



HAL
open science

Coformalité modérée et formalité des CW-complexes de dimension finie

Yannis Haralambous

► **To cite this version:**

Yannis Haralambous. Coformalité modérée et formalité des CW-complexes de dimension finie. Comptes-Rendus-de-l'Academie-des-Sciences, 1990, 311, pp.365-368. hal-02099286

HAL Id: hal-02099286

<https://hal.science/hal-02099286>

Submitted on 23 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Coformalité modérée et formalité des CW-complexes de dimension finie

Yannis HARALAMBOUS

Résumé — Un procédé de perturbation est développé dans le cadre des algèbres de Lie différentielles graduées filtrées et appliqué à la notion de coformalité modérée. L'étude de la formalité des CW-complexes de dimension finie, localisés suivant la théorie d'Anick, est menée ensuite en termes de classes de cohomologie de Harrison. Une généralisation d'un théorème de Barr à cette situation implique que, pour les CW-complexes sans torsion homologique, la formalité est équivalente à l'existence d'un modèle d'Adams-Hilton à différentielle quadratique.

Tame coformality and formality of finite dimensional CW-complexes

Abstract — A machinery for perturbing filtered graded differential Lie algebras is developed and applied to the notion of tame coformality. Follows the study of formality of localized (in the sense of Anick) finite dimensional CW-complexes in terms of Harrison cohomology classes. A generalization of a theorem of Barr in this situation implies that, for homologically torsion-free CW-complexes, formality is equivalent to the existence of an Adams-Hilton model with quadratic differential.

1. PERTURBATION D'ALGÈBRES DE LIE DIFFÉRENTIELLES FILTRÉES. — Soit R un anneau commutatif unitaire dans lequel 2 et 3 sont inversibles, et soit r un entier ≥ 0 . Une R - (r) -algèbre de Lie différentielle bigraduée est une R -algèbre de Lie L munie de deux graduations d'algèbre de Lie et d'une différentielle ∂ de bidegré $(-r, r-1)$. Un modèle bigradué de (L, ∂) est une flèche de R - (r) -algèbres de Lie différentielles bigraduées $\mu: (\mathbf{L}(V), d) \rightarrow (L, \partial)$ où μ induit un isomorphisme en homologie et $\mathbf{L}(V)$ est une R -algèbre de Lie libre.

THÉORÈME 1. — *Toute R - (r) -algèbre de Lie différentielle bigraduée, 1-réduite pour le degré total, admet un modèle bigradué.*

Une R -algèbre de Lie différentielle filtrée (L, ∂) est une R -algèbre de Lie différentielle graduée munie d'une filtration d'algèbre de Lie différentielle graduée, croissante et bornée [i.e. pour tout n il existe $\alpha(n)$ et $\omega(n)$ avec $F_{\alpha(n)} L_n = L_n$, $F_{\omega(n)} L_n = 0$]. Un modèle filtré de (L, ∂) est une flèche de R -algèbres de Lie différentielles filtrées $v: (\mathbf{L}(V), d) \rightarrow (L, \partial)$ où v induit un isomorphisme en homologie et $\mathbf{L}(V)$ est une R -algèbre de Lie libre. Nous notons $(E^r(L), \partial^r)$ le r -ième étage de la suite spectrale associée à la filtration de (L, ∂) ; il s'agit d'une R - (r) -algèbre de Lie différentielle bigraduée.

THÉORÈME 2 (de perturbation). — *Soit (L, ∂) une R -algèbre de Lie différentielle filtrée 1-réduite et soit $\psi: (\mathbf{L}(V), d) \rightarrow (E^r(L), \partial^r)$ un modèle bigradué de $(E^r(L), \partial^r)$. Considérons sur $(\mathbf{L}(V), d)$ la filtration $F_i(\mathbf{L}(V))_* = \bigoplus_{j \leq i} \mathbf{L}(V)_{j,*}$. Alors il existe une perturbation τ de d*

et un modèle filtré de (L, ∂) de la forme

$$\varphi: (\mathbf{L}(V), d + \tau) \rightarrow (L, \partial),$$

avec $E^r(\varphi) = \psi$.

Les théorèmes 1 et 2, dans le cadre des algèbres commutatives, font l'objet de [6].

2. COFORMALITÉ MODÉRÉE. — Soit s un entier ≥ 2 et soit R un sous-anneau de \mathbb{Q} dans lequel 2 et 3 sont inversibles. Un R -système modéré d'anneaux [5] est une suite croissante

Note présentée par Henri CARTAN.

$(R_j)_{j \geq 0}$ de sous-anneaux de \mathbb{Q} , telle que $R \subset R_0$ et que tout entier k vérifiant $2k-3 \leq j$ soit inversible dans R_j . Nous notons \mathbf{SS}_{s+1} la catégorie des ensembles simpliciaux $(s+1)$ -réduits et $\mathbf{R-DGLA}_s$, celle des \mathbf{R} -algèbres de Lie différentielles graduées s -réduites. Rappelons le théorème suivant de Dwyer :

THÉORÈME 3 [5]. — Soit (R_*) un \mathbf{R} -système modéré d'anneaux. Alors les catégories \mathbf{SS}_{s+1} et $\mathbf{R-DGLA}_s$ admettent des structures de catégories à modèles fermées associées à (R_*) et il existe une paire de foncteurs

$$\lambda: \mathbf{SS}_{s+1} \rightleftarrows \mathbf{R-DGLA}_s: \mu$$

qui induisent des équivalences de catégories homotopiques.

DÉFINITION. — Soit (R_*) un \mathbf{R} -système modéré d'anneaux et soit (L, ∂) une \mathbf{R} -algèbre de Lie différentielle graduée s -réduite. On dit que (L, ∂) est *coformelle modérée* (ou \mathbf{R}_* -coformelle modérée, en cas d'ambiguïté) si (L, ∂) et $(H(L, \partial), 0)$ ont même type d'homotopie. Soit X un ensemble simplicial $(s+1)$ -réduit; on dit que X est *coformel modéré* si son image $\lambda(X)$ l'est.

Remarque. — Filtrons $\lambda(X)$ par

$$F_{-1} \lambda(X) = 0, \quad F_0 \lambda(X) = \lambda(X).$$

Soit $\psi: (\mathbf{L}(W), d) \rightarrow E^1(\lambda(X))$ un modèle bigradué de $E^1(\lambda(X))$. D'après le théorème 2, il existe un modèle filtré de $\lambda(X)$ de la forme $\varphi: (\mathbf{L}(W), d+\tau) \rightarrow \lambda(X)$. Alors X est coformel modéré si, et seulement si, $(\mathbf{L}(W), d)$ et $(\mathbf{L}(W), d+\tau)$ ont même type d'homotopie dans $\mathbf{R-DGLA}_s$.

Exemples. — 1. Les \mathbf{H} -espaces homotopiquement associatifs sont coformels modérés.

2. Toute suspension $\Sigma X \in \mathbf{SS}_{s+1}$ dont l'homologie à coefficients dans \mathbf{R} est libre comme module est coformelle modérée.

3. Les espaces de Moore ne sont pas, en général, coformels modérés.

3. FORMALITÉ DES CW-COMPLEXES DE DIMENSION FINIE. — Nous nous plaçons dans le cadre suivant : soit s un entier ≥ 2 et soit p un nombre premier. Notons $\mathfrak{R} = \mathbf{Z}[1/(p-1)!]$ et $N = s + 2p - 3$. Désignons par $\mathfrak{R-CW}_{s+1}^N$ la catégorie des CW-complexes $(s+1)$ -réduits \mathfrak{R} -locaux [1] de \mathfrak{R} -dimension $\leq N$ et par $\mathfrak{R-DGLA}_s^{N-1}$ celle des \mathfrak{R} -algèbres de Lie différentielles graduées, libres à la fois comme algèbres de Lie et comme modules, s -réduites et engendrées par des éléments de degrés j , $s \leq j \leq N-1$. Rappelons le théorème suivant, dû à Anick:

THÉORÈME 4 [3]. — Pour chaque X dans $\mathfrak{R-CW}_{s+1}^N$, il existe $\mathbf{L}(X)$ dans $\mathfrak{R-DGLA}_s^{N-1}$ tel que

(i) si $X = (pt) \cup e_1 \cup e_2 \cup \dots$ est une décomposition cellulaire \mathfrak{R} -locale de X , alors la \mathfrak{R} -algèbre de Lie sous-jacente à $\mathbf{L}(X)$ est libre et engendrée par $\{a_1, a_2, \dots\}$ où le degré de a_i est égal à la dimension de la cellule e_i , diminuée de 1;

(ii) l'image par le foncteur algèbre enveloppante $\mathcal{U} \mathbf{L}(X)$ est un modèle d'Adams-Hilton de X à coefficients dans \mathfrak{R} . De plus cette association induit une équivalence de catégories homotopiques.

Si X est un CW-complexe $(s+1)$ -réduit, on considère l'ensemble simplicial $E_r(X)$, formé des simplexes singuliers de X ayant leurs faces de dimension i au point de base, pour $i < s+1$. Par simplification nous noterons $\lambda(X)$ pour $\lambda(E_r(X))$. D'après [8], un objet $\mathbf{L}(X)$ ayant les propriétés du théorème d'Anick peut être construit à partir du foncteur λ de Dwyer; nous le préciserons dans la proposition 1.

Note. — Dans la suite, sauf mention du contraire, X désignera un objet de $\mathfrak{R}\text{-CW}_{s+1}^N$ tel que $H_*(X)$ soit sans torsion. La suspension d'un objet gradué est notée $\sigma: (\sigma L)_p = L_{p-1}$.

PROPOSITION 1. — *Il existe une différentielle décomposable d sur $L(\sigma^{-1}H_*(X))$ et une flèche d'algèbres de Lie différentielles graduées $(L(\sigma^{-1}H_*(X)), d) \rightarrow \lambda(X)$ induisant un isomorphisme en homologie. Cette algèbre de Lie différentielle graduée est unique à isomorphisme près. La partie quadratique de d est induite par la structure de coalgèbre de $H_*(X)$; l'algèbre différentielle graduée $\mathcal{U}(L(\sigma^{-1}H_*(X)), d)$ est un modèle d'Adams-Hilton de X .*

DÉFINITIONS. — Avec les notations ci-dessus, $(L(\sigma^{-1}H_*(X)), d)$ est un modèle de X . Soit $(L(V), d)$ un objet de $\mathfrak{R}\text{-DGLA}_s^{N-1}$, et soit d_1 la partie quadratique de d . Nous disons que $(L(V), d)$ est \mathfrak{R} -formel s'il existe un automorphisme φ de $L(V)$ tel que $d = \varphi d_1 \varphi^{-1}$. L'espace X est dit \mathfrak{R} -formel s'il admet un modèle \mathfrak{R} -formel. Il est dit *intrinsèquement \mathfrak{R} -formel*, si tout espace ayant même coalgèbre d'homologie est \mathfrak{R} -formel.

Exemples. — Les sphères et les espaces projectifs complexes sont intrinsèquement \mathfrak{R} -formels. Les bouquets et produits de sphères sont \mathfrak{R} -formels.

PROPOSITION 2. — *Il existe une suite d'obstructions à la \mathfrak{R} -formalité de X . Ces obstructions sont des classes de cohomologie de Harrison [4], $\text{Harr}^{1,n}(H^*(X); H^*(X))$, de l'algèbre de cohomologie $H^*(X)$ de X , à coefficients dans elle-même.*

PROPOSITION 3. — *Il existe une différentielle décomposable δ de $T(\sigma^{-1}H_*(X))$, dont la partie quadratique est induite par la structure de coalgèbre de $H_*(X)$ et telle que $(T(\sigma^{-1}H_*(X)), \delta)$ soit un modèle d'Adams-Hilton de X à coefficients dans \mathfrak{R} . Cette algèbre différentielle graduée est unique à isomorphisme près.*

DÉFINITIONS. — L'espace X est dit \mathfrak{R} -AH-formel s'il admet un modèle d'Adams-Hilton à différentielle quadratique. Il est dit *intrinsèquement \mathfrak{R} -AH-formel*, si tout espace ayant même coalgèbre d'homologie est \mathfrak{R} -AH-formel.

PROPOSITION 4. — *Il existe une suite d'obstructions à la \mathfrak{R} -AH-formalité de X . Ces obstructions sont des classes de cohomologie de Hochschild, $\text{Hoch}^{1,n}(H^*(X); H^*(X))$, de l'algèbre de cohomologie $H^*(X)$ de X , à coefficients dans elle-même. D'autre part, ces obstructions sont les images des obstructions à la \mathfrak{R} -formalité, par l'application ι_* induite par l'inclusion $L(\sigma^{-1}H_*(X)) \hookrightarrow T(\sigma^{-1}H_*(X))$.*

La relation entre les deux approches (modèle en algèbre de Lie, modèle d'Adams-Hilton) est donnée par le corollaire du théorème suivant (cf. [4], [7] dans le cas $\mathfrak{R} = \mathbb{Q}$) :

THÉORÈME 5. — *La flèche*

$$\iota_*: \text{Harr}^{*, \leq p-1}(H^*(X); H^*(X)) \rightarrow \text{Hoch}^{*, \leq p-1}(H^*(X); H^*(X))$$

est injective.

COROLLAIRE. — *La \mathfrak{R} -AH-formalité est équivalente à la \mathfrak{R} -formalité.*

Nous allons maintenant donner une autre définition de \mathfrak{R} -formalité qui a l'avantage de s'appliquer aux CW-complexes de $\mathfrak{R}\text{-CW}_{s+1}^N$ dont l'homologie comporte éventuellement des composantes de torsion.

DÉFINITION. — Soit S un objet de $\mathfrak{R}\text{-CW}_{s+1}^N$ et soit (C^*S, ∂) son algèbre de cochaînes singulières cubiques, engendrée par les cubes non dégénérés dont les sommets sont au point de base. Alors S est dit \mathfrak{R} -formel s'il existe une algèbre tensorielle $T(V)$, une

différentielle d de degré $+1$ et des flèches d'algèbres différentielles graduées

$$(C^*S, \partial) \leftarrow (T(V), d) \rightarrow (H^*(X), 0)$$

qui induisent des isomorphismes en homologie.

Remarque. — Dans le cadre des CW-complexes sans torsion homologique, cette définition coïncide avec la précédente.

Exemple. — Les espaces de Moore sont \mathfrak{R} -formels.

DÉFINITION. — [2] Un CW-complexe S est dit q -AH-formel, s'il admet un modèle d'Adams-Hilton sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, à différentielle quadratique.

PROPOSITION 5. — Soit S un CW-complexe fini, objet de $\mathfrak{R}\text{-CW}_{s+1}^N$ et soit q un nombre premier tel que $1/q \notin \mathfrak{R}$. Supposons que $\text{Tor}(H^*(S), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = 0$. Alors si S est \mathfrak{R} -formel, il est q -AH-formel.

L'interprétation au niveau de l'algèbre de Lie $L(S)$ de la notion de \mathfrak{R} -formalité d'un CW-complexe $S \in \mathfrak{R}\text{-CW}_{s+1}^N$, avec torsion homologique, reste une question ouverte.

Remarque. — Des résultats analogues à ceux des paragraphes 2 et 3 existent sous l'hypothèse $s \geq 1$; il faut alors changer la progression du système d'anneaux et choisir $N = \min(sp - 1, s + 2p - 3)$ ([2], [5]).

Note remise le 21 mai 1990, acceptée le 28 mai 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. W. ANDERSON, Localizing CW-complexes, *Illinois J. Math.*, 16, 1972, p. 519-525.
- [2] D. J. ANICK, Connections between Yoneda and Pontryagin algebras, in *Proceedings of Stockholm 1983*, Springer Lecture Notes in Math., n° 1183, 1986, p. 331-349.
- [3] D. J. ANICK, An \mathfrak{R} -local Milnor-Moore theorem, *Advances in Math.*, 77, 1989, p. 116-136.
- [4] M. BARR, Harrison homology, Hochschild homology and triples, *J. of Alg.*, 8, 1968, p. 314-323.
- [5] W. G. DWYER, Tame homotopy theory, *Topology*, 18, 1979, p. 321-338.
- [6] S. HALPERIN et D. TANRÉ, Homotopie filtrée et fibrés C^∞ , *Illinois J. Math.* (à paraître).
- [7] J.-P. MERLE, Formalité des espaces et des applications continues, *Thèse de 3^e cycle*, Nice, 1983.
- [8] H. SCHEERER et D. TANRÉ, \mathfrak{R} -local homotopy theory as part of tame homotopy theory, *Bull. London Math. Soc.* (à paraître).

U.F.R. de Mathématiques pures et appliquées,
Université de Lille-Flandres-Artois, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.