



**HAL**  
open science

## LES COEFFICIENTS DE LI

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. LES COEFFICIENTS DE LI. 2019. hal-02098904

**HAL Id: hal-02098904**

**<https://hal.science/hal-02098904>**

Preprint submitted on 13 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LES COEFFICIENTS DE LI

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans cet article, on donne plusieurs descriptions simples des coefficients de Li. Ces représentations montrent la complexité de ces coefficients et la difficulté pour les calculer.

## 1. INTRODUCTION

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers. Cette fonction admet un prolongement analytique unique sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , noté encore  $\zeta$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \quad (1.2)$$

pour  $z \neq 0$  et  $z \neq 1$ , où  $\Gamma$  est la fonction gamma définie sur  $\operatorname{Re}(z) > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

qui peut être prolongée analytiquement par une fonction méromorphe de pôles  $\mathbb{N}^- = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0\}$ , vérifiant la relation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-.$$

## 2. LE CRITÈRE DE POSITIVITÉ DE LI

Dans son article [3], Li introduit des coefficients  $\lambda_n$  par la formule

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} \log(\xi(z))) \Big|_{z=1}, \quad n \geq 1,$$

il montre que si la fonction  $\psi$  est définie par

$$\psi(z) = \xi\left(\frac{z}{1-z}\right) = \xi\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad (2.1)$$

alors les coefficients de Li vérifient

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{n+1} z^n \quad (2.2)$$

---

*Date:* 13/04/2019.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 30D20, 47A75, 47A25, 47A05.

*Key words and phrases.* Opérateur essentiellement autoadjoint, mesure spectrale, trace d'un opérateur, coefficient de Li, fonction gamma, fonction zêta de Riemann, mesure spectrale.

où

$$\xi(z) = \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z). \quad (2.3)$$

L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'analyticité de  $\frac{\psi'}{\psi}$ , Li montre que cette analyticité est réalisée si et seulement si

$$\lambda_n \geq 0, \forall n \geq 1. \quad (2.4)$$

On dit que le critère de positivité de Li est vérifié, si les coefficients de Li vérifient 2.4. Dans [1] et [3], les coefficients de Li sont exprimés en fonction des zéros non triviaux de la fonction zêta sous la forme

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right], \quad (2.5)$$

la somme infinie est définie par

$$\sum_{\rho} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{|\operatorname{Im}(\rho)| \leq \tau} \quad (2.6)$$

et les zéros sont comptés autant de fois que leur ordre de multiplicité. Cette somme peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_n = \sum_{\rho} P_n \left( \frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \quad (2.7)$$

avec

$$P_n(z, \bar{z}) = 1 - \frac{(1-z)^n + (1-\bar{z})^n}{2} = 1 - \operatorname{Re}((1-z)^n).$$

**Proposition 1.** *Pour  $n = 1, 2, 3$ , on a  $P_n\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right) \geq 0, \forall \rho$ . Pour  $n \geq 4$ , dans la sommation de l'équation 2.7, le nombre de termes négatifs est fini.*

*Proof.* On a  $P_1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\rho)}{|\rho|^2} \geq 0$ . Pour  $n = 2$

$$P_2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}(z)(2 - \operatorname{Re}(z)) + \operatorname{Im}(z)^2$$

et

$$P_2\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\rho)}{|\rho|^2} \left( 2 - \frac{\operatorname{Re}(\rho)}{|\rho|^2} \right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 \geq 0,$$

en particulier,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont positifs. Pour  $n = 3$

$$P_3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \left( 3 - 6 \operatorname{Re}(z) + 4 \operatorname{Re}(z)^2 \right) + 3|z|^2(1 - \operatorname{Re}(z))$$

qui est positif ou nul si  $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$ . Si  $n \geq 4$ , les valeurs de  $z$  qui annulent  $P_n(z, \bar{z})$  sont de la forme

$$z = 1 - \frac{1}{|\cos(t)|^{\frac{1}{n}}} e^{i\frac{t+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et } t \neq \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

si on note

$$\gamma(t) = \frac{1}{|\cos(t)|^{\frac{1}{n}}} e^{i\frac{t}{n}}$$

alors

$$\gamma(t + k\pi) = \gamma(t) e^{i\frac{k\pi}{n}}$$

en particulier  $\gamma(t + n\pi) = \gamma(t) e^{i\pi} = -\gamma(t)$ . Pour obtenir l'ensemble des  $z$  pour lesquels  $P_n(z, \bar{z}) = 0$ , on trace la courbe  $\gamma$  pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on fait  $2n$  rotations

d'angle  $\frac{\pi}{n}$  et on translate la courbe obtenue le long de l'axe des réels pour obtenir l'origine en  $-1$ . Pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\gamma$  a pour asymptote les droites

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)x \text{ et } y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)x,$$

cette courbe est tangente au cercle de centre  $o$  et rayon 1 avec

$$|\gamma(t)| = \frac{1}{|\cos(t)|^{\frac{1}{n}}} \geq 1.$$

La composante connexe  $\mathbf{C}_1$  de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_\gamma$  contenant 1, où  $\mathcal{C}_\gamma$  est la courbe translaturée en  $-1$  définie par  $\gamma(t)$  pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , est un ouvert étoilé en 1 sur lequel  $P_n$  est strictement positif. Les nombres complexes pour lesquels

$$|z| \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \text{ et } \operatorname{Re}(z) \geq 0$$

sont contenus dans  $\mathbf{C}_1$ . En particulier, pour tout  $\rho$  tels que  $|\rho| \geq \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ , on a

$$P_n\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right) \geq 0.$$

□

**Proposition 2.** Si  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$  alors  $P_n\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right) < 0$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n} < \pi + \arg(1 - \rho) - \arg(\rho) < \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\frac{|1 - \rho|^n}{|\rho|^n} > \frac{1}{\cos(n(\pi + \arg(1 - \rho) - \arg(\rho)))}.$$

*Proof.* Il suffit de remarquer que si  $t$  est un argument de  $1 - z$  alors

$$P_n(z, \bar{z}) = 1 - |1 - z|^n \cos(nt)$$

et prendre pour valeur de  $z$ ,  $z = -\frac{1-\rho}{\rho}$ . □

**Proposition 3.** On a

$$P_{n+1}(z, \bar{z}) - P_n(z, \bar{z}) = |1 - z|^2 (P_n(z, \bar{z}) - P_{n-1}(z, \bar{z})) + |z|^2 (1 - P_n(z, \bar{z})), \forall n. \quad (2.8)$$

*Proof.*

$$P_n(z, \bar{z})(1 - z) = 1 - z - \frac{(1 - z)^{n+1} + |1 - z|^2 (1 - \bar{z})^{n-1}}{2}$$

$$P_n(z, \bar{z})(1 - \bar{z}) = 1 - \bar{z} - \frac{|1 - z|^2 (1 - z)^{n-1} + (1 - \bar{z})^{n+1}}{2}$$

et

$$2P_n(z, \bar{z})(1 - \operatorname{Re}(z)) = 2(1 - \operatorname{Re}(z)) + P_{n+1}(z, \bar{z}) - 1 + |1 - z|^2 (P_{n-1}(z, \bar{z}) - 1)$$

$$= P_{n+1}(z, \bar{z}) + |1 - z|^2 P_{n-1}(z, \bar{z}) - |z|^2,$$

de l'égalité

$$2(1 - \operatorname{Re}(z)) = 1 + |1 - z|^2 - |z|^2$$

on obtient 2.8. □

**Remark 1.** *On a*

$$1 - P_n(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}(1 - z)^n = |1 - z|^n \cos(nt), \quad t = \arg(1 - z),$$

$$1 - P_n(z, \bar{z}) < 0 \text{ si et seulement si } \cos(nt) < 0$$

*c'est-à-dire,*

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < n \arg(1 - z) < \frac{\pi}{2} + (k + 1)\pi$$

*et*

$$1 - P_n\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right) < 0$$

*si*

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n} < \pi + \arg(1 - \rho) - \arg(\rho) < \frac{\frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi}{n}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Pour étudier les coefficients  $\lambda_n = \sum_{\rho} P_n\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\bar{\rho}}\right)$ , on revient à la définition des coefficients de Li. La fonction  $\xi$  a un prolongement analytique pour  $\operatorname{Re}(z) > -2$ , la fonction  $(z - 1)\zeta(z)$  est analytique pour  $z \neq 1$

$$(z - 1)\zeta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!} (z - 1)^n$$

où  $\gamma_n$  sont les coefficients de Stieltjes, cette relation est obtenue en utilisant le développement en série de Laurent de  $\zeta$  au voisinage de 1, ce développement donne le prolongement analytiquement en 1 et pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right),$$

$\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)$  est analytique pour  $\operatorname{Re}(z) > -2$ . En particulier, au voisinage de 0 et 1, on peut développer  $\xi$  en série entière. On note

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

le développement en série entière de  $\frac{\xi'}{\xi}$  dans un voisinage de zéro, de l'équation fonctionnelle

$$\xi(z) = \xi(1 - z),$$

on déduit les équations

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = -\frac{\xi'(1 - z)}{\xi(1 - z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k (z - 1)^k,$$

*et*

$$\log(\xi(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \text{ et } \log(\xi(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_{k-1}}{k} (z - 1)^k.$$

**Lemma 1.** *On a*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( z^n \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \right) \Big|_{z=1}$$

*en particulier,*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^k a_k$$

et

$$\lambda_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^{k+1} a_k. \quad (2.9)$$

**Lemma 2.**

$$a_k = - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}}, \forall k. \quad (2.10)$$

*Proof.* Formellement,

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)},$$

en utilisant le produit d'Hadamard, on a

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \log(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right]$$

la sommation  $\sum$  est symétriquement par rapport à la droite  $x = \frac{1}{2}$  et les zéros sont comptés avec leur ordre de multiplicité, cette sommation  $\sum$  s'identifie à  $\sum_{\rho}$ , il suffit de le vérifier sur chaque somme partielle finie,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} \\ &+ \log(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] \\ &= \frac{\log(4\pi)}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1 + \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] \\ &= \kappa + \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \left[ 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\rho}} \right] \\ &= \kappa - \sum_{\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\rho^{k+1}}, \quad \kappa = \frac{\log(4\pi)}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1 \\ &= \kappa - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}} \right) z^k \text{ si } |z| < \inf \{ |\rho| : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \}. \end{aligned}$$

□

On peut remarquer que

$$\kappa = - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} &= - \frac{\xi'(1-z)}{\xi(1-z)} \text{ et } \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = - \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \\ \kappa &= -\kappa - \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] = -\kappa - 2 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

**Lemma 3.** Si  $\inf \{|\rho| : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\} > 1$ ,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = -\kappa = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\log(4\pi)}{2} \approx 0.023096. \quad (2.11)$$

**Remark 2.** En utilisant 2.5, le premier coefficient de  $Li$ ,  $\lambda_1 = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$  est

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma}{2} - \log(2) - \frac{\log(\pi)}{2}$$

et le développement de  $\frac{\xi'}{\xi}$  en série entière dans un voisinage de 0 est

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}} \right) z^k \text{ si } |z| < \inf \{|\rho| : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\}. \quad (2.12)$$

**Lemma 4.**

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k a_{k-1} = \sum_{\rho} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n \right]. \quad (2.13)$$

Pour calculer les coefficients  $a_k$ , on utilise la relation

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{\xi'}{\xi} \right) \Big|_{z=0}, \quad k \geq 0$$

avec

$$\frac{\xi'}{\xi}(z) = \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} + \frac{\beta'(z)}{\beta(z)}, \quad \xi(z) = \alpha(z)\beta(z)$$

où

$$\alpha(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) \text{ et } \beta(z) = (z-1)\zeta(z).$$

**Lemma 5.**

$$\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} = -\frac{\log(\pi) + \gamma}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta(k+1)}{2^{k+1}} z^k$$

*Proof.* On peut écrire pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\log \alpha(z) = -\frac{\log(\pi) + \gamma}{2} z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k 2^k} z^k$$

car

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp\left(\gamma z - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k} z^k\right),$$

donc

$$\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} = -\frac{\log(\pi) + \gamma}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta(k+1)}{2^{k+1}} z^k. \quad \square$$

**Lemma 6.** Le développement en série entière de  $\frac{\beta'}{\beta}$  au voisinage de 1 est donné par

$$\frac{\beta'}{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k} (n+1)}{k} \gamma_{n+1,k} \right) (z-1)^n$$

où

$$\gamma_{n,k} = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{\gamma_{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdots \frac{\gamma_{n_k-1}}{(n_k-1)!}, \quad k \leq n.$$

*Proof.* On sait que  $\beta$  est développable en série entière au voisinage de 1,

$$\beta(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!} (z-1)^{n+1},$$

$$\beta(z) = 1 + \gamma(z), \quad \gamma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\gamma_{n-1}}{(n-1)!} (z-1)^n \quad \text{et } \gamma(1) = 0$$

$$\log \beta(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \gamma(z)^k \quad \text{pour } |\gamma(z)| < 1$$

$$\begin{aligned} \log \beta(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-k} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{\gamma_{n_1-1}}{(n_1-1)!} \dots \frac{\gamma_{n_k-1}}{(n_k-1)!} (z-1)^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{\gamma_{n_1-1}}{(n_1-1)!} \dots \frac{\gamma_{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right) (z-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta'(z)}{\beta(z)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{\gamma_{n_1-1}}{(n_1-1)!} \dots \frac{\gamma_{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right) (z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k} (n+1)}{k} \sum_{n_1+\dots+n_k=n+1} \frac{\gamma_{n_1-1}}{(n_1-1)!} \dots \frac{\gamma_{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right) (z-1)^n. \end{aligned}$$

□

**Theorem 1.** Les coefficients  $a_n$  s'écrivent

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} \zeta(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{p=n}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m+k-1} C_p^n (p+1)}{k} \gamma_{n+1,k}, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.14)$$

*Proof.* On a

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) (0) = \frac{(-1)^{n+1} \zeta(n+1)}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 1$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\beta'}{\beta}(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{p+1-k} (p+1)}{k} \gamma_{p+1,k} \right) (z-1)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{p+1-k} (p+1)}{k} \gamma_{p+1,k} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{p-m} C_p^m z^m \right) \end{aligned}$$

où  $C_p^m = 0$  si  $m > p$

$$\frac{\beta'}{\beta}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=m}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(p+1) (-1)^{m+k-1}}{k} C_p^m \gamma_{p+1,k} \right) z^m$$

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right) (0) = \sum_{p=n}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(p+1) (-1)^{m+k-1} C_p^n}{k} \gamma_{n+1,k},$$



on en déduit que

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} \zeta(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{p=n}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(p+1)(-1)^{m+k-1} C_p^n}{k} \gamma_{n+1,k}.$$

□

En combinant l'équation 2.9 et 2.14, on a

$$\lambda_n = \sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+n}^{m+1} \left[ \frac{(-1)^{m+1} \zeta(m+1)}{2^{m+1}} + \sum_{p=m}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(p+1)(-1)^{m+k-1} C_p^m}{k} \gamma_{m+1,k} \right],$$

dans [3], Li donne une expression des coefficients sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda_n = 1 - n \frac{\log(4\pi) + \gamma}{2} - \sum_{k=2}^n C_n^k (-1)^k (1 - 2^{-k}) \zeta(k) \\ - \sum_{l=1}^n C_n^l \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \sum_{m \leq A} \frac{\Lambda(m)}{m} \log(m)^{l-1} - \frac{1}{l} \log(A)^l \right), \end{aligned}$$

on voit ainsi que dans chaque représentation de  $\lambda_n$ , l'expression obtenue est d'une grande complexité. Pour étudier le signe des coefficients de Li, on est amené à faire intervenir des opérateurs de certains espaces de Hilbert.

### 3. LES OPÉRATEURS ASSOCIÉS AU CRITÈRE DE POSITIVITÉ DE LI

Soit  $\varsigma$  une fonction analytique sur  $]0, 1[ \times \mathbb{R}$ , ayant un nombre infini de zéros. On note  $l^2(\varsigma)$ , l'espace des familles de nombres complexes indexées par  $\mathcal{Z}(\varsigma)$

$$\mathbf{z} = \{z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\varsigma)} \text{ telles que } \sum_{\rho} |z_\rho|^2 < +\infty$$

où  $\mathcal{Z}(\varsigma)$  est l'ensemble des zéros de  $\varsigma$ , comptés avec leur ordre de multiplicité, et la sommation est définie par 2.6. On munit  $l^2(\varsigma)$  du produit scalaire antilinéaire par rapport au premier argument et linéaire par rapport au second

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = \sum_{\rho} \bar{z}_\rho s_\rho, \quad \mathbf{z} = \{z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\varsigma)} \text{ et } \mathbf{s} = \{s_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\varsigma)},$$

$l^2(\varsigma)$  muni de ce produit scalaire est un espace de hilbert séparable à base dénombrable. Soit  $\widehat{L}$  un opérateur de classe-trace sur  $l^2(\varsigma)$ , c'est-à-dire, un opérateur tel que  $\widehat{L} = \widehat{L}_1 \widehat{L}_2$  où  $\widehat{L}_1$  et  $\widehat{L}_2$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt [5]. Le théorème de Lidskii [4] permet d'écrire

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_n \langle \mathbf{e}_n, \widehat{L} \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(\widehat{L})$$

où  $\{\lambda_n(\widehat{L})\}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $L$  comptées avec leur ordre de multiplicité. D'après Weyl [7], la série est absolument convergente, donc commutativement convergente et si  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathcal{Z}(\varsigma)$ , on a

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_{\rho} \lambda_{\rho}(\widehat{L}), \quad \lambda_{\rho}(\widehat{L}) = \lambda_{\phi^{-1}(\rho)}(\widehat{L}).$$

On donne une autre approche de la notion de trace d'un opérateur  $\widehat{L}$  à domaine dense dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $\widehat{L}^\dagger$  est le dual de  $\widehat{L}$ , l'opérateur  $\widehat{L}$  se décompose en sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$\widehat{L} = \widehat{A} + i\widehat{B}, \quad \widehat{A} = \frac{\widehat{L} + \widehat{L}^\dagger}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \frac{\widehat{L} - \widehat{L}^\dagger}{2i},$$

$\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$  sont des opérateurs symétriques sur  $\text{dom}(\widehat{L})$ . On fait l'hypothèse que ces opérateurs sont essentiellement autoadjoints. La fermeture de  $\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$  est encore notée  $\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$ . Le théorème de Von Neumann permet de construire une mesure spectrale pour  $\widehat{A}$ , notée  $\mathcal{E}_A$ , et une mesure spectrale pour  $\widehat{B}$ , notée  $\mathcal{E}_B$ . Pour ces mesures

$$\widehat{A} = \int \lambda d\mathcal{E}_A(\lambda) \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \int \lambda d\mathcal{E}_B(\lambda),$$

pour tout  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{s}$  dans  $\mathcal{H}$  et pour toute fonction borélienne bornée  $f$

$$\langle f(\widehat{A})\mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mu_{\mathbf{z}, \mathbf{s}}(\lambda), \quad \langle f(\widehat{B})\mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\nu_{\mathbf{z}, \mathbf{s}}(\lambda)$$

avec

$$\mu_{\mathbf{z}, \mathbf{s}}(\mathbf{B}) = \langle \mathcal{E}_A(\mathbf{B})\mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle \quad \text{et} \quad \nu_{\mathbf{z}, \mathbf{s}}(\mathbf{B}) = \langle \mathcal{E}_B(\mathbf{B})\mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle$$

pour tout borélien  $\mathbf{B}$  de  $\mathbb{R}$ . Ces mesures sont des mesures complexes bornées et si on pose  $\mu_{\mathbf{z}} = \mu_{\mathbf{z}, \mathbf{z}}$  et  $\nu_{\mathbf{z}} = \nu_{\mathbf{z}, \mathbf{z}}$ , ces mesures sont des mesures positives qui sont des probabilités si  $\mathbf{z}$  est un état pur de  $\mathcal{H}$ . Dans ce qui suit  $\{\mathbf{e}_n\}$  est une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$  et les mesures de probabilité  $\mu_n$  et  $\nu_n$  sur  $\mathbb{R}$  sont définies par  $\mu_n = \mu_{\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n}$  et  $\nu_n = \nu_{\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n}$ . On définit les mesures positives  $\mu_{\mathbf{e}}$  et  $\nu_{\mathbf{e}}$  par

$$\mu_{\mathbf{e}}(\mathbf{B}) = \sum_n \mu_n(\mathbf{B}) \leq +\infty \quad \text{et} \quad \nu_{\mathbf{e}}(\mathbf{B}) = \sum_n \nu_n(\mathbf{B}) \leq +\infty, \quad \forall \mathbf{B} \in \text{Bor}(\mathbb{R})$$

ces mesures sont des mesures positives.

**Definition 1.** La trace de  $\widehat{L}$  le long de la base hilbertienne  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_n\}$ , si elle existe, est définie par

$$\text{Trace}_{\mathbf{e}}(\widehat{L}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mu_{\mathbf{e}}(\lambda) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\nu_{\mathbf{e}}(\lambda), \quad (3.1)$$

si cette trace est indépendante du choix de la base hilbertienne  $\mathbf{e}$ , on dit que l'opérateur  $\widehat{L}$  est un opérateur à trace et on pose

$$\text{Trace}_{\mathbf{e}}(\widehat{L}) = \text{Trace}(\widehat{L}).$$

**Proposition 4.** Pour toute fonction borélienne  $f$  bornée sur  $\mathbb{R}$

$$\text{Trace}_{\mathbf{e}}(f(\widehat{A})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mu_{\mathbf{e}}(\lambda) \quad \text{et} \quad \text{Trace}_{\mathbf{e}}(f(\widehat{B})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\nu_{\mathbf{e}}(\lambda).$$

On pose

$A_{\mathbf{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}) = \langle \mathcal{E}_A(\mathbf{B})\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$  et  $B_{\mathbf{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $B_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}) = \langle \mathcal{E}_B(\mathbf{B})\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$ ,  $\mathbf{e} \in \mathcal{H}$  on munit  $\mathcal{H}$  d'une mesure positive, notée  $\rho$ . On se fixe un sous-ensemble mesurable  $\mathbf{H} \subset \mathcal{H}$  et on définit pour tout borélien  $\mathbf{B}$  de  $\mathbb{R}$

$$\rho_{A, \mathbf{H}}(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{H}} A_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}) d\rho(\mathbf{e}) \quad \text{et} \quad \rho_{B, \mathbf{H}}(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{H}} B_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}) d\rho(\mathbf{e})$$

alors  $\rho_{A,\mathbf{H}}$  et  $\rho_{B,\mathbf{H}}$  sont des mesures positives sur les boréliens de  $\mathbb{R}$ . La trace sur  $\mathbf{H}$  de  $\widehat{L} = \widehat{A} + i\widehat{B}$  pour la mesure  $\rho$  est

$$\text{Trace}_{\rho,\mathbf{H}}(\widehat{L}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\rho_{A,\mathbf{H}}(\lambda) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\rho_{B,\mathbf{H}}(\lambda).$$

Pour que cette notion de trace ait un sens il faut vérifier, par exemple, que  $\rho_{A,\mathbf{H}}$  soit une mesure sur les boréliens de  $\mathbb{R}$ . Si

$$\mathbf{B} = \sum_n \mathbf{B}_n$$

$$\begin{aligned} \rho_{A,\mathbf{H}}(B) &= \int_{\mathbf{H}} A_{\mathbf{B}}(\mathbf{e}) d\rho(\mathbf{e}) = \int_{\mathbf{H}} \langle \mathcal{E}_A(\mathbf{B}) \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle d\rho(\mathbf{e}) \\ &= \int_{\mathbf{H}} \left\langle \mathcal{E}_A \left( \sum_n \mathbf{B}_n \right) \mathbf{e}, \mathbf{e} \right\rangle d\rho(\mathbf{e}) \\ &= \int_{\mathbf{H}} \sum_n \langle \mathcal{E}_A(\mathbf{B}_n) \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle d\rho(\mathbf{e}) = \sum_n \int_{\mathbf{H}} \langle \mathcal{E}_A(\mathbf{B}_n) \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle d\rho(\mathbf{e}) \\ &= \sum_n \rho_{A,\mathbf{H}}(\mathbf{B}_n), \end{aligned}$$

pour une mesure spectrale on a l'additivité complète et puisque  $\rho$  est une mesure positive, le théorème de Fubini permet de conclure. Si  $\widehat{L}$  est un opérateur à trace au sens de Lidskii, on a

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \text{Trace}_{\delta,\mathbf{H}}(\widehat{L})$$

où  $\mathbf{H}$  est une base hilbertienne quelconque de  $\mathcal{H}$  et  $\delta$  est le peigne de Dirac sur  $\mathbf{H}$ ,

$$\delta = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbf{H}} \delta_{\mathbf{e}}.$$

On revient à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = l^2(\zeta)$  des familles de nombres complexes,  $\mathbf{z} = \{z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)}$  telles que  $\sum_\rho |z_\rho|^2 < +\infty$  où  $\mathcal{Z}(\zeta)$  est l'ensemble des zéros de  $\zeta$  comptés avec leur ordre de multiplicité.

**Definition 2.** L'opérateur de Li  $\widehat{L}_\zeta$ , associé à la fonction analytique  $\zeta$ , est l'opérateur défini par

$$\widehat{L}_\zeta(z) = \left\{ \frac{z_\rho}{\rho} \right\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)}.$$

**Remark 3.** Plus généralement, pour un  $\mathbf{a} = \{a_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)}$ , l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{a}$  est défini par

$$\widehat{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) = \{a_\rho z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)},$$

la forme linéaire

$$l_{\mathbf{a}}(z) = \sum_\rho a_\rho z_\rho$$

est le produit d'Abel de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{z}$ ,

$$\sum_\rho |a_\rho z_\rho| < +\infty.$$

**Theorem 2.** *L'opérateur de  $\widehat{L}_\zeta$  associé à la fonction zêta, est un opérateur à trace et*

$$\lambda_n = \text{Trace} \left( P_n \left( \widehat{L}_\zeta \right) \right), \forall n \geq 1$$

où  $P_n(t) = 1 - (1-t)^n$ .

On se fixe une mesure spectrale  $\mathcal{E}$  sur  $l^2(\zeta)$ ,

$$\mathcal{E} : \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Proj}(l^2(\zeta))$$

de la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  à valeurs les projecteurs de  $l^2(\zeta)$ . Le théorème de Von Neumann donne l'existence d'un unique opérateur  $\widehat{T}$  de  $l^2(\zeta)$  à domaine dense et autoadjoint vérifiant

$$\widehat{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}(\lambda) \text{ et } \langle \widehat{T}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \widehat{T}\mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mu_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$$

où  $\mu_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$  est la mesure définie par

$$\mu_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(\mathbf{B}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{B})\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle, \forall \mathbf{B} \in \text{Bor}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in l^2(\zeta).$$

**Proposition 5.** *La mesure spectrale associée à l'opérateur  $\widehat{L}_f$  est définie par les projecteurs orthogonaux  $\mathcal{E}(\mathbf{B})$  de  $l^2(\zeta)$  sur la fermeture dans  $l^2(\zeta)$  de l'espace vectoriel engendré par*

$$\{\mathbf{e}_\rho : f(\rho) \in \mathbf{B}\}.$$

*Proof.* En effet,

$$\langle \widehat{L}_f \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu \rangle = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} \lambda d\mu_{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu}$$

$$\int_{-A}^{+A} \lambda d\mu_{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left\langle \mathcal{E} \left( \left[ \left( -1 + \frac{2k}{n} \right) A, \left( -1 + \frac{2(k+1)}{n} \right) A \right] \right) \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left( \left[ \left( -1 + \frac{2k}{n} \right) A, \left( -1 + \frac{2(k+1)}{n} \right) A \right] \right) \mathbf{e}_\rho \\ &= \begin{cases} \mathbf{e}_\rho & \text{si } f(\rho) \in \left[ \left( -1 + \frac{2k}{n} \right) A, \left( -1 + \frac{2(k+1)}{n} \right) A \right[ \\ \mathbf{0}_{l^2(\zeta)} & \text{sinon} \end{cases}, \end{aligned}$$

et

$$\int_{-A}^{+A} \lambda d\mu_{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{2k}{n} \right) A \delta_{\rho, \nu} \text{ avec } f(\rho) - \frac{2}{n} A < \left( -1 + \frac{2k}{n} \right) A \leq f(\rho)$$

$$\int_{-A}^{+A} \lambda d\mu_{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu} = f(\rho) \delta_{\rho, \nu}, \forall \rho, \forall \nu \text{ si } f(\rho) \in [-A, A[ \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

On en déduit que

$$\langle \widehat{L}_f \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\nu \rangle = f(\rho) \delta_{\rho, \nu} \text{ et } \widehat{L}_f \mathbf{e}_\rho = f(\rho) \mathbf{e}_\rho, \forall \rho$$

l'unicité dans le théorème spectral de Von Neumann permet de conclure.  $\square$

En particulier, si  $\widehat{L}_f$  est un opérateur à trace, sa trace est donnée par  $\sum_{\rho} f(\rho)$ , la sommation est définie en 2.6. La trace de  $\widehat{L}_f$  s'identifie à la trace définie en 3.1. Cette remarque permet de définir la notion de trace à une classe d'opérateurs à domaine dense qui contient les opérateurs à trace au sens de Lidskii. Par 2.7,

$$\lambda_n = \text{Trace} \left( \widehat{L}_{f_n} \right) \text{ avec } f_n(z) = P_n \left( \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}} \right)$$

la fonction  $f$  est à valeurs réelles. L'opérateur  $\mathcal{E}_n(\mathbf{B})$ , associée au borélien  $\mathbf{B}$  de  $\mathbb{R}$ , est défini par la projection orthogonale sur la fermeture du sous-espace vectoriel engendré par

$$\{ \mathbf{e}_{\rho} : f_n(\rho) \in \mathbf{B} \},$$

les  $f_n(\rho)$  sont positifs, sauf pour un nombre fini de  $\rho$  comptés avec leur ordre de multiplicité et

$$\langle \mathcal{E}_n(\mathbf{B})(\mathbf{e}_{\rho}), \mathbf{e}_{\tau} \rangle = \delta_{\rho, \tau} \mathbf{1}_B(f_n(\rho)) = \mu_{n, \rho, \tau}(\mathbf{B}).$$

Pour une fonction étagée, si on pose  $\mu_{n, \rho} = \mu_{n, \rho, \rho}$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum \lambda_i \mathbf{1}_{B_i} \right) d\mu_{n, \rho} = \sum \lambda_i \mathbf{1}_{B_i}(f_n(\rho)) = \left( \sum \lambda_i \mathbf{1}_{B_i} \right) (f_n(\rho))$$

pour toute fonction mesurable positive  $h$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h d\mu_{n, \rho} = h(f_n(\rho)) = \delta_{f_n(\rho)}(h)$$

la mesure ainsi définie est la mesure de Dirac au point  $f_n(\rho)$ . Cette remarque s'étend à toutes les fonctions  $f$  à valeurs réelles définies sur ouvert contenant les zéros de  $\zeta$ .

**Remark 4.** Pour la fonction zêta  $\zeta$ , si l'hypothèse de Riemann est vérifiée alors  $\text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ , la mesure spectrale associée à la partie réelle de l'opérateur de Li  $\widehat{L}_{\zeta}$  est définie par les projecteurs orthogonaux  $\mathcal{E}(\mathbf{B})$  sur la fermeture des sous-espaces vectoriels engendrés par

$$\left\{ \mathbf{e}_{\rho} : \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{Im}(\rho)^2} \in B \right\}.$$

On peut calculer d'une autre façon les coefficients de Li, si on pose  $\widehat{L}_{\zeta} = \widehat{A}_{\zeta} + i\widehat{B}_{\zeta}$  la décomposition en partie réelle et imaginaire de l'opérateur de Li. On définit la mesure produit sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\tau = \mu \otimes \nu$$

où  $\mu$  est la mesure associée à  $\widehat{A}_{\zeta}$ ,  $\nu$  est la mesure associée à  $\widehat{B}_{\zeta}$ . Soit  $Q_n \in \mathbb{R}[X, Y]$ , le polynôme défini par  $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} Q_n(X, Y) &= P_n(Z, \bar{Z}) \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{p+k+1} C_n^p C_p^{2k} X^{p-2k} Y^{2k}, \quad Z = X + iY. \end{aligned}$$

**Theorem 3.** Les coefficients de Li s'écrivent

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^2} Q_n(x, y) d\tau(x, y), \quad \forall n \geq 1.$$

**Remark 5.** *Le support de la mesure  $\tau$  est contenu dans  $[0, 1] \times [-1, 1]$ , comme  $Q_n$  est une fonction paire en  $y$ , on peut écrire les coefficients de Li sous la forme*

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n}{2} &= \int_{[0,1]^2} Q_n(x, y) d\tau(x, y) \\ &= \int_{[0,1]^2 \cap \left\{ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}} Q_n(x, y) d\tau(x, y) + \int_{[0,1]^2 \cap \left\{ x^2 + y^2 < \frac{1}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}} Q_n(x, y) d\tau(x, y) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2 \cap \left\{ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}} Q_n(x, y) d\tau(x, y) &> 0 \text{ et} \\ \int_{[0,1]^2 \cap \left\{ x^2 + y^2 < \frac{1}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}} Q_n(x, y) d\tau(x, y) &< 0. \end{aligned}$$

#### 4. LES TRACES DES OPÉRATEURS ASSOCIÉS AUX COEFFICIENTS DE LI

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux traces définies par certains opérateurs de  $l^2(\varsigma)$ , où  $\varsigma$  est une fonction analytique sur  $]0, 1[ \times \mathbb{R}$ , ayant un nombre infini de zéros. L'opérateur de Li vérifie

$$\widehat{L}(\mathbf{e}_\rho) = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\varsigma),$$

avec

$$\widehat{L} = \widehat{L}_f \text{ avec } f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}^*,$$

si  $\left\{ \frac{1}{\rho} \right\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\varsigma)} \in l^2(\varsigma)$ ,  $\widehat{L}$  est un opérateur de classe Hilbert-Schmidt. On définit la trace de  $\widehat{L}$ , si elle existe, par la formule [5],

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_{\rho} \langle \mathbf{e}_\rho, \widehat{L} \mathbf{e}_\rho \rangle = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$$

qui correspond au premier coefficient de Li  $\lambda_1$  et

$$\lambda_n = \text{Trace}\left(P_n(\widehat{L})\right), \forall n \geq 1.$$

L'opérateur

$$\widehat{\mathbf{L}}_z = e^{-z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} P_n(\widehat{L}),$$

vérifie

$$\widehat{\mathbf{L}}_z = 1 - e^{-z\widehat{L}}, 1 = \text{Id}_{l^2(\varsigma)}$$

si cet opérateur est un opérateur à trace alors

$$\text{Trace}(\widehat{\mathbf{L}}_z) = e^{-z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \lambda_n = \sum_{\rho} \left(1 - e^{-\frac{z}{\rho}}\right).$$

**Lemma 7.** *Si l'opérateur  $\widehat{\mathbf{L}}_z$  est un opérateur à trace alors la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n z^n}{n!}$  converge et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n z^n}{n!} = e^z \sum_{\rho} \left(1 - e^{-\frac{z}{\rho}}\right).$$

**Lemma 8.** *Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}^*$*

$$P_n P_m = P_n + P_m - P_{n+m},$$

*en particulier, l'espace vectoriel engendré par*

$$\{1, \widehat{L}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

*est une algèbre unitaire et*

$$\widehat{L}_n \circ \widehat{L}_m = \widehat{L}_n + \widehat{L}_m - \widehat{L}_{n+m}, \quad \widehat{L}_n = P_n(\widehat{L}).$$

**Theorem 4.** *Pour toute permutation  $\tau$  de  $\mathcal{Z}(\zeta)$  on a le théorème de commutativité,*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\tau(\rho)} = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho},$$

*en particulier,*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} < +\infty.$$

*Proof.* L'opérateur

$$\widehat{L}_{\tau}(\mathbf{e}_{\rho}) = \mathbf{e}_{\tau(\rho)}, \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$$

est une isométrie de l'espace de Li,  $\widehat{L}_{\tau^{-1}} \circ \widehat{L} \circ \widehat{L}_{\tau}$  est un opérateur à trace car  $\widehat{L}$  est à trace et

$$\text{Trace}(\widehat{L}_{\tau^{-1}} \circ \widehat{L} \circ \widehat{L}_{\tau}) = \sum_{\rho} \frac{1}{\tau(\rho)} = \text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}.$$

□

**Remark 6.** *On a*

$$\text{Trace}(\widehat{L}_{\tau}) = \text{card}(\mathcal{F}_{\tau}), \quad \mathcal{F}_{\tau} = \{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta) : \tau(\rho) = \rho\}.$$

*La famille  $\left\{\frac{1}{\rho^k}\right\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)}$  est sommable pour tout  $k \geq 1$ .*

Soit  $\mathcal{H}_{\zeta}(U)$ , l'ensemble des fonctions holomorphes  $f$  sur  $U$  contenant  $\mathcal{Z}(\zeta)$  telles que  $\{f(\rho)\}_{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)} \in l^2(\zeta)$ . On définit l'opérateur

$$\widehat{L}_f(\mathbf{e}_{\rho}) = f(\rho) \mathbf{e}_{\rho}, \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta),$$

on a

$$\widehat{L}_{f^{(p)}} = (-1)^p p! \widehat{L}_f^{p+1} = (-1)^p p! \widehat{L}^{p+1},$$

en particulier,

$$\widehat{L}_m = \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^p m!}{p! (m-p)!} \widehat{L}^p = - \sum_{p=1}^m \frac{m! p}{(p!)^2 (m-p)!} \widehat{L}_{f^{(p-1)}} = \widehat{L}_{-\sum_{p=1}^m \frac{m! p}{(p!)^2 (m-p)!} f^{(p-1)}}.$$

On pose

$$\widehat{L}_z(\mathbf{e}_{\rho}) = \frac{1}{z-\rho} \mathbf{e}_{\rho}, \quad z \notin \mathcal{Z}(\zeta)$$

alors

$$\text{Trace}(\widehat{L}_z) = \frac{\xi'(z)}{\xi(z)},$$

l'hypothèse de Riemann est équivalente à  $i\widehat{L}_{\frac{1}{2}}$  est un opérateur hermitien et

$$\text{Trace} \left( i\widehat{L}_{\frac{1}{2}} \right) = i \frac{\xi' \left( \frac{1}{2} \right)}{\xi \left( \frac{1}{2} \right)}.$$

Si  $\widehat{L}_z^{(k)}$  est l'opérateur

$$\widehat{L}_z^{(k)}(e_\rho) = \frac{d^k}{d\rho^k} \left( \frac{1}{z-\rho} \right) e_\rho$$

alors

$$\widehat{L}_z^{(k)} = k! \widehat{L}_z^k,$$

et  $\widehat{L}_0 = -\widehat{L}$ . On peut donner une autre représentation du  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Li.

**Theorem 5.** On a

$$\lambda_n = \text{Trace} \widehat{L}_{f_n}$$

où

$$f_n(z) = g_n \left( \frac{1}{z} \right),$$

avec

$$g_n(z) = -\frac{z}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} \log(1-z)).$$

*Proof.* On rappelle que

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} \log(\xi(z))) \Big|_{z=1},$$

$$\lambda_n = -\sum_{k=1}^{+\infty} C_{n+k-1}^k \rho_k = -\sum_{\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{\rho^k}$$

par 2.13, 2.9 et 2.10

$$\sum_{k=1}^{+\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{\rho^k} = \frac{z}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} \log(1-z)) \Big|_{z=\frac{1}{\rho}}$$

si on pose

$$g_n(z) = -\frac{z}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} \log(1-z))$$

et

$$f_n(z) = g_n \left( \frac{1}{z} \right),$$

on peut écrire

$$\lambda_n = \text{Trace} \widehat{L}_{f_n}.$$

□

De façon analogue, on peut exprimer la différence  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$  en utilisant le théorème suivant.



**Theorem 6.** *On a*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \text{Trace } \widehat{L}_{\mathbf{f}_n}$$

où

$$\mathbf{f}_n(z) = \mathbf{g}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

avec

$$\mathbf{g}_n(z) = -\frac{z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z^n}{1-z} \right).$$

*Proof.* On rappelle que

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z^n \xi'(z)}{\xi(z)} \right) \Big|_{z=1},$$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = -\sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^k \rho_{k+1} = -\sum_{\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^k \frac{1}{\rho^{k+1}}$$

par 2.13, 2.9 et 2.10

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^k \frac{1}{\rho^{k+1}} = -\frac{z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z^n}{1-z} \right) \Big|_{z=\frac{1}{\rho}}$$

si on pose

$$\mathbf{g}_n(z) = -\frac{z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z^n}{1-z} \right)$$

et  $\mathbf{f}_n(z) = \mathbf{g}_n\left(\frac{1}{z}\right)$  alors

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \text{Trace } \widehat{L}_{\mathbf{f}_n}.$$

□

**Remark 7.** *On a une relation entre  $g_n$  et  $\mathbf{g}_n$  de la forme*

$$g_{n+1} - g_n = \mathbf{g}_n, \forall n.$$

*Si on suppose que  $\sum_{\rho} |f(\rho)|^2 < +\infty$  alors l'opérateur*

$$\widehat{L}_f(\mathbf{e}_{\rho}) = f(\rho) \mathbf{e}_{\rho}$$

*est un opérateur de Hilbert-Schmidt, son spectre est défini par*

$$\text{Spect}(\widehat{L}_f) = f(\mathcal{Z}(\zeta)) \cup \{0\},$$

*et si  $f(\mathcal{Z}(\zeta)) \subset \mathbb{R}$  alors  $L_f$  est auto-adjoint, ses sous-espaces propres sont de la forme*

$$E(\lambda) = \text{Vect} \{ \mathbf{e}_{\rho} : f(\rho) = \lambda \}, \lambda \in \text{Spect}^*(\widehat{L}_f)$$

*et de dimension finie.*

On peut étendre les définitions précédentes aux fonctions

$$P_{n,m}(z) = 1 - (1-z)^n (1-\bar{z})^m, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

et

$$\widehat{L}_{n,m} = 1 - \left(1 - \widehat{L}\right)^n \left(1 - \widehat{L}^{\dagger}\right)^m, 1 = \text{Id}_{l^2(\zeta)}$$

ces opérateurs sont des opérateurs à traces qui vérifient les propriétés suivantes.

**Lemma 9.** *On a*

$$P_{n_1, m_1} \times P_{n_2, m_2} = P_{n_1, m_1} + P_{n_2, m_2} - P_{n_1+n_2, m_1+m_2}$$

en particulier,

$$\widehat{L}_{n_1, m_1} \circ \widehat{L}_{n_2, m_2} = \widehat{L}_{n_1, m_1} + \widehat{L}_{n_2, m_2} - \widehat{L}_{n_1+n_2, m_1+m_2},$$

et les égalités suivantes

$$\text{Trace} \left( \widehat{L}_{-n, -m} \right) = \text{Trace} \left( \widehat{L}_{n, m} \right), \forall n, m \in \mathbb{Z},$$

$$\widehat{L}_{n, m}^\dagger = \widehat{L}_{m, n},$$

$$\text{Trace} \left( \widehat{L}_{n, m}^\dagger \right) = \text{Trace} \left( \widehat{L}_{m, n} \right), \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

L'opérateur  $\widehat{L}_{n, n}$  est un opérateur de trace négative.

*Proof.* La preuve de la dernière assertion s'obtient en écrivant l'égalité

$$\text{Trace} \left( \widehat{L}_{n, n} \right) = \sum_{\rho} 1 - \frac{1}{2} \left( \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|^{2n} + \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|^{-2n} \right) \leq 0.$$

□

**Remark 8.** *On a*

$$\text{Trace} \left( \widehat{L}_{n, n} \right) = \sum_{\rho} 1 - \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|^{2n} = \sum_{\rho} 1 - \left( 1 - \frac{2 \operatorname{Re}(\rho) - 1}{|\rho|^2} \right)^n,$$

si  $n > 0$  et  $\operatorname{Re}(\rho) > \frac{1}{2}$  alors

$$1 - \left( 1 - \frac{2 \operatorname{Re}(\rho) - 1}{|\rho|^2} \right)^n > 0,$$

si  $\operatorname{Re}(\rho) < \frac{1}{2}$  alors

$$1 - \left( 1 - \frac{2 \operatorname{Re}(\rho) - 1}{|\rho|^2} \right)^n < 0$$

et si  $\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$  alors

$$1 - \left( 1 - \frac{2 \operatorname{Re}(\rho) - 1}{|\rho|^2} \right)^n = 0.$$

En particulier,

$$\sum_{\rho, \operatorname{Re}(\rho) > \frac{1}{2}} 1 - \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|^{2n} \leq - \sum_{\rho, \operatorname{Re}(\rho) > \frac{1}{2}} 1 - \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right|^{-2n}.$$

## 5. CONCLUSION

On a proposé différentes méthodes pour calculer les coefficients de Li. Les calculs dans  $\mathbb{C}$  pour décrire ces coefficients sont d'une grande complexité et les résultats obtenus ne permettent pas de décider de la positivité de ces coefficients. On est donc amené à définir ces coefficients comme trace d'opérateurs de l'espace de Hilbert  $l^2(\varsigma)$ . Cette approche permet de donner une représentation des coefficients  $\lambda_n$  sous forme d'intégrale définie à l'aide des mesures spectrales. Les résultats obtenus restent insuffisants pour démontrer le critère de positivité de Li.

## REFERENCES

- [1] E. Bombieri, J.Lagarias. Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis.
  - [2] J.L. Jonot. Hypothèse de Riemann, Séries de Dirichlet et opérateurs associés. 2018. hal-01731220
  - [3] Xian-Jin Li, The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis, J. Number theory 65 (2) (1997) 325–333)
  - [4] V.B. Lidskii. Non-selfadjoint operators with a trace. Dokl. Akad. Nauk. SSR, 125 :485–487, 1959. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 47 (1965) 43–46.
  - [5] D. Robert, Sur les traces d'opérateurs (de Grothendieck à Lidskii), SMF, 2014.
  - [6] L. Schwartz. Théorie des distributions, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris 1966.
  - [7] I. C Gohberg and M.G. Krein. Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Translations of mathematical monographs, vol. 18. A.M.S., 1969.
- E-mail address:* jean-louis.jonot@ac-versailles.fr ou j.jonot@gmail.com