



HAL
open science

Calcul d'un champ de pression 3D par méthode d'intégrale aux frontières à partir d'un champ de vitesse 3D obtenu numériquement ou expérimentalement.

Arthur Dartois, Anthony Beaudoin, Serge Huberson

► To cite this version:

Arthur Dartois, Anthony Beaudoin, Serge Huberson. Calcul d'un champ de pression 3D par méthode d'intégrale aux frontières à partir d'un champ de vitesse 3D obtenu numériquement ou expérimentalement.. 16ème Congrès Francophone de Techniques Laser pour la mécanique des fluides, CNRS, CentraleSupélec, Université Paris Saclay, IRSN, Sep 2018, Dourdan, France. hal-02097660

HAL Id: hal-02097660

<https://hal.science/hal-02097660>

Submitted on 12 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul d'un champ de pression 3D par méthode d'intégrale aux frontières à partir d'un champ de vitesse 3D obtenu numériquement ou expérimentalement.

Arthur DARTOIS¹, Anthony BEAUDOIN¹, Serge HUBERSON¹

¹Institut P', CNRS, Boulevard Marie et Pierre Curie, Futuroscope 86962, France.

Email auteur correspondant : anthony.beaudoin@univ-poitiers.fr

Le code BIM (*Boundary Integral Method*), permettant de reconstruire des champs de pression P à partir de champs de vitesse u en utilisant une méthode intégrale aux frontières, est présenté. Les champs de vitesse u pourront être expérimentaux ou numériques. Le cas test du tourbillon de Lamb-Oseen a donné des résultats prometteurs. Le basculement sur un écoulement Naca a montré une sensibilité à l'estimation du terme $div(w \wedge u)$. Des premières corrections sont proposées pour réduire ce défaut.

1 Introduction

Dans un contexte de développement durable, la réduction d'émission de CO_2 par le transport aérien passe par la réduction de la consommation de carburant des avions. Cet objectif peut être atteint en réduisant le coefficient de traînée des ailes d'avion par une optimisation de forme. Cela passe nécessairement par la reconstruction d'un champ de pression P à partir de vitesses u mesurées expérimentalement autour de profils d'aile d'avion. C'est dans ce cadre que s'inscrit le projet ANR EVAPOR qui a pour objectif de construire une base de données puis de développer et comparer plusieurs méthodes de reconstruction de champ de pression et d'évaluation des efforts.

Dans ce travail, nous présentons un code de reconstruction de champ de pression à partir de champ de vitesse, se basant sur la méthode d'intégrale aux frontières [1] [2], qui fait partie des méthodes proposées dans l'ANR EVAPOR. La méthode intégrale aux frontières a été choisie car elle permet de ramener la résolution du champ de pression sur les frontières du domaine en résolvant un problème de Poisson. Cela entraîne une réduction du système linéaire devant être résolu pour accéder à la pression. Dans de nombreuses méthodes la taille du système d'équations à résoudre dépend du nombre total de mailles du domaine. Dans le cas de la méthode intégrale aux frontières, ce nombre repose sur le nombre de mailles sur les frontières du domaine. Par exemple, pour un maillage cubique cartésien de $100 \times 100 \times 100$ mailles, le système linéaire classique aura 10^6 inconnues. Dans le cas de la méthode intégrale aux frontières, le système linéaire aura environ 60000 inconnues. Si une résolution directe du système linéaire est utilisée, la méthode intégrale aux frontières offre ainsi un net gain de temps cpu.

Nous commencerons d'abord par rappeler la formulation mathématique de la méthode d'intégrale aux frontières ainsi que la théorie derrière celle-ci (section 2). Puis les résultats d'un cas test reposant sur un tourbillon de Lamb-Oseen seront présentés (section 3). Nous décrirons ensuite le passage à un écoulement turbulent autour d'un profil naca, les problèmes que cela a occasionnés et les corrections pour les résoudre. Enfin nous montrerons les résultats actuels obtenus à partir de la base de données EVAPOR (section 4). Finalement nous concluons sur l'utilisation de la méthode intégrale aux frontières pour la reconstruction du champ de pression et nous proposerons plusieurs perspectives et améliorations possibles du code BIM .

2 Théorie

2.1 Problème de Poisson

La forme enthalpique de l'équation de Navier-Stokes [5] pour un fluide incompressible est utilisée :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - S = -\nabla h \quad \text{avec} \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} \quad \text{et} \quad h = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2. \quad (1)$$

\mathbf{u} est le vecteur vitesse, \mathbf{w} la vorticité, h l'enthalpie, ρ la masse volumique constante du fluide, η la viscosité dynamique, S un terme source, ∇ l'opérateur gradient vectoriel et Δ le laplacien vectoriel. Dans la suite, la gravité sera négligée ce qui impliquera que le terme source S soit nul.

En utilisant la condition d'incompressibilité et en appliquant la divergence à l'équation (1), nous obtenons :

$$\Delta h = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = -f \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (2)$$

Conjuguée avec une condition aux limites, l'équation (2) devient un problème de Poisson dont la solution est connue et unique [6]. Nous avons choisi d'utiliser une condition de Neuman, impliquant que le flux soit connu sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω :

$$-\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \right) = \nabla h \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (3)$$

où \mathbf{n} est une normale à la surface de $\partial\Omega$ orientée vers le fluide. De part sa définition, ce problème a une solution à une constante près.

2.2 Méthode d'intégrale aux frontières

Le problème de Poisson peut être mis sous forme intégral [7], qui est ensuite résolu par une méthode hybride intégral-différentielle [1]. Cette méthode hybride est une extension de la formulation purement intégrale de [8]. Nous nous retrouvons alors avec une équation de Fredholm du second type qui est solution du problème de Poisson :

$$kh(X) = - \int_{\partial\Omega} h(Y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(X, Y) ds + \int_{\partial\Omega} G(X, Y) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(Y) ds + \int_{\Omega} f(Y) G(X, Y) dv, \quad (4)$$

$$\text{avec } k = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \Omega, \\ 1/2 & \text{si } X \in \partial\Omega, \\ 0 & \text{si } X \notin \Omega \end{cases}$$

avec X et Y deux points de Ω et G la fonction de Green. Pour le Laplacien 3D, G est définie par :

$$G(X, Y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|X - Y|}, \quad (5)$$

avec $|X - Y|$ la distance euclidienne entre deux points de Ω .

L'équation (5) permet de calculer la valeur de h en tout point $X \in \Omega$ si les valeurs de h et $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$ sur la frontière $\partial\Omega$ et les valeurs de f dans Ω sont connues. Or dans le cas qui nous intéresse, $f = \text{div}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$ est connu dans tout le domaine Ω et $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$ est connue sur $\partial\Omega$ grâce à la condition de Neuman définie par l'équation (3). Les valeurs de h sur $\partial\Omega$ sont déterminées en posant l'équation [2] :

$$\frac{1}{2}h(X) + \int_{\partial\Omega} h(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Omega} f(Y) G(X, Y) dv + \int_{\partial\Omega} g(Y) G(X, Y) ds. \quad (6)$$

Cette équation peut se mettre sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \mathbf{n}} ds \\ & \dots & \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \mathbf{n}} ds & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} h \end{bmatrix}}_H = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} f(Y)G(X,Y)dv \\ + \\ \int_{\partial\Omega} g(Y)G(X,Y)ds \end{bmatrix}}_T. \quad (7)$$

Le système linéaire résultant $MH = T$ est résolu en utilisant une décomposition LU présente dans la bibliothèque Slip [9]. Le second membre T de ce système peut être séparé en deux termes : l'un volumique $T1$ et l'autre de flux $T2$. Ces derniers sont définis par :

$$T1(X) = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})(Y)G(X,Y)dv \quad \text{et} \quad T2(X) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(Y)G(X,Y)ds. \quad (8)$$

Lorsque l'enthalpie h est connue sur les frontières $\partial\Omega$, nous sommes capables de reconstruire l'enthalpie dans tout le domaine Ω avec l'équation (5) en prenant $k = 1$. Il ne reste plus qu'à reconvertir l'enthalpie h en pression p en tout point $X \in \Omega$ à partir de l'équation (1).

3 Cas test : tourbillon de Lamb-Oseen

L'implémentation du code BIM a été testée sur un écoulement de Lamb-Oseen. Ce choix nous permet d'avoir un écoulement à divergence nulle et des expressions analytiques de la vitesse \mathbf{u} , de la vorticité \mathbf{w} et de la pression P , permettant par la suite de réaliser une étude de sensibilité. Deux configurations différentes du tourbillon seront mises en place. Dans la première, le tourbillon sera vertical ce qui impliquera un écoulement constant selon l'axe z . La deuxième configuration comportera un tourbillon incliné à 45° selon l'axe y . Cette disposition en diagonale nous permettra de vérifier le comportement du maillage cartésien en cas de vitesses inclinées.

3.1 Équations principales:

L'écoulement généré par un tourbillon de Lamb-Oseen orienté selon l'axe z est régi par les équations suivantes [10] :

$$u_\theta(r) = \frac{1}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_c^2}\right) \right] \quad \text{et} \quad P(r) = -\frac{1}{8\pi^2 r_c^2} \left[\frac{(1 - \exp(-\eta))}{\eta} + 2E_{int}(\eta) - 2E_{int}(2\eta) \right] \quad (9)$$

avec $r_c = \sqrt{r_0^2 + 4\nu t}$, $\eta = \frac{r^2}{r_c^2}$, r le rayon, u_θ la vitesse azimutale, w_z la composante verticale de la vorticité, P la pression, ν la viscosité cinématique, $r_0^2 = 5$ le rayon du tourbillon, t un temps > 0 s et E_{int} l'intégrale exponentielle qui sera approximée en utilisant la formule de Swamee et Ohja [11] dont l'expression est :

$$E_{int}(x) = (A^{-7,7} + B)^{-0,13} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \ln \left[\left(\frac{0,56146}{x} + 0,65 \right) (1+x) \right] \\ B = x^4 e^{7,7x} (2+x)^{3,7} \end{cases}. \quad (10)$$

Les paramètres utilisés sont $t = 2$ s, $r_c = 5$ m, des pas d'espace $d_x = d_y = d_z = 0,25$ m et un nombre de mailles $n_x = n_y = n_z = 40$. Le maillage a été construit de sorte à ce que la singularité apparaissant à $r = 0$ m se trouve au centre d'une maille. Nous utiliserons l'erreur relative de norme L1 moyennée pour apprécier la précision du code BIM :

$$\left| \frac{\Delta P}{P_a} \right| = \sum_{p=0}^{Nb_m} \left| \frac{P_{ana} - P_{num}}{P_{ana}} \right| \times \frac{1}{Nb_m} \quad (11)$$

avec Nb_m le nombre de mailles.

3.2 Résultats

La figure 1 présente les champs de pression analytiques et numériques calculés à partir de la méthode intégrale dans les deux configurations d'écoulement avec une grille $n_x = n_y = n_z = 40$, et donc un nombre de mailles égal à $Nb_m = 64000$. Lorsque le tourbillon est parallèle à l'axe z le champ de pression est mieux défini. Dans le cas vertical comme dans celui incliné, le champ de pression montre quelques erreurs à proximité des frontières externes. Malgré cela, l'inclinaison du tourbillon ne perturbe que faiblement la reconstruction du champ de pression et seulement dans les coins du domaine traversé par l'axe du tourbillon.

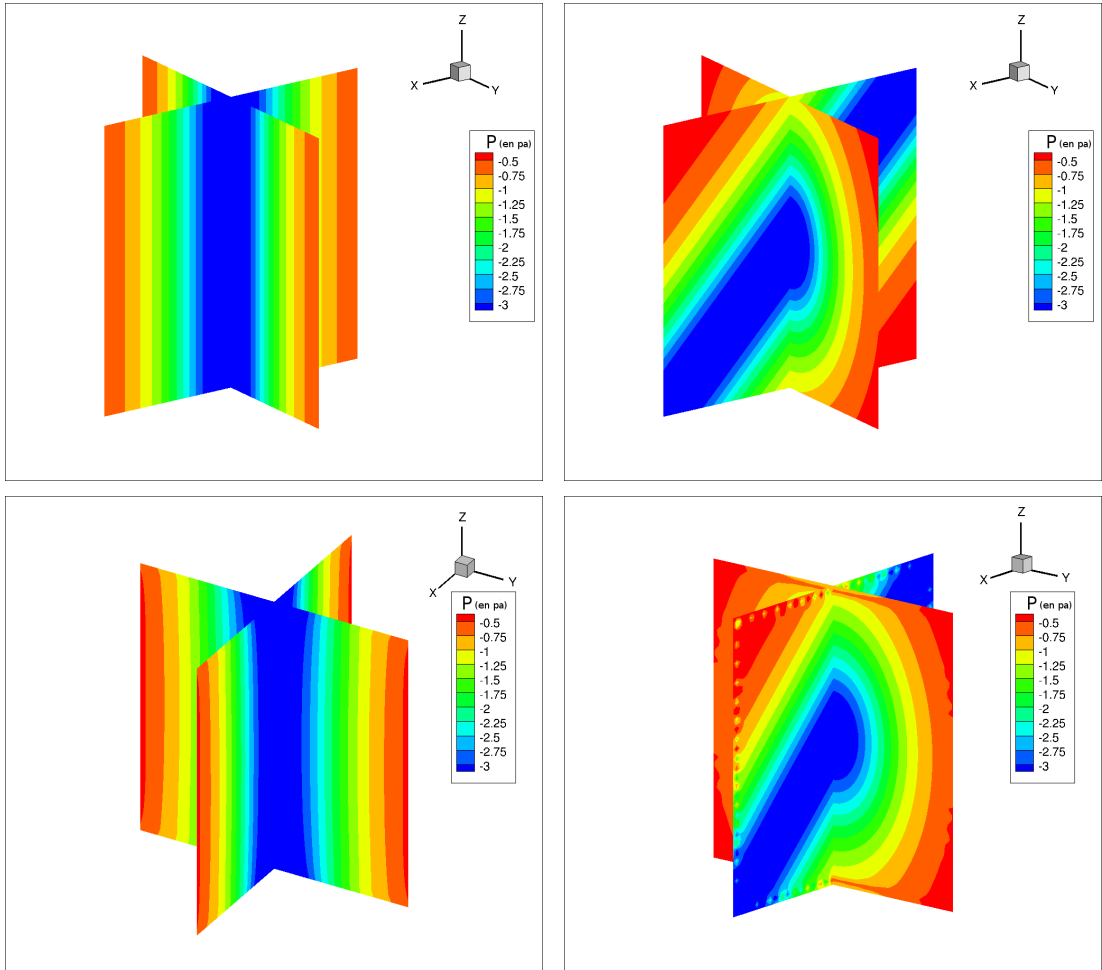


Figure 1: Champs analytiques (haut) et numériques (bas) de pression P pour un tourbillon de Lamb-Oseen vertical (gauche) et incliné avec $\alpha = 45^\circ$ (droite).

La figure 2 montre l'erreur relative de norme L1 moyennée $|\Delta P/P_a|$ en fonction de la discrétisation du domaine n_x . Dans le cas du tourbillon parallèle à l'axe z , la discrétisation du maillage permet une convergence classique sur l'erreur $|\Delta P/P_a|$. Pour une discrétisation $n_x = 80$, la convergence semble établie avec une erreur de 5%. Par contre dans le cas du tourbillon incliné avec $\alpha = 45^\circ$, ce comportement classique est perdu. L'erreur de calcul $|\Delta P/P_a|$ est de l'ordre de 8% quelque soit la valeur de n_x . Cette différence de comportement entre les deux configurations peut facilement s'expliquer par les différences finies utilisées dans la méthode intégrale qui servent à calculer des dérivés d'ordre 1 et 2. En effet, dans le cas d'un maillage cartésien et un écoulement incliné par rapport à ce maillage, les différences finies fournissent des résultats de moins bonne qualité.

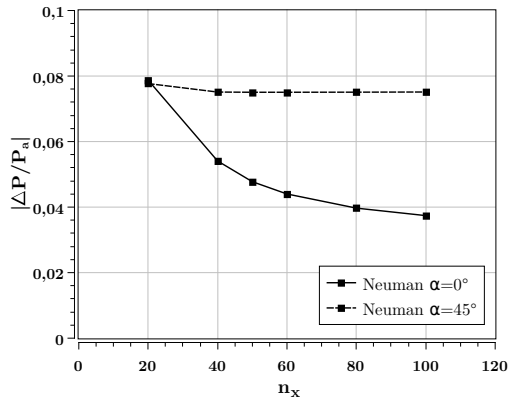


Figure 2: Erreur relative de norme L1 moyennée de la pression P en fonction de la taille du maillage $n_x = n_y = n_z$ pour des conditions de Neuman, avec un tourbillon de Lamb-Oseen vertical et incliné.

4 Écoulement autour d'un Naca

4.1 Premiers résultats

Les champs de vitesse proviennent d'un écoulement autour d'un profil NACA0015 de 80mm de corde et 140mm d'envergure, simulé numériquement par Improved Delayed Detached Eddy Simulation (IDDES) et utilisé dans [12]. Le profil a un angle d'incidence de 30° et la vitesse d'écoulement d'entrée est fixée à $u_\infty = 1,25 \text{ m/s}$, donnant un Reynolds à la corde égal à $Re = 100000$.

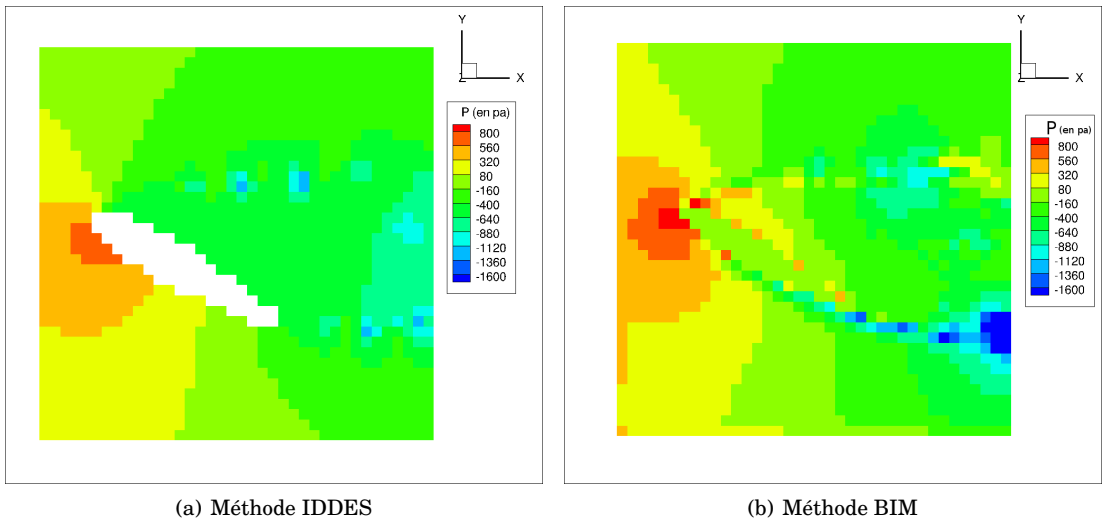


Figure 3: Champs de pression P obtenus par méthode IDDES hautement résolu (a) et par méthode BIM avec un champ de vitesse faiblement résolu (b).

La figure 4 représente le champ de pression autour du Naca, obtenu par IDDES 3(a) et par le code BIM 3(b). Dans le cas de la méthode intégrale aux frontières, le champ de vitesse a été dégradé pour se mettre dans des conditions plus proches de l'expérimental. Seul un point sur quatre est conservé. Le résultat d'IDDES constitue la valeur de référence. Nous pouvons voir que dans le cas du code BIM, une sur-pression anormale sur l'extrados apparaît provoquant un décalage du point d'arrêt. Le sillage

présente également des anomalies avec de fortes zones de sur et sous-pression. Ces problèmes de pression viennent du calcul du terme volumique $T1$ de l'équation (8).

4.2 Champ régularisé

Pour estomper les erreurs d'estimation du terme volumique $T1$, le champ de vitesse a subi une régularisation d'Helmholtz et temporelle tirée de [4]. Des corrections ont été appliquées aux valeurs de $T1$ sur les mailles proches du Naca. En constatant que les contributions à la pression P de l'enthalpie h et de l'énergie cinétique u^2 varient fortement selon les zones de l'écoulement 4(a), nous avons ajouté une correction globale de l'enthalpie h .

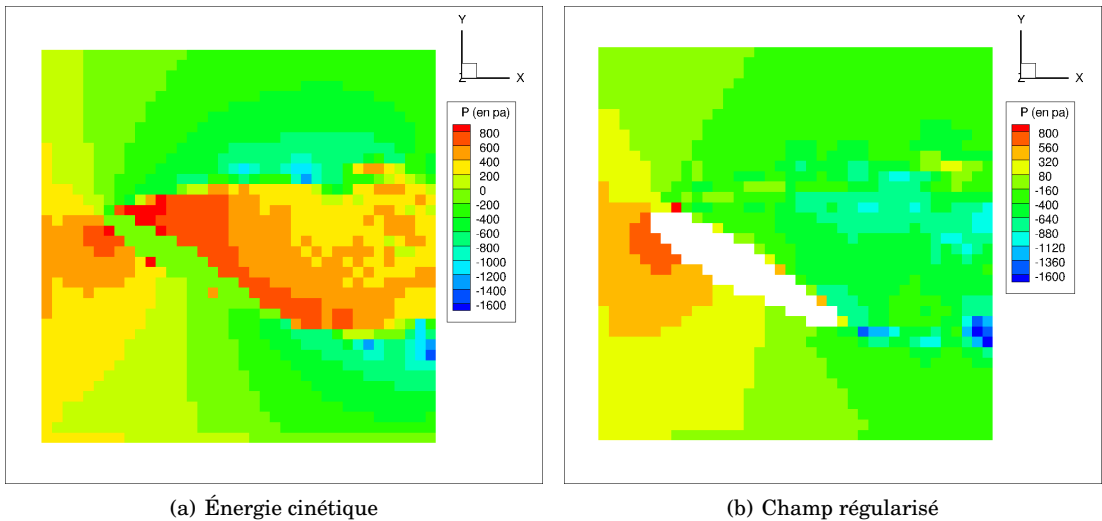


Figure 4: Champs numériques de pression P obtenus avec seulement la contribution de l'énergie cinétique u^2 (a), et avec la méthode BIM sur un champ de vitesse régularisé (b).

La figure 4(b) représente le champ de pression par la méthode BIM avec les trois corrections décrites précédemment. La sur-pression présente sur l'extrados de la figure 3(b) a complètement disparue. De même pour le décalage du point d'arrêt. Les zones de sur et sous pression présentes dans le sillage ont également été réduite.

4.3 Coefficient de Pression Cp

Afin d'examiner l'écart entre le champ de pression reconstruit et le champ de référence nous avons calculé l'écart sur le coefficient de pression $Cp = P/(0,5\rho u_\infty^2)$ avec $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ la masse volumique et $u_\infty = 1,25 \text{ m/s}$ la vitesse moyenne. Pour mettre en évidence les zones de fluctuation entre numérique et référence, nous définissons la différence relative ϵ_{cdp} telle que :

$$\epsilon_{cdp} = \frac{Cdp}{\|Cp_{ref}\|} \quad \text{avec} \quad Cdp = (Cp_n - Cp_r) \quad \text{et} \quad \|Cp_{ref}\| = \sqrt{\frac{\sum_i^n (Cp_r)^2}{n}} \quad (12)$$

avec Cp_n le coefficient de pression obtenu par BIM, Cp_r le coefficient de pression de référence et n le nombre de points du domaine. La figure 5 montre les champs d'erreur ϵ_{cdp} obtenus par la méthode BIM sans (a) et avec (b) corrections. Grâce aux corrections, nous pouvons voir que le point d'arrêt a été replacé au bon endroit et que l'intrados se rapproche beaucoup du champ de référence. Sur l'extrados, la situation n'est pas parfaite mais a été grandement améliorée. Les corrections ont permis de retrouver une zone de dépression. Le sillage montre également une amélioration, les zones d'erreurs ont été réduites et lissées.

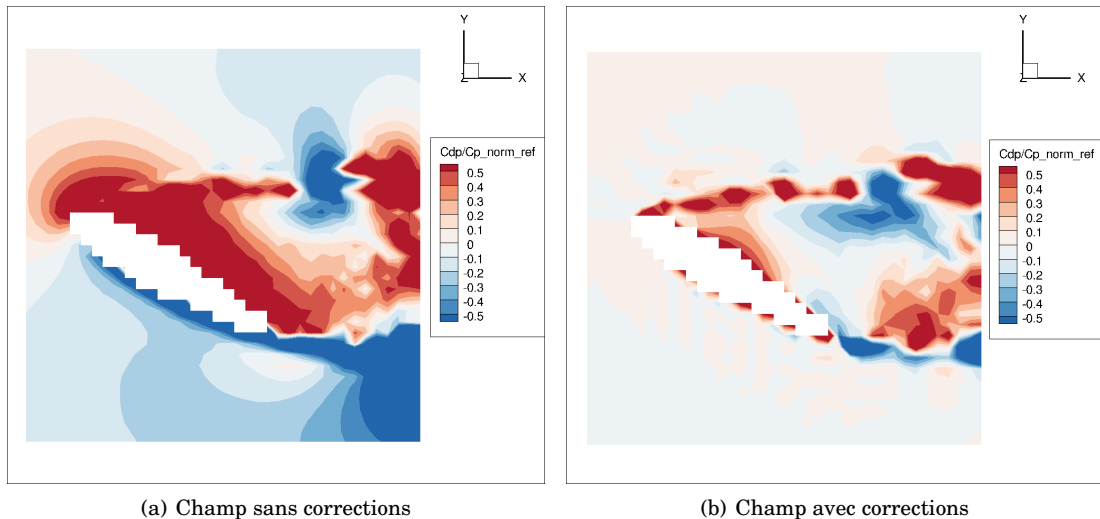


Figure 5: Champs de différence relative ϵ_{cdp} pour des champs à enthalpie h et $T1$ corrigé, et à champ de vitesse u régularisé.

5 Conclusions

La validation du code BIM basée sur le cas test du tourbillon de Lamb-Oseen a montré que lorsque l'écoulement était incliné par rapport au maillage cartésien, la précision de la méthode s'en trouvait réduite. Cette perte de précision met en évidence la sensibilité de la méthode intégrale aux frontières à l'estimation du terme $\text{div}(w \wedge u)$ par différences finies. Lors du passage à un écoulement Naca, cette sensibilité a été exacerbée car le champ de vitesse présentait des problèmes de divergence non nulle.

Plusieurs corrections exploratoires ont été implémentées pour corriger ce défaut. Parmi celles-ci figurent une régularisation du champ de vitesse, une correction du terme volumique $T1$ aux voisinages du Naca et une correction globale sur l'enthalpie h .

La prochaine étape est l'identification d'un paramètre physique permettant de délimiter les zones à corriger. Une autre option à envisager est de mettre en place une méthode itérative permettant de corriger les termes sources sur les frontières et le terme volumique en fonction du gradient de pression mesuré expérimentalement. Ce procédé a déjà fait ses preuves dans la méthode ILAG [4].

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier l'Agence Nationale pour la Recherche et la DGA pour leur soutien financier au travers du projet ANR-16-ASTR-0005-01, ainsi que le CPER-FEDER de la Région Nouvelle Aquitaine

References

- [1] Hicham Machrouki and Serge Huberson. Calcul de champs de pressions par une formulation intégrale. *La Houille Blanche*, (4):25–30, 2011.
- [2] Hicham Machrouki. *Incompressibilité et conditions aux limites dans la méthode Smoothed particle hydrodynamics*. PhD thesis, Poitiers, 2012.
- [3] Young Jin Jeon, Ludovic Chatellier, Anthony Beaudoin, and Laurent David. Least-square reconstruction of instantaneous pressure field around a body based on a directly acquired material acceleration in time-resolved piv. In *Symp. Part. Image Velocim.-PIV15*, 2015.
- [4] Young Jin Jeon, G Gomit, T Earl, L Chatellier, and L David. Sequential least-square reconstruction of instantaneous pressure field around a body from tr-piv. *Experiments in Fluids*, 59(2):27, 2018.

- [5] CLMH Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823):389–440, 1823.
- [6] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.
- [7] Marc Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontiere*. CNRS éditions/Eyrolles, 1995.
- [8] B Cantaloube and C Rehbach. Calcul de la pression dans un écoulement rotationnel incompressible de fluide parfait. *La Recherche Aérospatiale*, (2):57–61, 1988.
- [9] Benoit Tremblais, Laurent David, Denis Arrivault, Julien Dombre, Lionel Thomas, and Ludovic Chatellier. Simple library of image processing (slip). 2010.
- [10] Philip G Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge university press, 1992.
- [11] Pham Huy Giao. Revisit of well function approximation and an easy graphical curve matching technique for theis' solution. *Groundwater*, 41(3):387–390, 2003.
- [12] Guillaume Gomit, Gwenael Acher, Ludovic Chatellier, and Laurent David. Uncertainty analysis of an optical method for pressure estimation in fluid flows. *Measurement Science and Technology*, 29(2):024004, 2018.