



**HAL**  
open science

## D-stabilisation locale des modèles T-S incertains via des fonctions de Lyapunov non-quadratiques

Abdelmadjid Cherifi, Kevin Guelton, Laurent Arcese

### ► To cite this version:

Abdelmadjid Cherifi, Kevin Guelton, Laurent Arcese. D-stabilisation locale des modèles T-S incertains via des fonctions de Lyapunov non-quadratiques. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), 2017, Amiens, France. hal-02089018

**HAL Id: hal-02089018**

**<https://hal.science/hal-02089018>**

Submitted on 19 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# $\mathcal{D}$ -stabilisation locale des modèles T-S incertains

## via des fonctions de Lyapunov non quadratiques

Abdelmadjid Cherifi

Kevin Guelton

Laurent Arcese

CRéSTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne

Moulin de la housse BP1039, 51687 Reims cedex 2, France

email : prénom.nom@univ-reims.fr

### Résumé :

Ce papier traite le problème de la  $\mathcal{D}$ -stabilisation des modèles Takagi-Sugeno (T-S) incertains dans le cadre non quadratique. En considérant le concept de la  $\mathcal{D}$ -stabilité, des conditions sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) sont proposées pour la synthèse de contrôleurs non-Compensations-Parallèles-Distribuées (non-PDC) via des Fonctions de Lyapunov Floues (FLF). Ces conditions permettent une  $\mathcal{D}$ -stabilisation locale. Ainsi, une simple méthode est considérée pour l'estimation du Domaine d'Attraction (DA) de la dynamique en boucle fermée. Les résultats proposés sont illustrés au travers d'un exemple numérique.

### Mots-clés :

Modèles Takagi-Sugeno, Loi de commande non-PDC,  $\mathcal{D}$ -stabilité, LMI, Fonction de Lyapunov non quadratique.

### Abstract:

This paper deals with the non-quadratic robust  $\mathcal{D}$ -stabilization of uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. By considering the  $\mathcal{D}$ -stability concept, Linear Matrix Linearity (LMI) conditions are proposed for the design of non-Parallel-Distributed-Compensation (non-PDC) controllers via non-quadratic Fuzzy Lyapunov Functions (FLF). These conditions allow local  $\mathcal{D}$ -stabilization. Thus, a simple way is considered to estimate the Domain of Attraction (DA) of the designed closed-loop dynamics. The proposed result is illustrated through a numerical example.

## 1 Introduction

Durant les trois dernières décennies, l'utilisation des approches appelées "multi-modèle" pour le contrôle des systèmes non linéaires affines en la commande a connu une croissance exponentielle. Les modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) sont composés d'un ensemble de modèles linéaires pondérés par des fonctions d'appartenance non linéaires convexes [18]. Ils comptent parmi les modèles

les plus utilisés car ils peuvent représenter exactement un système non linéaire dans un ensemble compact de son espace d'état en utilisant, par exemple, la décomposition en secteurs non linéaires [21].

En utilisant la méthode directe de Lyapunov, des conditions sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) peuvent être obtenues pour l'analyse de stabilité et la stabilisation des modèles T-S (voir e.g. [24, 21]). Les premières conditions ont été obtenues en considérant des fonctions de Lyapunov quadratiques [21, 24], ce qui nécessite de trouver une matrice de Lyapunov commune et conduit donc à des conditions conservatives [17]. Pour réduire le conservatisme, la synthèse de contrôleurs non-PDC a été proposée dans le cadre non quadratique via des Fonctions de Lyapunov Floues (FLF) [12, 19, 9, 20]. Dans ce contexte, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaissent dans les conditions de stabilité obtenues. Par conséquent, ces conditions sont locales et plusieurs approches ont été proposées pour estimer le Domaine d'Attraction (DA) [7, 8, 14].

Ce papier traite de l'amélioration de performances en régime transitoire. Cela peut être réalisée en considérant le concept de la  $\mathcal{D}$ -stabilité, qui a été tout d'abord proposé pour les systèmes linéaires incertains [6]. Ceci consiste à contraindre la migration des valeurs propres de la boucle fermée à rester à l'intérieur d'une région LMI prédéfinie. Ce concept a été étendu au problème de contrôle des modèles T-S dans

le cadre quadratique (voir e.g. [13, 10, 11, 16, 22, 1, 4, 5]), et récemment dans le cadre non quadratique pour les modèles T-S nominaux sans considérer les estimations du domaine d'attraction [3]. Par conséquent, notre but dans ce papier est de proposer des conditions LMI non quadratiques locales pour la  $\mathcal{D}$ -stabilisation robuste des modèles T-S incertains, avec l'estimation de leurs domaines d'attraction.

Ce papier est organisé comme suit. Après quelques préliminaires, nous présentons des conditions non quadratiques robustes pour les modèles T-S incertains en boucle fermée en considérant les contraintes de  $\mathcal{D}$ -stabilité. Dans ce contexte, une simple méthode, inspirée par [14], est considérée pour l'estimation du DA. Finalement, l'efficacité des résultats proposés est illustrée au travers d'un exemple numérique.

## 2 Préliminaires

Considérons un système non linéaire donné par :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A(x(t)) + \Delta A(x(t)) \\ B(x(t)) + \Delta B(x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée,  $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice nominale d'état,  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice nominale d'entrée et  $\Delta A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Delta B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  des matrices incertaines bornées.

En appliquant une décomposition en secteurs non linéaires [21], le système non linéaire incertain (1) peut être réécrit de manière exacte sur un espace compact  $\Omega$  de son espace d'état sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\tilde{A}_i(t)x(t) + \tilde{B}_i(t)u(t)) \quad (2)$$

où  $r$  est le nombre de règles,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de prémisses qui est supposé ne dépendre que des variables d'état,  $h_i(z(t)) \in$

$[0, 1]$  les fonctions d'appartenance satisfaisant  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , et où :

$$\tilde{A}_i(t) = A_i + \Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3)$$

$$\tilde{B}_i(t) = B_i + \Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (4)$$

où  $A_i$  et  $B_i$  sont des matrices réelles constantes définissant la partie nominale de la  $i^e$  règle.  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$  sont des matrices incertaines bornées qui peuvent être réécrite sous la forme [26] :

$$\Delta A_i(t) = E_i^a \delta^a(t) L_i^a \quad (5)$$

$$\Delta B_i(t) = E_i^b \delta^b(t) L_i^b \quad (6)$$

où  $E_i^a$ ,  $E_i^b$ ,  $L_i^a$ ,  $L_i^b$  sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées, et  $\delta^a(t)$  et  $\delta^b(t)$  des matrices incertaines qui vérifient :

$$(\delta^a)^T(t) \delta^a(t) \leq I \quad (7)$$

$$(\delta^b)^T(t) \delta^b(t) \leq I \quad (8)$$

Afin de proposer des conditions non quadratiques pour la synthèse de contrôleurs  $\mathcal{D}$ -stabilisant, considérons une loi de commande non-PDC donnée par [12, 9, 19] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left( \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) P_j \right)^{-1} x(t) \quad (9)$$

où  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices de gain constantes à synthétiser.

**Notations :** Dans la suite, le temps  $t$  sera omis dans les expressions mathématiques lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Un astérisque (\*) désigne une quantité transposée dans une matrice, et pour toute matrice carrée réelle  $R$ ,  $\mathcal{H}(R) = R + R^T$ . Considérons un ensemble de matrices réelles  $M_i$  et  $N_{ij}$ , pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , on notera  $M_z = \sum_{i=1}^r h_i(z) M_i$ ,  $N_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) N_{ij}$  et

$$P_z^{-1} = \left( \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) P_j \right)^{-1}.$$

À partir de (2) et (9), la dynamique en boucle fermée peut être exprimée comme :

$$\dot{x} = \tilde{\mathcal{G}}_{zz} x \quad (10)$$

où  $\tilde{\mathbb{G}}_{zz} = \mathbb{G}_{zz} + \Delta \mathbb{G}_{zz}$ ,  $\mathbb{G}_{zz} = A_z + B_z F_z P_z^{-1}$  et  $\Delta \mathbb{G}_{zz} = \Delta A_z + \Delta B_z F_z P_z^{-1}$ .

L'objectif de ce travail est de proposer de nouvelles conditions LMI permettant la synthèse d'une loi de commande robuste non-PDC (9) telle que la dynamique en boucle fermée (10) soit  $\mathcal{D}$ -stable. Le lemme suivant sera utilisé pour traiter les incertitudes.

**Lemme 1.** [25] : Pour toutes matrices  $X$ ,  $Y$  et  $T = T^T > 0$  de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\mathcal{H}(X^T Y) \leq X^T T X + Y^T T^{-1} Y \quad (11)$$

De plus, le lemme suivant sera considéré pour réduire le conservatisme.

**Lemme 2.** [23] : Soient  $\Gamma_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , des matrices de dimensions appropriées. L'inégalité  $\Gamma_{zz} < 0$  est satisfaite si les deux conditions suivantes sont vérifiées  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j$  :

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad (12)$$

$$\frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0 \quad (13)$$

Enfin, afin d'introduire le concept de  $\mathcal{D}$ -stabilité [6], les définitions suivantes seront considérées.

**Définition 1.** (Région LMI) [6] : Un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  du plan complexe est appelé région LMI s'il est défini par deux matrices  $L = L^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  telles que :

$$\mathcal{D} = \{\lambda = x + iy \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(\lambda) < 0\} \quad (14)$$

où la fonction caractéristique  $f_{\mathcal{D}}(\lambda)$  est donnée par :

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = L + \lambda M + \bar{\lambda} M^T \quad (15)$$

**Définition 2.** ( $\mathcal{D}$ -stabilité) [16] : Soit une région LMI définie par (14). Le système dynamique  $\dot{x} = f(x)x$  est dit  $\mathcal{D}$ -stable s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  vérifiant  $\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \in \mathcal{D}$ , i.e. :

$$L \otimes 1 + M \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} + M^T \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} < 0 \quad (16)$$

Selon les objectifs considérés, plusieurs régions LMI peuvent être définies au travers des matrices  $L$  et  $M$  (voir e.g. [6, 2]). Dans ce papier, une région LMI usuellement utilisée pour la  $\mathcal{D}$ -stabilité est considérée. Elle est présentée par la Figure 1 et définie par les matrices suivantes :

$$L = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & -s \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

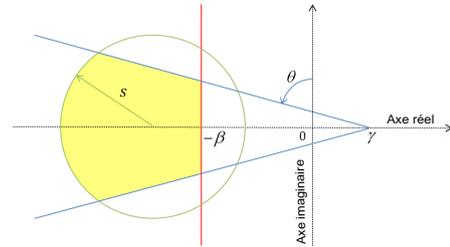


Figure 1 – Région LMI usuellement utilisée en  $\mathcal{D}$ -stabilité.

### 3 Résultat principal

Le théorème suivant résume la principale contribution de cet article.

**Théorème 1.** On suppose que,  $\forall k \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\exists \phi_k$  tels que  $|\hat{h}_k(z)| \leq \phi_k$ . Soient  $L$  et  $M$  deux

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_{ij}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ M^T \otimes D_{ij} + I \otimes \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \phi_k (X_k + R_{ij}) \right) & -I \otimes \mathcal{H}(D_{ij}) & 0 & 0 \\ M \otimes L_i^a \tilde{P}_j & 0 & -I \otimes \tau_i^a & 0 \\ M \otimes L_i^b F_j & 0 & 0 & -I \otimes \tau_i^b \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec  $\tilde{\Lambda}_{ij}^{(1,1)} = L \otimes P + \mathcal{H}((I \otimes A_i) P_j + M \otimes B_i F_j) + I \otimes (\tau_i^a E_i^a (E_i^a)^T + \tau_i^b E_i^b (E_{bi}^b)^T)$ .

matrices définissant une région LMI prédéfinie (voir définition 1). Le modèle T-S (2) est  $\mathcal{D}$ -stabilisé par la loi de commande non-PDC (9), s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ ,  $F_j$ ,  $R_{ij}$  et  $D_{ij}$  et les scalaires  $\tau_i^a$  et  $\tau_i^b$  tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / j \neq i$  :

$$\tilde{\Lambda}_{ii} < 0, \quad (18a)$$

$$\frac{2}{r-1} \tilde{\Lambda}_{ii} + \tilde{\Lambda}_{ij} + \tilde{\Lambda}_{ji} < 0, \quad (18b)$$

$$\Xi_{iik} > 0, \quad (19a)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{iik} + \Xi_{ijk} + \Xi_{jik} > 0, \quad (19b)$$

où  $\Xi_{ijk} = P_k + R_{ij}$ , et  $\tilde{\Lambda}_{ij}$  donnée en (17) (voir encart ci-dessus).

Dans ce cas, une estimation du domaine d'attraction en boucle fermée peut être obtenue en maximisant un scalaire  $c$  tel que :

$$DA_\phi^* := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{c} = \max c, \Lambda(\bar{c}) \subseteq \Phi_\phi\} \quad (20)$$

c'est-à-dire en cherchant la plus grande équipotentielle  $V(x) = \bar{c}$  incluse dans :

$$\Phi_\phi = \bigcap_{k=1}^r \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k \right\} \cap \Omega \quad (21)$$

*Démonstration.* Considérons la fonction candidate de Lyapunov non quadratique  $V(x) = x^T P_z^{-1} x$  où  $P_z > 0$  est garantie si  $\forall i, P_i = P_i^T > 0$ . D'après la définition 2, la dynamique en boucle fermée (10) est  $\mathcal{D}$ -stable si :

$$L \otimes x^T P_z^{-1} x + \mathcal{H} \left( M \otimes x^T \left( P_z^{-1} \tilde{\mathcal{G}}_{zz} + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) x \right) < 0 \quad (22)$$

Grâce aux propriétés du produit de Kronecker, on peut réécrire (22) comme suit :

$$\psi^T \left( L \otimes P_z^{-1} + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( P_z^{-1} \tilde{\mathcal{G}}_{zz} + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) \right) \right) \psi < 0 \quad (23)$$

avec  $\psi = I \otimes x$ .

Ainsi, (23) est vérifiée  $\forall x$  si :

$$L \otimes P_z^{-1} + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( P_z^{-1} \tilde{\mathcal{G}}_{zz} + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) \right) < 0 \quad (24)$$

En multipliant à gauche et à droite par  $(I \otimes P_z)$  et en notant que  $P_z \dot{P}_z^{-1} P_z = -\dot{P}_z$ , l'inégalité (24) devient :

$$L \otimes P_z + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( \tilde{\mathcal{G}}_{zz} P_z - \frac{1}{2} \dot{P}_z \right) \right) < 0 \quad (25)$$

Introduisons le terme nul :

$$\mathcal{H}(MM^T \otimes D_{zz} - MM^T \otimes D_{zz}) = 0 \quad (26)$$

En additionnant (26) à (25) et à partir des propriétés du produit de Kronecker, on obtient :

$$\begin{aligned} & L \otimes P_z + \mathcal{H} \left( M \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{zz} P_z \right) \\ & + \mathcal{H} \left( (M \otimes I) \left( M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z \right) \right) \\ & - (M \otimes I) (I \otimes (D_{zz} + D_{zz}^T)) (M^T \otimes I) < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Réécrivons (27) sous la forme suivante :

$$\gamma^T \begin{bmatrix} L \otimes P_z + \mathcal{H} \left( M \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{zz} P_z \right) & (*) \\ M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z & I \otimes \mathcal{H}(D_{zz}) \end{bmatrix} \gamma < 0 \quad (28)$$

avec  $\gamma = \begin{bmatrix} I \\ M^T \otimes I \end{bmatrix}$ .  $\forall M$ , l'inégalité (28) est vérifiée si :

$$\tilde{\Upsilon}_{zz} + \Delta \tilde{\Upsilon}_{zz} < 0 \quad (29)$$

avec :

$$\tilde{\Upsilon}_{zz} = \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{zz}^{(1,1)} & (*) \\ M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z & I \otimes \mathcal{H}(D_{zz}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Upsilon}_{zz}^{(1,1)} = L \otimes P_z + \mathcal{H}(M \otimes (A_z P_z + B_z F_z))$$

et

$$\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(M \otimes (\Delta A_z P_z + \Delta B_z F_z)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après (5) et (6), réécrivons  $\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz}$  comme :

$$\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz} = \mathcal{H}(\bar{X}_z^T \bar{\delta} \bar{Y}_z) \quad (30)$$

avec

$$\bar{X}_z^T = \begin{bmatrix} I \otimes E_z^a & I \otimes E_z^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}_z = \begin{bmatrix} M \otimes L_z^a P_z & 0 \\ M \otimes L_z^b F_z & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\bar{\delta} = \begin{bmatrix} I \otimes \delta^a(t) & 0 \\ 0 & I \otimes \delta^b(t) \end{bmatrix}$$

satisfaisant  $\bar{\delta}^T \bar{\delta} \leq I$ . En appliquant le lemme 1, l'inégalité (29) est satisfaite si :

$$\tilde{\Upsilon}_{zz} + \bar{X}_z^T \tilde{T}_z \bar{X}_z + \bar{Y}_z^T \tilde{T}_z^{-1} \bar{Y}_z < 0 \quad (31)$$

où  $\tilde{T}_z = \begin{bmatrix} I \otimes \tau_z^a & 0 \\ 0 & I \otimes \tau_z^b \end{bmatrix}$  pour tout scalaire  $\tau_z^a$  et  $\tau_z^b$ .

Ensuite, en appliquant un complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{zz} + \bar{X}_z^T \tilde{T}_z \bar{X}_z & \bar{Y}_z^T \\ \bar{Y}_z & \tilde{T}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

Notons que  $\sum_{i=1}^r \dot{h}_i(x) = 0$ . Donc pour toute matrice  $R_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on peut écrire :

$$\dot{P}_z = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(z) h_j(z) \dot{h}_k(z) (P_k + R_{ij}) \quad (33)$$

À présent,  $\forall k \in \{1, \dots, r\}$ , supposons qu'il existe :

$$|\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k \quad (34)$$

avec  $\phi_k \neq +\infty$ . On peut alors écrire :

$$-\dot{P}_z \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(z) h_j(z) \phi_k (P_k + R_{ij}) \quad (35)$$

sous réserve que,  $\forall k \in \{i, \dots, r\}$  :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (P_k + R_{ij}) > 0 \quad (36)$$

À ce stade et appliquant le lemme 2 sur l'inégalité (36), on obtient les conditions (19a) et (19b). De plus, en majorant (32) et en considérant (35), puis en appliquant le lemme 2, on obtient les conditions (18a) et (18b) avec (17). Par ailleurs, notons qu'en raison de la majoration (34), on ne peut pas garantir la stabilisation asymptotique globale du modèle T-S considéré. Néanmoins, inspiré par [14], une simple estimation du domaine d'attraction de la dynamique du système en boucle fermée peut être obtenue. Pour ce faire, considérons la restriction du domaine de validité du modèle T-S sous les contraintes (34) donné par l'espace compact :

$$\Phi_\phi := \bigcap_{k=1}^r \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n \mid |\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k \right\} \cap \Omega \quad (37)$$

De plus, définissons l'ensemble des équipotentielles de Lyapunov donné par :

$$\Lambda(c) := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid V(x(t)) \leq c\} \quad (38)$$

où  $c$  est un scalaire positif. Une estimation du domaine d'attraction de la dynamique du système en boucle fermée peut donc être obtenue en maximisant  $c$  telle que :

$$DA_\phi^* := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{c} = \max c, \Lambda(\bar{c}) \subseteq \Phi_\phi\} \subseteq DA, \quad (39)$$

c'est-à-dire en cherchant la plus grande équipotentielle  $V(x(t)) = \bar{c}$  incluse dans  $\Phi_\phi$ .  $\square$

**Remarque 1.** Rappelons que les conditions non quadratiques proposées dans ce papier ne garantissent pas la stabilité asymptotique globale du modèle T-S considéré. En effet, elles impliquent les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance qui sont difficiles (voire impossibles) à estimer en amont de la synthèse de la dynamique en boucle fermée. Des résultats récents ont été proposés pour permettre l'estimation du domaine d'attraction simultanément à la résolution du problème LMI (voir e.g. [8, 15]). Néanmoins, ces résultats étant relativement complexes, nous

avons adopté une simple méthode alternative inspirée par des travaux récents [14] afin de ne pas surcharger cette étude. Aussi, dans la pratique, les  $\phi_k$  doivent être choisies le plus grand possible pour garantir une stabilisation locale avec le plus grand domaine d'attraction possible. Par conséquent, afin de maximiser les  $\phi_k$ , une recherche par programmation linéaire peut être réalisée lorsque le cout de calcul n'est pas un frein.

## 4 Exemple numérique

Considérons le modèle T-S suivant avec deux règles donnée par :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i(z) ((A_i + \Delta A_i) x + (B_i + \Delta B_i) u) \quad (40)$$

avec  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Les matrices incertaines  $\Delta A_i$  et  $\Delta B_i$  sont décomposées comme dans (5) et (6) avec  $E_1^a = E_2^a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_1^b = E_2^b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $L_1^a = L_2^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $L_1^b = L_2^b = 0,03$  et  $\delta(t)$  scalaire.  $h_1(z(t)) = \frac{1-\sin(x_1)}{2}$  et  $h_2(z(t)) = \frac{1+\sin(x_1)}{2}$  sont des fonctions d'appartenance convexes.

Notons que ce modèle T-S est un modèle académique et qu'il n'est pas obtenu à partir d'un système non linéaire (1) spécifique. De ce fait, nous assumons que  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .

Les matrices de gain du contrôleur non-PDC (9) ont été obtenues à partir du théorème 1 avec  $\phi_1 = \phi_2 = 60$  et la région LMI définie par le Figure 1 et caractérisée par  $s = 21$ ,  $q = -17$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 9$  et  $\theta = \pi/3$  :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -88,50 & -75,03 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -50,67 & -49,58 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7,00 & 4,96 \\ 4,96 & 3,67 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 6,66 & 5,42 \\ 5,42 & 4,59 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2 montre l'estimation du domaine d'attraction  $DA_\phi^*$  en boucle fermée.

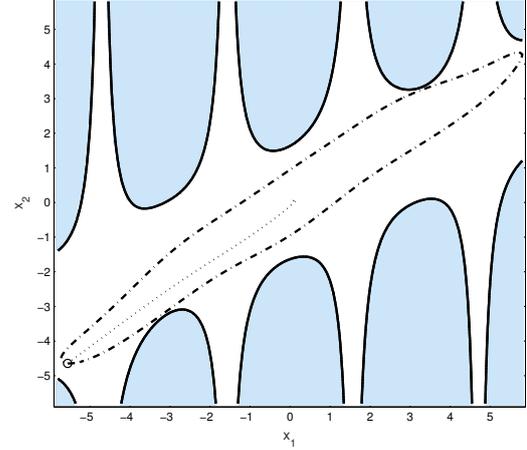


Figure 2 – Estimation du domaine d'attraction  $DA_\phi^*$  : Espace d'état restreint  $\Phi_\phi$  (blanc) limité par les bornes  $|h_k| = \phi_k$  (trait plein), plus grande équipotentielle de la fonction de Lyapunov incluse dans  $\Pi_\phi$  (points-tirets), trajectoire de la boucle fermée avec les conditions initiales à la frontière de  $DA_\phi^*$  (pointillés).

La Figure 3 montre la simulation en boucle fermée avec la condition initiale  $x(0) = [-5,56 \quad -4,64]^T$ , i.e. prise à la frontière du  $DA_\phi^*$ . Comme on peut le constater dans la Figure 3(a), la loi de commande synthétisée stabilise le modèle T-S incertains (40) avec une incertitude variable  $\delta(t)$ , tracée dans la Figure 3(b). De plus, comme montré dans la Figure 3(c), la condition initiale étant à l'intérieur du  $DA_\phi^*$ , les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance ne dépassent jamais les bornes considérées  $\phi_k = 60$ . Finalement, la Figure 3(d) montre que la migration des valeurs propres de la boucle fermée reste à l'intérieur de la région LMI prédéfinie malgré la présence d'incertitudes. Ceci confirme l'efficacité des conditions proposées dans le théorème 1.

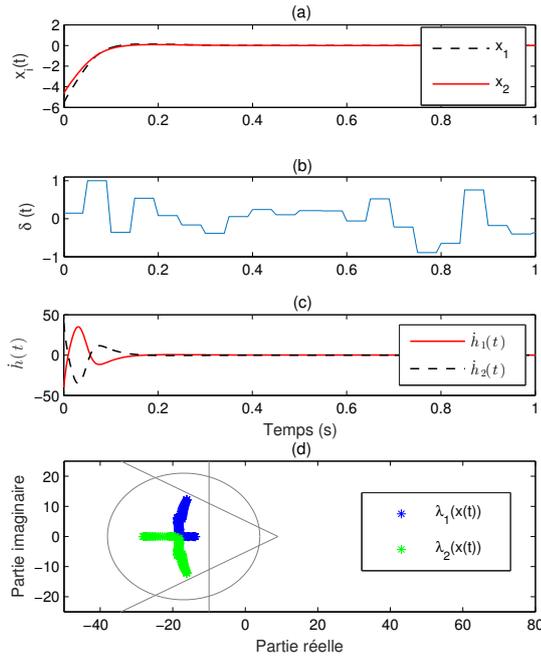


Figure 3 – Simulation en boucle fermée : (a) Réponse en boucle fermée, (b) Signal d'incertitude  $\delta(t)$ , (c) Evolution des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance, (d) Migration des valeurs propres.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, le problème de la  $\mathcal{D}$ -stabilisation non quadratique locale des modèles T-S incertains a été considéré. Des conditions LMI ont été proposées pour la synthèse de contrôleurs non-PDC robuste en considérant des contraintes de  $\mathcal{D}$ -stabilité avec une simple méthode permettant l'estimation du domaine d'attraction en boucle fermée. L'efficacité de l'approche proposée a été illustrée au travers d'un exemple numérique. Les travaux futures seront focalisés sur la réduction du conservatisme et l'optimisation du domaine d'attraction.

## Références

[1] W. Assawinchaichote. Further results on robust fuzzy dynamic systems with lmi d-

stability constraints. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 24(4) :785–794, 2014.

- [2] O. Bachelier. *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en  $\mathcal{D}$ -stabilité*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Toulouse, France, 1998.
- [3] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese. Lmi conditions for non-quadratic stabilization of t-s models with pole placement assignment. In *3rd International Conference on Control, Engineering and Information Technology (CEIT'2015)*, pages 1–6, 2015.
- [4] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese. Quadratic design of d-stabilizing non-pdc controllers for quasi-lpv/t-s models. In *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying systems*, volume 48 of *IFAC-PapersOnLine*, pages 164–169, Grenoble, France, October 2015.
- [5] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese. Quadratic design of robust controllers for uncertain ts models with d-stability constraints. In *4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences*, volume 49 of *IFAC-PapersOnLine*, pages 19–24, Reims, France, June 2016.
- [6] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in lmi regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2270, 1999.
- [7] T.M. Guerra and M. Bernal. A way to escape from the quadratic framework. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 784–789, 2009.
- [8] T.M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton, and S. Labiod. Non-quadratic local stabilization for continuous-time takagi-sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54, 2012.
- [9] T.M. Guerra and L. Vermeiren. Lmi-based relaxed nonquadratic stabilization condi-

- tions for nonlinear systems in the takagi-sugeno's form. *Automatica*, 40(5) :823–829, 2004.
- [10] S.-K. Hong and R. Langari. An lmi-based h-infinity fuzzy control system design with ts framework. *Information sciences*, 123(3) :163–179, 2000.
- [11] S.-K. Hong and Y. Nam. Stable fuzzy control system design with pole-placement constraint : an lmi approach. *Computers in Industry*, 51(1) :1–11, 2003.
- [12] A. Jadbabaie. A reduction in conservatism in stability and l2 gain analysis of takagi-sugeno fuzzy systems via linear matrix inequality. In *14th IFAC World Congress*, pages 285–289, Beijing, China, 1999.
- [13] J. Joh, R. Langari, F.T. Jeung, and W.J. Chung. A new design method for continuous takagi-sugeno fuzzy controller with pole placement constraints : An lmi approach. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 3, pages 2969–2974, 1997.
- [14] D.H. Lee, J.B. Park, and Y.H. Joo. A fuzzy lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time takagi-sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, 185(1) :230–248, 2012.
- [15] H. Lee and H.J. Kim. Robust control of a quadrotor using takagi-sugeno fuzzy model and an lmi approach. In *14th International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 370–374, 2014.
- [16] S.K. Nguang and P. Shi. Robust h-infinity output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic d-stability constraints : An lmi approach. *Information Sciences*, 176(15) :2161–2191, 2006.
- [17] A. Sala. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Review in Control*, 33(1) :48–58, 2009.
- [18] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132, 1985.
- [19] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang. A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4) :582–589, 2003.
- [20] K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3) :333–341, 2007.
- [21] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [22] P.-F. Toulotte, S. Delprat, T.M. Guerra, and J. Boonaert. Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in lmi region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(5) :756–768, 2008.
- [23] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2) :324–332, 2001.
- [24] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23, 1996.
- [25] L. Xie and C.E. De Souza. Robust h infinity control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191, 1992.
- [26] K. Zhou and P.P. Khargonekar. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10(1) :17–20, 1988.