



**HAL**  
open science

## Étude des résonances internes d'un modèle réduit d'aubage soumis à des non-linéarités géométriques

Nicolas Di Palma, Adrien Martin, Fabrice Thouverez, Benjamin Chouvion,  
Vivien Courtier

► **To cite this version:**

Nicolas Di Palma, Adrien Martin, Fabrice Thouverez, Benjamin Chouvion, Vivien Courtier. Étude des résonances internes d'un modèle réduit d'aubage soumis à des non-linéarités géométriques. CSMA 2019, May 2019, Giens, France. hal-02098705

**HAL Id: hal-02098705**

**<https://hal.science/hal-02098705>**

Submitted on 12 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude des résonances internes d'un modèle réduit d'aubage soumis à des non-linéarités géométriques

N. Di Palma<sup>1,2</sup>, A. Martin<sup>2</sup>, F. Thouverez<sup>2</sup>, B. Chouvion<sup>2</sup>, V. Courtier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Safran Aircraft Engines, nicolas.di-palma@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> LTDS, CNRS UMR 5513, École Centrale de Lyon, adrien.martin@doctorant.ec-lyon.fr {fabrice.thouverez,benjamin.chouvion}@ec-lyon.fr

**Résumé** — Ce papier traite de l'étude harmonique d'un modèle réduit d'aubage obtenu par projection modale et soumis à des non-linéarités géométriques. Les effets non-linéaires réduits sont supposés polynomiaux et déterminés à l'aide d'une procédure d'évaluation des raideurs non-linéaires (méthode STEP). Les réponses stationnaires dans les cas forcé et libre sont obtenues grâce à la méthode de l'équilibrage harmonique. Une résonance interne de type 1 : 2 est déterminée. Celle-ci traduit un couplage de modes et apparaît au niveau des points de bifurcation de type point d'embranchement.

**Mots clés** — méthode de l'équilibrage harmonique, résonance interne, stiffness evaluation procedure.

## Introduction

Pour répondre aux défis économiques et environnementaux, les dimensions des turboréacteurs tendent à être de plus en plus importantes. En conséquence, ses composantes telles que les aubages peuvent être soumises à de grandes déformations. Dans ces conditions, des phénomènes non-linéaires tels que les résonances internes sont susceptibles d'apparaître lors d'excitations harmoniques. La résonance interne se caractérise par un échange d'énergie entre plusieurs modes d'une structure dont les fréquences, linéaires ou non-linéaires, sont commensurables ou quasi commensurables [9, 16]. Face aux risques vibratoires que soulève ce phénomène, sa prise en compte constitue un enjeu important en phase de conception. Dans la littérature, différentes approches ont été utilisées pour étudier les résonances internes. On peut citer par exemple la méthode des échelles multiples [16, 17], des variétés invariantes multi-modes [3, 7], la méthode de tir [9, 18] ou encore la méthode de l'équilibrage harmonique [19]. Ces méthodes ont permis de prédire de manière satisfaisante le couplage de modes par résonances internes. En revanche, le phénomène a très peu été observé sur des systèmes issus de l'industrie. Ainsi l'objectif de ce document est d'étudier les résonances internes d'un modèle réduit d'aubage en présence de non-linéarités géométriques. Dans l'étude présentée ici, les cycles limites du système réduit par projection modale seront calculés à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique. Une attention particulière sera prêtée au calcul des points de bifurcation de type point d'embranchement ainsi qu'à la continuation des branches bifurquées.

## 1 Développements numériques

Dans la suite de ce document, l'équation de la dynamique du système considéré s'écrit sous la forme (1),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (1)$$

avec  $\mathbf{x}(t)$  le vecteurs des degrés de liberté de déplacements (DDL),  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  les efforts extérieurs agissant sur le système et  $\mathbf{f}^{\text{nl}}$  les efforts non-linéaires d'origine géométrique uniquement. Ce type de modèle est généralement issu d'une discrétisation par éléments finis.

## 1.1 Réduction

Pour des systèmes industriels présentant un grand nombre de degrés de liberté, la résolution du système (1) n'est pas envisageable en raison des coûts numériques trop élevés. La réduction de modèle permet de contourner cette limitation en réduisant le nombre d'inconnues du système initial.

### 1.1.1 Projection modale

Dans cet article, la réduction s'effectue à l'aide d'une projection modale. Celle-ci s'opère via un ensemble de  $r$  modes linéaires  $\Phi_i$  du système libre conservatif, regroupés dans une matrice de passage  $\Phi$ . Le passage des coordonnées physiques  $\mathbf{x}$  aux coordonnées modales  $\mathbf{q}$  s'écrit,

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (2)$$

L'équation réduite du mouvement (3) se déduit de l'introduction de (2) dans (1),

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) + \Phi^T \mathbf{f}^{nl}(\Phi \mathbf{q}(t)) = \tilde{\mathbf{f}}^{ext}(t) \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi \text{ (idem pour } \tilde{\mathbf{C}} \text{ et } \tilde{\mathbf{K}}) \\ \tilde{\mathbf{f}}^{ext} &= \Phi^T \mathbf{f}^{ext} \end{aligned} \quad (4)$$

### 1.1.2 STiffness Evaluation Procedure

L'expression des efforts non-linéaires réduits dans l'équation (3) n'est généralement pas disponible dans la mesure où les efforts  $\mathbf{f}^{nl}$  sont issus d'un logiciel éléments finis. Afin de lever cette indétermination, Muravyov et al. ont proposé dans [14] d'exprimer a priori les efforts non-linéaires réduits sous la forme polynomiale suivante,

$$\Phi^T \mathbf{f}^{nl}(\Phi \mathbf{q}(t)) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \mathbf{K}_{jk}^q q_j q_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \sum_{l=k}^r \mathbf{K}_{jkl}^c q_j q_k q_l \quad (5)$$

où  $r$  est la dimension du vecteur d'inconnues modales  $\mathbf{q}$ . La méthode proposée dans [14] consiste à déterminer les composantes des tenseurs  $\mathbf{K}^q$  et  $\mathbf{K}^c$  à l'aide d'une procédure d'évaluation des raideurs non-linéaires (ou *STEP* pour STiffness Evaluation Procedure). Le principe de cette méthode est d'imposer un certain nombre de déplacements nodaux notés  $\mathbf{x}_p$  et d'effectuer une série d'analyses statiques non-linéaires de manière à remonter aux raideurs quadratiques  $\mathbf{K}^q$  et  $\mathbf{K}^c$  des forces non-linéaires quadratique et cubique. La procédure se résume comme suit. En imposant des déplacements  $\mathbf{x}_p$  le long d'un mode  $\Phi_j$  sous la forme  $\mathbf{x}_p = \Phi_j q_j$ , il est possible d'isoler les composantes  $\mathbf{K}_{jj}^q$  et  $\mathbf{K}_{jjj}^c$  via l'équation (6).

$$\Phi^T \mathbf{f}^{nl}(\Phi_j q_j) = \mathbf{K}_{jj}^q q_j q_j + \mathbf{K}_{jjj}^c q_j q_j q_j \quad (6)$$

De même, une relation liant les composantes  $\mathbf{K}_{jk}^q$ ,  $\mathbf{K}_{jjk}^c$  et  $\mathbf{K}_{jkk}^c$  aux efforts non-linéaires réduits s'obtient en imposant des déplacements le long de deux modes linéaires,  $\mathbf{x}_p = \Phi_j q_j + \Phi_k q_k$  à l'aide de l'équation (7).

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{f}^{nl}(\Phi_j q_j + \Phi_k q_k) &= \mathbf{K}_{jj}^q q_j q_j + \mathbf{K}_{jjj}^c q_j q_j q_j + \mathbf{K}_{kk}^q q_k q_k + \mathbf{K}_{kkk}^c q_k q_k q_k \\ &+ \mathbf{K}_{jk}^q q_j q_k + \mathbf{K}_{jjk}^c q_j q_j q_k + \mathbf{K}_{jkk}^c q_j q_k q_k \end{aligned} \quad (7)$$

Enfin, les coefficients  $\mathbf{K}_{jkl}^c$  peuvent être extraits de la relation (8) en considérant des déplacements selon 3 modes linéaires,  $\mathbf{x}_p = \Phi_j q_j + \Phi_k q_k + \Phi_l q_l$ .

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{f}^{nl}(\Phi_j q_j + \Phi_k q_k + \Phi_l q_l) &= \mathbf{K}_{jj}^q q_j q_j + \mathbf{K}_{kk}^q q_k q_k + \mathbf{K}_{ll}^q q_l q_l + \mathbf{K}_{jk}^q q_j q_k + \mathbf{K}_{jl}^q q_j q_l + \mathbf{K}_{kl}^q q_k q_l \\ &+ \mathbf{K}_{jjj}^c q_j q_j q_j + \mathbf{K}_{kkk}^c q_k q_k q_k + \mathbf{K}_{lll}^c q_l q_l q_l + \mathbf{K}_{jjk}^c q_j q_j q_k + \mathbf{K}_{kjj}^c q_k q_j q_j \\ &+ \mathbf{K}_{jil}^c q_j q_j q_l + \mathbf{K}_{lil}^c q_l q_l q_j + \mathbf{K}_{kkl}^c q_k q_k q_l + \mathbf{K}_{llk}^c q_l q_l q_k + \mathbf{K}_{jkl}^c q_j q_k q_l \end{aligned} \quad (8)$$

Chacun des termes  $\mathbf{K}_{jk}^q$  et  $\mathbf{K}_{jkl}^c$  se déduit finalement en recombinaison des équations (6) à (8). Cette méthode a par exemple été appliquée dans [12].

## 1.2 Méthode de l'équilibrage harmonique

Pour cet article, la méthode de l'équilibrage harmonique [10] a été préférée aux méthodes temporelles pour la recherche de solutions périodiques d'un système dynamique non-linéaire. En supposant la solution en régime permanent sous la forme,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \quad (9)$$

le système algébrique non-linéaire (10) est obtenu,

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{f}}^{nl}(\hat{\mathbf{q}}) - \hat{\mathbf{f}}^{ext} = \mathbf{0} \quad (10)$$

avec  $\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots]^T$ ,  $\hat{\mathbf{f}}^{nl}$  et  $\hat{\mathbf{f}}^{ext}$  les coefficients de Fourier de  $\mathbf{f}^{nl}$  et  $\mathbf{f}^{ext}$  et  $\mathbf{Z}$  la matrice de rigidité dynamique multi-harmonique. Les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{f}}^{nl}(\hat{\mathbf{q}})$  sont déterminés à l'aide de la méthode d'alternance temps/ fréquence (où *AFT* pour Alternating Frequency Time) [4] et le système (10) est résolu numériquement à l'aide d'un solveur itératif non-linéaire. Les solutions de (10) sont généralement représentées sous forme de courbes ou branches de solutions dans l'espace  $(\|\hat{\mathbf{q}}\|, \omega)$ .

## 1.3 Continuation des solutions périodiques par pseudo longueur d'arc

Le système (10) étant non-linéaire, les branches de solutions de celui-ci sont susceptibles de faire apparaître des points singuliers ou de bifurcation tels que les points de retournement ou d'embranchement [21]. Les méthodes de continuation de solutions permettent d'appréhender ce genre de phénomène et de suivre les différentes branches de solutions [1]. Pour ce faire, une approche classique consiste à paramétrer les branches de solutions au moyen de l'abscisse curviligne  $s$ , telle que  $\{\hat{\mathbf{q}}, \omega\} = \{\hat{\mathbf{q}}(s), \omega(s)\}$ . Dans cet article la continuation est réalisée au moyen d'une méthode de type prédiction / correction [15] avec une méthode par pseudo longueur d'arc [8] choisie pour la correction.

## 1.4 Bifurcation et changement de branche

Une condition nécessaire à l'apparition d'un point d'embranchement ou de retournement est que celui-ci rende singulière la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} = \partial \mathbf{f} / \partial \hat{\mathbf{q}}$  du système (10) [15]. Ce point peut être identifié à l'aide des valeurs propres de  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}}$  ou en surveillant les changements de signe de son déterminant. La localisation précise d'un point de bifurcation s'opère à l'aide du *branching system* introduit par Moore et al. [13]. Une version étendue de ce système, introduite dans [21], a été utilisée pour cet article. Celle-ci est plus robuste face à la singularité de la matrice  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}}$  aux points de retournement. Le système étendu s'écrit [21] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}, \omega) + \gamma \mathbf{h} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}}^T(\hat{\mathbf{q}}, \omega) \mathbf{h} \\ \mathbf{J}_{\omega}^T \mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (11)$$

avec  $\mathbf{h}$  un vecteur non nul appartenant au noyau de  $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}}^T$  et  $\gamma$  un scalaire. Le type de bifurcation dépend du rang de la matrice rectangulaire  $[\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{J}_{\omega}]$ . Lorsque la matrice est de rang plein (i.e. égal à  $n$ , la dimension du système), il s'agit d'un point de retournement. Si le rang de la matrice est au plus égal à  $n-1$ , le point de bifurcation est un point d'embranchement et la branche de solutions possède au moins deux tangentes permettant de suivre les branches secondaires de solutions. Numériquement, la traversée d'un point de retournement est gérée par la continuation par pseudo longueur d'arc. En revanche le cas des points d'embranchement est plus complexe et il est nécessaire de déterminer numériquement chacune des branches se rattachant au point d'embranchement [5].

La méthode dite de *branch switching* (ou changement de branche) [11] offre la possibilité de déterminer ces branches en calculant les différentes tangentes en un point  $\mathbf{y}^* = [\hat{\mathbf{q}}^*, \omega^*]$  où le symbole '\*' caractérise les grandeurs au point d'embranchement. Dans le cas où la matrice  $[\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{J}_{\omega}]$  est de rang égal à  $n-1$ , il existe 2 tangentes distinctes au point  $\mathbf{y}^*$ . Par définition, ces tangentes appartiennent au noyau de  $[\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{J}_{\omega}]$  et s'écrivent sous la forme,

$$\mathbf{t} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

avec  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  une base du noyau de  $[\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{J}_{\omega}]$  et  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  des coefficients de pondérations. On montre [11] que ces coefficients sont solutions de la forme quadratique suivante,

$$b_{11}\alpha_1^2 + 2b_{12}\alpha_1\alpha_2 + b_{22}\alpha_2^2 = 0 \quad (13)$$

avec

$$b_{ij} = \langle \varphi, \mathbf{B}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \rangle, \quad i, j = 1, 2 \quad (14)$$

où  $\varphi$  appartient au noyau de  $[\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{J}_{\omega}]^T$  au point  $\mathbf{y}^*$  et  $\mathbf{B}$  est le tenseur d'ordre 3 correspondant à la Hessienne de l'application  $\mathbf{f}$  définie par (10). Le produit scalaire introduit dans (14) est défini par,

$$\langle \varphi, \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^{n+1} \varphi_i \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i(\mathbf{y})}{\partial y_j \partial y_k} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} v_j v_k \quad (15)$$

Dans le cas où  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ , l'espace des solutions du système quadratique (13) est de dimension 2. L'ajout d'une condition de normalisation garantit l'existence des deux tangentes distinctes au point d'embranchement.

## 2 Application

### 2.1 Modèle

Les méthodes détaillées précédemment ont été appliquées à un modèle réduit obtenu à partir d'un modèle éléments finis d'aubage par projection modale. Dans une volonté d'étudier le phénomène de résonance interne entre le premier mode de torsion (noté 1T) et le deuxième mode de flexion (noté 2F) de l'aubage, seuls ces deux modes ont été retenus pour la projection modale. Par la suite, les pulsations des modes 1T et 2F sont telles que  $\omega_2 \simeq 2\omega_1$  et les coordonnées généralisées associées sont notées  $q_1$  et  $q_2$ . Un effort ponctuel harmonique de pulsation  $\Omega$  et d'amplitude  $F_0$  est appliqué en tête d'aubage. La matrice d'amortissement est supposée diagonale et les facteurs d'amortissement des deux modes  $\xi_1$  et  $\xi_2$  ont été choisis égaux à 0.02% et 0.016%. Bien que faibles, ces facteurs d'amortissements peuvent être rencontrés lors d'étude d'aubage monobloc sans interaction fluide/structure [2]. Enfin, les coefficients des raideurs non-linéaires réduites ont été calculés par la méthode STEP. Le système d'équations différentielles s'écrit ainsi sous la forme,

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\xi_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j}^2 K_{jk}^{q,1} q_j q_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j}^2 \sum_{l=k}^2 K_{jkl}^{c,1} q_j q_k q_l = F_1 \cos(\Omega t) \\ \ddot{q}_2 + 2\xi_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j}^2 K_{jk}^{q,2} q_j q_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j}^2 \sum_{l=k}^2 K_{jkl}^{c,2} q_j q_k q_l = F_2 \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (16)$$

### 2.2 Réponse forcée

La figure 1 représente l'amplitude en tête d'aubage pour une excitation d'amplitude  $F_0 = 0.10$  N autour de  $\omega_2$ . Ce résultat a été obtenu par HBM pour  $N_h = 5$  harmoniques et 128 pas de temps pour la procédure AFT. Deux branches secondaires de solutions issues de points d'embranchement sont apparues sur la réponse fréquentielle. Celles-ci ont été calculées à l'aide de la procédure de changement de branches. Des branches similaires ont été obtenues dans [6]. Les coefficients de Fourier obtenus par HBM ainsi que le déplacement temporel reconstruit en tête d'aubage sont représentés sur la figure 2 pour 3 points appartenant aux branches de solutions. Le premier point [●] appartient à la branche principale, le second [▲], à la première branche secondaire et le dernier [■] à la deuxième branche secondaire de solutions.

Sur la branche principale, seule l'harmonique 2 participe à la réponse fréquentielle (l'harmonique fondamentale 0 est aussi présente mais à un niveau très faible). Le signal temporel correspond donc à une sinusoïde présentant deux oscillations par période. Pour la première branche secondaire, le signal n'est plus mono-harmonique. La première harmonique participe désormais à la réponse fréquentielle en complément de l'harmonique 2. On est ainsi en présence d'une résonance interne de type 1 : 2. Le phénomène est encore plus marqué au niveau du point [■] sur la deuxième branche secondaire. Pour ce point

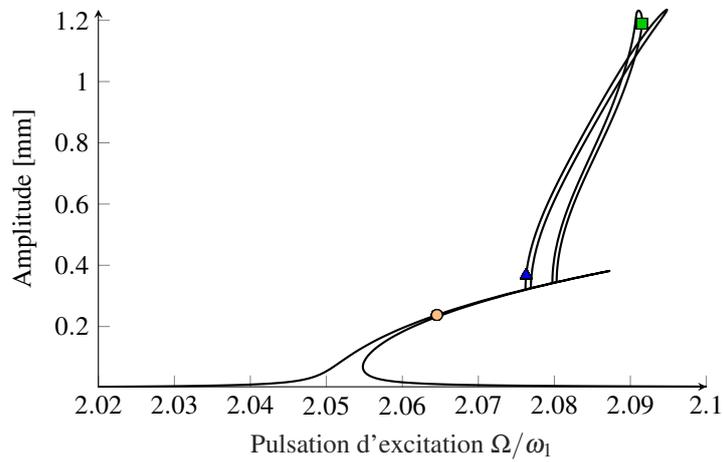


FIGURE 1 – Réponse fréquentielle en tête d'aubage autour de  $\omega_2$

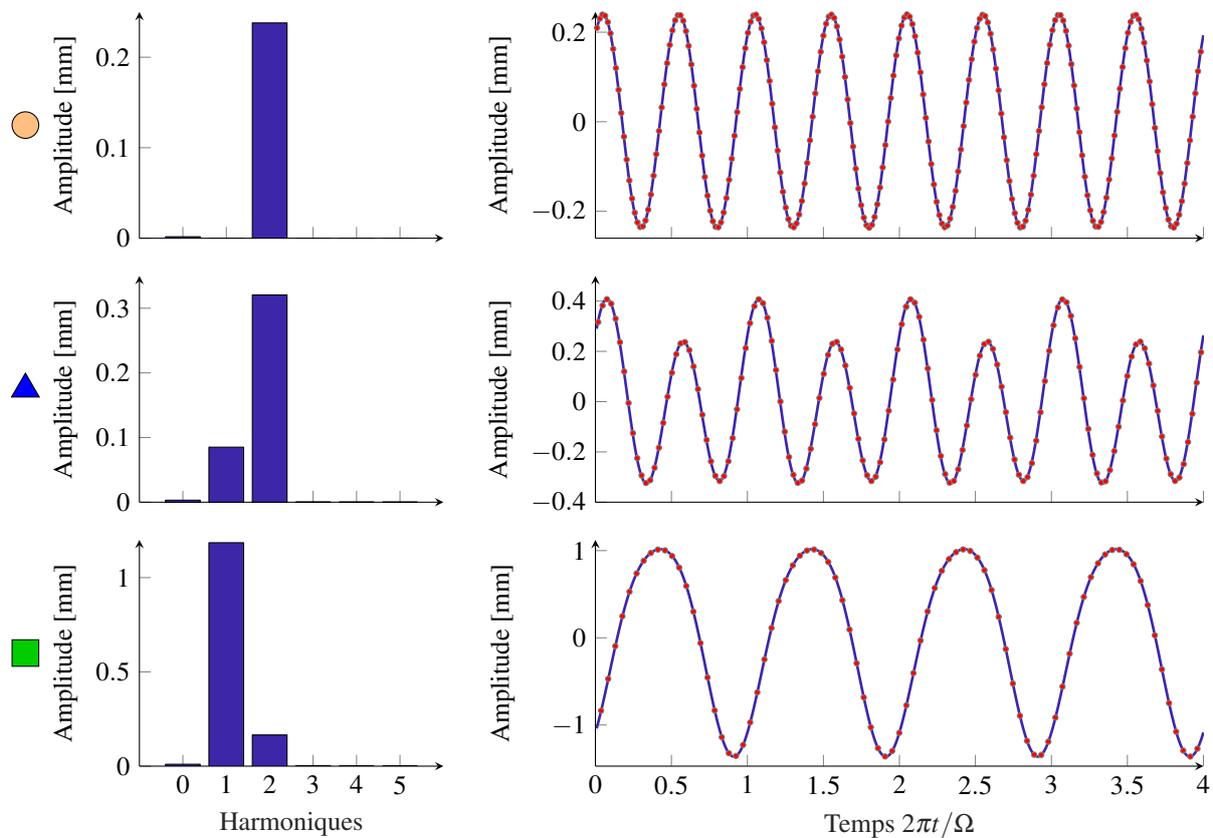


FIGURE 2 – Comportement harmonique en tête d'aubage sur les branches de solutions. A gauche, coefficients de Fourier  $\left(\sqrt{\mathbf{a}_k^2 + \mathbf{b}_k^2}\right)$ . A droite, déplacement reconstruit par HBM [—] et intégration temporelle [•]

l'harmonique 1 est nettement dominante. Le signal temporel résultant est ainsi quasi mono-harmonique avec une oscillation par période. Ces résultats ont été comparés avec ceux obtenus par une méthode d'intégration temporelle de type Runge-Kutta explicite pour les 3 points choisis. Pour des conditions initiales choisies proches des résultats de la HBM, l'intégration temporelle (représentée par les [•]) sur les signaux de la figure 2) présente une très bonne corrélation avec les résultats de l'équilibrage harmonique.

## 2.3 Réponse libre

### 2.3.1 Mode normal non-linéaire

La théorie des modes normaux non-linéaires (MNN) a été introduite dans [20] par Rosenberg puis complétée par les travaux de Shaw et Pierre [22]. Dans ce document le MNN est considéré comme la réponse non-linéaire du système conservatif autonome associé. Celui-ci est déterminé à partir de l'équation (1) pour laquelle la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  et les efforts extérieurs  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(t)$  sont supprimés. Le MNN associé à la pulsation linéaire  $\omega_2$  a été obtenu à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique couplée avec une méthode de continuation par pseudo longueur d'arc. La continuation est initialisée autour de la pulsation  $\omega_2$  avec une amplitude suffisamment faible pour rester proche du régime linéaire. Le MNN est illustré en [-] sur la figure 3(a). Les réponses forcées obtenues pour différents niveaux d'excitation  $F_0$  sont également représentées en dégradé de bleu. A l'instar des réponses forcées, le MNN

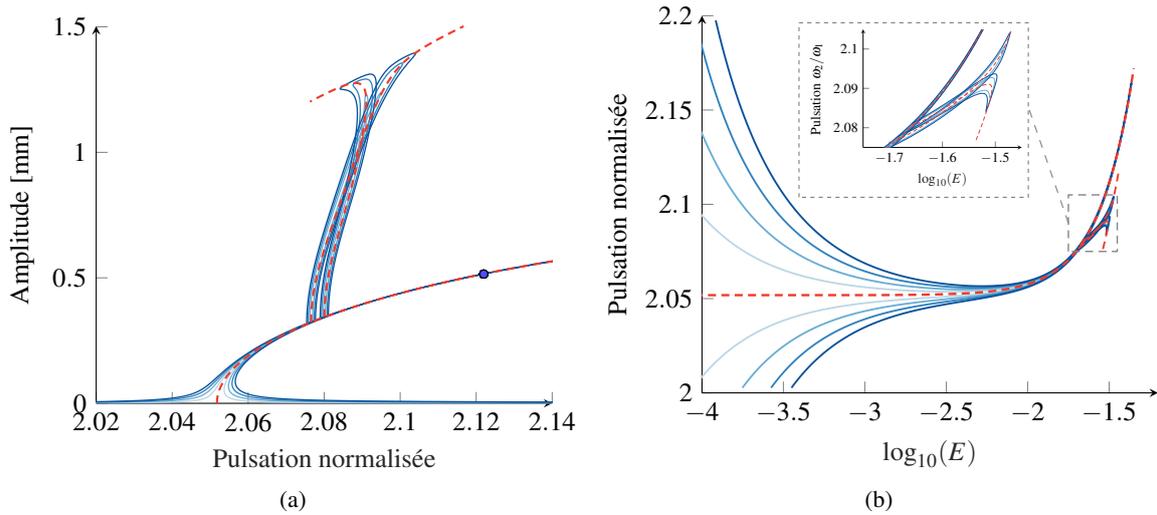


FIGURE 3 – Mode normal non-linéaire associé à la pulsation linéaire  $\omega_2$  [-]. Diagramme pulsation / énergie.

exhibe des branches secondaires de solutions, obtenues par la méthode de changement de branche. Par ailleurs le MNN représente bien le squelette des courbes de réponse forcée et suit leur pic d'amplitude. Le MNN peut être représenté sous la forme d'un diagramme pulsation/énergie (figure 3(b)). Celui-ci indique l'évolution de la pulsation en fonction de l'énergie du système, calculée à l'aide de l'expression suivante [5],

$$E(\mathbf{x}) = \left( \|\mathbf{a}_0\|^2 + \sum_{k=1}^{Nh} (\|\mathbf{a}_k\|^2 + \|\mathbf{b}_k\|^2) \right)^{1/2} \quad (17)$$

Pour des valeurs de  $\log_{10}(E)$  inférieures à  $-2$  la pulsation du mode évolue peu. Ces niveaux d'énergie correspondent à un régime linéaire. En revanche lorsque l'énergie augmente, le raidissement du système apparaît et marque le début du régime non-linéaire. Le diagramme fournit par ailleurs, le niveau d'énergie à partir duquel le couplage de modes se produit. Ainsi, lorsque  $\log_{10}(E)$  se situe autour de  $-1.7$ , les branches secondaires apparaissent et les résonances internes s'activent.

### 2.3.2 Réponse libre suite à un déplacement imposé

La réponse du système libre et amorti est ici étudiée. Le système est initialement lâché sans effort extérieur autour d'une position d'équilibre représentée par le point [●] sur le MNN de la figure 3(a). La réponse libre du système est calculée à l'aide d'une méthode d'intégration temporelle de type Runge Kutta. Les signaux temporels  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  ainsi que le déplacement  $x_i(t)$  en tête d'aubage en fonction du temps sont représentés sur la figure 4(a). Le spectrogramme associé à la réponse en tête d'aubage est illustré figure 4(b).

Entre  $t = 0$  s et  $t = 70$  s l'amplitude des signaux diminue. En tête d'aubage, la réponse libre suit la branche principale du MNN représentée figure 3(a). Le long de cette branche, la pulsation diminue avec l'amplitude. Le zoom sur la figure 4(b) vérifie bien cette propriété du système. A  $t = 70$  s l'amplitude de  $q_1(t)$  croît subitement. Ce saut d'amplitude est également perceptible sur la réponse du signal reconstruit en tête de pale. Plus précisément, on note à  $t = 70$  s que l'amplitude en tête d'aubage se situe autour de 35 mm juste avant le saut. Ce niveau d'amplitude correspond au niveau pour lequel les branches secondaires du MNN apparaissent (figure 3(a)). Par conséquent le système a tendance à suivre une des branches bifurquées, ce qui explique l'augmentation d'amplitude observée. En parallèle, le spectrogramme de la figure 4(b) montre à  $t = 70$  s l'apparition d'une composante de pulsation égale à celle du premier mode. Ces observations confirment donc la possibilité d'un couplage de modes par résonance interne en réponse libre. Notons que les niveaux atteints lors du saut en amplitude ne correspondent pas à ceux observés sur les branches secondaires des MNN, une étude de stabilité permettrait de déterminer les solutions stables sur les branches secondaires et ainsi de cerner plus précisément les niveaux d'amplitude atteignables.

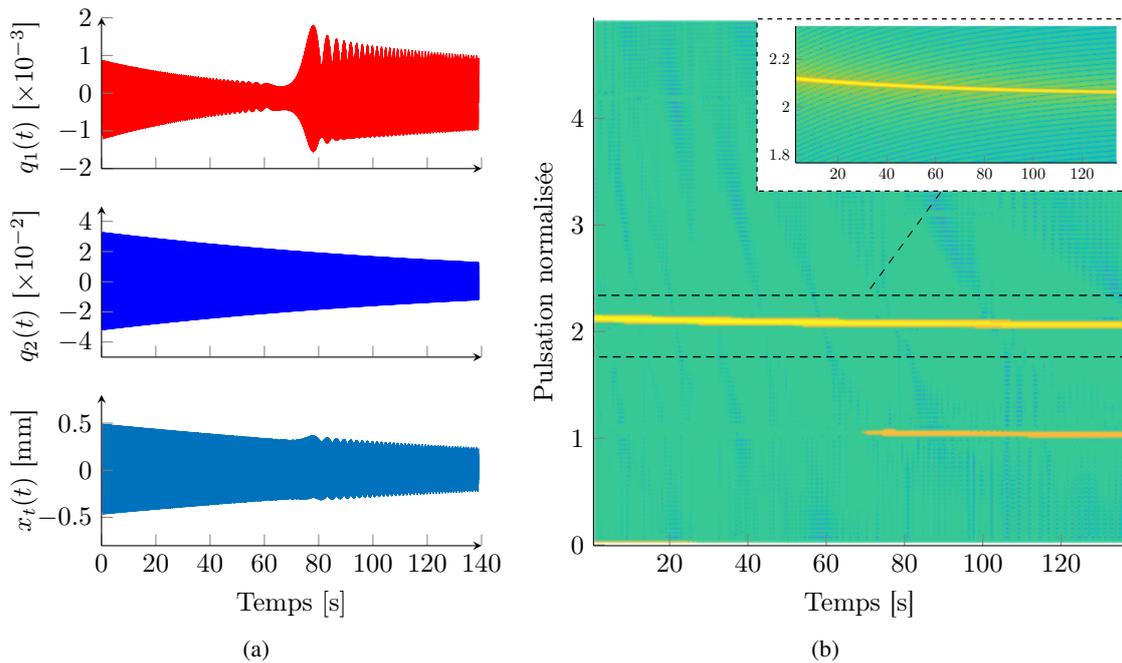


FIGURE 4 – (a) Réponses temporelles  $q_1(t)$  [—],  $q_2(t)$  [—] et  $x_t(t)$  [—]. (b) Spectrogramme en tête d'aubage

## Conclusion

Une approche permettant d'étudier les résonances internes d'un modèle réduit d'aubage soumis à des non-linéarités géométriques a été présentée dans ce document. L'approche, reposant sur la méthode de l'équilibrage harmonique et sur le calcul des branches secondaires de solutions périodiques, a permis de mettre en évidence les couplages de modes par résonance interne de type 1 : 2 sur le modèle réduit. La simulation de la réponse libre du système réduit a permis de confirmer les résultats obtenus par équilibrage harmonique. En particulier, il a été montré que la résonance interne était susceptible d'apparaître suite à un déplacement imposé comme cela peut se produire lors d'un choc par exemple. Dans une optique de maîtrise des risques vibratoires, la prédiction des résonances internes constitue un enjeu important pour les industriels. L'approche présentée dans ce document peut fournir des premiers éléments de réponse quant à cette problématique.

Un certain nombre d'études peuvent être faites pour compléter l'approche existante. Tout d'abord, l'étude de la stabilité du système réduit peut aider à distinguer les solutions réalisables et les niveaux vibratoires susceptibles d'être atteints. L'emploi de méthodes de réduction plus précises constitue également un axe d'amélioration possible.

## Références

- [1] E. Allgower and K. Georg. *Numerical continuation methods : an introduction*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] P. Almeida. *Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2014.
- [3] N. Boivin, C. Pierre, and S. Shaw. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182(2) :336–341, 1995.
- [4] T. Cameron and J. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56(1) :149–154, 1989.
- [5] A. Grolet and F. Thouverez. Vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry. In *ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air*, pages 917–929. American Society of Mechanical Engineers, 2010.
- [6] A. Grolet and F. Thouverez. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30 :43–60, 2012.
- [7] D. Jiang, C. Pierre, and S. Shaw. The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(5) :729–746, 2005.
- [8] H. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *Application of bifurcation theory*, pages 359–384, 1977.
- [9] G. Kerschen, M. Peeters, J. Golinval, and A. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, 2009.
- [10] N. Krylov and N. Bogoliubov. Introduction to non-linear mechanics (am-11). 1947.
- [11] Y. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] M. Mignolet, A. Przekop, S. Rizzi, and S. Spottswood. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10) :2437 – 2460, 2013.
- [13] G. Moore and A. Spence. The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(4) :567–576, 1980.
- [14] A. Muravyov, A. Rizzi, and A. Stephen. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers & Structures*, 81(15) :1513–1523, 2003.
- [15] A. Nayfeh and B. Balachandran. Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods. *Wiley series in nonlinear science, New York ; Chichester : Wiley, c1995*, 1995.
- [16] A. Nayfeh and D. Mook. Nonlinear oscillations. *Nonlinear oscillations, by Nayfeh, Ali Hasan ; Mook, Dean T. New York : Wiley, c1979.*, 1979.
- [17] A. Nayfeh, D. Mook, and L. Marshall. Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions. *Journal of Hydronautics*, 7(4) :145–152, 1973.
- [18] M. Peeters, R. Vigué, G. Sérandour, G. Kerschen, and J. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1) :195–216, 2009.
- [19] P. Ribeiro and M. Petyt. Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method. *Journal of Sound and vibration*, 224(4) :591–624, 1999.
- [20] R. Rosenberg. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. In *Advances in applied mechanics*, volume 9, pages 155–242. Elsevier, 1966.
- [21] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2009.
- [22] S. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.