



**HAL**  
open science

## Mesure de la pression par base de polynômes orthogonaux

van Tue Nguyen, Benoit Tremblais, Frédéric Pons, Laurent David

► **To cite this version:**

van Tue Nguyen, Benoit Tremblais, Frédéric Pons, Laurent David. Mesure de la pression par base de polynômes orthogonaux. 16ème Congrès Francophone de Techniques Laser pour la mécanique des fluides, CNRS, CentraleSupélec, Université Paris Saclay, IRSN, Sep 2018, Dourdan, France. hal-02097662

**HAL Id: hal-02097662**

**<https://hal.science/hal-02097662>**

Submitted on 12 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mesure de la pression par base de polynômes orthogonaux.

Van Tue NGUYEN<sup>1</sup>, Benoit TREMBLAIS<sup>2</sup>, Frédéric PONS<sup>1</sup>, Laurent DAVID<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut PPRIME, UPR3346, CNRS – Université de Poitiers – ISAE-ENSMA, France

<sup>2</sup>Université de Poitiers, Laboratoire XLIM, Axe ASALI/SRI, CNRS 7252, France

Email auteur correspondant : benoit.tremblais@univ-poitiers.fr

Nous présentons ici une méthode originale d'évaluation de la pression dans un écoulement à partir des mesures optiques TR-PIV et TR-TOMO-PIV fondée sur une modélisation des champs de vitesses par bases de polynômes orthogonaux. Notre méthode consiste à approcher les composantes du champ de vitesses défini sur une grille régulière par une combinaison linéaire des polynômes orthogonaux de Legendre à plusieurs variables continues. Nous obtenons alors une représentation analytique des champs de vitesses que nous pouvons dans un second temps substituer dans l'équation de Navier-Stokes afin d'obtenir un champ de gradient de pression instantanée polynomial. L'avantage d'un tel modèle est qu'il est indépendant des caractéristiques physiques de l'écoulement et peut être calculé en amont pour une taille de champ donnée. Par ailleurs, les calculs différentiels et intégraux sont immédiats. Finalement les gradients de pression sont intégrés par la méthode d'intégration séquentielle présentée dans [1].

Nous présentons ici les résultats obtenus par cette méthode dans le cadre de l'étude d'écoulements hydrodynamique à un nombre de Reynolds de  $10^5$  autour d'un profil symétrique NACA0015. Le premier est un cas expérimental 2d, le second est un cas simulé 3d.

## 1 Introduction

Les nouvelles possibilités offertes par la PIV résolue en temps (PIV-RT) et la tomo PIV permettent d'envisager l'obtention de la pression ou des efforts sur un profil placé dans l'écoulement comme une étape de post-traitement des données de vitesse. Plusieurs articles [2, 3], expliquent les principes de calculs de la pression et des efforts à partir des mesures non-intrusives. Le principe de base de ces approches est de combiner les données de vitesse mesurées (obtenue avec PIV) avec les équations gouvernant l'écoulement, de manière à calculer la pression locale. La mesure de la pression à partir de la PIV consiste essentiellement à évaluer le gradient de pression local à partir des données de vitesse mesurées en utilisant l'équation locale de Navier-Stokes.

Plusieurs approches nouvelles ont été développées et comparées pour estimer la pression à partir de mesure de vitesse résolue en temps à partir d'approches Eulériennes et Lagrangiennes. Des approches résolvant l'équation de Poisson [4, 5], utilisant l'hypothèse de Taylor [6, 7], ou s'appuyant sur des méthodes de type Vortex In Cells où on utilise le champ de tourbillons correspondant au champ des vitesses mesurées [8] sont comparées pour les approches Eulériennes. Pour les méthodes Lagrangiennes, la résolution de l'équation de Poisson dans l'espace de Fourier [9] les approches type Vortex In Cells et par tessellation de cellules de type Voronoi [10] semblent également prometteuses.

Nous présentons ici une méthode originale d'évaluation de la pression fondée sur une modélisation analytique des champs de vitesses par bases de polynômes orthogonaux.

L'organisation de cet article est le suivant. Dans un premier temps, nous présentons le modèle polynomial que nous utilisons ici pour modéliser les champs de vitesse PIV. Dans un second temps, nous décrivons la méthode d'estimation de la pression proposée pour des mesures PIV et tomo-PIV. Puis nous présentons des résultats obtenus par cette méthode dans le cadre de l'étude d'écoulements autour d'un NACA0015 sur un cas expérimental 2d et un cas simulé 3d. Finalement nous concluons et donnons quelques perspectives à ces travaux.

## 2 Modélisation de champs de vitesses PIV par bases de polynômes orthogonaux

### 2.1 Modélisation de champs de vitesses par base de polynômes orthogonaux

Dans cet article nous définissons les champs de vitesses de dimensions  $d$  à l'instant  $t$  comme des applications de  $(\vec{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^d \times T$  dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\vec{F}(\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d), t) = \left( V^1(x^1, x^2, \dots, x^d, t), V^2(x^1, x^2, \dots, x^d, t), \dots, V^d(x^1, x^2, \dots, x^d, t) \right)^T \quad (1)$$

Dans les cas particuliers des dimensions  $d = 2$  et  $d = 3$ , nous désignerons les champs de vitesses comme suit :  $\vec{F}(\vec{x}, t) = (U(x, y, t), V(x, y, t))^T$  et  $\vec{F}(\vec{x}, t) = (U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t))^T$ . L'approche que nous envisageons ici est de modéliser (approcher) les composantes du champ par une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux à  $d$  variables continues. Pour cela, nous définissons un polynôme quelconque à  $d$  variables de degré  $N$  par :

$$P(X^1, X^2, \dots, X^d) = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \in [0, N]^d \\ i_1 + \dots + i_d \leq N}} a_{i_1 i_2 \dots i_d} (X^1)^{i_1} (X^2)^{i_2} \dots (X^d)^{i_d}, \quad \forall (X^1, X^2, \dots, X^d) \in S \quad (2)$$

où les  $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$  sont les coefficients des monômes  $(X^1)^{i_1} (X^2)^{i_2} \dots (X^d)^{i_d}$ . Il faut noter que l'ensemble de définition  $\Omega$  du champ de vitesses est généralement différent de celui du polynôme  $S$ . Il convient alors d'effectuer un changement de variables pour passer d'un ensemble de définition à l'autre. Par convention, nous noterons par la suite  $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$  les coordonnées dans  $\Omega$  et par  $\vec{X} = (X^1, X^2, \dots, X^d)$  les coordonnées dans  $S$ . Approcher les composantes  $V^k$  d'un champ de vitesses revient dans ce cas à rechercher pour un nombre donné  $M$  de polynômes, l'ensemble des coefficients  $v^k$  tels que la combinaison linéaire de polynômes  $\vec{F}(\vec{X}, t)$  soit la meilleure approximation en norme  $L_2$  (i.e. au sens de l'énergie cinétique du champ de vitesse) d'une composante  $V^k(\vec{X}, t)$  :

$$\vec{F}(\vec{X}, t) = \vec{F}_M(\vec{X}, t) = \left( \sum_{m=1}^M v_m^1(t) P_m(\vec{X}), \sum_{m=1}^M v_m^2(t) P_m(\vec{X}), \dots, \sum_{m=1}^M v_m^d(t) P_m(\vec{X}) \right)^T \quad (3)$$

où  $P_m(\vec{X})$  est un polynôme à  $d$  variables continues d'un certain degré défini comme un produit de polynômes monodimensionnels de variables  $X^k$  différentes et  $M$  désigne le nombre de polynômes utilisés pour approcher le champ.

Pour une approximation linéaire, nous pouvons envisager les cas suivants :

1. considérer les  $M$  polynômes de degré total inférieur ou égal à un degré maximal  $N$  ;
2. considérer les  $M$  polynômes dont les degrés maximaux de chaque variable sont respectivement inférieurs ou égaux à  $N_{x^1}, N_{x^2}, \dots, N_{x^d}$  ;
3. considérer les  $M$  polynômes dont les degrés maximaux de chaque variable sont respectivement inférieurs ou égaux à  $N_{x^1}, N_{x^2}, \dots, N_{x^d}$  et dont le degré total est inférieur ou égal à un degré maximal  $N$ .

Dans les trois cas, un choix possible est d'ordonner les polynômes par ordre lexicographique des puissances  $i_1, i_2, \dots, i_d$  des monômes. Ainsi, dans le premier cas, l'approximation d'une composante peut s'écrire comme suit :

$$\hat{V}_N^k(\vec{X}, t) = V_M^k(\vec{X}, t) \simeq \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \in [0, N]^d \\ i_1 + \dots + i_d \leq N}} v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t) P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) \quad (4)$$

avec  $M = \frac{\prod_{k=1}^d (N+k)}{d!}$ . Dans le second cas, l'approximation d'une composante est donnée par :

$$\hat{V}_{N_{x^1}, \dots, N_{x^d}}^k(\vec{X}, t) = V_M^k(\vec{X}, t) \simeq \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \in [0, N_{x^1}] \times \dots \times [0, N_{x^d}] \\ i_1 \leq N_{x^1}, \dots, i_d \leq N_{x^d}}} v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t) P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) \quad (5)$$

avec  $M = \prod_{i=k}^d (N_{x^k} + 1)$ . Dans le troisième cas,

$$\hat{V}_{N_{x^1}, \dots, N_{x^d}}^k(\vec{X}, t) = V_M^k(\vec{X}, t) \simeq \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \in [0, N_{x^1}] \times \dots \times [0, N_{x^d}] \\ i_1 \leq N_{x^1}, \dots, i_d \leq N_{x^d} \\ i_1 + \dots + i_d \leq N}} v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t) P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) \quad (6)$$

avec  $M = \frac{\prod_{i=k}^d (N_{x^k} + 1)}{d!}$ .

Les deux derniers cas, nous permettrons d'approcher plus facilement des champs définis sur des domaines dont les dimensions suivant les axes sont sensiblement différentes. Si l'on suppose que l'ensemble des polynômes forme une base orthogonale au sens du produit scalaire associé à la famille de polynôme considérée, alors on peut montrer que les coefficients  $v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t)$ , appelés coefficients de projection, sont uniques et sont donnés par l'expression suivante :

$$v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t) = \frac{\langle V^k(\vec{X}), P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) \rangle_{\omega}}{\langle P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}), P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) \rangle_{\omega}} \quad (7)$$

où

$$\langle f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}) \rangle_{\omega} = \int_S f_1(\vec{X}) f_2(\vec{X}) w(\vec{X}) d\vec{X} \quad (8)$$

définit le produit scalaire associé à la norme  $L_2$  qui permet de définir la distance entre deux fonctions de l'espace et  $w(\vec{X})$  est une fonction de poids. De plus, nous avons le résultat de convergence suivant :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\| V_M^k(\vec{X}, t) - \hat{V}_M^k(\vec{X}, t) \right\|_{L_2} = 0 \quad (9)$$

Un choix particulier de la fonction de poids définit alors la famille de polynômes multivariés. Par référence aux noms donnés aux bases de polynômes orthogonaux à une variable : Legendre, Hermite, Laguerre, Tchebychev..., nous désignerons par le même nom leur extension à plusieurs variables par produit tensoriel<sup>1</sup>. Le choix de la famille de polynômes peut être fait en fonction du problème considéré. Ici, nous souhaitons modéliser des phénomènes non nécessairement périodiques sur un domaine rectangulaire fermé. Dans ce cas, les bases de Legendre ou Tchebychev sont bien indiquées. Nous avons choisi d'utiliser la famille des polynômes de Legendre dont la fonction de poids est la plus simple :  $w(\vec{X}) = 1$ . Elle est définie sur le domaine fermé  $S = [-1, 1]^d$ . Ce choix permet de donner la même importance à chacun des vecteurs vitesses du champ et d'accélérer les calculs de projection sur la base. Par ailleurs, si une modélisation globale du champ de vecteur s'avérait insuffisante et que l'on devait diviser le domaine  $\Omega$  en sous-domaines, l'utilisation d'une base de Legendre est beaucoup plus simple à gérer qu'une base de Tchebychev.

Supposons que la résolution des champs de vitesses que nous souhaitons étudier soit  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_d$ .

Le taux de compression des données effectué par une modélisation polynomiale est donné par la formule suivante :

$$\tau_{\%} = \left( 1 - \frac{d \times M}{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_d} \right) \quad (10)$$

À des degrés faibles,  $\tau_{\%}$  peut être très élevé. Bien que pour une norme euclidienne, il n'existe pas en moyenne de décomposition linéaire avec aussi peu de modes que la POD, il faut noter qu'il faut néanmoins conserver les modes de la POD qui ont la même résolution que le champ de vecteur initial pour reconstruire les champs. Par ailleurs, les modes de la POD doivent être calculés pour chaque écoulement à étudier. La décomposition polynomiale, elle, ne nécessite que le stockage des coefficients, de la résolution du champ et du type de polynôme utilisé. Les bases polynomiales peuvent donc être pré-calculées et seront les mêmes quel que soit l'écoulement à étudier. On peut trouver une comparaison détaillées de ces deux modèles dans la thèse de Martin Druon [11].

Le modèle polynomial précédent peut par conséquent être considéré comme un modèle réduit au même titre que la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Par conséquent, les coefficients de projection, le degré ou les degrés des polynômes de la base et la résolution du champ de vecteurs étudié caractérisent complètement le champ.

Les principales étapes d'une modélisation polynomiale sont les suivantes :

<sup>1</sup>cf. Théorème de Fubini.

1. Génération des  $M$  polynômes de la base orthogonale pour résolution  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_d$  de champ de vitesses donnée ;
2. Projection des champs de vecteurs à étudier sur cette base ;
3. Le modèle analytique obtenu peut être utilisé pour calculer aisément des opérateurs intégraux ou différentiels ou analyser le champ (le calcul du gradient de pression dans le présent article) ;
4. Reconstruction ou synthèse des champs de vecteurs approchés.

Il est à noter qu'en fonction de l'application visée, cette dernière étape n'est pas toujours nécessaire.

## 2.2 Application aux champs de vitesses obtenus par PIV

Les données PIV sont définies sur une grille discrète régulière dont les coordonnées sont définies par  $x^k(i) = x_{min}^k + i * \Delta x^k$ ,  $0 \leq i \leq S_k - 1$  avec  $\Delta x^k = \frac{x_{max}^k - x_{min}^k}{S_k - 1}$ . Or, les polynômes de Legendre sont définis sur  $[-1, 1]^d$ , il faut par conséquent faire un changement de variable pour passer du domaine de définition spatial du champ  $[x_{min}^1 - \frac{\Delta x^1}{2}, x_{max}^1 + \frac{\Delta x^1}{2}] \times \dots \times [x_{min}^d - \frac{\Delta x^d}{2}, x_{max}^d + \frac{\Delta x^d}{2}]$  au domaine d'approximation  $S = [-1, 1]^d$ .

Soit

$$X^k = \frac{2x - (x_{max}^k + x_{min}^k)}{x_{max}^k - x_{min}^k + \Delta x^k} \quad (11)$$

La base de polynômes peut être générée par plusieurs méthodes : 1) par orthogonalisation de la base canonique par un algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en utilisant le produit scalaire associé à la base choisie ; 2) par la méthode des moments ; 3) par la formule de récurrence à trois termes ; 4) par la lecture dans un fichier des coefficients de polynômes pré-calculés par la formule de Rodrigues à l'aide de logiciels de calcul formel. Ici, nous avons choisi la dernière méthode afin de limiter l'accumulation des erreurs de calcul dans la formule de récurrence et d'accélérer la génération de la base. Pour projeter les champs de vecteurs, il faut calculer le terme suivant :

$$v_{i_1, i_2, \dots, i_d}^k(t) = \frac{\int_S V^k(\vec{X}) P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) d\vec{X}}{\int_S P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) P_{i_1, i_2, \dots, i_d}(\vec{X}) d\vec{X}} \quad (12)$$

Le dénominateur peut être calculé analytiquement, par contre, le numérateur doit être calculé par une méthode d'intégration numérique car nous ne connaissons pas la fonction du champ PIV. Nous avons utilisé pour cela la méthode d'intégration exacte proposée dans [12] qui permet de limiter les erreurs de calcul numérique. Les polynômes modélisant les champs sont alors donnés par les formules (4) ou (5) ou (6). Comme nous avons une expression analytique des champs, il nous suffit de réévaluer les polynômes sur la grille PIV pour reconstruire les champs ou l'opérateur différentiel ou intégral du champ approchés.

Il est à noter qu'au delà d'un certain degré, les polynômes continus de Legendre ne sont plus orthogonaux sur une grille régulière. Dans ce cas, si l'on calcule les coefficients de projection avec l'équation (12), les équations (4) et (5) et (6) ne permettront pas de reconstruire correctement les champs. Par ailleurs, les transitions abruptes dans le champ telles que les bords du domaine ou la frontière entre le champ et un objet présent au sein du champ peuvent faire apparaître des oscillations parasites dont la fréquence sera d'autant plus élevée que le degré du polynôme l'est (phénomène de Gibbs).

La figure FIG. 1 montre un exemple d'approximation d'un champ de vecteurs de résolution  $S_1 \times S_2 = 233 \times 117$  pour les degrés maximaux  $N 20$  et  $25$ . Dans ce cas, nous pouvons constater qu'à partir du degré 25, les principales structures semblent bien représentées avec seulement 702 réels contre les 54522 réels du champ original. Par ailleurs, comme nous avons une approximation globale, nous constatons que des vecteurs vitesses sont aussi reconstruits à l'intérieur des objets. Une extension de ré-orthogonalisation de la base de polynômes a été proposée dans [13] afin de tenir compte de ces objets.

Nous rappelons ici les principaux avantages à utiliser une base polynomiale : il faut peu de coefficients pour modéliser un champ de vecteurs, le calcul des coefficients de projection est rapide et peut être facilement parallélisé, nous disposons d'un modèle analytique qui permet de calculer facilement et rapidement des opérateurs différentiels et intégraux et de faire de l'interpolation. De plus, à faible degré, il est de plus possible de donner une interprétation physique aux coefficients de projection et de détecter des structures cohérentes [11, 13].

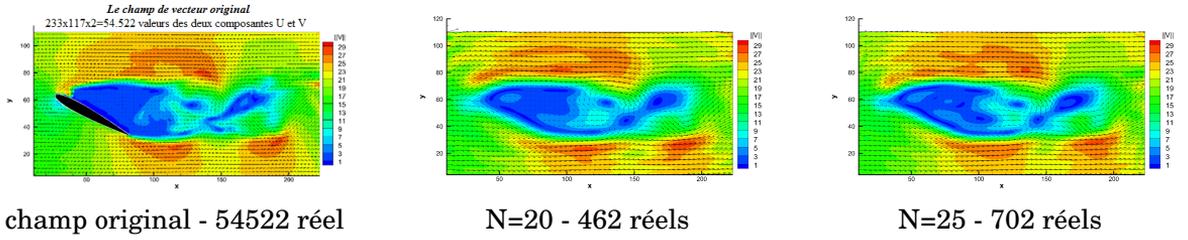


Figure 1: Exemple d'approximation d'un champ de vitesses de résolution  $233 \times 117$  pour les degrés 20 et 25 et le nombre de coefficients réels correspondant.

### 3 Mesure de la pression par base de polynômes et reconstruction par moindres carrés séquentielle

Notre approche consiste à substituer l'approximation polynomiale  $\vec{\mathcal{F}}(\vec{X}, t)$  à  $\vec{F}$  dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\vec{\nabla} p(x, y, z, t) = -\rho \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial t} + (\nabla \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{F}}) - \nu \Delta \vec{\mathcal{F}} - \vec{g} \right) \quad (13)$$

afin d'obtenir une représentation polynomiale du champ de gradient de pression  $\vec{\nabla} \hat{p}$ .

Nous avons les relations de dérivation en chaîne suivantes :  $\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x^k} = \frac{\partial f}{\partial X^k} \frac{\partial X^k}{\partial x^k}$  soit

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x^k} = \frac{2}{x_{max}^k - x_{min}^k + \Delta x^k} \frac{\partial f}{\partial X^k} = \frac{2}{L^k} \frac{\partial f}{\partial X^k}, \quad 1 \leq k \leq d \quad (14)$$

où  $L^k$  est la longueur (à  $\Delta x^k$  près) de  $\Omega$  suivant l'axe  $k$ . Nous avons alors l'équation de Navier-Stokes approchée suivante :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x^k} = -\rho \left( \frac{\partial \hat{V}^k}{\partial t} + \vec{\mathcal{F}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{\nabla} \hat{V}^k - \nu \Delta \hat{V}^k - g_x \right), \quad 1 \leq k \leq d \quad (15)$$

Si l'on approche les dérivées temporelles par une différence finie centrée d'ordre 2 :

$$\frac{\partial \hat{V}^k(X, Y, Z, t)}{\partial t} = \frac{\hat{V}^k(X, Y, Z, t+1) - \hat{V}^k(X, Y, Z, t-1)}{2\Delta_t}, \quad 1 \leq k \leq d \quad (16)$$

et que l'on note  $L^1 = W$ ,  $L^2 = H$  et  $L^3 = D$ , alors après calcul, le gradient de pression polynomial 3d dans le domaine  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial X} = & -\rho \frac{W}{2} \left[ \frac{1}{2\Delta_t} (\hat{U}(X, Y, Z, t+1) - \hat{U}(X, Y, Z, t-1)) \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{W} \hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial X} + \frac{2}{H} \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial Y} + \frac{2}{D} \hat{W} \frac{\partial \hat{U}}{\partial Z} \right) - \nu \left( \frac{4}{W^2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial X^2} + \frac{4}{H^2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial Y^2} + \frac{4}{D^2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial Z^2} \right) - g_x \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} = & -\rho \frac{H}{2} \left[ \frac{1}{2\Delta_t} (\hat{V}(X, Y, Z, t+1) - \hat{V}(X, Y, Z, t-1)) \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{W} \hat{U} \frac{\partial \hat{V}}{\partial X} + \frac{2}{H} \hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial Y} + \frac{2}{D} \hat{W} \frac{\partial \hat{V}}{\partial Z} \right) - \nu \left( \frac{4}{W^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial X^2} + \frac{4}{H^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial Y^2} + \frac{4}{D^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial Z^2} \right) - g_y \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial Z} = & -\rho \frac{D}{2} \left[ \frac{1}{2\Delta_t} (\hat{W}(X, Y, Z, t+1) - \hat{W}(X, Y, Z, t-1)) \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{W} \hat{U} \frac{\partial \hat{W}}{\partial X} + \frac{2}{H} \hat{V} \frac{\partial \hat{W}}{\partial Y} + \frac{2}{D} \hat{W} \frac{\partial \hat{W}}{\partial Z} \right) - \nu \left( \frac{4}{W^2} \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial X^2} + \frac{4}{H^2} \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial Y^2} + \frac{4}{D^2} \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial Z^2} \right) - g_z \right] \end{aligned} \quad (19)$$

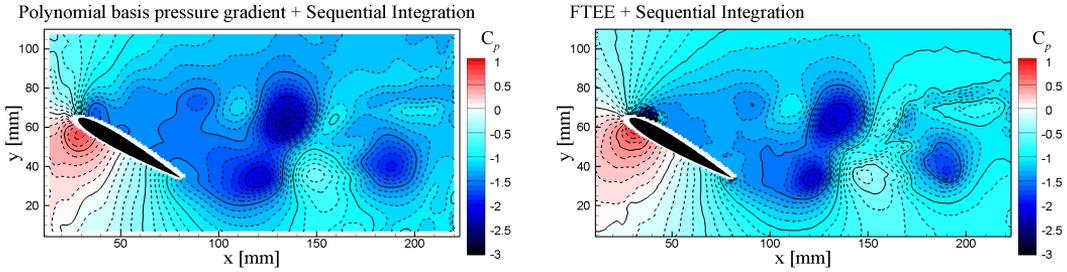


Figure 2: À gauche et à droite, des exemples de champs de pression instantanée calculés respectivement avec la méthode polynomiale de degré 25 et la méthode FTEE [5].

Le gradient de pression 2d se déduisent facilement en simplifiant les équations précédentes.

Pour obtenir le champ de pression, il pourrait être tentant d'intégrer directement les polynômes obtenus. Mais malheureusement dans les différents tests que nous avons effectués, cette approche, sans doute trop globale, ne donne pas de résultats satisfaisants. C'est pourquoi, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'intégration développée au par Jeon *et al.* [5]. Celle-ci intègre séquentiellement le champ de gradient de pression des zones les plus fiables (écoulement extérieur et éloigné du profil) au moins fiables (proche du profil, bords d'attaque). Elle est ainsi plus robuste lors de l'étude de cas expérimentaux.

## 4 Résultats

### 4.1 Analyse d'un écoulement 2d

Nous avons utilisé cette méthode pour étudier un écoulement à un nombre de Reynolds de  $10^5$  autour d'un profil symétrique NACA0015 réalisé en résine araldite, peint en noir, de corde  $80\text{ mm}$  et d'envergure  $228\text{ mm}$  monté dans un tunnel hydrodynamique fonctionnant en boucle fermée de section carrée. La mesure est effectuée dans une zone de  $0,23 \times 0,23 \times 0,7\text{ m}^3$ . L'écoulement a étéensemencé par des particules polyamides de diamètre moyen  $15\text{ }\mu\text{m}$ , éclairé par des lasers Terra PIV 527-100-M et Darwin-527-30-MM-PIV et filmé par deux caméras Photron FASTCAM SA1.1 munis de deux objectifs TOKINA Macro  $100\text{ mm}$  d'ouverture f5.6. Les séquences d'images ont été enregistrées par les deux caméras fonctionnant en tandem à une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels et à une fréquence de  $2\text{ kHz}$ .

Afin d'évaluer l'intérêt de la méthode, nous comparons nos résultats à ceux obtenus par la méthode bien établie de Jeon *et al.* [5]. Nous pouvons voir sur la figure FIG. 2 un exemple de comparaison des champs de pression instantanée obtenus par les deux méthodes. L'approximation utilisée ici est celle décrite en équation (4) avec un degré  $N = 25$ . Malgré la présence du profil dans le champ, nous constatons que les champs de pression sont similaires et présentent les mêmes structures cohérentes.

### 4.2 Analyse d'un écoulement 3d synthétique

Les données de vitesses sont extraites à partir d'une simulation réalisée par Improved Delayed Detached Eddy Simulation (IDDES) dans le cadre du projet ANR ASTRID EVAPOR. L'écoulement autour d'un profil NACA0015 de  $80\text{ mm}$  de corde et  $140\text{ mm}$  d'envergure est considéré. Ce profil est placé à  $30$  degré d'incidence dans une veine de  $230\text{ mm} \times 230\text{ mm}$  de section. L'origine du repère est située au quart de corde du profil à l'emplanture. L'axe  $x$  est l'axe de l'écoulement, l'axe  $y$  pointe vers le haut et l'axe  $z$  vers le saumon. Les trois axes forment un repère orthonormé. La vitesse d'écoulement d'entrée est fixée à  $U_\infty = 1,25\text{ m/s}$ , donnant un nombre de Reynolds basé sur la corde de  $Rec = 100000$ . Les données numérique sont extraites sur une grille cartésienne de type PIV avec un pas de  $1\text{ mm}$  et échantillonnées à  $4000\text{ Hz}$ . Une représentation de l'écoulement est fournie en figure FIG. 3. Les résultats préliminaires d'estimation de la pression que nous présentons en figure FIG. 4 ont été calculés à partir du volume 3 de la figure FIG.3. La résolution des champs de vitesses de cette région est de  $S_x \times S_y \times S_z = 76 \times 76 \times 11$ . Si l'on choisit l'approximation décrite en équation (4), le nombre d'échantillons suivant l'axe  $z$

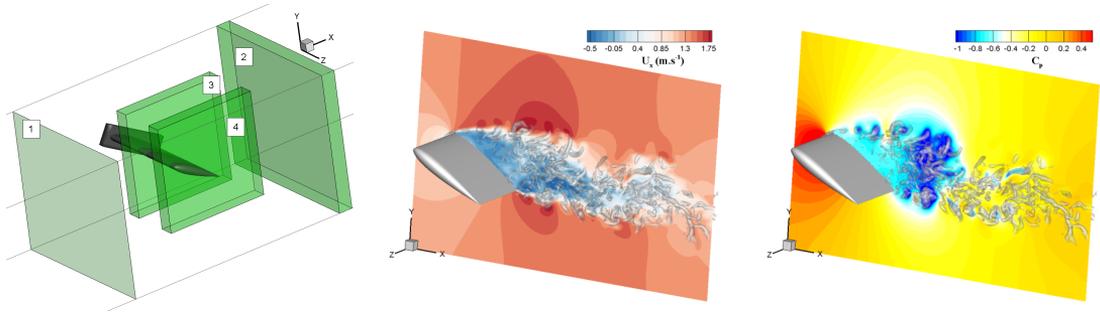


Figure 3: Visualisation de l'écoulement : Volumes utilisés (en vert) pour construire la base de données (à gauche), Streamwise velocity (au milieu) et coefficient de pression (à droite). Les Iso-surfaces correspondent à une valeur constante du critère  $\lambda_2$  ( $=5000$ ).

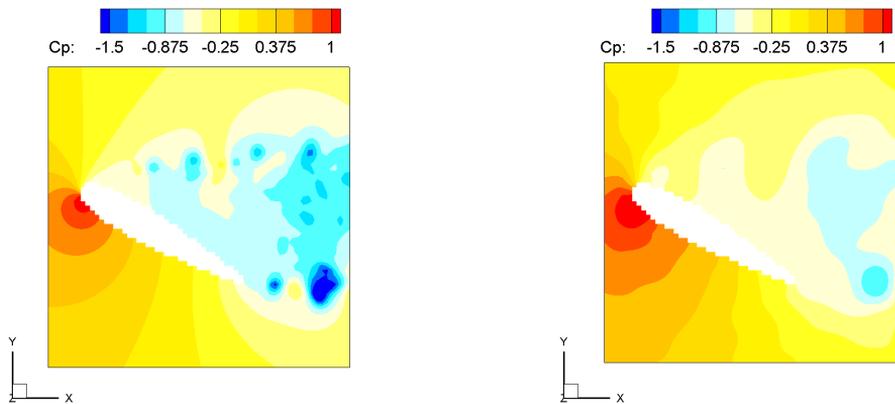


Figure 4: Exemple de résultat d'estimation de la pression 3d sur un écoulement simulé. À gauche, le champ de pression numérique, à droite, le champ de pression estimé.

nous empêche de monter au delà du degré  $N = 10$ . Ce degré est trop faible pour pouvoir représenter correctement les principales structures présentes dans le champ. C'est pourquoi, nous avons choisi d'utiliser l'approximation décrite en équation (6) qui nous permet de découpler les degrés maximaux suivant les axes. Au delà d'un certain degré suivant les axes  $x$  et  $y$ , bien que les champs de vitesses soient bien approchés ( $EQM \simeq 0,13$ ), le terme de convection résultant de la multiplication de 2 polynômes augmente le degré maximal du polynôme résultant et fait apparaître des oscillations parasites dans les 8 coins du volume. C'est pourquoi, nous ne présentons en figure FIG. 4 que les résultats obtenus avec les degrés  $N_x = 15, N_y = 15, N_z = 2$  et un degré maximal  $N = 15$ . Sur cette figure, nous pouvons constater que les principales grosses structures sont bien estimées. Néanmoins, les degrés en  $x$  et  $y$  sont trop faibles pour pouvoir révéler les petites structures. Une approche par décomposition de domaine serait sans doute plus adaptée pour étudier un tel cas.

## 5 Conclusion

Dans cet article nous avons présenté une méthode d'estimation de la pression dans un écoulement à partir des mesures optiques TR-PIV et TR-TOMOPIV fondée sur une modélisation globale des champs

de vitesses par bases de polynômes orthogonaux de Legendre. Cette méthode a l'avantage de fournir une représentation analytique des champs qui permet de calculer très rapidement les champs de gradient de pression. Comme c'est une méthode d'approximation elle permet de lisser le bruit. Néanmoins, à trop faibles degrés elle ne permet pas de modéliser les plus petites structures. Il faut par conséquent adapter les degrés maximaux de la base au cas d'étude. Afin de pouvoir étudier des écoulements plus turbulents, nous envisageons à l'avenir de développer une méthode d'approximation polynomiale par décomposition de domaine. Nous espérons, que cette approche nous permettra par ailleurs d'envisager d'utiliser aussi la méthode polynomiale pour l'intégration du gradient de pression et ainsi d'avoir une méthode d'estimation de la pression entièrement analytique.

## 6 Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier Guillaume GOMIT pour son implantation de la méthode Jeon [5] et l'Agence Nationale pour la Recherche et la DGA pour leur soutien financier au travers du projet ANR-16-ASTR-0005-01, ainsi que le CPER-FEDER de la Région Nouvelle Aquitaine.

## References

- [1] Young Jin Jeon, G. Gomit, T. Earl, L. Chatellier, and L. David. Sequential least-square reconstruction of instantaneous pressure field around a body from TR-PIV. *Experiments in Fluids*, 59(2):27, February 2018.
- [2] B. W. van Oudheusden. PIV-based pressure measurement. *Measurement Science and Technology*, 24(3):032001, March 2013.
- [3] L. David, T. Jardin, and A. Farcy. On the non-intrusive evaluation of fluid forces with the momentum equation approach. *Measurement Science and Technology*, 20(9):095401, 2009.
- [4] R. de Kat and B. W. van Oudheusden. Instantaneous planar pressure determination from PIV in turbulent flow. *Experiments in Fluids*, 52(5):1089–1106, May 2012.
- [5] Young Jin Jeon, Ludovic Chatellier, Anthony Beaudoin, and Laurent David. Least-square reconstruction of instantaneous pressure field around a body based on a directly acquired material acceleration in time-resolved PIV. In *ResearchGate*, Santa Barbara, USA, September 2015.
- [6] R. de Kat and B. Ganapathisubramani. Pressure from particle image velocimetry for convective flows: a Taylor's hypothesis approach. *Measurement Science and Technology*, 24(2):024002, 2013.
- [7] Angeliki Laskari, R. de Kat, and B. Ganapathisubramani. Full-field pressure from 3d PIV snapshots in convective turbulent flow. Lisbon, Portugal, 2014.
- [8] J. F. G. Schneiders, K. Lynch, R. P. Dwight, B. W. van Oudheusden, and F. Scarano. Instantaneous Pressure from Single Snapshot Tomographic PIV by Vortex-in-Cell. In *17th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, Lisbon, 2014.
- [9] Cheng Yue Wang, Qi Gao, Run Jie Wei, Tian Li, and Jin Jun Wang. Spectral decomposition-based fast pressure integration algorithm. *Experiments in Fluids*, 58(7):84, July 2017.
- [10] Nathan J. Neeteson and David E. Rival. Pressure-field extraction on unstructured flow data using a Voronoi tessellation-based networking algorithm: a proof-of-principle study. *Experiments in Fluids*, 56(2):44, February 2015.
- [11] Martin Druon. *Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides*. PhD thesis, Poitiers, February 2009.
- [12] Khalid M. Hosny. Exact Legendre moment computation for gray level images. *Pattern Recognition*, 40(12):3597–3605, December 2007.
- [13] Olivier Kihl. *Modélisations polynomiales hiérarchisées applications à l'analyse de mouvements complexes*. PhD thesis, Poitiers, February 2012.