comme il est défini en (1) et (2) avec la propriété (6).

1.1.2) *Montrons que* $f|_{D_+(x)} = \frac{a_0}{a^n} = \alpha|_{D(a)}$.

On remarque d'abord que $D_+(x) \subset D_+(a)$. En effet si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier homogène de $A[x,y]$ avec $x \notin \mathfrak{P}$, il suit de la relation $axy = bx^2$ que si $a \in \mathfrak{P}$, alors $b \in \mathfrak{P}$, ce qui est impossible puisque $aA + bA = A$. Ainsi a est inversible sur $D_+(x)$. On a donc

$$f|_{D_+(x)} = \frac{a_0(a'x+b'y)^n}{x^n} = \frac{a_0}{a^n}\left(\frac{aa'x+b'ay}{x}\right)^n = \frac{a_0}{a^n}\left(\frac{x+b'(ay-bx)}{x}\right)^n ,$$

sachant que $aa'+bb'=1$ et comme $x(ay-bx)=0$, on a bien

$$f|_{D_+(x)} = \frac{a_0}{a^n} = \alpha|_{D(a)} ,$$

compte tenu de (6).

1.1.3) *Montrons l'existence de* $\theta \in \mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ *avec*

$$\theta|_{D_+(x)} = 0 \text{ et } \theta|_{D_+(y)} = \frac{ay-bx}{y} .$$

Remarquons que la restriction à $D_+(x) \cap D_+(y) = D_+(xy)$ de l'élément $\frac{ay-bx}{y} \in \mathbb{O}_S(D_+(x))$ est nulle ; en effet, sur $D_+(x) \cap D_+(y) = D_+(xy)$ on a $\frac{ay-bx}{y} = \frac{x(ay-bx)}{xy}$, il suit de la relation $x(ay-bx)=0$ que

$(\frac{a\,y-b\,x}{y})\,|_{D_+(xy)}=0$. Cela montre l'existence de $\theta\in\mathbb{O}_S(S)$ avec $\theta\,|_{D_+(x)}=0$ et $\theta\,|_{D_+(y)}=\frac{a\,y-b\,x}{y}$.

1.1.4) Il s'agit maintenant d'expliciter $f|_{D_+(y)}$, c'est le plus difficile.

Montrons que

(7) $f|_{D_+(y)}=\alpha+\beta\,\theta$ *avec* $\beta:=\gamma+(b_1 b'^{\,m-1}+b_2 b'^{\,m-2}a+\ldots+b_m a^{m-1})$ *et* $\gamma\in A$ *avec* $\gamma|_{D(a)}=-\frac{a_0}{a^{n+1}}+\frac{b_0 b'^{\,m}}{a}$, $\gamma|_{D(b)}=-\frac{b_0}{b^m}(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-a')^k a^{k-1}$.

On sait par (2) que

$$f|_{D_+(y)}=\frac{b_0(a'x+b'y)^m+b_1(a'x+b'y)^{m-1}(a\,y-b\,x)+\ldots+b_m(a\,y-b\,x)^m}{y^m}\ ,$$

compte tenu de $x(a\,y-b\,x)=0$, on a

$b_k(a'x+b'y)^{m-k}(a\,y-b\,x)^k=b_k(b'y)^{m-k}(a\,y-b\,x)^k$. Il suit de cela que

$$b_k\frac{(a'x+b'y)^{m-k}(a\,y-b\,x)^k}{y^m}=b_k(b')^{m-k}(\frac{a\,y-b\,x}{y})^k=b_k(b')^{m-k}\,\theta^k\ .$$

Ainsi

$$f|_{D_+(y)}=b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m+(b_1 b'^{\,m-1}\theta+b_2 b'^{\,m-2}\theta^2+\ldots+b_m\theta^m)\ ,$$

compte tenu de $\theta^k=a^{k-1}\theta$ pour $k\geq 1$, on a

(8) $f|_{D_+(y)}=b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m+(b_1 b'^{\,m-1}+b_2 b'^{\,m-2}a+\ldots+b_m a^{m-1})\,\theta$.

1.1.5) Il nous reste donc à étudier $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m$ sur $D_+(y)$.

Sur $D_+(y)\cap D_+(a)$ on a

$$b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{a^m}(\frac{x+b'(a\,y-b\,x)}{y})^m\ ,$$

compte tenu de $x(a\,y-b\,x)=0$, on a

$$b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{a^m}((\frac{x}{y})^m+b'^{\,m}a^{m-1}(\frac{a\,y-b\,x}{y}))=\frac{b_0}{a^m}(\frac{x}{y})^m+\frac{b_0 b'^{\,m}}{a}\,\theta\ .$$

Sur $D_+(y)\cap D_+(b)$ on a

(9) $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{b^m}(\frac{a'(b\,x-a\,y)+y}{y})^m$, ainsi

$$b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{b^m}(1-a'\,\theta)^m\ ,$$

en tenant compte de la formule $\theta^k=a^{k-1}\theta$ pour $k\geq 1$, on a

(10) $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{b^m}(1+(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-a')^k a^{k-1})\,\theta)$.

Soit toujours, selon (6) , on a $\alpha\in A$ avec $\alpha|_{D(a)}=\frac{a_0}{a^n}$ et $\alpha|_{D(b)}=\frac{b_0}{b^m}$.

Alors sur $D_+(y)\cap D_+(b)$, on a

(11) $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\alpha+v\theta$ avec $v:=\frac{b_0}{b^m}(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-a')^k a^{k-1})\in\mathbb{O}_T(D(b))$.

Sur $D_+(y)\cap D_+(a)$, on a

(12) $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\frac{b_0}{a^m}(\frac{x}{y})^m+\frac{b_0 b'^m}{a}\theta$.

On calcule

$$\frac{b_0}{a^m}(\frac{x}{y})^m-\alpha=\frac{b_0}{a^m}(\frac{x}{y})^m-\frac{a_0}{a^n}.$$

$$\frac{b_0}{a^m}(\frac{x}{y})^m-\frac{a_0}{a^n}.=\frac{(b_0a_n-a_0b^m)x^m-a_0(ay-bx)^m}{a^{n+m}y^m}.$$

Il s'agit de montrer que $\frac{(b_0a_n-a_0b^m)x^m}{a^{n+m}y^m}$ est nulle sur $D_+(y)\cap D_+(a)$.

Cela revient à montrer que pour k assez grand, on a

(13) $(aY)^k(b_0a^n-a_0b^m)X^m\in X(aY-bX)A[X,Y]$

et donc, compte tenu de 0.1) cela revient à montrer que

(14) $F(X,Y):=(aY)^k(b_0a^n-a_0b^m)X^{m-1}\in(aY-bX)A[X,Y]$.

Maintenant, si on spécialise X en a et Y en b , on a

$F(a,b)=(ab)^k(b_0a^n-a_0b^m)a^{m-1}$ et il suit de (5) que $F(a,b)=0$, alors par 0.2) la relation (14) est satisfaite, ce qui montre que $\frac{(b_0a_n-a_0b^m)x^m}{a^{n+m}y^m}$ est nul sur $D_+(y)\cap D_+(a)$.

En résumé, sur $D_+(y)\cap D_+(a)$, on a

(15) $b_0(\frac{a'x+b'y}{y})^m=\alpha+u\theta$ avec $u:=-\frac{a_0}{a^{n+1}}+\frac{b_0b'^m}{a}\in\mathbb{O}_T(D(a))$.

Il nous reste à montrer que v défini en (10) et u défini en (15) coïncident sur $D(a)\cap D(b)$. On a

$$au=a(-\frac{a_0}{a^{n+1}}+\frac{b_0b'^m}{a})=-\frac{a_0}{a^n}+b_0b'^m,$$

$$av=\frac{b_0}{b^m}(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-a'a)^k+1)-\frac{b_0}{b^m}=\frac{b_0}{b^m}(1-aa')^m-\frac{b_0}{b^m}=b_0b'^m-\frac{b_0}{b^m}.$$

Sachant que sur $D(a)\cap D(b)$ on a $\frac{a_0}{a^n}=-\frac{b_0}{b^m}$, ainsi $au=\alpha v$ et donc $u=v$.

Cela montre qu'il existe $\gamma\in A$ avec $\gamma|_{D(a)}=u$ et $\gamma|_{D(b)}=v$.

Il suit donc de (8) que

$f|_{D_+(y)}=\alpha+\beta\theta$ avec $\beta:=\gamma+(b_1b'^{m-1}+b_2b'^{m-2}a+\ldots+b_ma^{m-1})$ et $\gamma\in A$

avec $\gamma|_{D(a)}=-\frac{a_0}{a^{n+1}}+\frac{b_0b'^m}{a}$, $\gamma|_{D(b)}=-\frac{b_0}{b^m}(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-a')^k a^{k-1}$.

1.2) *On a donc montré que* $\{1,\theta\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.
Montrons maintenant que cette famille est libre sur A .
On suppose que $\alpha+\beta\theta=0$ avec $\alpha,\beta\in A$.
On a donc $\alpha|_{D_+(x)}=0$ puisque $\theta|_{D_+(x)}=0$.
Cela veut dire qu'il existe $k\geq 1$ avec

$$X^k\alpha=X(aY-bX)Q(X,Y)\ ,$$

sachant par 0.1) que X n'est pas diviseur de zéro, on a

$$X^{k-1}\alpha=(aY-bX)Q(X,Y)\ .$$

En spécialisant X en a et Y en b , on a $a^{k-1}\alpha=0$.
Ensuite, on a

$$\alpha|_{D_+(y)}+\beta|_{D_+(y)}\frac{ay-bx}{y}=0\ .$$

Cela veut dire qu'il existe $m\geq 1$ avec

(1) $$Y^m(\alpha Y+\beta(aY-bX)=X(aY-bX)Q(X,Y)\ .$$

En spécialisant X en a , Y en b on a $b^{m+1}\alpha=0$.
On a donc $a',b'\in A$ avec $a'a^{k-1}+b'b^{m+1}=1$ et par $(a'a^{k-1}+b'b^{m+1})\alpha=0$, on déduit que $1\alpha=\alpha=0$. Ainsi l'égalité (1) s'écrit

$$Y^m\beta(aY-bX)=X(aY-bX)Q(X,Y)\ .$$

Sachant par 0.1) que $aY-bX$ ne divise pas zéro, on déduit que $Y^m\beta=XQ(X,Y)$. En spécialisant X en 0 et Y en 1 , on a $\beta=0$.

1.2) *Montrons que* $S(a,b)$ *est fini sur* $\mathrm{Spec}A$ *et donc que* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ *est fini sur* A *et que* $S(a,b)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.
Pour montrer que $S(a,b)$ est fini sur $\mathrm{Spec}A$, il suffit de remarquer que le morphisme canonique $S(a,b)\to T=\mathrm{Spec}A$ est quasi-fini, ce qui veut dire que pour tout premier $\mathfrak{p}$ de A il existe seulement un nombre fini de premiers homogènes $\mathfrak{P}$ de $A[x,y]$ avec $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap A$ et $xA[x,y]+yA[x,y]\not\subset\mathfrak{P}$. En effet, en utilisant [L] ex. 4.2. p. 155 , on sait que le morphisme canonique $S(a,b)\to\mathrm{Spec}A$ est fini, ainsi $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ est fini sur A et $S(a,b)$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$.
Il reste à montrer que la quasi-finitude.
Si $\mathfrak{P}$ est un idéal homogène de $A[x,y]$ avec $xA[x,y]+yA[x,y]\not\subset\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap A$, sachant que $x(ay-bx)=0$, on a $x\in\mathfrak{P}$ ou $ay-bx\in\mathfrak{P}$.
On suppose que $x\in\mathfrak{P}$, soit $\mathfrak{A}_0:=\mathfrak{p}A[x,y]+xA[x,y]\subset\mathfrak{P}$, montrons que $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{P}$. Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{A}_0$. Soit donc $P(x,y)$ homogène de degré d avec $P(x,y)\in\mathfrak{P}$. Si $d=0$, comme $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap A$, on a $P(x,y)\in\mathfrak{p}$ et donc $P(x,y)\in\mathfrak{A}_0$.

On suppose maintenant que $d \geq 1$.
$P(x,y) = \sum_{k=0}^{d} u_k x^k y^{d-k}$ avec $u_k \in A$. On a donc $u_0 y^d \in \mathfrak{P}$; cela implique $u_0 \in \mathfrak{P}$ ou $y \in \mathfrak{P}$, le cas $y \in \mathfrak{P}$ est exclu puisque $xA[x,y] + yA[x,y] \not\subset \mathfrak{P}$. On a donc $u_0 \in \mathfrak{P}$ et comme $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, on a $u_0 \in \mathfrak{p}$ et donc $u_0 \in \mathfrak{A}_0$
On suppose que $ay - bx \in \mathfrak{P}$, soit $\mathfrak{A}_1 := \mathfrak{p} A[x,y] + (ay - bx) A[x,y] \subset \mathfrak{P}$, montrons que $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{P}$. Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}_0$. Soit donc $P(x,y)$ homogène de degré d avec $P(x,y) \in \mathfrak{P}$. Si $d = 0$, comme $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, on a $P(x,y) \in \mathfrak{p}$ et donc $P(x,y) \in \mathfrak{A}_1$.
On suppose maintenant que $d \geq 1$.
Soient toujours $a', b' \in A$ avec $a a' + b b' = 1$; il suit de 0.1) que $P(x,y) = \sum_{k=0}^{d} u_k (ay - bx)^k (a'x + b'y)^{d-k}$ avec $u_k \in A$. On a donc $u_0 (a'x + b'y)^d \in \mathfrak{P}$;
cela implique $u_0 \in \mathfrak{P}$ ou $a'x + b'y \in \mathfrak{P}$. Si $a'x + b'y \in \mathfrak{P}$, sachant que $x = a(a'x + b'y) - b'(ay - bx)$ et $y = b(a'x + b'y) + a'(ay - bx)$, il suit que $x, y \in \mathfrak{P}$, or ce cas est exclu. On a donc $u_0 \in \mathfrak{P}$ et comme $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, on a $u_0 \in \mathfrak{p}$ et donc $u_0 \in \mathfrak{A}_1$.
En conclusion $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}_1$ sont les seuls idéaux premiers homogènes au-dessus de $\mathfrak{p}$.

2) Montrons **2.**
Soit $\rho : \mathbb{Z} \to A$ l'homomorphisme canonique, on remplace l'anneau A par l'anneau $B := \rho(\mathbb{Z})[a, b, a', b']$ qui est un sous-anneau de A . Soit alors $B[x,y] := \frac{B[X,Y]}{X(aY - bX)B[X,Y]}$ où x (resp. y) est l'image de X (resp. Y), de plus la graduation de $B[x,y]$ est induite par celle de $B[X,Y]$. Soit $S' := \mathrm{Proj}(B[x,y])$. Soit aussi $Z' := \mathrm{Proj}(B[X,Y]) = \mathrm{P}^1_B$, la surjection canonique $B[X,Y] \to B[x,y]$ induit un homomorphisme $\mathcal{O}_{Z'}(d) \to \mathcal{O}_{S'}(d)$. Sachant que B est noethérien, il suit du théorème d'annulation de Serre ([L] theorem 3.3. p. 195) que l'application $\mathcal{O}_{Z'}(d)(Z') \to \mathcal{O}_{S'}(d)(S')$ est surjective pour d assez grand. Ca veut dire que tout élément de $\mathcal{O}_{S'}(d)(S')$ est un polynôme homogène en degré d de $B[x,y]$. Il suit alors que pour ce même d tout élément de $\mathcal{O}_{S(a,b)}(d)(S(a,b))$ est un polynôme homogène en degré d de $A[x,y]$.

3) La démonstration de **3.** est immédiate.

Théorème *Soient* A *un anneau commutatif, unitaire,* $a,b\in A$ *avec* $aA+bA=A$, $A^\times$ *le groupe des inversibles de* A.
Soient $A[x,y]:=\dfrac{A[X,Y]}{X(aY-bX)A[X,Y]}$ *où* x (resp. y) *est l'image de* X (resp. Y), *de plus la graduation de* $A[x,y]$ *est induite par celle de* $A[X,Y]$.
Soit $S(a,b):=\mathrm{Proj}(A[x,y])$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Le $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$*-module* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(1)(S(a,b))$ *est un élément de torsion du groupe de Picard de* $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$,
ii) il existe $P(X,Y)\in A[X,Y]$, *homogène avec* $\deg P(X,Y)\geq 1$ *et* $P(0,1)\in A^\times$, $P(a,b)\in A^\times$,
iii) il existe $d\geq 1$, $\lambda\in A$ *tels que* $b^d-\lambda a\in A^\times$.

Démonstration
Pour simplifier, on note $S:=S(a,b)$.
1) *Montrons i) implique ii).*
Il suit de *i)* qu'il existe $d'\geq 1$ tel que $\mathbb{O}_S(d')(S)$ soit un $\mathbb{O}_S(S)$-module libre de rang 1, il suit que pour n assez grand $\mathbb{O}_S(nd')(S)$ est un $\mathbb{O}_S(S)$-module libre de rang 1 et par la proposition 3 partie **2.**, il existe $P(x,y)\in A[x,y]$, un polynôme homogène de degré nd' avec $\mathbb{O}_S(nd')(\mathrm{S})=P(x,y)\mathbb{O}_S(S)$. Il suit alors de la proposition 1 partie **3.** et sachant que $\mathbb{O}_{W_i}(nd')=\mathbb{O}_S(nd')\otimes_{\mathbb{O}_S}\mathbb{O}_{W_i}$ que $P(0,1)Y^{nd'}$ est une base de $AY^{nd'}$ et aussi que $P(a,b)(uX+vY)^{nd'}$ est une base de $A(uX+vY)^{nd'}$. Cela montre bien que $P(0,1)\in A^\times$ et $P(a,b)\in A^\times$; i.e. *ii)* est satisfait.

2) *Montrons ii) implique iii).*
On a donc $P(X,Y)=a_0Y^d+a_1XY^{d-1}+\ldots+a_dX^d$, $d\geq 1$. Ainsi $P(0,1)=a_0\in A^\times$, $P(a,b)=a_0b^d+a(a_1b^{d-1}+a_2b^{d-2}a+\ldots+a_da^{d-1})\in A^\times$.
Cela montre que *iii)* est satisfait avec
$$\lambda:=-(a_0)^{-1}(a_1b^{d-1}+a_2b^{d-2}a+\ldots+a_da^{d-1}).$$

3) *Montrons iii) implique i)*
On suppose que $b^N=\varepsilon+\lambda a$ avec $\lambda\in A$, $\varepsilon\in A^\times$, $N\geq 1$. Quitte à changer N en dN, on peut supposer selon la proposition 3 partie **2.** que $\mathbb{O}_S(dN)(S)$ est constitué des éléments de $A[x,y]$ qui sont homogènes de degré dN. Et par ailleurs, on a $b^{dN}=\varepsilon^d+\lambda' a$.
En résumé, on peut supposer que $b^N=\varepsilon+\lambda a$ avec $\lambda\in A$, $\varepsilon\in A^\times$, $N\geq 1$ et que $\mathbb{O}_S(N)(S)$ est constitué des éléments de $A[x,y]$ qui sont homogènes de degré N, auxquels il faut ajouter 0.
Puisque $aA+bA=A$, il existe $a',b'\in A$ avec $aa'+bb'=1$. Soit

$$R(x,y):=y^N-\lambda x(a'x+b'y)^{N-1}\in A[x,y]\ .$$

Il s'agit de montrer que $\{R(x,y)\}$ est une base du $\mathbb{O}_S(S)$-module $\mathbb{O}_S(N)(S)$.

3.1) *Montrons que* $R(x,y)$ *engendre* $\mathbb{O}_S(N)(S)$ *sur* $\mathbb{O}_S(S)$.
On rappelle que selon la proposition 3 partie **1.** , on a $\mathbb{O}_S(S)=A\oplus A\theta$ avec $\theta|_{D_+(x)}=0$, $\theta|_{D_+(y)}=\frac{ay-bx}{y}$.
Soit $P(x,y)=a_0y^N+a_1y^{N-1}x+...+a_Nx^N\in\mathbb{O}_S(N)(S)$, il s'agit de montrer que

(0) $$(\alpha+\beta\theta)R(x,y)=\varepsilon P(x,y)$$

avec $\alpha=P(a,b)$, $\beta=-(\lambda a_0+a_1b^{N-1}+a_2b^{N-2}a+...+a_Na^{N-1})$, $\varepsilon=b^N-\lambda a$.

3.1.1) Montrons la formule sur $D_+(x)$.
Comme $\theta|_{D_+(x)}=0$, il suffit de montrer que

(1) $$\alpha R(x,y)=\varepsilon P(x,y) \text{ sur } D_+(x)\ .$$

Cela veut dire qu'il existe un entier $m\geq 1$ avec

(2) $$X^m(P(a,b)(y^N-\lambda X(a'X+b'Y)^{N-1})-\varepsilon P(X,Y))\in X(aY-bX)A[X,Y].$$

On considère d'abord
$Q(X,Y):=P(a,b)(Y^N-\lambda X(a'X+b'Y)^{N-1})-\varepsilon P(X,Y)$. On a
$Q(a,b)=P(a,b)(b^N-\lambda a(1)^{N-1})-\varepsilon P(a,b)=P(a,b)(\varepsilon)-\varepsilon P(a,b)=0$.
Il suit de la partie 0.2) de la démonstration de la proposition 3 que
$Q(X,Y)=(aY-bX)S(X,Y)$. Et donc

$$XQ(X,Y)=X(aY-bX)S(X,Y)\ .$$

Ainsi (2) est satisfait et aussi (1).

3.1.2) Montrons la formule sur $D_+(y)$, i.e.

(3) $$(\alpha+\beta\theta)R(x,y)=\varepsilon P(x,y)\ .$$

Il suffit de montrer que
$((\alpha Y+\beta(aY-bX))R(X,Y)-\varepsilon P(X,Y)Y)\in X(aY-bX)A[X,Y]$, i.e.
$(\alpha Y^{N+1}+\beta Y^N(aY-bX)-\lambda\alpha YX(a'X+b'Y)^{N-1}-\varepsilon P(X,Y)Y\in$
$X(aY-bX)A[X,Y]$.
Soit
$Q_1(X,Y):=\alpha Y^{N+1}+\beta a Y^{N+1}-\varepsilon P(X,Y)Y$,
$Q_2(X,Y):=-\beta bY^NX-\lambda\alpha YX(a'X+b'Y)^{N-1}$.
Il faut montrer que
$Q_1(X,Y)+Q_2(X,Y)\in X(aY-bX)A[X,Y]$. On a donc

$$Q_1(X,Y)=P(a,b)\,Y^{N+1}-(\lambda a_0+a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})\,a\,Y^{N+1}$$
$$-\varepsilon(a_0 Y^N+a_1 Y^{N-1}X+\ldots+a_N X^N)Y\,.$$

Facilement

$$(\lambda a_0+a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})\,a=P(a,b)+\lambda a_0 a-a_0 b^N\,.$$

Ainsi

$$Q_1(X,Y)=a_0(b^N-\lambda a)Y^{N+1}-\varepsilon(a_0 Y^N+a_1 Y^{N-1}X+\ldots+a_N X^N)Y\,,$$

soit donc

$$Q_1(X,Y)=-\varepsilon X(a_1 Y^{N-1}X+a_2 Y^{N-2}X+\ldots+a_N X^{N-1})Y\,.$$

Il suit que

$$Q_1(X,Y)+Q_2(X,Y)=XQ_3(X,Y)$$

où

$$Q_3(X,Y)=-\varepsilon(a_1 Y^{N-1}X+a_2 Y^{N-2}X+\ldots+a_N X^{N-1})Y$$
$$-(\beta b Y^N+\alpha\lambda Y(a'Xb'Y)^{N-1}).$$

On a donc

$$Q_3(a,b)=-\varepsilon(a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})b+$$
$$(\lambda a_0+a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})b^{N+1}-P(a,b)\,\lambda b).$$

$$Q_3(a,b)=(\lambda a-b^N)(a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})b+$$
$$(\lambda a_0+a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})b^{N+1}-P(a,b)\,\lambda b.$$

$$Q_3(a,b)=\lambda(P(a,b)\,b-a_0 b^{N+1})-b^{N+1}(a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})$$
$$+b^{N+1}(a_1 b^{N-1}+a_2 b^{N-2}a+\ldots+a_N a^{N-1})+\lambda a_0 b^{N+1}-P(a,b)\,\lambda b\,.$$

Soit $Q_3(a,b)=0$, il suit de la partie 0.2) de la démonstration de la proposition 3 que

$$Q_3(X,Y)\in(aY-bX)A[X,Y]\,.$$

On a donc $Q_1(X,Y)+Q_2(X,Y)\in X(aY-bX)A[X,Y]$.

En résumé $R(x,y)$ engendre $\mathbb{O}_S(N)(S)$.

3.2) *Montrons que* $\{R(x,y)\}$ *est une famille libre du* $\mathbb{O}_S(S)$*-module* $\mathbb{O}_S(N)(S)$.

Soient donc $\alpha,\beta\in A$, il s'agit de montrer que $(\alpha+\beta\theta)R(x,y)=0$ implique $\alpha=0$ et $\beta=0$.

3.2.1) L'égalité $(\alpha+\beta\theta)R(x,y)=0$ sur $D_+(x)$ veut dire qu'il existe $k\geq 0$ avec

$$X^k(\alpha(Y^N-\lambda X(a'X+b'Y)^{N-1})\in X(aY-bX)A[X,Y]\,.$$

En spécialisant X en a et Y en b , on obtient $a^k\alpha\varepsilon=0$.

3.2.2) L'égalité $(\alpha+\beta\theta)R(x,y)=0$ sur $D_+(y)$ veut dire qu'il existe $k'\geq 0$ avec

(1) $Y^{k'}(\alpha Y+\beta(aY-bX))(Y^N-\lambda X(a'X+b'Y)^{N-1})\in X(aY-bX)A[X,Y]$.

En spécialisant X en a et Y en b , on obtient $b^{k'}\alpha\varepsilon=0$.

Sachant que $a^k A + b^{k'} A = A$, il existe $a'', b'' \in A$ avec $a^k a'' + b^{k'} b'' = 1$.
Ainsi $(a^k a'' + b^{k'} b'')\alpha\varepsilon = \alpha\varepsilon$ et comme $a^k \alpha\varepsilon = 0$, $b^{k'}\alpha\varepsilon = 0$, on a donc $0 = \alpha\varepsilon$, i.e. $\alpha = 0$.
3.2.3) *Montrons que* $\beta = 0$.
Sachant que $\alpha = 0$ la relation (1) devient
(2) $\quad Y^{k'}(\beta(aY - bX))(Y^N - \lambda X(a'X + b'Y)^{N-1}) \in X(aY - bX)A[X,Y]$.
Il suit de la partie 0.1) de la démonstration de la proposition 1 que l'on peut simplifier par $(aY - bX)$, ainsi
(3) $\quad Y^{k'}(\beta(Y^N - \lambda X(a'X + b'Y)^{N-1}) \in XA[X,Y]$.
En spécialisant X en 0 et Y en 1 , on obtient $\beta = 0$.
Ainsi 3.2.1) , 3.2.2) , 3.2.3) montrent bien que $\{R(x,y)\}$ est une famille libre du $\mathbb{O}_S(S)$-module $\mathbb{O}_S(N)(S)$.
Enfin il suit de 3.1) et 3.2) que $\{R(x,y)\}$ est une base du $\mathbb{O}_S(S)$-module $\mathbb{O}_S(N)(S)$, ainsi $\mathbb{O}_S(N)(S)$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{O}_S(S)$.
Cela veut bien dire que le $\mathbb{O}_S(S)$-module $\mathbb{O}_S(1)(S)$ est un élément de torsion du groupe de Picard de $\mathbb{O}_S(S)$.

Remarque 1.
Si pour tout $a, b \in A$ avec $aA + bA = A$, le *iii)* du théorème est satisfait, cela veut dire $\mathrm{psr}(A) = 1$.
Le théorème dit aussi que si pour tout $a, b \in A$ avec $aA + bA = A$, le $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$-module $\mathbb{O}_{S(a,b)}(1)(S(a,b))$ est un élément de torsion du groupe de Picard de $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$, alors cela est équivalent à $\mathrm{psr}(A) = 1$.
Un cas particulièrement simple où cela est réalisé est celui où A est un anneau de pictorsion. On rappelle que l'anneau A est dit de pictorsion si pour tout anneau B qui est fini sur A , alors $\mathrm{Pic}(B)$ est de torsion ([G.L.L.]). Sachant que $\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ est fini sur A , il suit que $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b)))$ est de torsion ; il suit de cela que le *i)* du théorème est réalisé.
En conclusion si l'anneau A est de pictorsion, alors on a $\mathrm{psr}(A) = 1$.

Bien entendu la condition A est de pictorsion est bien forte ; il nous suffirait que $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b)))$ soit de torsion. Cela va être analysé à la remarque 2 de 3.3.2.

3. Exemples d'anneaux avec $\mathrm{psr}(A)=1$ et $\mathrm{psr}(A)\neq 1$.

3.1. Exemples d'anneaux A **avec** $\mathrm{psr}(A)=1$.

1. Si A est limite inductive d'anneaux A_i , alors $\mathrm{psr}(A_i)=1$ pour tout i implique $\mathrm{psr}(A)=1$.
2. Si $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_r$ avec $\mathrm{psr}(A_i)=1$, alors $\mathrm{psr}(A)=1$.
3. Soient $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A , $\mathfrak{A}$ un idéal de A avec $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{R}$. Alors $\mathrm{psr}(A)=1$ est équivalent à $\mathrm{psr}(\frac{A}{\mathfrak{A}})=1$ (proposition 5).
4. Soit $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A . Si pour tout $x\in A-\mathfrak{R}$, le groupe $(\frac{A}{xA})^\times$ est de torsion, alors $\mathrm{psr}(A)=1$.
En particulier, si A est un anneau de Dedekind tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$, l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est fini, il suit que pour tout $x\in A-\{0\}$, l'anneau $\frac{A}{xA}$ est fini ; ainsi $\mathrm{psr}(A)=1$ (proposition 4)
5. Soit A un anneau ayant seulement un nombre fini d'idéaux maximaux, i.e. semi-local, alors $\mathrm{psr}(A)=1$. C'est donc vrai en particulier pour un anneau local et aussi un corps (proposition 6).
6. Soit A un anneau, $\rho:\mathbb{Z}\to A$ un homomorphisme avec A entier sur $\rho(\mathbb{Z})$, alors $\mathrm{psr}(A)=1$ (proposition 7).
7. Soit A un anneau, L un sous-corps d'une clôture algébrique d'un corps fini ; $\rho:L[T]\to A$ un homomorphisme avec A entier sur $\rho(L[T])$, alors $\mathrm{psr}(A)=1$ (proposition 7).
8. Soient X un compact, $A:=\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfait $\mathrm{psr}(A)=1$; plus précisément si $f,g,u,v\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ avec $fu+gv=1$, alors on a $f^2+g^2\in A^\times$, ce qui est $\mathrm{psr}(A)=1$.
9. Soit A le sous-anneau de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites constantes à partir d'un certain rang ; clairement cet anneau est unitaire. Si x est la suite $(x_k)_{k\geq 0}$, alors $\frac{A}{xA}\simeq\prod_{k\geq 0}\frac{\mathbb{Z}}{x_k\mathbb{Z}}$. Comme tous les $\frac{\mathbb{Z}}{x_k\mathbb{Z}}$ sont tous égaux à partir d'un certain rang, il suit que le groupe des inversibles de $\frac{A}{xA}$ est de torsion.
Par ailleurs, soit $\mathfrak{A}$ l'idéal des suites nulles à partir d'un certain rang ; facilement cet idéal n'est pas de type fini.
10. Soient K un corps qui est contenu dans la clôture algébrique d'un corps fini et $A:=K^{\mathbb{N}}$. Soit $x=(x_k)_{k\geq 0}$, $S:=\{k\in\mathbb{N}\mid x_k=0\}$, alors $\frac{A}{xA}\simeq K^S$, il suit de cela que le groupe des inversibles de $\frac{A}{xA}$ est de torsion.

Par ailleurs, soit $\mathfrak{A}$ l'idéal des suites nulles à partir d'un certain rang ; facilement cet idéal n'est pas de type fini.

11. Soit X une courbe algébrique non singulière sur $\mathbb{R}$; on suppose que $\mathrm{card} X(\mathbb{R}) \geq 2$. Soit $a \in X(\mathbb{R})$ et $Y := X(\mathbb{R}) - \{a\}$. Soit $A := \{f \in \mathcal{K}(X) \mid v_x(f) \geq 0 \text{ pour tout } x \in Y\}$ où $\mathcal{K}(X)$ est le corps des fonctions rationnelles sur X et v_x désigne la valuation en x. Alors $\mathrm{psr}(A) = 1$; plus précisément si $f, g, u, v \in A$ avec $fu + gv = 1$, alors on a $f^2 + g^2 \in A^\times$, ce qui est $\mathrm{psr}(A) = 1$.

Proposition 4 *Soient A un anneau commutatif, $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A,* i.e. *l'intersection des idéaux maximaux de A. Si pour tout $x \in A - \mathfrak{R}$, le groupe $(\frac{A}{xA})^\times$ est de torsion, alors* $\mathrm{psr}(A) = 1$.

En particulier, si A est un anneau de Dedekind tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$, l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est fini, il suit que pour tout $x \in A - \{0\}$, l'anneau $\frac{A}{xA}$ est fini ; ainsi $\mathrm{psr}(A) = 1$

Démonstration

Soient $a, b, u, v \in A$ avec $au + bv = 1$. Si $b \in A - \mathfrak{R}$, il suit de l'hypothèse sur $(\frac{A}{xA})^\times$ qu'il existe $N \geq 1$ et $\lambda \in A$ avec $a^N + \lambda b = 1$.

Si $b \in \mathfrak{R}$, facilement $1 - bv$ est inversible et donc a est un inversible de A. Ainsi $a^1 + 0\, b = a$.

Tout cela veut aussi dire que $\mathrm{psr}(A) = 1$.

On suppose maintenant que A est un anneau de Dedekind et que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$, l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est fini.

Si $x \in A^\times$, alors $(\frac{A}{xA}) = \{0\}$, ainsi $(\frac{A}{xA})^\times$ est trivialement de torsion.

Si $x \notin A^\times$ et $x \in A - \{0\}$, alors xA admet une factorisation $xA = \mathfrak{M}_1^{\alpha_1} \mathfrak{M}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{M}_r^{\alpha_r}$ avec $r \geq 1$, $\mathfrak{M}_i$ maximal et $\alpha_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq r$.

Facilement $\frac{A}{xA} \simeq \frac{A}{\mathfrak{M}_1^{\alpha_1}} \times \frac{A}{\mathfrak{M}_2^{\alpha_2}} \times \ldots \times \frac{A}{\mathfrak{M}_r^{\alpha_r}}$ et comme $\mathrm{card}\,(\frac{A}{\mathfrak{M}_i^{\alpha_i}}) \leq (\mathrm{card}\,\frac{A}{\mathfrak{M}_i})^{\alpha_i}$, on a $\frac{A}{xA}$ qui est fini, ainsi $(\frac{A}{xA})^\times$ est de torsion et donc $\mathrm{psr}(A) = 1$.

Proposition 5 *Soient A un anneau commutatif, $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A,* i.e. *l'intersection des idéaux maximaux de A. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de A avec $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) On a $\mathrm{psr}(A) = 1$, *ii) on a* $\mathrm{psr}(\frac{A}{\mathfrak{A}}) = 1$.

Démonstration

1) *Montrons i) implique ii).*

Soit $\rho : A \to \frac{A}{\mathfrak{A}}$ la surjection canonique. Soient $a, b, u, v \in A$ avec $\rho(a)\rho(u) + \rho(b)\rho(v) = 1$. Il suit que $au + bv = 1 + \alpha$ où $\alpha \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$. On sait alors que $1 + \alpha \in A^\times$. Ainsi $a(u(1+\alpha)^{-1}) + b(v(1+\alpha)^{-1}) = 1$. Alors $\mathrm{psr}(A) = 1$ dit qu'il existe $N \geq 1$, $\lambda \in A$ avec $a^N + \lambda b \in A^\times$. Il suit de cela que $\rho(a)^N + \rho(\lambda)\rho(b) \in \rho(A^\times)$ et comme $\rho(A^\times) \subset \rho(A)^\times$, il suit que $\mathrm{psr}(\frac{A}{\mathfrak{A}}) = 1$.

2) *Montrons ii) implique i).*

Soient $a, b, u, v \in A$ avec $au + bv = 1$. Alors $\rho(a)\rho(u) + \rho(b)\rho(v) = 1$.
Sachant que $\mathrm{psr}(\frac{A}{\mathfrak{A}}) = 1$, il existe $N \geq 1$, $\mu \in A$ avec

$$\rho(a)^N + \rho(\mu)\rho(b) = \varepsilon \in (\frac{A}{\mathfrak{A}})^\times .$$

Soit $e \in A$ avec $\rho(e) = \varepsilon$, on a donc $a^N + \mu b = e + \alpha$ où $\alpha \in \mathfrak{A}$. Il reste à montrer que $e + \alpha \in A^\times$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un maximal $\mathfrak{M}$ de A avec $e + \alpha \in \mathfrak{M}$, comme $\alpha \in \mathfrak{R}$, il suit que $\alpha \in \mathfrak{M}$ et donc que $e \in \mathfrak{M}$. Comme $\ker\rho \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}$, il suit que $\rho(\mathfrak{M})$ est un idéal maximal de $\frac{A}{\mathfrak{A}}$, or $\varepsilon = \rho(e) \in \rho(\mathfrak{M})$, ce qui contredit le fait que ε est un inversible de $\frac{A}{\mathfrak{A}}$. Ainsi $\mathrm{psr}(A) = 1$ est satifait.

Proposition 6 *Soit A un anneau commutatif, unitaire. On suppose que les idéaux maximaux de A sont en nombre fini,* i.e. *A est semi-local. Alors on a* $\mathrm{psr}(A) = 1$ *; cela est vrai en particulier si A est local ou si A est un corps.*

Démonstration

Soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_r$ les idéaux maximaux de A . Soit $\mathfrak{R} := \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_r$ le radical de Jacobson de A . Soit $\rho_i : A \to \frac{A}{\mathfrak{M}_i}$ la surjection canonique, $\delta : A \to \prod_{i=1}^{r} \frac{A}{\mathfrak{M}_i}$ l'application diagonale définie par $\delta(a) := (\rho_1(a), \rho_2(a), \ldots, \rho_r(a))$; soit $\pi : A \to \frac{A}{\mathfrak{R}}$ la surjection canonique.

Facilement δ est surjectif et induit un isomorphisme $d : \frac{A}{\mathfrak{R}} \to \prod_{i=1}^{r} \frac{A}{\mathfrak{M}_i}$ tel que $\delta = d\,\pi$.

Montrons que $\mathrm{psr}(\frac{A}{\Re})=1$. Soient donc $a,b\in A$ avec $\pi(a)\frac{A}{\Re}+\pi(b)\frac{A}{\Re}=\frac{A}{\Re}$. Si $\pi(b)=0$, il suit que $\pi(a)$ est un inversible de $\frac{A}{\Re}$ et donc $\pi(a)+0\,\pi(b)=\pi(a)\in(\frac{A}{\Re})^{\times}$. Si $\pi(b)\neq 0$, quitte à changer les indices, il existe s avec $\rho_i(b)\neq 0$ pour $1\leq i\leq s$ et $\rho_i(b)=0$ pour $s<i$. Cela veut dire que $\rho_i(b)$ est inversible pour $1\leq i\leq r$, on a donc $\rho_i(a)+((1-\rho_i(a))\,\rho_i(b)^{-1})\rho_i(b)=1$; ensuite si $r<i$, il suit de $\rho_i(b)=0$ et $\pi(a)\frac{A}{\Re}+\pi(b)\frac{A}{\Re}=\frac{A}{\Re}$ que $\rho_i(a)$ est inversible. Comme d est un isomorphisme, il existe $\lambda\in A$ avec $d\,\pi(\lambda)=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ et $\lambda_i=(1-\rho_i(a))\,\rho_i(b)^{-1}$ pour $1\leq i\leq s$ et $\lambda_i=0$ pour $s<i$. Il suit de cela que $\pi(a)+\pi(\lambda)\,\pi(b)$ est inversible.
On a donc $\mathrm{psr}(\frac{A}{\Re})=1$. Il suit de la proposition 5 que $\mathrm{psr}(A)=1$.

Proposition 7
1. *Soient A un anneau commutatif, unitaire, $\rho:\mathbb{Z}\to A$ l'homomorphisme canonique. On suppose que tout élément de A est entier sur $\rho(\mathbb{Z})$,* i.e. *tout élément de A est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\rho(\mathbb{Z})$. Alors on a* $\mathrm{psr}(A)=1$.
2. *Soit L un sous-corps de la clôture algébrique d'un corps fini, $L[T]$ l'anneau des polynômes en la variable T à coefficients dans L . Soient A un anneau commutatif, unitaire, $\rho:L[T]\to A$ un homomorphisme. On suppose que tout élément de A est entier sur $\rho(L[T])$,* i.e. *tout élément de A est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\rho(L[T])$. Alors on a* $\mathrm{psr}(A)=1$.

Démonstration
I) *Montrons d'abord* 1.
I.1) *La réduction au cas fini sur $\rho(\mathbb{Z})$.*
Sachant que A est la limite inductive des sous-anneaux S de A contenant $\rho(\mathbb{Z})$ et finis sur $\rho(\mathbb{Z})$, il suffit de montrer la proposition pour A fini sur $\rho(\mathbb{Z})$.

On suppose maintenant que A est fini sur $\rho(\mathbb{Z})$.

L'objectif est alors de montrer le résultat suivant.

(*) *Soient* $z\in A$, $\rho_z : A \to \frac{A}{zA}$ *la surjection canonique,* $\rho_z(A)^\times$ (resp. $A^\times$) *le groupe des inversibles de* $\rho_z(A)$ (resp. A). *Alors* $\frac{\rho_z(A)^\times}{\rho_z(A^\times)}$ *est fini.*

Si donc (*) est satisfait pour tout $z\in A$, l suivra de cela que $\mathrm{psr}(A)=1$.

I.2) *On suppose que* $\ker\rho = d\mathbb{Z}$ *avec* $d\neq 0$ *, montrons que* A *est fini et donc que* (*) *est satisfait pour tout* $z\in A$.

Comme A est fini sur $\rho(\mathbb{Z})$, il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in A$ avec

$$A = \rho(\mathbb{Z})\, e_1 + \rho(\mathbb{Z})\, e_2 + \dots + \rho(\mathbb{Z})\, e_r \ .$$

Il suit facilement de cela que $\mathrm{card} A \leq |d|^r$.

On suppose désormais que ρ *est injectif, que* A *est fini sur* $\rho(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ *et que* A *est réduit.*

Ainsi A contient $\mathbb{Z}$, il est fini sur $\mathbb{Z}$, donc noethérien en particulier, il suit que les idéaux premiers minimaux de A sont en nombre fini ; notons $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s$ ces idéaux premiers minimaux avec $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ si $i\neq j$. Sachant que A est réduit, on a $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s = \{0\}$.

Supposons $z=0$ *, alors* (*) *est immédiat.*

On suppose maintenant que $z\neq 0$.

On a donc

(0) $$z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_s$$

ou quitte à permuter les indices, il existe t avec $1\leq t<s$ avec

$$z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_t \ \text{ et } \ z \in \mathfrak{p}_{t+1} \cap \mathfrak{p}_{t+2} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s .$$

I.3) *On suppose d'abord que* $z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_s$. *Montrons que* (*) *est satisfait.*

Il suit du lemme 1 ci-après que $\frac{A}{zA}$ est fini.

Il suit de cela que (*) est satisfait.

Il suit donc du cas $z=0$ et de 1.3) et 1.4) que (*) est satisfait pour tout $z\in A$ et donc que $\mathrm{psr}(A)=1$.

1.4) *On suppose qu'il existe* t *avec* $1\leq t<s$ et

$$z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_t \ \text{ et } \ z \in \mathfrak{p}_{t+1} \cap \mathfrak{p}_{t+2} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s .$$

Ce cas est plus difficile que 1.3).

Soient $\mathfrak{b} := \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{c} := \mathfrak{p}_{t+1} \cap \mathfrak{p}_{t+2} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$. Soient $B := \frac{A}{\mathfrak{b}}$, $C := \frac{A}{\mathfrak{c}}$, $f : A \to \frac{A}{\mathfrak{b}}$, $g : A \to \frac{A}{\mathfrak{c}}$ les surjections canoniques.

Soient $A^\times$ (resp. $B^\times$, $C^\times$) le groupe des inversibles de A (resp. B, C) et $u : A \to B \times C$ défini par $u(a) := (f(a), g(a))$. Alors il suit du lemme 2 ci-après que u est injectif et que $\frac{B^\times \times C^\times}{u(A^\times)}$ est fini.

Soient $p_1 : B \times C \to B$, $p_2 : B \times C \to C$ les projections. Alors $p_1 u$ et $p_2 u$ ne sont autre chose que les surjections canoniques $f : A \to \frac{A}{\mathfrak{a}}$ et $g : A \to \frac{A}{\mathfrak{b}}$. Il suit de cela que

(5) $p_1 u = f$ et $p_2 u = g$ sont surjectifs.

Sachant que $p_2 u(z) = 0$ et que $p_1 u$ est surjectif, il suit que

$$u(zA) = f(z)\, B \times \{0\}.$$

Montrons que u induit un homomorphisme injectif

(6) $$v : \frac{A}{zA} \to \frac{B}{f(z)\, B} \times C .$$

Soit la surjection canonique $\pi : B \times C \to \frac{B \times C}{f(z)\, B \times \{0\}} \simeq \frac{B}{f(z)\, B} \times C$; il s'agit de montrer que $\ker(\pi u) = zA$. En effet si $\pi u(a) = 0$, cela veut dire que $p_1 u(a) = f(z)\, b$ avec $b \in B$ et $p_2 u(a) = 0$. Par (5) $p_1 u = f$ est surjectif, il existe donc $a' \in A$ avec $p_1 u(a') = b$; alors on a $p_1 u(z a') = f(z) b$ et $p_2 u(z a') = 0$ puisque $p_2 u(z) = 0$. En conclusion $u(a) = u(z a')$, i.e. $a = z a'$ puisque u est injectif. Cela montre que $\ker(\pi u) \supset zA$, l'autre inclusion est immédiate.

Il suit de (6) que v induit une injection, toujours notée v

(7) $$v : (\frac{A}{zA})^\times \to (\frac{B}{f(z)\, B})^\times \times C^\times .$$

Notre objectif maintenant est de montrer que $\frac{\rho_z(A)^\times}{\rho_z(A^\times)}$ est fini, i.e. (*).

Montrons d'abord que $\frac{B}{f(z)\, B}$ est un anneau fini.

Rappelons que $f : A \to \frac{A}{\mathfrak{a}} = B$ est la surjection canonique.

Comme A est fini sur $\mathbb{Z}$, il suit que $f(A) = B$ est fini sur $\mathbb{Z}$. Facilement $f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \ldots, f(\mathfrak{p}_t)$ sont les idéaux premiers minimaux de B. Ensuite $z \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_t$ implique $f(z) \notin f(\mathfrak{p}_1) \cup f(\mathfrak{p}_2) \cup \ldots \cup f(\mathfrak{p}_t)$. Il suit alors du lemme 1 ci-après que $\frac{B}{f(z)\, B}$ est un anneau fini.

II) *Montrons* 2.
II.1) *La réduction au cas fini sur* $\rho(k[T])$ *où* k *est un sous-corps fini de* L.
L'anneau A est la réunion des sous-anneaux S de A contenant $\rho(L[T])$ et finis sur $\rho(L[T])$.
Soit maintenant S contenu dans A et fini sur $\rho(L[T])$, il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in S$ avec

$$S = \rho(L[T])\, e_1 + \rho(L[T])\, e_2 + \dots + \rho(L[T])\, e_r \ .$$

Il suit de cela que $e_1, e_2, \dots, e_r$ sont racines de polynômes unitaires à coefficients dans $\rho(L[T])$. Il existe donc un sous-corps fini k_0 de L de façon que ces polynômes soient à coefficients dans $\rho(k_0[T])$. Soit k un sous-corps fini de L avec $k_0 \subset k$, alors

$$S_k := \rho(k[T])\, e_1 + \rho(k[T])\, e_2 + \dots + \rho(k[T])\, e_r$$

est un sous-anneau de S qui est fini sur $\rho(k[T])$ et de plus S est la réunion des S_k lorsque k parcourt les sous-corps finis de L avec $k_0 \subset k$.

En résumé A est la limite inductive de sous-anneaux R de A pour lesquels il existe un sous-corps fini k de L avec R fini sur $\rho(k[T])$.

En conclusion, il suffit de montrer la proposition pour les anneaux A pour lesquels il existe un sous-corps fini k de L et un homomorphisme $\rho : k[T] \to A$ avec A fini sur $\rho(k[T])$.

L'objectif est alors de montrer le résultat suivant.
(*) *Soit* k *un sous-corps fini de* L , A *un anneau,* $\rho : k[T] \to A$ *un homomorphisme tel que* A *soit fini sur* $\rho(k[T])$. *Soient* $z \in A$, $\rho_z : A \to \frac{A}{zA}$ *la surjection canonique,* $\rho_z(A)^\times$ (resp. $A^\times$) *le groupe des inversibles de* $\rho_z(A)$ (resp. A). *Alors* $\frac{\rho_z(A)^\times}{\rho_z(A^\times)}$ *est fini.*
Il suit donc du cas $z = 0$ et de 1.3) et 1.4) que (*) est satisfait pour tout $z \in A$ et donc que $\mathrm{psr}(A) = 1$.
Il suivra du fait que (*) est satisfait pour tout $z \in A$ et donc que $\mathrm{psr}(A) = 1$.

Le reste de la démonstration est une adaptation immédiate de I.2) et I.3).

En conclusion la proposition 7 est montrée lorsque A est un anneau réduit. Le cas d'un anneau quelconque résulte de la proposition 5.

Lemme 1 *Soient k un corps fini, $k[T]$ l'anneau des polynômes de la variable T à coefficients dans k. Soient A un anneau fini sur $\mathbb{Z}$* (resp. $k[T]$).
1. *Soient $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ des idéaux premiers de A. Soit $\rho_i : A \to \frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ la surjection canonique et $x_i \in \rho_i(A)$, $x_i \neq 0$. Alors $\prod_{i=1}^{s} \frac{\rho_i(A)}{x_i \rho_i(A)}$ est fini.*
2. *On suppose en plus que l'anneau A est réduit. Soient $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_t$ les idéaux premiers minimaux de A (l'anneau A est noethérien)* avec $\mathfrak{q}_i \not\subset \mathfrak{q}_j$ *si* $i \neq j$, $z \in A$ *et* $z \notin \mathfrak{q}_1 \cup \mathfrak{q}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_t$. *Alors l'anneau $\frac{A}{zA}$ est fini.*

Démonstration
1) Monrons 1. Il suffit démontrer que $\frac{\rho_i(A)}{x_i \rho_i(A)}$ est fini.
Considérons le cas où A est fini sur $\mathbb{Z}$. On a $A = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_r$, il suit de cela que $\rho_i(A) = \rho_i(\mathbb{Z})\rho_i(e_1) + \rho_i(\mathbb{Z})\rho_i(e_2) + \ldots + \rho_i(\mathbb{Z})\rho_i(e_r)$.
On a donc $\rho_i(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ ou $\rho_i(\mathbb{Z})$ est un anneau fini.
Si $\rho_i(\mathbb{Z})$ est un anneau fini, il suit que $\operatorname{card} \rho_i(A)$ est un anneau fini, et cela implique que $\frac{\rho_i(A)}{x_i \rho_i(A)}$ est fini.
On suppose maintenant que $\rho_i(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, i.e. on identifie $\rho_i(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$.
Comme $\rho_i(A)$ est fini sur $\mathbb{Z}$, il suit que x_i est entier sur $\mathbb{Z}$. Ainsi on a une relation $a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_{m-1} {x_i}^{m-1} + {x_i}^m = 0$, avec m minimal, $a_k \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq m-1$. Comme $\rho_i(A)$ est intègre et $x_i \neq 0$, cela implique que $a_0 \neq 0$ et $a_0 \in x_i \rho_i(A)$. Il suit que l'application surjective $(b_1, b_2, \ldots, b_r) \mapsto (b_1 \rho_i(e_1) + b_2 \rho_i(e_2) + \ldots + b_r \rho_i(e_1))$ de $\mathbb{Z}^r$ sur $\rho_i(A)$ induit une surjection de $(\frac{\mathbb{Z}}{a_0 \mathbb{Z}})^r$ sur $\frac{\rho_i(A)}{x_i \rho_i(A)}$. Ainsi $\operatorname{card}(\frac{\rho_i(A)}{x_i \rho_i(A)}) \leq |a_0|^r$.
Le cas où A est fini sur $k[T]$ se traite de la même façon.

2) Montrons 2.
Considérons le cas où A est fini sur $\mathbb{Z}$. Soit $\mu : \mathbb{Z} \to A$ l'homomorphisme canonique. Si $\mu(\mathbb{Z})$ est fini, il suit comme en 1) que A est fini, ainsi 2. est montré.
On suppose donc que $\mu(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, i.e. on identifie $\mu(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$.
Soit toujours $\rho_i : A \to \frac{A}{\mathfrak{q}_i}$ la surjection canonique et $\delta : A \to \prod_{i=1}^{t} \frac{A}{\mathfrak{q}_i}$ l'application diagonale définie par $\delta(a) := (\rho_1(a), \rho_2(a), \ldots, \rho_s(a))$.
Comme A est réduit, l'application diagonale est injective.

2.1) *Montrons qu'il existe* $\varepsilon_i \in A$, $\rho_i(\varepsilon_i) \neq 0$ *tel que*

$$\prod_{i=1}^{t} \rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A) \subset \delta(A) \subset \prod_{i=1}^{t} \rho_i(A) \ .$$

Il existe $\varepsilon_1 \notin \mathfrak{q}_1$ et $\varepsilon_1 \in \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$. En effet il existe $x_2 \in \mathfrak{q}_2$ et $x_2 \notin \mathfrak{q}_1$, $x_3 \in \mathfrak{q}_3$ et $x_3 \notin \mathfrak{q}_1$, ... , $x_t \in \mathfrak{q}_t$ et $x_t \notin \mathfrak{q}_1$, alors $\varepsilon_1 := x_2 x_3 \ldots x_t$ convient.
Il existe de même $\varepsilon_2 \notin \mathfrak{q}_2$ et $\varepsilon_2 \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$, ...,
$\varepsilon_t \notin \mathfrak{q}_t$ et $\varepsilon_t \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{t-1}$.
Si donc $y_1, y_2, \ldots, y_t \in A$, on a $\delta(y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_t\varepsilon_t) = (y_1\varepsilon_1, y_2\varepsilon_2, \ldots, y_t\varepsilon_t)$
ce qui veut dire que $\prod_{i=1}^{t} \rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A) \subset \delta(A)$.

2.2) On rappelle que $\rho_i(A) = \frac{A}{\mathfrak{q}_i}$. Alors il suit de 1. que

(1) $\dfrac{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(A)}{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A)}$ est fini et donc que $\dfrac{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(z)\rho_i(A)}{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(z)\,\rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A)}$ est fini.

Puisque $z \notin \mathfrak{q}_1 \cup \mathfrak{q}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_t$, il suit aussi de 1. que

(2) $$\frac{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(A)}{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(z)\,\rho_i(A)} \text{ est fini.}$$

Il suit de (1) et (2) que

(3) $$\frac{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(A)}{\prod_{i=1}^{t} \rho_i(z)\,\rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A)} \text{ est fini.}$$

De la relation $\prod_{i=1}^{t} \rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A) \subset \delta(A) \subset \prod_{i=1}^{t} \rho_i(A)$, on déduit les inclusions

(4) $$\prod_{i=1}^{t} \rho_i(z)\,\rho_i(\varepsilon_i)\rho_i(A) \subset \delta(zA) \subset \delta(A) \subset (\prod_{i=1}^{t} \rho_i(A)) \ .$$

Il suit alors de (3) que $\frac{\delta(A)}{\delta(zA)}$ est fini, et comme δ est injectif, que $\frac{A}{zA}$ est fini.

Le cas où A *est fini sur* $k[T]$ *se traite de la même façon.*

Lemme 2 *Soient k un corps fini, $k[T]$ l'anneau des polynômes de la variable T à coefficients dans k. Soient A un anneau fini sur $\mathbb{Z}$* (resp. $k[T]$) *et réduit. Soient $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers minimaux de A, $1 \le t < s$,* $\mathfrak{b} := \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{c} := \mathfrak{p}_{t+1} \cap \mathfrak{p}_{t+2} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$. *Soient* $B := \frac{A}{\mathfrak{b}}$, $C := \frac{A}{\mathfrak{c}}$, $D := \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$. *Soient les surjections canoniques* $f : A \to \frac{A}{\mathfrak{b}}$, $g : A \to \frac{A}{\mathfrak{c}}$, $h : A \to \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$, $i : \frac{A}{\mathfrak{b}} \to \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$, $j : \frac{A}{\mathfrak{c}} \to \frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$. *Alors on a* $if = jg = h$.
Soient $A^\times$ (resp. $B^\times$, $C^\times$, $D^\times$) *le groupe des inversibles de* A (resp. B, C, D).
Soient $u : A^\times \to B^\times \times C^\times$ *et* $v : B^\times \times C^\times \to D^\times$ *définis par* $u(a) := (f(a), g(a))$, $v(x,y) := i(x)\, j(y^{-1})$. *Alors* u *est injectif et* $\operatorname{im} u = \ker v$.
Enfin $\frac{B^\times \times C^\times}{u(A^\times)}$ *est fini.*

Démonstration
On suppose que A est un anneau fini sur $\mathbb{Z}$.
L'homomorphisme u est injectif parce que A est réduit.
Ensuite $v\,u(a) = v(f(a), g(a)) = (if(a)\; jg(a^{-1})) = (h(a)\, h(a^{-1})) = 1$.
Ainsi $\operatorname{im} u \subset \ker v$. Montrons que $\ker v \subset \operatorname{im} u$.
Soient $(x,y) \in B^\times \times C^\times$ tel que $i(x)\, j(y^{-1}) = 1$, i.e. $i(x) = j(y)$. Il existe $a, b \in A$ tels que $f(a) = x$, $g(b) = y$. On a donc $if(a) = jg(b)$, i.e. $h(a) = h(b)$. Ce qui veut dire que
$a = b + \beta + \gamma$ avec $\beta \in \mathfrak{b}$, $\gamma \in \mathfrak{c}$. Soit $a' := a - \beta = b + \gamma$, on a donc
$u(a') = (f(a-\beta), g(b+\gamma)) = (x,y)$.
Comme $v(x,y) = 1$, on a aussi $v(x^{-1}, y^{-1}) = 1$. De la même façon il existe $a'' \in A$ avec $u(a'') = (x^{-1}, y^{-1})$. Il suit que $u(a'a'') = (1,1) = u(1)$, sachant que u est injectif, il suit que $a'a'' = 1$, i.e. $a' \in A^\times$, ce qui veut que $\ker v \subset \operatorname{im} u$.

Il reste à montrer que $\frac{B^\times \times C^\times}{u(A^\times)}$ est fini.
Il suit de $\operatorname{im} u = \ker v$ que v induit une injection de $\frac{B^\times \times C^\times}{u(A^\times)}$ dans $D^\times$.
On va montrer que D est un anneau fini. Sachant que D est fini sur $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $\dim D = 0$.
Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A avec $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} \subset \mathfrak{q}$; on a donc $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t \subset \mathfrak{q}$, il existe donc $1 \le i \le t$ avec $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}$. De même il existe $t < j \le s$ avec $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{q}$, ce qui veut dire que $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \ne \mathfrak{p}_i$, ainsi $\operatorname{haut} \mathfrak{q} \ge 1$. Comme $\dim A \le 1$, on a $\operatorname{haut} \mathfrak{q} = 1$. Il suit de cela que tout idéal premier de

$\frac{A}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = D$ est de hauteur nulle, ainsi $\dim D = 0$.
Soit $w\colon \mathbb{Z} \to D$ l'homomorphisme canonique, alors D est fini sur $w(\mathbb{Z})$, si $w(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, alors $\dim D = 1$, c'est impossible, il suit donc que $w(\mathbb{Z})$ est fini et comme D est fini sur $w(\mathbb{Z})$, il suit que D est fini, cela implique que $D^\times$ est fini, donc aussi $\frac{B^\times \times C^\times}{u(A^\times)}$.

Le cas où A est un anneau fini sur $k[T]$ se traite de la même façon.

3.2. Exemples d'anneaux qui ne satisfont pas $\mathrm{psr}(A) = 1$

3.2.1. Le cas des anneaux de polynômes $k[T]$ à coefficients dans un corps commutatif est traité par le lemme 3 qui suit.

Lemme 3 *Soient k un corps commutatif, $k[T]$ l'anneau des polynômes de la variable T , à coefficients dans k .*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
i) L'anneau $A := k[T]$ satisfait $\mathrm{psr}(A) = 1$,
ii) le corps k est de caractéristique un nombre premier, disons p et il existe un homomorphisme de k dans la clôture algébrique $(\mathbb{F}_p)^{alg}$ de $\mathbb{F}_p$,
iii) le groupe $k^\times$ est de torsion.

Démonstration
1) *Montrons que ii) implique iii).* En effet $(\mathbb{F}_p)^{alg} = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$ et donc $((\mathbb{F}_p)^{alg})^\times = \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{F}_{p^n})^\times$; ainsi $((\mathbb{F}_p)^{alg})^\times$ est réunion de groupes finis, il suit que $((\mathbb{F}_p)^{alg})^\times$ est de torsion et donc que $k^\times$ est de torsion.

2) *Montrons que iii) implique ii).*
Tout d'abord, on $\mathrm{car}\, k \neq 0$, sinon $\mathbb{Q} \subset k$ comme tout élément de $\mathbb{Q}^\times - \{\pm 1\}$ est d'ordre infini, cela contredit le fait que $k^\times$ est de torsion.
On a donc $\mathrm{car}\, k = p$, un nombre premier ; on peut donc dire que $\mathbb{F}_p \subset k$.
Soit $x \in k^\times$, il existe donc $n_x \geq 1$ avec $x^{n_x} = 1$, ce qui implique que x est algébrique sur $\mathbb{F}_p$ et donc que k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$. On sait alors qu'il existe un homomorphisme de k dans la clôture algébrique $(\mathbb{F}_p)^{alg}$ de $\mathbb{F}_p$.
Ce qui est *ii)*.

3) *Montrons que i) implique iii).*
Si $k=\mathbb{F}_2$, alors *iii)* est trivialement satisfait.
On suppose maintenant que $k\neq\mathbb{F}_2$.
Soit $\theta\in k-\{0,1\}$, alors $T-\theta, T(T-1)\in k\{[T]$ et
$1=\text{pgcd}(T-\theta, T(T-1))$, il existe donc $u,v\in k[T]$ avec
$(T-\theta)u+T(T-1)v=1$. Soit donc $a:=T-\theta$, $b:=T(T-1)$.
Sachant que $A:=k[T]$ satisfait la propriété $\text{psr}(A)=1$, il existe $m\geq 1$, qui dépend de θ , $\lambda(T)\in k[T]$ avec
(1) $$a^m+\lambda(T)\,b=\varepsilon\in k^\times=A^\times .$$
Cette relation n'est autre chose que
(2) $$(T-\theta)^m+T(T-1)\,\lambda(T)=\varepsilon$$
En spécialisant T en 0 et 1 , on obtient
(3) $$(-\theta)^m=\varepsilon\ ,\ (1-\theta)^m=\varepsilon\ .$$
Il suit de cela que $(\frac{1-\theta}{-\theta})^m=1$. Comme $\theta\mapsto\frac{1-\theta}{-\theta}$ est une bijection de $k-\{0,1\}$ sur $k-\{0,1\}$, il suit que tout élément de $k-\{0,1\}$ est d'ordre fini, ce qui veut dire que $k^\times$ est de torsion.

4) *Montrons que ii) implique i).*
On peut donc supposer que $k\subset(\mathbb{F}_p)^{alg}$. Soit $z\in k[T]$, montrons que $(\frac{k[T]}{z\,k[T]})^\times$ est de torsion.
Supposons $z=0$, on a $(k[T])^\times=k^\times$, or $k^\times$ est de torsion.
Supposons maintenant $z\neq 0$, i.e. $\deg z=d\geq 0$.
Si $d=0$, alors $\frac{k[T]}{z\,k[T]}=\{0\}$, c'est clair.
Si $d\geq 1$, alors $\frac{k[T]}{z\,k[T]}$ est un k-espace vectoriel V de dimension $d\geq 1$. Si donc $f\in(\frac{k[T]}{z\,k[T]})^\times$, l'application $x\mapsto fx$ de V dans V est un élément de $G\ell(V)$. Après le choix d'une base de V , alors f s'identifie à un élément de $G\ell_d(k)$, donc à un élément de $G\ell_d(\mathbb{F}_{p^n})$ pour n assez grand. Comme ce groupe est fini, il suit que f est d'ordre fini. C'est donc *i).*

Remarque Si k est un corps de caractéristique nulle, il suit que $k[T]$ ne satisfait pas $\text{psr}(A)=1$.

3.2.2. L'anneau des polynômes $A:=\mathbb{Z}[T]$. Par exemple pour $a:=2$ et $b:=1-2T$, l'image de 2 dans $\frac{\mathbb{Z}[T]}{b\,\mathbb{Z}[T]}$ est un inversible d'ordre infini ; il suit que A ne satisfait pas $\text{psr}(A)=1$.
On peut aussi considérer l'exemple $a:=1+T$ et $b:=T^2$.

3.3. Autres exemples

On rappelle que l'anneau A est dit de pictorsion si pour tout anneau B qui est fini sur A, alors $\mathrm{Pic}(B)$ est de torsion ([G L.L.]).
Si donc un anneau A est de pictorsion, alors on peut montrer, de façon détournée, que $\mathrm{psr}(A)=1$ (remarque 1 qui suit le théorème).

3.3.1. Exemple d'anneau qui ne sont pas de pictorsion

1. On sait par le lemme 3 que $A:=\mathbb{Q}[y]$ ne satisfait pas $\mathrm{psr}(A)=1$, il s'ensuit alors que A n'est pas de pictorsion. Sachant que $\mathrm{Pic}(A)$ est trivial, on peut trouver une extension finie B de A, telle que le groupe $\mathrm{Pic}(B)$ ne soit pas de torsion. C'est peut-être un exemple plus simple que le 8.15 p. 1263 de [G L.L.] . C'est ce qui suit.

Soient $A:=\mathbb{Q}[y]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de la variable y. Alors $\mathrm{Pic}(A)$ est trivial.
Soit $B:=\dfrac{\mathbb{Q}[y,X]}{(X^3-X-y^2-y)\mathbb{Q}[y,X]}=\mathbb{Q}[y,x]$ où x est l'image de X.
Clairement B est fini sur A. Nous allons montrer que $\mathrm{Pic}(B)$ n'est pas de torsion, Ainsi A n'est pas de pictorsion.
Soit $\mathbb{Q}[x,y,z]:=\dfrac{\mathbb{Q}[X,Y,Z]}{(X^3-XZ^2-Y^2Z-YZ^2)\mathbb{Q}[X,Y,Z]}$, où x (resp. y,z) est l'image X (resp. Y,Z) ; de plus la graduation de $\mathbb{Q}[x,y,z]$ est induite par celle de $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$.
Soient $S:=\mathrm{Proj}(\mathbb{Q}[x,y,z])$, $\infty:=(0:1:0)$. Facilement $S-\{\infty\}=D_+(z)$ et alors $\mathcal{O}_S(S-\{\infty\})=B$.
Soit $p=(0:0:1)$, on sait que le diviseur $(p-\infty)$ est d'ordre infini ([H] Exemple 4.3.8. p. 335). Il suit donc que l'idéal $\mathfrak{M}_p=Bx+By$ donne naissance à un élément d'ordre infini de $\mathrm{Pic}(B)$

Les exemples 5 à 10 d'anneaux cités en 3.1. satisfont la propriété $\mathrm{psr}(A)=1$ et ont tous un groupe de Picard qui est de torsion.
Je ne sais si dans l'exemple 11, le groupe de Picard est de torsion.

3.3.2. Exemples d'anneaux A qui satisfont $\mathrm{psr}(A)=1$ et pour lesquels $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ n'est pas de torsion.

La première idée est de considérer une courbe projective X non singulière sur un corps k. Soient x un point fermé de X, $U:=X-\{x\}$ et $A:=\mathbb{O}_X(U)$ Alors A est un anneau de Dedekind avec $A^\times=k^\times$. Facilement il existe $z\in A$ avec $\rho_z(A)$ qui est un k-espace vectoriel de dimension ≥ 2. Si k est contenu dans la clôture algébrique d'un corps fini, alors $\rho_z(A)^\times$ est de torsion et on sait aussi que $\mathrm{Pic}(A)$ est de torsion ; on est dans le cas où $\mathrm{psr}(A)=1$.
Si par exemple $\mathrm{car}(k)=0$, alors "bien souvent" $\dfrac{(\rho_z(A))^\times}{\rho_z(A^\times)}$ n'est pas de torsion. Ainsi $\mathrm{psr}(A)=1$ n'est pas satisfait.

Proposition 8 *Soient A un anneau commutatif et unitaire, $a\in A$ et $B_a:=\dfrac{A[T]}{T(T-a)A[T]}=A\oplus At$ où t est l'image de T. Soit toujours $\rho_a:A\to\dfrac{A}{aA}$ la surjection canonique. Alors on a la suite exacte suivante*

$$\{1\}\to\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(B_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA}).$$

En particulier, si $\dfrac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}$ est de torsion et si $\mathrm{Pic}(A)$ est de torsion. Alors $\mathrm{Pic}(B_a)$ est de torsion.

Démonstration

1) *Soient $I:=\{b\in A\mid ba=0\}$ et $C_a:=\dfrac{B_a}{It}$. Alors $\mathrm{Pic}(B_a)\simeq\mathrm{Pic}(C_a)$.*

Montrons cela.
Soient $X:=\mathrm{Spec}A$, $Y:=\mathrm{Spec}B_a$, $Z=\mathrm{Spec}C_a$. Alors les homomorphismes canoniques $A\to A\oplus At=B_a$ et $A\to B_a\to C_a$ définissent des applications continues $f:Y\to X$ et $g:Z\to X$.
On a la suite exacte de faisceaux

(1) $$\{0\}\to\mathcal{I}t\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\{0\}$$

où $\mathcal{I}$ est le faisceau défini sur X par l'idéal I, et pour tout ouvert U de X, on a $\mathcal{F}(U):=\mathbb{O}_Y(f^{-1}(U))$, $\mathcal{G}(U):=\mathbb{O}_Z(g^{-1}(U))$.
On déduit de cela la suite exacte de faisceaux sur X

(2) $$\{1\}\to 1+\mathcal{I}t\to\mathcal{F}^\times\to\mathcal{G}^\times\to\{1\}$$

où $\mathcal{F}^\times(U):=(\mathbb{O}_Y(f^{-1}(U)))^\times$, $\mathcal{G}^\times(U):=(\mathbb{O}_Z(g^{-1}(U)))^\times$.
Alors (2) donne la longue suite exacte

(3) $\{1\}\to 1+I\,t\to (B_a)^\times\to (C_a)^\times\to H^1(X,\mathcal{I})\to \mathrm{Pic}(B_a)\to$
$\mathrm{Pic}(C_a)\to H^2(X,\mathcal{I})$.

Comme $1+\mathcal{I}\,t$ est isomorphe au faisceau quasi-cohérent $\mathcal{I}$, on a donc $H^1(X,\mathcal{I})=H^2(X,\mathcal{I})=\{0\}$ ([L] theorem 2.18, p. 186) .
Il suit donc de (3) que $\mathrm{Pic}(B_a)\simeq\mathrm{Pic}(C_a)$.

2) *On a une suite exacte*

$$\{1\}\to\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(C_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA})\ ,$$

l'application $\mathrm{Pic}(C_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2$ *est induite par l'application* $B_a=A\oplus A\,t\to A\times A$ *définie par* $\alpha+\beta\,t\mapsto(\alpha,\alpha+\beta\,a)$.
Montrons cela.
Si donc $u:A\oplus A\,t\to A\times A$ est l'application définie par $u(\alpha+\beta\,t):=(\alpha,\alpha+\beta\,a)$, facilement $\ker u=\{\beta\,t\mid\beta\,a=0\}=I\,t$. Ainsi u induit un homomorphisme injectif $v:C_a\to A\times A$.
Ainsi v induit un morphisme $\mathbb{O}_Z\to\mathbb{O}_X\times\mathbb{O}_X$ et donc un morphisme $\mathbb{O}_Z^\times\to\mathbb{O}_X^\times\times\mathbb{O}_X^\times$.
Soit maintenant $W:=\mathrm{Spec}((\frac{A}{aA}))$; alors l'homomorphisme $(\ell,m)\mapsto\rho_a(\ell)\,\rho_a(m^{-1})$ induit un morphisme $\mathbb{O}_X^\times\times\mathbb{O}_X^\times\to\mathbb{O}_W^\times$.
On a donc une suite exacte de faisceaux

(4) $$\{1\}\to\mathbb{O}_Z^\times\to\mathbb{O}_X^\times\times\mathbb{O}_X^\times\to\mathbb{O}_W^\times\to\{1\}$$

On déduit de cela la longue suite exacte

(5) $\{1\}\to(C_a)^\times\to A^\times\times A^\times\to(\frac{A}{aA})^\times\to\mathrm{Pic}(C_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA})$.

Facilement la suite exacte induit un homomorphisme injectif

$$\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(C_a)\ .$$

On déduit donc de (5) la suit exacte

(6) $$\{1\}\to\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(C_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA})\ .$$

3) Il suit de 1) et 2) que l'on a une suite exacte

(7) $$\{1\}\to\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(B_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA})\ .$$

Il suit de (7) que si les groupes $\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}$ et $\mathrm{Pic}(A)$ sont de torsion que $\mathrm{Pic}(B_a)$ est aussi de torsion.

Proposition 9 ([G] , Corollary (2)) *Soient* $\mathbb{Z}[T]$ *l'anneau des polynômes en la variable* T *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *. Alors il existe un anneau de Dedekind* A *avec* $\mathbb{Z}[T]\subset A\subset\mathbb{Q}[T]$ *tel que pour tout idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* A *, l'anneau* $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ *est fini et le groupe* $A^\times$ *des inversibles de* A *est de type fini. Enfin le groupe des classes d'idéaux de* A *n'est pas de torsion,* i.e. $\mathrm{Pic}(A)$ *n'est pas de torsion.*

Remarque 2 Soit A l'anneau de Dedekind défini à la proposition 9.
Si $a,b\in A$ avec $aA+bA=A$, alors on a
$\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))=B_a:=\frac{A[T]}{T(T-a)A[T]}=A\oplus At$ (proposition 3, partie 1.).
Il suit de la proposition 8 que nous avons la suite exacte

$$\{1\}\to\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}\to\mathrm{Pic}(B_a)\to\mathrm{Pic}(A)^2\to\mathrm{Pic}(\frac{A}{aA})\ .$$

Sachant que A est de Dedekind, que l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est fini, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A , il suit que $\rho_a(A)$ est fini pour $a\neq 0$ (proposition 4), donc $\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}$ est fini, pour $a\neq 0$ et trivialement $\frac{\rho_a(A)^\times}{\rho_a(A^\times)}=\{1\}$, si $a=0$.
En particulier on a $\mathrm{psr}(A)=1$.
En plus, sachant que $\mathrm{Pic}(A)$ n'est pas de torsion, il suit de (1) que $\mathrm{Pic}(B_a)$ n'est pas de torsion.
Ce qui donne un exemple d'anneau A avec $\mathrm{psr}(A)=1$ et $\mathrm{Pic}(\mathbb{O}_{S(a,b)}(S(a,b))$ qui n'est pas de torsion.

Bibliographie

[B] Bass Hyman *K-theory and stable algebra* Publi. Math. IHES 22 (1964) 5-60.

[G.L.L.] Gabber Offer, Liu Qing, Lorenzini Dino *Hypersurfaces in projective schemes and moving lemma* Duke mathematical Journal Vol. 164, No. 7 2015, p. 1187-1270

[G] Goldman Oscar *On special class of Dedekind domain* Topology vol. 3. suppl. 1 pp 113-118 Pergamon Press 1964

[H] Hartshorne Robin *Algebraic Geometry* Graduate Texts in Mathematics , Springer-Verlag 1977

[K. L.W.] Khurana Dinesh, Lam T.Y., Wang Zhou *Rings of square stable range one* Journal of Algebra 338 (2011) 122-141

[L] Liu Qing *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* Oxford Graduate Texts in Mathematics 2002

Université de Bordeaux, Institut de mathématiques de Bordeaux, 351 cours de la Libération, 33405 Talence

Jean.Fresnel@math.u-bordeaux.fr Michel.Matignon@math.u-bordeaux.fr