



HAL
open science

Réalisation cubique du poset des intervalles de Tamari

Camille Combe

► **To cite this version:**

| Camille Combe. Réalisation cubique du poset des intervalles de Tamari. 2019. hal-02088449v1

HAL Id: hal-02088449

<https://hal.science/hal-02088449v1>

Preprint submitted on 2 Apr 2019 (v1), last revised 29 Dec 2022 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉALISATION CUBIQUE DU POSET DES INTERVALLES DE TAMARI

CAMILLE COMBE

ABSTRACT. We introduce cubic coordinates, which are integer words encoding intervals in the Tamari lattices. Cubic coordinates are in bijection with interval-posets, themselves known to be in bijection with Tamari intervals. We show that in each degree the set of cubic coordinates forms a lattice, isomorphic to the lattice of Tamari intervals. Geometric realizations are naturally obtained by placing cubic coordinates in space, highlighting some of their properties. We consider the cellular structure of these realizations. Finally, we show that the poset of cubic coordinates is shellable.

RÉSUMÉ. Nous introduisons les coordonnées cubiques, mots d'entiers codant les intervalles de Tamari. Les coordonnées cubiques sont en bijection avec les intervalle-posets, objets connus pour être eux-mêmes en bijection avec les intervalles de Tamari. Nous montrons que les ensembles de coordonnées cubiques forment des treillis isomorphes aux treillis des intervalles de Tamari. Des réalisations géométriques s'obtiennent naturellement en plaçant les coordonnées cubiques dans l'espace, mettant en évidence certaines de leurs propriétés. Nous étudions les cellules qui apparaissent dans ces réalisations. Enfin, nous montrons que le poset des coordonnées cubiques est épluchable.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Préliminaires	3
1.1. Posets	3
1.2. Arbres binaires	4
1.3. Intervalles de Tamari et intervalle-posets	5
2. Diagrammes d'intervalles de Tamari	9
3. Construction des coordonnées cubiques	14
4. Relation d'ordre du poset \mathcal{CC}_n	18
5. Réalisation cubique et cellules	21
6. Propriétés des cellules	26
7. EL-étiquetage de \mathcal{CC}_n	31
Références	33

Date: 1^{er} avril 2019.

INTRODUCTION

Les treillis de Tamari sont des ordres partiels possédant des propriétés combinatoires et algébriques extrêmement riches. Ces ordres partiels sont définis sur l'ensemble des arbres binaires via une opération dite de rotation [Tam62]. Dans cet article, nous nous intéressons aux intervalles de ce treillis, c'est-à-dire aux couples d'arbres binaires comparables. Le nombre de ces objets de taille n est donné par une formule prouvée par Chapoton [Cha06] :

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$$

Depuis, les treillis de Tamari ont été généralisés dans plusieurs directions [BPR12, PRV17]. Dans la foulée, les intervalles de ces généralisations ont également été énumérés au travers de jolies formules [BMFPR12, FPR17]. Plusieurs bijections entre les intervalles de Tamari et d'autres objets combinatoires sont connues. Par exemple, une bijection avec les triangulations planaires est obtenue par Bernardi et Bonichon dans [BB09]. De même, il est prouvé par Châtel et Pons que les intervalles de Tamari sont en bijection avec les intervalle-posets de même taille [CP15].

Nous établissons de nouvelles bijections avec d'autres objets, dont la construction est proche de celle des intervalle-posets. Plus précisément, nous commençons par construire deux mots de taille n à partir des diagrammes de Tamari des arbres binaires [Pal86]. Puis, si ils vérifient une certaine propriété de compatibilité, nous construisons un *diagramme d'intervalle de Tamari* à partir de ces deux mots. Nous montrons alors que les diagrammes d'intervalles de Tamari et les intervalle-posets sont en bijection. De plus, ils ont une représentation très similaire. Ensuite, nous proposons un nouveau codage des intervalles de Tamari, en construisant un $(n-1)$ -uplet à partir des diagrammes d'intervalles de Tamari. Les $(n-1)$ -uplets ainsi obtenus sont appelés *coordonnées cubiques*. Ce nouveau codage donne une façon vraiment simple de comparer deux intervalles de Tamari, grâce à un algorithme rapide. D'un autre côté, les coordonnées cubiques permettent une traduction simple de plusieurs propriétés des intervalles de Tamari. Par exemple, les intervalles de Tamari synchrones correspondent aux coordonnées cubiques sans composante nulle. Parallèlement, les coordonnées cubiques nous donnent naturellement une réalisation géométrique, en les considérant comme des coordonnées spatiales. En effet, toutes les coordonnées cubiques de taille n peuvent être placées dans l'espace \mathbb{R}^{n-1} . En dessinant leurs relations de couverture, nous obtenons un graphe orienté. Ce graphe nous donne une réalisation du treillis des coordonnées cubiques, appelé *réalisation cubique*. Cette réalisation nous amène à plusieurs questions, en particulier, au sujet des cellules qui forment cette réalisation. Nous caractérisons ces cellules de manière combinatoire, et nous en déduisons une formule pour calculer le volume au sens géométrique de la réalisation cubique. Une autre direction, plus topologique, concerne la notion d'épluchage d'ordre partiel (poset). Nous montrons, en nous inspirant des travaux de Björner et de Wachs [BW96, BW97], que le poset des coordonnées cubiques est EL-épluchable, et que par conséquent le complexe qui lui est associé est épluchable.

La première partie est dédiée aux rappels de notions classiques de combinatoire, et pose les conventions que nous allons utiliser. Dans la deuxième partie, nous définissons les diagrammes d'intervalles de Tamari et montrons que leur ensemble est en bijection avec les intervalle-posets.

Nous définissons ensuite dans la troisième partie les coordonnées cubiques, puis nous construisons une bijection entre leur ensemble et l'ensemble des diagrammes d'intervalles de Tamari. En utilisant les deux bijections des deux parties précédentes, et après avoir muni l'ensemble des coordonnées cubiques d'un ordre partiel, nous montrons dans la quatrième partie qu'il existe un isomorphisme de posets entre le poset des coordonnées cubiques et le poset des intervalles de Tamari. Le poset des coordonnées cubiques peut alors se réaliser géométriquement. Cette réalisation cubique et les cellules qui la constituent sont le sujet de la cinquième partie. Nous associons à chaque cellule une coordonnée cubique synchrone dans la sixième partie. Avec cette coordonnée cubique bien particulière, nous donnons alors une formule pour calculer le volume de la réalisation cubique. Enfin, dans la dernière partie, nous étendons le résultat de Björner et Wachs sur le poset de Tamari au poset des intervalles de Tamari, en montrant que le poset des coordonnées cubiques est EL-épluchable.

Cet article est une version longue de [Com19]. Toutes les démonstrations sont données et plusieurs nouveaux résultats y sont présentés, comme par exemple le résultat que \mathcal{CC}_n est EL-épluchable.

Notations Dans tout cet article, pour tout mot u , on note u_i la $i^{\text{ème}}$ lettre de u . On utilise également la notation $[n]$ pour désigner l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

1. PRÉLIMINAIRES

Nous donnons dans cette première partie quelques notions basiques de combinatoire, et les conventions qui sont utilisées par la suite. Nous rappelons ainsi les définitions de poset, de treillis, d'arbre binaire, d'intervalle de Tamari dont l'ensemble est en bijection avec l'ensemble des intervalle-posets [CP15].

1.1. Posets. Un *ensemble partiellement ordonné*, appelé couramment *poset*, est un couple (P, \leq_P) où P est un ensemble fini et \leq_P est une relation d'ordre partiel sur cet ensemble.

Un *treillis* est un poset (L, \leq_L) vérifiant, pour tous $x, y \in L$, les deux conditions suivantes :

- (i) la borne supérieure $\vee_L(x, y) = \min_{\leq_L} \{z \in L : x \leq_L z \text{ et } y \leq_L z\}$ existe ;
- (ii) la borne inférieure $\wedge_L(x, y) = \max_{\leq_L} \{z \in L : z \leq_L x \text{ et } z \leq_L y\}$ existe.

Le *poset des intervalles* d'un poset (P, \leq_P) est le poset $(\text{Int}(P), \leq_{\text{Int}(P)})$ sur l'ensemble $\text{Int}(P) = \{(x, y) \in P^2 : x \leq_P y\}$ avec la relation d'ordre $\leq_{\text{Int}(P)}$ définie par :

$$(x, y) \leq_{\text{Int}(P)} (x', y') \text{ si et seulement si } x \leq_P x' \text{ et } y \leq_P y', \quad (1.1)$$

pour $(x, y), (x', y') \in \text{Int}(P)$.

Lemme 1.1. *Si (L, \leq_L) est un treillis, alors $(\text{Int}(L), \leq_{\text{Int}(L)})$ est un treillis.*

Démonstration. Soient $(x, y), (x', y') \in \text{Int}(L)$. Montrons que $(\vee_L(x, x'), \vee_L(y, y'))$ est un intervalle, c'est-à-dire que $\vee_L(x, x') \leq_L \vee_L(y, y')$. Par définition de la borne supérieure, on a $y \leq_L \vee_L(y, y')$ et $y' \leq_L \vee_L(y, y')$. De plus, $x \leq_L y$ et $x' \leq_L y'$. On a alors $x \leq_L \vee_L(y, y')$ et $x' \leq_L \vee_L(y, y')$. Par ailleurs, $\vee_L(x, x')$ est l'élément minimal de L vérifiant $x \leq_L \vee_L(x, x')$ et $x' \leq_L \vee_L(x, x')$. D'où l'inégalité $\vee_L(x, x') \leq_L \vee_L(y, y')$.

D'après l'équation (1.1), on a

$$\begin{aligned}
& \vee_{\text{Int}(L)}((x, y), (x', y')) \\
&= \min_{\leq_{\text{Int}(L)}} \{(x'', y'') \in \text{Int}(L) : (x, y) \leq_{\text{Int}(L)} (x'', y'') \text{ et } (x', y') \leq_{\text{Int}(L)} (x'', y'')\} \\
&= \min_{\leq_{\text{Int}(L)}} \{(x'', y'') \in \text{Int}(L) : x \leq_L x'' \text{ et } y \leq_L y'' \text{ et } x' \leq_L x'' \text{ et } y' \leq_L y''\} \\
&= (\vee_L(x, x'), \vee_L(y, y')).
\end{aligned}$$

Le cas de la borne inférieure $\wedge_{\text{Int}(L)}((x, y), (x', y')) = (\wedge_L(x, x'), \wedge_L(y, y'))$ est symétrique. \square

Soient $x, y \in L$ tels que $x \leq_L y$. On dit que y *couvre* x pour la relation \leq_L si et seulement si pour tout $z \in L$ tel que $x \leq_L z \leq_L y$, soit $z = x$, soit $z = y$. Si y couvre x , alors c'est une *relation de couverture* pour la relation \leq_L . De manière identique, pour $(x, y), (x', y') \in \text{Int}(L)$ tels que $(x, y) \leq_{\text{Int}(L)} (x', y')$, on définit une relation de couverture pour la relation $\leq_{\text{Int}(L)}$.

1.2. Arbres binaires. Dans tout ce travail, nous appelons *arbre binaire* un arbre binaire plan, complet et enraciné. Rappelons qu'un arbre binaire T est soit une *feuille*, soit un *nœud interne* attaché par l'intermédiaire de deux arêtes à deux arbres binaires appelés respectivement *sous-arbre gauche* et *sous-arbre droit* de T . On note \mathcal{BT}_n l'ensemble des arbres binaires à n nœuds internes. Dans la suite, nous employons les conventions et notions habituelles des arbres binaires : *racine, fils, descendant, sous-arbre, etc.* [Sta12]. Nous dessinons les arbres binaires la racine en bas et les feuilles en haut.

Soit $T \in \mathcal{BT}_n$. Chaque nœud interne de T est numéroté de manière récursive, en commençant par le sous-arbre gauche, puis la racine, et en finissant par le sous-arbre droit. Un exemple est donné dans la figure 1.1. Cette numérotation établit alors un ordre total sur les nœuds internes d'un arbre binaire qu'on appelle *ordre infixé*. Par la suite, on pourra se référer aux nœuds internes selon cette numérotation. Le parcours donnant cette numérotation s'appelle *parcours infixé*.

La *canopée* de T est le mot de taille $n - 1$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ construit en attribuant à chaque feuille de T une lettre de la manière suivante. On étiquette par 0 (resp. 1) toute feuille orientée vers la gauche (resp. droite). La canopée de T est le mot obtenu en lisant de gauche à droite les étiquettes ainsi établies, en oubliant la première et la dernière.

Par exemple, l'arbre binaire de la figure 1.1 a pour canopée le mot 0110100.

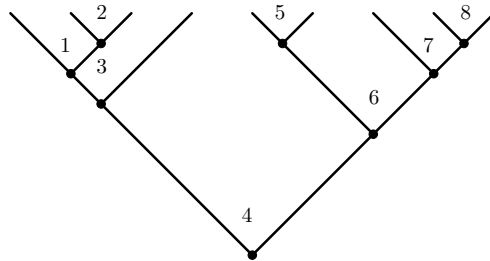


FIGURE 1.1. Exemple d'un arbre binaire de taille 8 et de sa numérotation des nœuds selon l'ordre infixé.

Rappelons maintenant une opération fondamentale dans les arbres binaires, la *rotation*. Soient k et l les indices dans l'ordre infixe de deux nœuds d'un arbre binaire T , tels que le nœud d'indice k est fils gauche du nœud d'indice l . La rotation change localement l'arbre T de telle sorte que l devient le fils droit de k (figure 1.2). De manière équivalente, cela signifie que $((A, B), C)$ devient $(A, (B, C))$ où A, B et C sont les sous-arbres illustrés sur la figure 1.2.

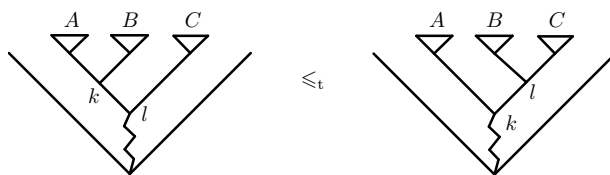


FIGURE 1.2. Rotation du nœud k dans T (à gauche), où A, B et C sont des sous-arbres.

1.3. Intervalles de Tamari et intervalle-posets. L'opération de rotation dans les arbres binaires permet de définir une relation d'ordre partiel \leq_t . Soient $S, T \in \mathcal{BT}_n$. On a $S \leq_t T$ si et seulement si T peut s'obtenir en appliquant successivement une ou plusieurs rotations dans S . L'ensemble \mathcal{BT}_n muni de la relation \leq_t forme un treillis, appelé *treillis de Tamari* [Tam62].

Un *intervalle de Tamari* est formé par un couple d'arbres binaires $[S, T]$ avec $S \leq_t T$ et $S, T \in \mathcal{BT}_n$. La taille d'un intervalle de Tamari est la taille des arbres binaires considérés. L'ensemble des intervalles de Tamari de taille n est noté \mathcal{TI}_n . Le poset des intervalles de Tamari est l'ensemble des intervalles de Tamari muni de la relation d'ordre \leq_{ti} suivante. Soient $[S, T], [S', T'] \in \mathcal{TI}_n$, on a $[S, T] \leq_{ti} [S', T']$ si et seulement si $S \leq_t S'$ et $T \leq_t T'$. D'après le lemme 1.1, le poset ainsi défini est un treillis. De plus, $[S', T']$ couvre $[S, T]$ si et seulement si :

- soit S' est obtenu par une unique rotation d'un nœud dans S et $T' = T$,
- soit T' est obtenu par une unique rotation d'un nœud dans T et $S' = S$.

Un autre poset va nous intéresser pour son lien avec les intervalles de Tamari, il s'agit du *poset des intervalle-posets* [CP15]. Soit $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n symboles numérotés de 1 à n . Un *intervalle-poset* $P = (X_n, \triangleleft)$ de taille n est un ordre partiel \triangleleft sur l'ensemble X_n tel que

- (i) si $i < k$ et $x_k \triangleleft x_i$ alors pour tout x_j tel que $i < j < k$, on a $x_j \triangleleft x_i$;
- (ii) si $i < k$ et $x_i \triangleleft x_k$ alors pour tout x_j tel que $i < j < k$, on a $x_j \triangleleft x_k$.

L'ensemble des intervalle-posets de taille n est noté \mathcal{IP}_n .

Les deux conditions (i) et (ii) de la définition des intervalle-posets sont appelés *propriétés des intervalle-posets*. Pour $i < j$, les relations $x_j \triangleleft x_i$ sont des *relations décroissantes* et les relations $x_i \triangleleft x_j$ sont des *relations croissantes*.

Les éléments de X_n sont appelés sommets. Contrairement à la définition donnée dans [CP15] où les sommets sont l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on utilise dans cet article $\{x_1, \dots, x_n\}$ pour faciliter la distinction entre les sommets et leurs positions. Par la suite l'ensemble X_n sera confondu avec l'intervalle-poset P .

Une autre différence avec certains des articles traitant des intervalle-posets est le choix de leur représentation graphique. Pour tout $i < j$, si $x_j \triangleleft x_i$ et s'il n'existe pas de sommet x_k tel que $x_k \triangleleft x_i$ et $j < k$, alors on trace une flèche de source x_j et de but x_i par le bas comme illustré par l'exemple de la figure 1.3. Symétriquement, si $x_j \triangleleft x_k$ et $j < k$ et s'il n'existe pas de sommet x_i tel que $x_i \triangleleft x_k$ et $i < j$, alors on trace une flèche de source x_j et de but x_k par le haut. On appelle ce graphe orienté avec deux types de flèches la *représentation minimaliste*.

La clôture pour les propriétés des intervalle-posets est donnée par le l'ajout des relations décroissantes $x_j \triangleleft x_i$ pour toute relation $x_k \triangleleft x_i$, et par l'ajout des relations croissantes $x_j \triangleleft x_k$ pour toute relation $x_i \triangleleft x_k$, pour tout $i < j < k$.

En prenant la clôture réflexive et la clôture pour les propriétés des intervalle-posets, on obtient à partir d'une telle représentation un intervalle-poset. L'intérêt de la représentation minimaliste est justifiée par la suite, notamment par le théorème 2.7. Il est important de représenter les relations décroissantes et croissantes de manière indépendante.

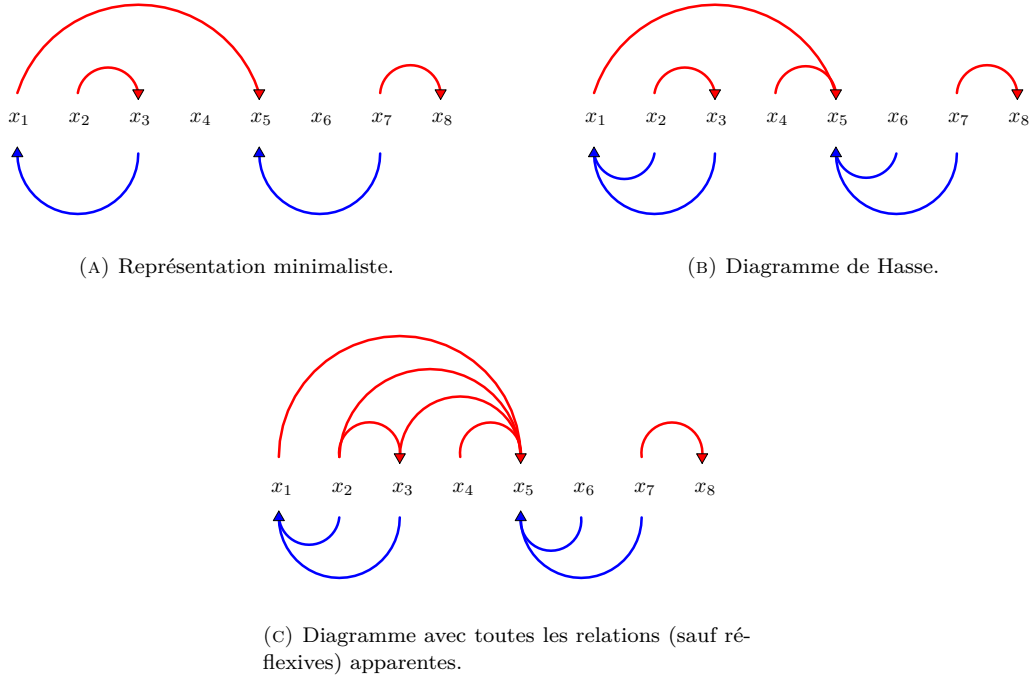


FIGURE 1.3. Différents types de représentations d'un intervalle-poset de taille 8.

Un des intérêts des intervalle-posets est d'apporter un codage des intervalles de Tamari. Dans [CP15], une bijection est construite entre l'ensemble des intervalles de Tamari et l'ensemble \mathcal{IP}_n .

Nous avons besoin de rappeler les grandes lignes de cette bijection ρ , pour passer d'un intervalle-poset à un intervalle de Tamari.

Soient $[S, T] \in \mathcal{TI}_n$ et $P \in \mathcal{IP}_n$. La bijection ρ relie d'une part la restriction de P à ses relations décroissantes et l'arbre binaire S , et d'autre part la restriction de P à ses relations croissantes et l'arbre binaire T .

Ainsi, la restriction de P à ses relations décroissantes (resp. relations croissantes) a pour diagramme de Hasse une forêt décroissante (resp. forêt croissante), où si $x_j \triangleleft x_i$ avec $i < j$ (resp. $j < i$), alors le nœud d'indice j est fils du nœud d'indice i . Sinon, il est placé à droite (resp. gauche) du nœud d'indice i . Pour former l'arbre binaire S (resp. T), on lit alors la forêt décroissante de droite à gauche (resp. la forêt croissante de gauche à droite). Si un nœud d'indice j est fils d'un nœud d'indice i dans la forêt décroissante (resp. forêt croissante), alors le nœud d'indice j devient fils droit (resp. gauche) du nœud d'indice i dans S (resp. T). Sinon, il devient fils gauche (resp. droit) du nœud d'indice i .

La numérotation des arbres binaires ainsi obtenue est exactement l'ordre infixé. La figure 1.4 donne un exemple de construction, par la bijection ρ , d'un intervalle de Tamari à partir d'un intervalle-poset de taille 5.

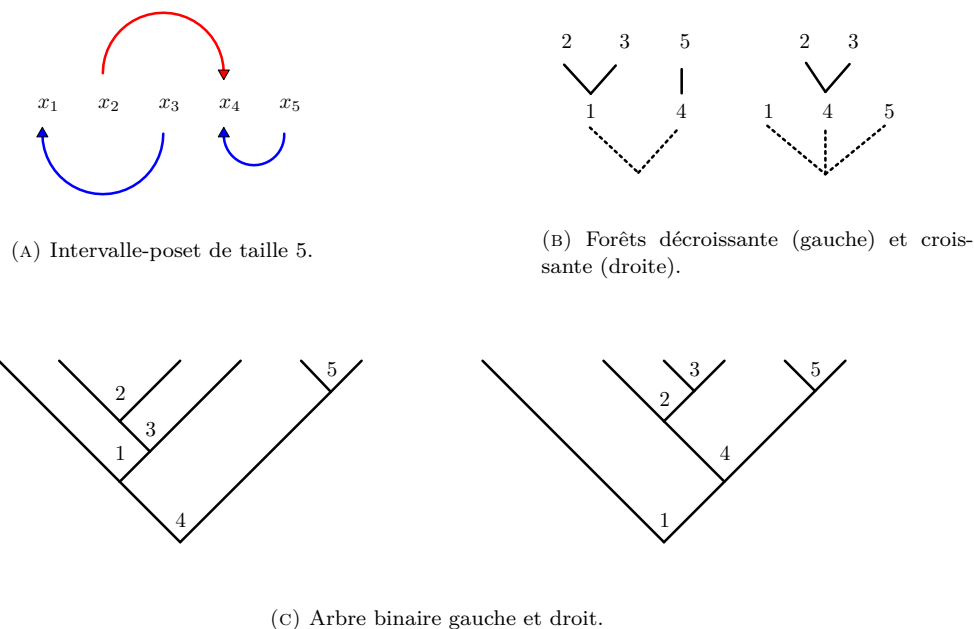
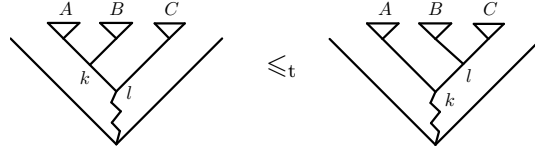


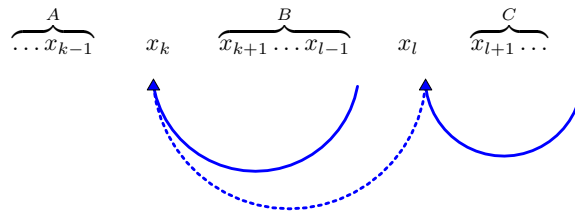
FIGURE 1.4. Exemple de construction d'un intervalle de Tamari par la bijection ρ .

Soient $P, P' \in \mathcal{IP}_n$ et $\rho(P) = [S, T]$, $\rho(P') = [S', T']$. Soit (\star) (resp. (\diamond)) la condition suivante : P' est obtenu en ajoutant (resp. enlevant) uniquement des relations décroissantes (resp. croissantes) de but un sommet x_k dans P , tels que si on enlève (resp. ajoute) une seule de ces relations décroissantes (resp. croissantes), alors soit P est obtenu, soit l'objet obtenu n'est pas un intervalle-poset.

(A) Arbres binaires S et S' (resp. T et T').(B) Forêts décroissantes induites par S et S' .(C) Forêts croissantes induites par T et T' .FIGURE 1.5. Rotation du nœud d'indice k sur deux arbres binaires, où A, B et C sont des sous-arbres.

Lemme 1.2. *Les intervalle-posets P et P' vérifient (\star) (resp. (\diamond)) pour le sommet x_k si et seulement si S' (resp. T') est obtenu par une unique rotation du nœud d'indice k dans S (resp. T) et $T' = T$ (resp. $S' = S$).*

Autrement dit, $[S', T']$ couvre $[S, T]$ si et seulement si P et P' vérifient soit (\star) , soit (\diamond) .

FIGURE 1.6. L'intervalle-poset de la forêt décroissante avant (sans pointillés) et après (avec pointillés) la rotation du nœud k , où A, B et C peuvent être vides.

Démonstration. Supposons que P et P' vérifient (\star) pour le sommet x_k . Donc P' possède plus de relations décroissantes de but x_k que le sommet x_k dans P . Supposons que les sommets x_l et x_k ne sont pas reliés dans P et le sont dans P' , avec $k < l$. Alors, par la propriété des intervalle-posets (i), pour tout sommet d'indice k' tel que $k < k' < l$, $x_{k'} \triangleleft x_k$. De plus, si on retire une seule de ces relations décroissantes, on obtient soit P , soit un objet qui n'est plus un intervalle-poset.

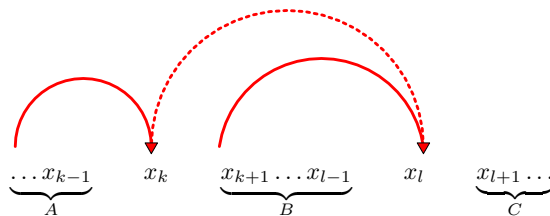


FIGURE 1.7. L'intervalle-poset de la forêt croissante avant (avec pointillés) et après (sans pointillés) la rotation du nœud k , où A, B et C peuvent être vides.

Cela signifie que le nombre de relations décroissantes ajoutées dans P' est minimal, ou de manière équivalente, que le sommet x_l est le plus proche du sommet x_k tel que x_l et x_k ne sont pas reliés dans P et $k < l$. Le cas décrit est illustré par la figure 1.6. Par la bijection ρ , l'ajout de ces relations décroissantes de but x_k dans P donne la forêt décroissante induite par S' représentée par la figure 1.5b. Les forêts induites sont alors données par la figure 1.5a. Une unique rotation est donc effectuée entre les arbres S et S' . En outre, comme les relations croissantes sont inchangées entre P et P' , les forêts croissantes induites par T et T' sont les mêmes, et donc $T' = T$.

Réciproquement, supposons que S' est obtenu par une unique rotation du nœud d'indice k dans S et que $T' = T$. Le cas est illustré par la figure 1.5a, ainsi que les deux forêts décroissantes induites par S et S' par la figure 1.5b. Par la bijection ρ , on obtient alors l'intervalle-poset dont la restriction aux relations décroissantes est illustré par la figure 1.6. Comme $T' = T$, les relations croissantes des intervalle-posets associés à $[S, T]$ et $[S', T']$ sont les mêmes. Finalement, P est obtenu en ajoutant seulement des relations décroissantes de but le sommet x_k dans P . De plus, si on enlève une seule de ces relations, alors soit P est obtenu, soit l'objet obtenu n'est pas un intervalle-poset. C'est-à-dire que P et P' vérifient (\star) .

Symétriquement, on montre que P et P' vérifient (\diamond) pour x_k si et seulement si T' est obtenu par une unique rotation du nœud d'indice k dans T et $S' = S$. Les figures 1.5c et 1.7 illustrent ce cas. \square

2. DIAGRAMMES D'INTERVALLES DE TAMARI

Dans cette partie, nous rappelons la définition des diagrammes de Tamari [Pal86]. Puis, en vérifiant un certain critère de compatibilité, nous construisons les diagrammes d'intervalles de Tamari. Nous montrons ensuite que l'ensemble des diagrammes d'intervalles de Tamari est en bijection avec l'ensemble des intervalle-posets.

Rappelons la définition d'un diagramme de Tamari, telle que formulée dans [Gir11].

Définition 2.1. *Un diagramme de Tamari est un mot $u = u_1u_2 \dots u_n$ de longueur n sur l'alphabet \mathbb{N} qui vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i) $0 \leq u_i \leq n - i$ pour tout $i \in [n]$;
- (ii) $u_{i+j} \leq u_i - j$ pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq u_i$.

La taille d'un diagramme de Tamari est son nombre de lettres.

Par exemple, les quatorze diagrammes de Tamari de taille 4 sont

0000, 0010, 0100, 0200, 0210, 1000, 1010, 2000, 2100, 3000, 3010, 3100, 3200, 3210.

L'ensemble des diagrammes de Tamari de taille n est en bijection avec les arbres binaires à n nœuds. En effet, on construit à partir d'un diagramme de Tamari u de taille n un arbre binaire S de manière récursive comme suit. Si $n = 0$, S est défini comme étant la feuille. Sinon, soit i la plus petite position dans u telle que u_i est de valeur maximale autorisée (c'est-à-dire $n - i$). Alors $u_1 \dots u_{i-1} = A$ et $u_{i+1} \dots u_n = B$ sont aussi des diagrammes de Tamari. On forme S en greffant les arbres binaires obtenus récursivement par ce procédé appliqué sur A et sur B à un nouveau nœud. Réciproquement, pour chaque nœud interne d'indice i de l'arbre S , étiqueté grâce à un parcours infixe, la valeur de la i -ème lettre du diagramme de Tamari correspondant est donnée par le nombre de nœuds internes dans le sous-arbre droit du nœud i . La démonstration complète est donnée dans [Pal86].

Notre objectif est de coder un couple d'arbre binaires de n nœuds par deux mots de taille n . Pour cela, nous avons besoin d'introduire les diagrammes de Tamari duaux. Le premier arbre binaire du couple est codé par son diagramme de Tamari et le second est codé par son diagramme de Tamari dual.

Définition 2.2. *Un diagramme de Tamari dual est un mot $v = v_1 v_2 \dots v_n$ de longueur n sur l'alphabet \mathbb{N} qui vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i) $0 \leq v_i \leq i - 1$ pour tout $i \in [n]$;
- (ii) $v_{i-j} \leq v_i - j$ pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq v_i$.

La taille d'un diagramme de Tamari dual est son nombre de lettres.

Un mot $v = v_1 \dots v_n$ est un diagramme de Tamari dual si et seulement si $v_n \dots v_1$ est un diagramme de Tamari.

La construction de l'arbre binaire T se fait également de manière récursive, à ceci près que c'est la position maximale i dans le diagramme de Tamari dual dont la valeur est la plus grande autorisée sur cette section du mot qu'il faut choisir en premier. De même pour la réciproque, la procédure est identique, à l'exception que la valeur de la i -ème lettre du diagramme de Tamari dual est donnée par le nombre de nœuds internes dans le sous-arbre gauche du nœud i dans l'arbre T .

Remarque 2.3. *Une conséquence des définitions 2.1 et 2.2 est que la dernière lettre d'un diagramme de Tamari est toujours égale à 0 et que la première lettre d'un diagramme de Tamari dual est toujours égale à 0.*

La représentation graphique d'un diagramme de Tamari de taille n par des colonnes et leurs diagonales donnée dans [Gir11] est une manière simple de vérifier les conditions de la définition 2.1. Chaque lettre du diagramme de Tamari se représente par une colonne dont la hauteur est égal à la valeur de la lettre. Au sommet de chaque colonne de position i et de hauteur h , on trace alors une diagonale de pente -1 , qui intersecte l'axe des abscisses au point $i + h$ (figure 2.1). La condition (ii) se traduit alors par le fait qu'aucune colonne ne doit dépasser une diagonale. La condition (i) est vérifiée si pour toute colonne en position i , le point d'abscisse $i + h$ de l'intersection avec la diagonale est inférieur ou égal à n .

De même, on peut donner une représentation graphique pour le diagramme de Tamari dual de taille n . Pour chaque colonne de position i et de hauteur h , on trace une diagonale de pente 1 entre la hauteur de cette colonne et le point d'abscisse $i - h$. La condition (ii) est vérifiée si aucune colonne ne dépasse une diagonale. La condition (i) est vérifiée si pour toute colonne de position i , le point d'abscisse $i - h$ de l'intersection avec la diagonale est supérieur ou égal à 1.

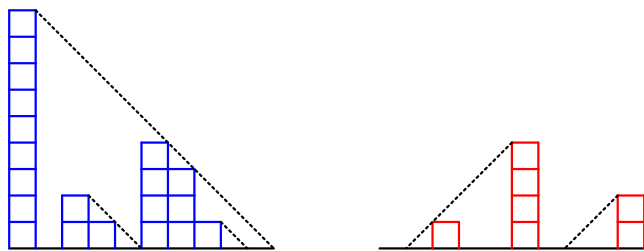


FIGURE 2.1. Exemples de représentations d'un diagramme de Tamari 9021043100 et d'un diagramme de Tamari dual 0010040002 de taille 10.

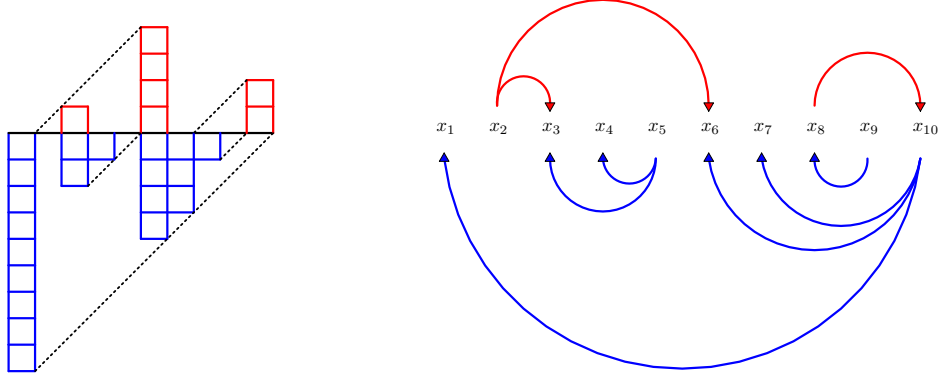
Définition 2.4. Soit u un diagramme de Tamari de taille n et v un diagramme de Tamari dual de taille n . Les diagrammes u et v sont **compatibles** si pour tous $1 \leq i < j \leq n$ tels que $j - i \leq u_i$, alors $v_j < j - i$.

Si u et v sont compatibles, alors le couple (u, v) est appelé **diagramme d'intervalle de Tamari**. L'ensemble des diagrammes d'intervalle de Tamari de taille n est noté \mathcal{TID}_n .

Autrement dit, u un diagramme de Tamari de taille n et v un diagramme de Tamari dual de taille n , sont compatibles si pour toute colonne de position i et de hauteur $v_i \neq 0$ dans v (resp. $u_i \neq 0$ dans u), il n'existe pas de colonne de position j et de hauteur supérieure ou égale à $i - j$ dans u (resp. $j - i$ dans v) avec $i - v_i \leq j \leq i - 1$ (resp. $i + 1 \leq j \leq i + u_i$) et $i \in [n]$. Par exemple, les deux diagrammes de la figure 2.1 sont compatibles.

Il est également possible de donner une représentation graphique du diagramme d'intervalle de Tamari. La figure 2.2 donne cette représentation pour les deux diagrammes de la figure 2.1, où on a simplement considéré la symétrie par rapport à l'axe des abscisses du diagramme de Tamari, pour ensuite le placer sous son dual. Ainsi, le diagramme de Tamari u est dessiné en dessous (en bleu) et son dual v est dessiné au dessus (en rouge). Avec une telle représentation, il est alors facile de vérifier la définition 2.4. En effet, toute colonne de u qui se situe sous la diagonale reliant la colonne de position i dans v au point d'abscisse $i - v_i$, possède une diagonale qui intersecte l'axe des abscisses strictement avant la position i . Symétriquement, les colonnes de v qui se situent sous une diagonale reliant une colonne de u à l'axe des abscisses, ont leur valeur majorée par cette colonne de u .

Remarque 2.5. Une conséquence de la définition 2.4 est que chaque colonne de hauteur non nulle du diagramme de Tamari dual v est précédée d'une colonne de u de hauteur nulle. Symétriquement, chaque colonne de hauteur non nulle du diagramme de Tamari u est suivie d'une colonne de v de hauteur nulle. Autrement dit, soit $u_i = 0$, soit $v_{i+1} = 0$ pour tout $i \in [n]$.



(A) Diagramme d'intervalle de Tamari.

(B) Intervalle-poset.

FIGURE 2.2. Exemple de représentation d'un diagramme d'intervalle de Tamari (9021043100, 0010040002) de taille 10 et de l'intervalle-poset associé.

Soit χ l'application qui à un diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) de taille n associe la relation

$$(\{x_1, \dots, x_n\}, \triangleleft) \quad (2.1)$$

où pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq l \leq u_i$, $x_{i+l} \triangleleft x_i$ et pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq k \leq v_i$, $x_{i-k} \triangleleft x_i$.

Proposition 2.6. *L'application χ est à valeurs dans \mathcal{IP}_n .*

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$ et posons $P = \chi(u, v)$. Il s'agit d'abord de montrer que \triangleleft est bien un ordre partiel, puis que la propriété des intervalle-posets est vérifiée.

- (1) Par définition de χ on a $x_{i+l} \triangleleft x_i$ et $x_{i-k} \triangleleft x_i$ avec $0 \leq l \leq u_i$ et $0 \leq k \leq v_i$ pour tout $x_i \in P$. En particulier, $x_i \triangleleft x_i$. Ceci montre que P est bien réflexive.
- (2) Soient x_i, x_j et x_k des sommets de P avec $i < j < k$.
 - (a) Supposons que $x_j \triangleleft x_i$ et que $x_k \triangleleft x_j$. Alors $x_j \triangleleft x_i$ implique qu'il existe une valeur $0 \leq i' \leq u_i$ telle que $j = i + i'$. D'où, par la condition (ii) de la définition 2.1, $u_j = u_{i+i'} \leq u_i - i'$. De même, $x_k \triangleleft x_j$ implique qu'il existe une valeur $0 \leq j' \leq v_j$ telle que $k = j + j'$. Toujours par la même condition, on a donc que $u_k = u_{j+j'} \leq u_j - j'$. En utilisant ces deux inégalités, on obtient que $u_k \leq u_i - i' - j'$, c'est-à-dire $u_i \geq u_k + i' + j'$. Comme $i' + j' = k - i$, on a alors $u_i \geq k - i$, ce qui implique par définition de χ que $x_k \triangleleft x_i$ dans P .
 - (b) Supposons que $x_j \triangleleft x_i$ et que $x_i \triangleleft x_k$. Alors $x_j \triangleleft x_k$ car $x_i \triangleleft x_k$ implique que tout sommet entre x_i et x_k est en relation avec x_k .

- (c) Supposons que $x_i \triangleleft x_j$ et que $x_j \triangleleft x_k$. Alors $x_i \triangleleft x_j$ implique qu'il existe une valeur $0 \leq i' \leq v_i$ telle que $i = j - i'$. Par la condition (ii) de la définition 2.2, $v_i = v_{j-i'} \leq v_j - i'$. De même, $x_j \triangleleft x_k$ implique qu'il existe une valeur $0 \leq j' \leq v_j$ telle que $j = k - j'$. Et par la même condition (ii), $v_j = v_{k-j'} \leq v_k - j'$.
- Par ces deux inégalités, on a alors que $v_i \leq v_k - i' - j'$, c'est-à-dire $v_k \geq v_i + i' + j'$. Comme $i' + j' = k - i$, on a alors $v_k \geq k - i$, ce qui implique par définition de χ que $x_i \triangleleft x_k$ dans P .
- (d) Supposons que $x_j \triangleleft x_k$ et que $x_k \triangleleft x_i$. Alors $x_j \triangleleft x_i$ car $x_k \triangleleft x_i$ implique que tout sommet entre x_i et x_k est en relation avec x_i .

Ceci montre que P est transitive.

À noter qu'il est impossible d'avoir le cas $x_i \triangleleft x_k$ et $x_k \triangleleft x_j$ puisque P est l'image d'un diagramme d'intervalle de Tamari. Obtenir ce cas serait une contradiction avec la définition 2.4. De même, le cas $x_i \triangleleft x_j$ et $x_k \triangleleft x_i$ est impossible.

- (3) Soient $i < j$ et x_i, x_j des sommets de P . Supposons que $x_j \triangleleft x_i$ et $x_i \triangleleft x_j$. Par définition de χ , $x_j \triangleleft x_i$ si et seulement si $u_i \geq j - i$. De même, $x_i \triangleleft x_j$ si et seulement si $v_j \geq j - i$. Or, la définition 2.4 interdit ce cas de figure. Ceci montre que P est antisymétrique.
- (4) La définition de χ implique directement que P vérifie la propriété des intervalle-posets, à savoir que pour tous x_i, x_j et x_k des sommets de P avec $i < j < k$, si $x_k \triangleleft x_i$ alors $x_j \triangleleft x_i$, et si $x_i \triangleleft x_k$ alors $x_j \triangleleft x_k$.

Finalement, P est bien un intervalle-poset. \square

Théorème 2.7. *L'application $\chi : \mathcal{TID}_n \rightarrow \mathcal{IP}_n$ est bijective.*

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{IP}_n$. On définit le couple de mots $(u_1 u_2 \dots u_n, v_1 v_2 \dots v_n) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ où pour tout $i \in [n]$,

$$u_i = \#\{x_j \in P : x_j \triangleleft x_i \text{ et } i < j\}; \quad (2.2)$$

$$v_j = \#\{x_i \in P : x_i \triangleleft x_j \text{ et } i < j\}. \quad (2.3)$$

Montrons que ce couple de mots, noté (u, v) , est un diagramme d'intervalle de Tamari et que son image par χ donne P .

- (1) Comme P est un intervalle-poset, pour tout $i \in [n]$, il y a au plus $n - i$ sommets de P en relation décroissante vers x_i et au plus $i - 1$ sommets de P en relation croissante vers x_i . Ce qui vérifie la condition (i) de la définition 2.1 et (i) de la définition 2.2.
- (2) Soient x_i et x_{i+j} des sommets de P tels que $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq u_i$. Le fait que $u_i \geq j$ signifie par la définition de u_i dans l'équation (2.2) qu'il existe au moins j sommets en relation décroissante avec le sommet x_i . Autrement dit, $x_{i+j} \triangleleft x_i$. Par transitivité des intervalle-posets, on a donc que pour tout $i + j \leq k \leq n$, si $x_k \triangleleft x_{i+j}$ alors $x_k \triangleleft x_i$. D'où $u_{i+j} + j \leq u_i$, ce qui vérifie la condition (ii) dans la définition 2.1.

Soient maintenant x_i et x_{i-j} des sommets de P tels que $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq v_i$. Par définition de v_i dans l'équation (2.3), $v_i \geq j$ signifie qu'il existe au moins j sommets en relation croissante avec le sommet x_i . C'est-à-dire $x_{i-j} \triangleleft x_i$. Par transitivité des intervalle-posets, on a donc que pour tout $1 \leq k \leq i - j$, si $x_k \triangleleft x_{i-j}$ alors $x_k \triangleleft x_i$. D'où $v_{i-j} + j \leq v_i$. Ceci donne la condition (ii) de la définition 2.2.

- (3) Soient $1 \leq i < j \leq n$ tels que $u_i \geq j - i$. Supposons que $v_j \geq j - i$. La relation $u_i \geq j - i$ signifie qu'il existe $j - i$ sommets de P en relation décroissante avec x_i . C'est-à-dire $x_j \triangleleft x_i$. De même, la relation $v_j \geq j - i$ signifie que $x_i \triangleleft x_j$. Ces deux implications mènent à une contradiction avec la nature antisymétrique des intervalle-posets. Nécessairement, on a donc $v_j < j - i$, ce qui vérifie la condition de la définition 2.4.

Le couple (u, v) est bien un diagramme d'intervalle de Tamari de taille n . Enfin, il est clair que $\chi(u, v) = P$ par construction. L'application χ est donc bien surjective.

Soient (u, v) et (u', v') deux diagrammes d'intervalle de Tamari de taille n , tels que $(u, v) \neq (u', v')$ et tels que $\chi(u, v) = P$ et $\chi(u', v') = P'$. Alors, il existe au moins une lettre de (u, v) et de (u', v') telle que $u_i \neq u'_i$ ou $v_i \neq v'_i$, pour $i \in [n]$. Le nombre de sommets de P en relation avec le sommet x_i associé à la composante u_i et v_i par χ est donc différent du nombre de sommets de P' en relation avec le sommet x'_i associé à la composante u'_i et v'_i par χ , d'où $P \neq P'$. Ceci prouve l'injectivité de χ . \square

La représentation minimaliste des intervalle-posets définie dans § 1 permet une construction directe du diagramme d'intervalle de Tamari correspondant. En effet, considérons la représentation minimaliste d'un intervalle-poset P de taille n . Pour toute relation $x_j \triangleleft x_i$ (resp. $x_i \triangleleft x_j$) dessinée, avec $1 \leq i < j \leq n$, on pose $u_i = j - i$ (resp. $v_j = j - i$). Ceci forme un couple de mots (u, v) qui est l'antécédent par χ de P .

Un exemple est donné par la figure 2.2, où un diagramme d'intervalle de Tamari et son intervalle-poset qui est son image par χ sont représentés.

3. CONSTRUCTION DES COORDONNÉES CUBIQUES

Nous construisons dans cette section l'ensemble des *coordonnées cubiques*, et montrons que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des diagrammes d'intervalles de Tamari. Nous finissons cette partie avec quelques propriétés des coordonnées cubiques.

Soit (u, v) un diagramme d'intervalle de Tamari de taille n . On construit un $(n - 1)$ -uplet $(u_1 - v_2, u_2 - v_3, \dots, u_{n-1} - v_n)$ à partir des lettres de (u, v) , en soustrayant v_{i+1} de u_i pour tout $i \in [n]$. Les $(n - 1)$ -uplets ainsi obtenus peuvent être caractérisés en utilisant la définition des diagrammes d'intervalles de Tamari.

Définition 3.1. *Soit c un $(n - 1)$ -uplet de composantes à valeur dans \mathbb{Z} . Le $(n - 1)$ -uplet c est une *coordonnée cubique* si le couple (u, v) , où u est le mot défini par $u_n = 0$ et pour tout $i \in [n - 1]$ par*

$$u_i = \max(c_i, 0), \quad (3.1)$$

et v est le mot défini par $v_1 = 0$ et pour tout $2 \leq i \leq n$ par

$$v_i = |\min(c_{i-1}, 0)|, \quad (3.2)$$

est un diagramme d'intervalle de Tamari. La taille d'une coordonnée cubique est son nombre de composantes plus un. L'ensemble des coordonnées cubiques de taille n est noté CC_n .

Par exemple, la figure 2.2 donne le diagramme d'intervalle de Tamari (9021043100, 0010040002). Sa coordonnée cubique est $(9, -1, 2, 1, -4, 4, 3, 1, -2)$.

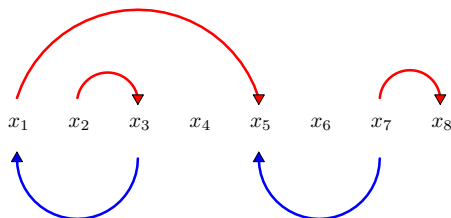


FIGURE 3.1. Exemple d'un intervalle-poset de taille 8, de coordonnée cubique $(2, -1, 0, -4, 2, 0, -1)$.

Soit ϕ l'application qui associe à une coordonnée cubique c donnée le diagramme d'intervalle de Tamari construit dans la définition 3.1.

Théorème 3.2. *L'application $\phi : \mathcal{CC}_n \rightarrow \mathcal{TID}_n$ est bijective.*

Démonstration. Soient c et c' deux coordonnées cubiques de taille n tels que $c \neq c'$. Alors il existe une composante $c_i \neq c'_i$, avec $i \in [n-1]$. Par l'application ϕ , il existe donc un $u_i \neq u'_i$ ou un $v_{i+1} \neq v'_{i+1}$, c'est-à-dire $(u, v) \neq (u', v')$. Ce qui montre l'injectivité de ϕ .

Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$. Posons $c = (u_1 - v_2, u_2 - v_3, \dots, u_{n-1} - v_n)$, le $(n-1)$ -uplet dont les composantes sont données par la différence entre u_i et v_{i+1} pour tout $i \in [n-1]$. D'après la remarque 2.5, si $u_i \neq 0$ alors $v_{i+1} = 0$ pour tout $i \in [n-1]$. D'où $\phi(c) = (u, v)$, qui est bien un diagramme d'intervalle de Tamari par hypothèse. Par la définition 3.1, on a alors $c \in \mathcal{CC}_n$. Ce qui montre que ϕ est surjective. \square

Par l'application ϕ , il est donc possible de construire une coordonnée cubique à partir de son diagramme d'intervalle de Tamari et inversement. Graphiquement, il suffit de décaler le diagramme de Tamari dual vers la gauche d'une position et de relever de gauche à droite la hauteur des colonnes, en mettant un signe positif pour les colonnes de diagramme de Tamari et un signe négatif pour son dual, et en oubliant la dernière colonne de hauteur nulle. On reconstruit de la même manière les colonnes du diagramme de Tamari et de son dual à partir des composantes de la coordonnée cubique, puis on décale le diagramme de Tamari dual vers la droite d'une position.

En utilisant l'application χ , on peut alors donner directement la coordonnée cubique d'un intervalle-poset. De la même manière qu'on décale d'une position vers la gauche le diagramme de Tamari dual, on décale vers la gauche d'un sommet toutes les relations croissantes de l'intervalle-poset. Puis, pour chaque sommet x_i , on compte le nombre d'éléments en relation croissante ou décroissante de but x_i , hors relation réflexive, pour $i \in [n-1]$. Ces nombres deviennent alors les composantes de signe positif s'il s'agit d'une relation décroissante, négatif sinon, de la coordonnée cubique. Comme les relations croissantes ont été décalées, le nombre associé au sommet x_n est toujours nul. On oublie donc ce sommet pour la construction de la coordonnée cubique. De même, avec chaque composante d'une coordonnée cubique, on reconstruit les relations croissantes et décroissantes sur $n-1$ sommets, puis on décale les relations croissantes vers la droite, créant ainsi le sommet x_n .

Lemme 3.3. *Soit $c \in \mathcal{CC}_n$ telle qu'il existe une composante $c_i \neq 0$ pour $i \in [n-1]$. Soit c' le $(n-1)$ -uplet tel que $c'_i = 0$ et $c'_j = c_j$ pour tout $j \neq i$, $j \in [n-1]$. Alors c' est une coordonnée cubique.*

Démonstration. Soit c' le $(n-1)$ -uplet tel que décrit dans l'énoncé. Notons $(u', v') = \phi(c')$ et (u'_i, v'_{i+1}) le couple de lettres correspondant à c'_i par l'application ϕ . Comme $c'_i = 0$, on a alors $(u'_i, v'_{i+1}) = (0, 0)$. Pour que c' soit une coordonnée cubique, on doit vérifier que (u', v') est un diagramme d'intervalle de Tamari. Ce qui revient à vérifier les conditions des définitions 2.1, 2.2 et 2.4. Remplaçons dans (ii) de la définition 2.1 u_i par 0. La condition $u_{i+j} \leq u_i - j$ pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq u_i$, devient alors $0 \leq 0$ car j est égal à 0. De même, si on remplace dans (ii) de la définition 2.2 v_i par 0, la condition $v_{i-j} \leq v_i - j$ pour tout $i \in [n]$ et $0 \leq j \leq v_i$ devient $0 \leq 0$ pour la même raison. Enfin, on doit vérifier la condition de la définition 2.4 : pour tous $1 \leq i < j \leq n$, si $j - i \leq u_i$ alors $v_j < j - i$. Cette condition n'est jamais à vérifier pour $u_i = 0$ ou pour $v_j = 0$ car $j - i > 0$. Le $(n-1)$ -uplet c' est donc une coordonnée cubique. \square

Selon le cas et ce que nous voulons démontrer, nous utiliserons soit la définition des coordonnées cubiques, soit celle des diagrammes d'intervalles de Tamari. Par exemple, les résultats suivants sont énoncés pour les diagrammes d'intervalles de Tamari.

Définition 3.4. *Un diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) de taille n est dit **synchrone** si pour tout $i \in [n-1]$, $u_i \neq 0$ ou $v_{i+1} \neq 0$.*

Cette définition peut se traduire pour les coordonnées cubiques.

Définition 3.5. *Une coordonnée cubique c de taille n est dite **synchrone** si pour tout $i \in [n-1]$, $c_i \neq 0$. L'ensemble des coordonnées cubiques synchrones de taille n est noté \mathcal{CC}_n^{sync} .*

Rappelons qu'un intervalle de Tamari $[S, T]$ est synchrone si et seulement si les arbres binaires S et T ont la même canopée [PRV17]. La définition de la canopée est rappelée dans la partie 1.

Proposition 3.6. *Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$. Le diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) est synchrone si et seulement si $\rho(\chi(u, v)) = [S, T]$ est un intervalle de Tamari synchrone.*

Démonstration. Supposons que (u, v) ne soit pas synchrone, il existe alors un indice $i \in [n-1]$ tel que $u_i = 0$ et $v_{i+1} = 0$. Notons $P = \chi(u, v)$ l'intervalle-poset associé à (u, v) .

La lettre u_i est égale à 0 si et seulement si il n'existe aucune relation décroissante de but x_i dans P , c'est-à-dire si et seulement si le nœud d'indice i ne possède aucun fils droit dans l'arbre S (voir partie 1 et [CP15]). De plus, comme i ne peut pas être égal à n , le nœud d'indice i ne peut pas être le nœud le plus à droite dans S . Il est donc fils gauche du nœud d'indice $i+1$. Le sous-arbre à droite du nœud i est alors une feuille orientée vers la droite.

Symétriquement, $v_{i+1} = 0$ si et seulement si il n'existe aucune relation croissante de but x_{i+1} dans P , c'est-à-dire si et seulement si le nœud d'indice $i+1$ n'a aucun fils gauche dans l'arbre T . Puisque $i+1$ est toujours différent de 1, le nœud d'indice $i+1$ ne peut pas être le nœud le plus à gauche de T , donc le nœud $i+1$ doit être fils droit du nœud i . Le sous-arbre à droite du nœud d'indice i a une feuille orientée vers la gauche comme un sous-arbre gauche.

Au final, il existe au moins une lettre d'indice i dans la canopée de l'arbre S différente de celle de l'arbre T , pour le même indice. La figure 3.2 donne une représentation locale des deux arbres

binaires S et T aux sommets i et $i + 1$. Les canopées sont alors différentes. Par conséquent, les arbres binaires S et T ne sont pas synchrones.

Réciproquement, deux arbres binaires S et T ne sont pas synchrones s'il existe au moins une lettre d'indice i dans la canopée de S différente de celle d'indice i dans la canopée de T . Il suffit de remonter les arguments précédents pour trouver que le diagramme d'intervalle de Tamari correspondant ne peut pas être synchrone.

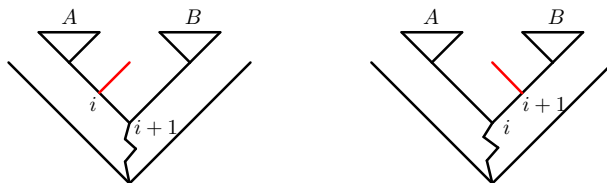


FIGURE 3.2. Représentation locale des arbres S et T au niveau des nœuds d'indice i et $i + 1$, où A et B sont des sous-arbres.

□

Rappelons qu'un intervalle-poset P de taille n est *nouveau* si :

- (1) il n'existe pas de relation décroissante commençant à x_n ;
- (2) il n'existe pas de relation croissante commençant à x_1 ;
- (3) il n'existe pas de relation de la forme $x_{i+1} \triangleleft x_{j+1}$ et $x_j \triangleleft x_i$ avec $i < j$.

La définition d'un intervalle-poset nouveau est donnée dans [Rog19].

Définition 3.7. *Un diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) de taille n est dit nouveau si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $0 \leq u_i \leq n - i - 1$ pour tout $i \in [n - 1]$;
- (ii) $0 \leq v_j \leq j - 2$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$;
- (iii) $u_k < l - k - 1$ ou $v_l < l - k - 1$ pour tout $k, l \in [n]$ tels que $k + 1 < l$.

Proposition 3.8. *Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$. Le diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) est nouveau si et seulement si $\chi(u, v) = P$ est un intervalle-poset nouveau.*

Démonstration. Supposons que P est non nouveau.

- Soit il existe $x_n \triangleleft x_i$ avec $i \in [n - 1]$. Par le théorème 2.7, on a $u_i = \#\{x_j \in P : x_j \triangleleft x_i \text{ et } i < j\}$. Donc dans $\chi^{-1}(P)$, on a $u_i = n - i$. Ce qui donne la négation de (i) de la définition 3.7.
- Soit il existe $x_1 \triangleleft x_j$ avec $j \in \{2, \dots, n\}$. Alors dans $\chi^{-1}(P)$, on a $v_j = j - 1$. En effet, dans le théorème 2.7 on définit $v_j = \#\{x_i \in P : x_i \triangleleft x_j \text{ et } i < j\}$. Ce qui donne la négation de (ii) de la définition 3.7.

- Soit il existe une relation de la forme $x_{i+1} \triangleleft x_{j+1}$ et $x_j \triangleleft x_i$ avec $i < j$. Dans $\chi^{-1}(P)$ on a alors d'une part $v_{j+1} \geq j - i$ et d'autre part $u_i \geq j - i$. Posons $j + 1 = l$ et $i = k$, on a alors que $k + 1 < l$ et donc la négation de (iii) de la définition 3.7.

Nous avons montré que que P non nouveau implique $\chi^{-1}(P) = (u, v)$ non nouveau. Réciproquement, si on suppose que (u, v) est non nouveau, alors en considérant la négation des trois conditions de la définition 3.7, on retrouve la négation des trois conditions pour $\chi(u, v)$ par les mêmes arguments. \square

Dans [Rog19] il est démontré qu'un intervalle de Tamari est nouveau si et seulement si l'intervalle-poset associé est nouveau. Avec la proposition 3.8, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.9. *Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$. Le diagramme d'intervalle de Tamari (u, v) est nouveau si et seulement si $\rho(\chi(u, v))$ est un intervalle de Tamari nouveau.*

Proposition 3.10. *Soit $(u, v) \in \mathcal{TID}_n$. Si (u, v) est synchrone alors (u, v) est non nouveau.*

Démonstration. Supposons que (u, v) est synchrone et nouveau.

Si (u, v) est nouveau, alors d'une part $u_i < n - i$ pour $i \in [n - 1]$, et d'autre part, $v_j < j - 1$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$. En particulier, $u_{n-1} = 0$ et $v_2 = 0$. Ce qui implique, comme (u, v) est synchrone, que $u_1 \neq 0$ et $v_n \neq 0$.

De plus, (u, v) est nouveau si la condition (iii) de la définition 3.7 est vérifiée. Notamment, pour tout $k \in [n - 2]$, $u_k < 1$ ou $v_{k+2} < 1$. Notons (*) cette condition.

Par hypothèses, $u_1 \neq 0$. Alors, par définition des synchrones, soit $u_2 \neq 0$, soit $v_3 \neq 0$. La deuxième possibilité est impossible par (*), d'où $u_2 \neq 0$. Par le même raisonnement, pour tout $k \in [n - 2]$, $u_k \neq 0$. Or, également par hypothèses, $v_n \neq 0$. On a donc $u_{n-2} \neq 0$ et $v_n \neq 0$, ce qui est une contraction avec (*). \square

4. RELATION D'ORDRE DU POSET \mathcal{CC}_n

Dans cette partie, nous définissons le poset des coordonnées cubiques, et munissons cet ensemble d'une relation d'ordre. Puis, nous montrons qu'il existe un isomorphisme entre ce poset et le poset des intervalles de Tamari. Les deux bijections construites dans la section 2 et la section 3 nous permettent d'établir cet isomorphisme de poset.

Pour tous $c, c' \in \mathcal{CC}_n$, on pose $c \leq_{cc} c'$ si et seulement si $c_i \leq c'_i$ pour tout $i \in [n - 1]$. Muni de la relation \leq_{cc} , l'ensemble \mathcal{CC}_n est un poset, le *poset des coordonnées cubiques*.

Pour tous $c, c' \in \mathcal{CC}_n$, on pose $c \leq_v c'$ si et seulement si c et c' ne diffèrent que pour une unique composante d'indice $i \in [n - 1]$, et que la différence des valeurs $c'_i - c_i$ est positive et minimale, au sens où s'il existe une coordonnée cubique $c'' \in \mathcal{CC}_n$ telle que $c \leq_{cc} c'' \leq_{cc} c'$, alors $c'' = c$ ou $c'' = c'$. On appelle cette relation \leq_v la *relation de voisinage*.

Clairement, la relation de couverture de $(\mathcal{CC}_n, \leq_{cc})$ contient la relation de voisinage \leq_v . En effet, si $c \leq_v c'$, alors en particulier, il n'existe pas de $c'' \in \mathcal{CC}_n$ différente de c et de c' telle que $c \leq_{cc} c'' \leq_{cc} c'$. Autrement dit, c' couvre c . Montrons à présent que ce sont les mêmes relations grâce aux deux lemmes suivants.

Lemme 4.1. *Soient $c, c' \in \mathcal{CC}_n$ tels que $c \leq_{cc} c'$. Alors soit $c \leq_v c'$, soit il existe $c'' \in \mathcal{CC}_n$ différent de c et de c' tel que $c \leq_{cc} c'' \leq_{cc} c'$.*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de relation de voisinage entre c et c' . En particulier, soit il existe une unique composante c_k telle que $c_k < c'_k - 1$ et il existe alors au moins une coordonnée cubique c'' telle que $c_k < c''_k < c'_k$, soit il existe au moins deux composantes d'indices $i, j \in [n-1]$ telles que $c_i < c'_i$ et $c_j < c'_j$. Montrons que dans tous les cas, on peut construire $c'' \in \mathcal{CC}_n$ différent de c et de c' tel que $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$. Dans le premier cas, l'existence de c'' est immédiate. Supposons qu'on soit dans le deuxième cas, et posons $i = \min\{k : c_k < c'_k\}$ et $j = \max\{k : c_k < c'_k\}$.

Notons $\phi(c) = (u, v)$ et $\phi(c') = (u', v')$ et (u_k, v_{k+1}) le couple de lettres image de c_k par ϕ , pour tout $k \in [n-1]$. Rappelons que dans un couple (u_k, v_{k+1}) , au moins une des deux lettres est nulle, et que si c_k est de signe positif (resp. négatif), alors seul u_k (resp. v_{k+1}) est non nulle. Aussi, si une composante c_k est de signe positif (resp. négatif), alors elle majore toutes les composantes c_l avec $k+1 \leq l \leq k+c_k$ (resp. avec $k+c_k \leq l \leq k-1$). Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $\phi(c)$, et de reprendre la condition (ii) de la définition 2.1 (resp. la condition (ii) de la définition 2.2) et la définition 2.4.

- (1) Supposons qu'il existe une composante c_k telle que c_k et c'_k sont de signe contraire. Comme $c'_k > c_k$ par hypothèse, c'_k est strictement positive, et c_k strictement négative. Soit $c'' = (c'_1, \dots, c'_{k-1}, 0, c'_{k+1}, \dots, c'_{n-1})$, le $(n-1)$ -uplet où la composante d'indice k est remplacée par 0 dans c' . D'après le lemme 3.3, c'' est une coordonnée cubique. De plus, comme $c_k < 0 < c'_k$ par hypothèse, $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$.

- (2) Sinon,

- (a) soit c'_i est négative ou nulle.

Posons $c'' = (c_1, \dots, c_{i-1}, c'_i, c_{i+1}, \dots, c_{n-1})$, le $(n-1)$ -uplet où la composante c_i est remplacée par c'_i dans c .

Comme c'_i est négative ou nulle, elle ne majore pas les composantes c_l de c'' pour $i+1 \leq l \leq n-1$. Il en va de même pour les composantes à sa gauche, puisque i est l'indice minimal tel que $c_i < c'_i$. Autrement dit, on a $c_t = c'_t$ pour $1 \leq t \leq i-1$. D'où $c'' \in \mathcal{CC}_n$.

De plus, on a supposé qu'il existe au moins un autre indice j tel que $c_j < c'_j$. On en déduit que $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$.

- (b) Soit c'_j est strictement positive.

Posons $c'' = (c'_1, \dots, c'_{j-1}, c_j, c'_{j+1}, \dots, c'_{n-1})$, le $(n-1)$ -uplet où la composante c'_j est remplacée par c_j dans c' .

La composante c_j est positive, elle ne majore donc pas les composantes c'_l de c'' pour $1 \leq l \leq j-1$. Pour les composantes à droite de c_j , puisque j est l'indice maximal tel que $c_j < c'_j$, on a $c'_t = c_t$ pour $j+1 \leq t \leq n-1$. Donc $c'' \in \mathcal{CC}_n$.

Pour la même raison que dans le cas précédent, $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$.

- (c) Soit c'_i est strictement positive et c'_j est négative ou nulle.

Posons $c'' = (c_1, \dots, c_{i+c_i}, c'_{i+c_i+1}, \dots, c'_{n-1})$, où les composantes c_k sont remplacées par c'_k pour tout k tel que $i+c_i+1 \leq k \leq n-1$ dans c .

La composante c_i est positive, donc elle n'a aucune incidence sur les composantes à sa gauche. Elle majore seulement les composantes c_k où $i+1 \leq k \leq i+c_i$.

Pour tout $i + c_i + 1 \leq l \leq n - 1$, $c_l \leq c'_l$. Cela signifie que soit $c'_l = 0$, et dans ce cas n'a pas d'incidence sur les autres composantes d'après le lemme 3.3. Soit c'_l est positive et majore alors que les composantes à sa droite, qui respectent par hypothèse toutes les conditions des définitions 2.1, 2.2 et 2.4. Soit c'_l est négative, et dans ce cas, la majoration de la composante c_l prime sur celle de c'_l . C'est-à-dire que les composantes c_t , pour $1 \leq t \leq i + c_i$, ne peuvent être davantage majorées par c'_l que par c_l . Le candidat c'' est donc bien une coordonnée cubique.

De plus, toujours pour la même raison que les cas précédents, $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$.

Il est donc toujours possible de construire un élément c'' de \mathcal{CC}_n différent de c et c' tel que $c \leq_{\text{cc}} c'' \leq_{\text{cc}} c'$. \square

Le lemme 4.1 peut se reformuler ainsi.

Lemme 4.2. *La relation de voisinage \leq_v contient la relation de couverture de $(\mathcal{CC}_n, \leq_{\text{cc}})$.*

Soit $\psi = \phi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ \rho^{-1}$ l'application du poset des intervalles de Tamari vers le poset $(\mathcal{CC}_n, \leq_{\text{cc}})$ des coordonnées cubiques.

Théorème 4.3. *L'application ψ est un isomorphisme de posets.*

Démonstration. Soient $[S, T], [S', T'] \in \mathcal{TI}_n$, et $\psi([S, T]) = c$, $\psi([S', T']) = c'$. Notons également $\phi(c) = (u, v)$, $\phi(c') = (u', v')$ et $\chi(u, v) = P$, $\chi(u', v') = P'$.

L'application ψ est un isomorphisme de posets si ψ et son inverse préservent les relations d'ordre. Comme ces relations sont transitives, il suffit de montrer que $[S', T']$ couvre $[S, T]$ dans $(\mathcal{TI}_n, \leq_{\text{ti}})$ si et seulement si c' couvre c dans $(\mathcal{CC}_n, \leq_{\text{cc}})$.

Dans la partie 1, nous avons vu avec le lemme 1.2 que $[S', T']$ couvre $[S, T]$ si et seulement si P et P' vérifient (\star) ou (\diamond) . Rappelons que (\star) (resp. (\diamond)) est la condition suivante : P' est obtenu seulement en ajoutant (resp. enlevant) des relations décroissantes (resp. croissantes) de but un sommet x_i dans P , tels que si on retire (resp. ajoute) une seule de ces relations décroissantes (resp. croissantes), alors soit P est obtenu, soit l'objet obtenu n'est pas un intervalle-poset.

En utilisant le lemme 1.2 et le lemme 4.2, montrer que $[S', T']$ couvre $[S, T]$ si et seulement si c' couvre c , est équivalent à montrer que P et P' vérifient (\star) ou (\diamond) pour le sommet x_i si et seulement si $c \leq_v c'$ avec $c_i < c'_i$.

Supposons que $c \leq_v c'$, et que $c_i < c'_i$ avec $i \in [n - 1]$. Nous avons alors deux cas possibles. Soit c'_i est strictement positive, soit elle est négative.

- (1) Si c'_i est strictement positive, alors c_i est positive d'après le lemme 3.3. Donc $c'_i = u'_i$ et $c_i = u_i$. L'image par ϕ de c et celle de c' diffèrent seulement pour la lettre u_i . De plus, le fait que $c \leq_v c'$ implique en particulier que s'il existe un mot u'' de taille n tel que $u''_i = u'_i - 1$ et $u''_j = u'_j$ pour tout $j \neq i$, alors soit $(u'', v') = (u, v)$, soit (u'', v') n'est pas un diagramme d'intervalle de Tamari. En effet, supposons qu'il existe un tel diagramme d'intervalle de Tamari (u'', v') , différent de (u, v) . Alors, notons c'' la coordonnée cubique associée à (u'', v') par ϕ^{-1} . Comme $u''_i = u'_i - 1$ et $u''_j = u'_j$ pour tout $j \neq i$, on a $c'' \leq_{\text{cc}} c'$. De même, comme $u'' \neq u$, on a $c \leq_{\text{cc}} c''$. En additionnant ces deux faits, on a alors une contradiction avec notre hypothèse $c \leq_v c'$.

La différence d'une unique lettre u_i entre (u, v) et (u', v') se traduit directement par l'application χ : l'intervalle-poset P' possède plus de relations décroissantes de but x_i que le sommet x_i dans P . De plus, le fait qu'il n'existe pas d'autre diagramme d'intervalle de Tamari entre (u, v) et (u', v') implique que P est obtenu en ajoutant un nombre de relations décroissantes minimal dans P . Cela signifie que si une relation décroissante de but x_i est retirée dans P' , alors soit on obtient P , soit l'objet obtenu n'est pas un intervalle-poset. D'où P et P' vérifient (\star) .

- (2) Symétriquement, si c'_i est négative, en utilisant les mêmes arguments, on obtient que l'intervalle-poset P' possède moins de relations décroissantes de but x_{i+1} que le sommet x_{i+1} dans P , et cela, de manière minimale. D'où P et P' vérifient (\diamond) .

Réciproquement, supposons que P et P' vérifient soit (\star) , soit (\diamond) pour le sommet x_i . Là encore, nous avons deux cas possibles.

- (1) Si P et P' vérifient (\star) , alors comme seules des relations décroissantes sont ajoutées dans P' , seul u' est modifié dans (u', v') par rapport à (u, v) . De plus, comme P' est obtenu en ajoutant des relations décroissantes de but x_i dans P , alors seule la lettre u'_i de u' est augmentée par rapport à u . En outre, comme le nombre de relations décroissantes ajoutées dans P est minimal, il ne peut pas y avoir de diagramme d'intervalle de Tamari entre (u, v) et (u', v') , et donc pas de coordonnée cubique entre c et c' . Au final, l'image par ϕ^{-1} de (u', v') est la coordonnée cubique c' avec $c'_i = u'_i$ et $c'_j = c_j$ pour tout $j \neq i$. D'où $c \leq_v c'$.
- (2) Si P et P' vérifient (\diamond) , alors comme seules des relations croissantes sont enlevées dans P' , seul v' est modifié dans (u', v') par rapport à (u, v) . De plus, comme P' est obtenu en enlevant des relations croissantes de but x_i dans P , alors seule la lettre v'_i de v' est diminuée par rapport à v . En ajoutant le fait que le nombre de relations croissantes enlevées dans P est minimal, on a bien que seule la composante $c'_{i-1} = -v'_i$ de c' a augmentée par rapport à c . D'où $c \leq_v c'$.

Nous pouvons alors conclure que ψ est un isomorphisme de posets. \square

Le diagramme suivant donne un récapitulatif des applications utilisées dans les parties 2, 3 et 4. Rappelons que $\psi = \phi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ \rho^{-1}$; ce diagramme d'isomorphismes de posets est donc commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{TID}_n & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{IP}_n \\ \uparrow \phi & & \downarrow \rho \\ \mathcal{CC}_n & \xleftarrow{\psi} & \mathcal{TI}_n \end{array}$$

Une conséquence de l'isomorphisme de posets ψ est que la dimension d'ordre [MP90, Tro02] du poset des intervalles de Tamari est au plus égale à $n - 1$.

5. RÉALISATION CUBIQUE ET CELLULES

Le théorème 4.3 apporte une traduction simple de la relation d'ordre entre deux intervalles de Tamari. Nous donnons la réalisation géométrique induite par cette relation d'ordre qui est naturelle pour les coordonnées cubiques. Puis, nous étudions de manière combinatoire les cellules formées par cette réalisation.

Pour tout intervalle de Tamari, on place dans l'espace \mathbb{R}^{n-1} sa coordonnée cubique correspondante. La réalisation géométrique du poset $(\mathcal{CC}_n, \leq_{cc})$ se construit alors de la façon suivante. Pour tous $c, c' \in \mathcal{CC}_n$, c et c' sont reliées par une flèche orientée de c vers c' si et seulement si c' couvre c . La réalisation géométrique ainsi obtenue est appelée *réalisation cubique*.

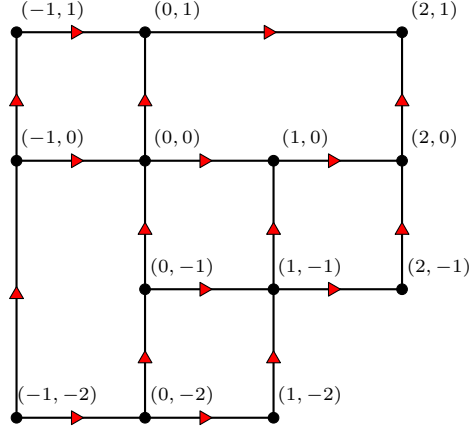


FIGURE 5.1. Réalisation cubique de \mathcal{CC}_3 .

La figure 5.1 est la réalisation cubique de \mathcal{CC}_3 , où les éléments de \mathcal{CC}_3 sont les sommets et les flèches sont les relations de couverture orientées vers les éléments couvrants. La figure 6.2 est la réalisation cubique de \mathcal{CC}_4 .

En topologie algébrique, pour définir les produits tensoriels des A_∞ -algèbres, on utilise un complexe cellulaire appelé la *diagonale de l'associaèdre*. Ce complexe a notamment été étudié par Loday [Lod11], par Sanedlidze et Umble [SU04] ou encore par Markl et Shnider [MS06]. Plus récemment, on en trouve une description dans l'article [MTTV19]. La réalisation de ce complexe semble, à déformation près, être identique à la réalisation cubique.

Dans le dessin 5.1, on peut voir une organisation "cellulaire" apparaître. Grâce aux coordonnées cubiques, nous allons donner une définition combinatoire de ces cellules. L'objectif final est de mieux comprendre la réalisation du poset des coordonnées cubiques, en tant qu'objet géométrique.

Définition 5.1. Soit $c \in \mathcal{CC}_n$. Supposons qu'il existe $c' \in \mathcal{CC}_n$ telle que $c'_i > c_i$ et $c'_j = c_j$ pour tout $j \neq i$, avec $i, j \in [n - 1]$. L'application d'augmentation minimale \uparrow_i se définit alors de la façon suivante :

$$\uparrow_i(c) = (c_1, \dots, c_{i-1}, \uparrow c_i, c_{i+1}, \dots, c_{n-1}), \quad (5.1)$$

telle que $c \leq_v \uparrow_i(c)$ et $c_i < \uparrow c_i \leq c'_i$.

Cette application \uparrow_i permet de sélectionner une couverture d'une coordonnée cubique en particulier.

Dans la suite, nous travaillons non plus uniquement sur les coordonnées cubiques mais également sur leurs diagrammes d'intervalle de Tamari correspondants. Le passage entre ces deux points de vue est fréquent.

Soit $c \in \mathcal{CC}_n$, et soit (u, v) l'image de c par ϕ . L'application ϕ nous donne la traduction directe de l'augmentation minimale pour une composante c_i de c : si $\uparrow c_i$ est strictement positive, alors la lettre u_i augmente et devient égale à $\uparrow c_i$ et v_{i+1} est égale à 0. Cette augmentation minimale se note alors $\uparrow u_i$. Si $\uparrow c_i$ est négative ou nulle, alors la lettre v_{i+1} diminue et devient égale à $|\uparrow c_i|$ et u_i est égale à 0. Cette diminution minimale se note alors $\downarrow v_{i+1}$.

Lemme 5.2. *Soient $c \in \mathcal{CC}_n$ et $i \in [n - 1]$ tels que $\uparrow_i(c)$ est bien définie. Alors,*

- (i) *si $c_i < 0$, alors $\uparrow c_i \leq 0$;*
- (ii) *si $c_i \geq 0$, alors $\uparrow c_i > 0$.*

Démonstration. Soit $(u, v) = \phi(c)$. Montrons la première implication, la deuxième étant évidente car une augmentation minimale augmente toujours strictement une composante.

Supposons donc que $c_i < 0$. Comme $c_i = u_i - v_{i+1}$ et que u_i et v_{i+1} ne peuvent pas être non nuls simultanément, alors $c_i = -v_{i+1}$. Supposons par l'absurde que l'augmentation minimale de c_i soit strictement positive.

Notons alors c' le $(n - 1)$ -uplet tel que $c'_i = 0$ et $c'_j = c_j$ pour tout $j \neq i$, avec $j \in [n - 1]$. Alors, c' est une coordonnée cubique de taille n par le lemme 3.3. Clairement, $c \leq_{\text{cc}} c' \leq_{\text{cc}} \uparrow_i(c)$, avec les trois éléments distincts. Ce qui est impossible par définition de l'augmentation minimale. \square

Définition 5.3. *Soit $c \in \mathcal{CC}_n$. La coordonnée cubique c est un élément minimal-cellulaire si pour tout $i \in [n - 1]$, $\uparrow_i(c)$ est bien définie.*

Autrement dit, une coordonnée cubique de taille n est un élément minimal-cellulaire si elle possède $n - 1$ couvertures.

Lemme 5.4. *Soient c un élément minimal-cellulaire de taille n et $i \in [n - 1]$. Si*

$$c' = \uparrow_{i+1} (\uparrow_{i+2} (\dots (\uparrow_{n-1} (c)) \dots)), \quad (5.2)$$

est bien définie, alors $\uparrow_i(c')$ est bien définie.

Démonstration. Supposons que (5.2) soit vérifiée pour un $i + 1$ quelconque. Montrons que $\uparrow_i(c')$ est également bien définie.

Supposons que $c_i < 0$. Soit c'' le $(n - 1)$ -uplet obtenu à partir de c' en remplaçant la composante c_i par 0. Ce $(n - 1)$ -uplet c'' est une coordonnée cubique par le lemme 3.3. Nous avons supposé $c_i < 0$, par conséquent $c' \leq_{\text{cc}} c''$ et nous avons alors deux cas possibles. Soit c'' est une couverture de c' , et dans ce cas, $c'' = \uparrow_i(c')$. Sinon, il existe une autre coordonnée cubique c''' entre c' et c'' . Celle-ci, par définition de l'ordre \leq_{cc} , est telle qu'elle diffère uniquement en position i par rapport à c' . Ainsi, on a $c''' = \uparrow_i(c')$. Dans les deux cas, nous avons que $\uparrow_i(c')$ est bien définie.

Supposons maintenant que $c_i \geq 0$. En notant $(u, v) = \phi(c)$, on a $c_i = u_i$. Avec l'opération d'augmentation minimale de u_i dans c' , on peut être confronté aux cas suivants.

- (1) S'il existe un indice j tel que $1 \leq i < j \leq n$ et $\downarrow v_j \geq j - i$ dans c' , alors $v_j \geq j - i$ dans c car $\downarrow v_j < v_j$. Par 2.4, on a donc $u_i < j - i$ dans c . De plus, comme c est supposée minimal-cellulaire, $u_i < j - i - 1$, afin que u_i puisse être augmenté dans c . Cette inégalité reste vraie dans c' .

- (2) S'il existe un indice h tel que $1 \leq i - h \leq u_h$ dans c , alors $u_i \leq u_h - i + h$ dans c par la condition (ii) de 2.1. Cela reste vrai dans c' car les composantes d'indices inférieurs à i restent inchangées entre c et c' . De plus, c est minimal-cellulaire, donc $u_i < u_h - i + h$. Cette propriété reste vraie dans c' .
- (3) S'il existe un indice k tel que $1 \leq i < k \leq n$, alors, par (i) de 2.1, $\uparrow u_k \leq n - k$.

Nous allons construire un $(n - 1)$ -uplet, noté c'' , à partir des composantes de c' , tel que u_i est modifiée selon les cas.

- Soit il existe un j vérifiant (1) et il n'existe pas de h vérifiant (2) dans c' . Dans ce cas, on pose $u_i = j - i - 1$ dans c'' . La condition de 2.4 est vérifiée car $u_i < j - i$ dans c'' . De plus comme c' est supposée bien définie, toutes les conditions de 2.1 et de 2.2 sont vérifiées dans c'' . Notre candidat c'' est donc une coordonnée cubique.
- Soit il existe un h vérifiant (2) et il n'existe pas de j vérifiant (1) dans c' . On pose alors $u_i = u_h - i + h$ dans c'' . La condition (ii) de 2.1 est vérifiée pour u_i . Aussi, par définition (i) de 2.1 on a que $u_h \leq n - h$, la condition (i) de 2.1 est vérifiée : $u_i \leq n - i$. Enfin la condition de compatibilité 2.4 est également vérifiée car on a supposé qu'il n'existait pas de j vérifiant (1). Le mot c'' est donc une coordonnée cubique.
- Soit il existe un j et un h vérifiant (1) et (2) dans c' . Dans ce cas, on pose $u_i = \min\{u_h - i + h, j - i - 1\}$ dans c'' . Le mot c'' est alors une coordonnée cubique par les deux cas précédents.
- Sinon, on pose $u_i = n - i$ dans c'' . Le mot c'' est une coordonnée cubique.

Pour les quatre cas, l'existence d'un k vérifiant (3) n'a aucune influence. En effet, dans le premier cas, $\uparrow u_k$ est majorée par $\downarrow v_j$ et est donc inférieure à $u_i = j - i - 1$ dans c'' . Dans le second cas, $\uparrow u_k$ est majorée par u_h et est donc inférieure à $u_i = u_h - i + h$ dans c'' . Dans le troisième cas, la majoration de $\uparrow u_k$ se fait soit par $\downarrow v_j$, soit par u_h . Enfin dans le dernier cas, comme $\uparrow u_k \leq n - k$ et que $n - k < n - i$, $\uparrow u_k < n - i$.

Dans tout les cas, pour u_i fixé dans c'' , soit il existe un $\uparrow u_i$ tel que $0 < \uparrow u_i < u_i$ et $\uparrow_i(c')$ est bien définie, sinon $\uparrow_i(c') = c''$. \square

Définition 5.5. Soient c un élément minimal-cellulaire de taille n et c' une coordonnée cubique de taille n . La coordonnée cubique c' est l'élément maximal-cellulaire correspondant de c si

$$c' = \uparrow_1 (\uparrow_2 (\dots (\uparrow_{n-1} (c)) \dots)). \quad (5.3)$$

Par exemple, $c = (0, -1, 1, -1, -5, 0, 1, -1, -3)$ est minimal-cellulaire, et son maximal-cellulaire correspondant est $c' = (1, 0, 2, 0, -4, 3, 2, 0, -2)$. D'après le lemme 5.4, un tel élément existe toujours. À noter que réaliser l'augmentation minimale dans un autre ordre ne permet pas toujours d'obtenir l'élément maximal-cellulaire correspondant (cette observation peut déjà se faire sur les deux pentagones de la figure 5.1).

Définition 5.6. Soient c^m un élément minimal-cellulaire de taille n et c^M son élément maximal-cellulaire correspondant. Le couple (c^m, c^M) est appelé cellule, et se note $\langle c^m, c^M \rangle$. La taille de la cellule est la taille de c^m .

Remarque 5.7. Une conséquence du lemme 5.2 est que pour toute cellule $\langle c^m, c^M \rangle$ de taille n , avec $i \in [n-1]$,

- (i) si $c_i^m < 0$ alors $c_i^M \leq 0$;
- (ii) si $c_i^m \geq 0$ alors $c_i^M > 0$.

Théorème 5.8. Soient $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n et c un $(n-1)$ -uplet dont chaque composante c_i est égale soit à c_i^m , soit à c_i^M , pour tout $i \in [n-1]$. Alors c est une coordonnée cubique.

Démonstration. Si toutes les composantes de c sont égales à celles de c^m (resp. à celles de c^M), alors c est une coordonnée cubique. Supposons que cela ne soit pas le cas, c possède donc des composantes de c^m et de c^M .

Supposons que c n'est pas une coordonnée cubique. Notons (u_i^j, v_{i+1}^j) le couple de lettres correspondant à c_i^j par l'application ϕ , avec $j \in \{m, M\}$ et (u_i, v_{i+1}) celui correspondant à c_i pour tout $i \in [n-1]$.

Par hypothèse sur c^m et c^M , la lettre u_i , égale à u_i^m ou à u_i^M , vérifie $0 \leq u_i \leq n-i$ pour tout $i \in [n]$. De même, la lettre v_i , égale à v_i^m ou à v_i^M , vérifie $0 \leq v_i \leq i-1$ pour tout $i \in [n]$.

Pour que c ne soit pas une coordonnée cubique, on doit donc supposer la négation de la condition (ii) de la définition 2.1, ou de la condition (ii) de la définition 2.2, ou celle de la définition 2.4. C'est-à-dire que c n'est pas une coordonnée cubique si une des trois assertions suivantes est vérifiée pour l'image par ϕ de ses composantes.

- (1) Il existe $i \in [n]$ et $j \in [u_i]$ tels que $u_{i+j} > u_i - j$ avec $u_{i+j} \neq 0$ et $u_i \neq 0$.
- (2) Il existe $i \in [n]$ et $j \in [v_i]$ tels que $v_{i-j} > v_i - j$ avec $v_{i-j} \neq 0$ et $v_i \neq 0$.
- (3) Il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $j - i \leq u_i$ et $v_j \geq j - i$.

— Si u_{i+j} et u_i sont égaux à u_{i+j}^m et à u_i^m (resp. égaux à u_{i+j}^M et à u_i^M) alors (1) ne peut pas être vraie car c^m (resp. c^M) est une coordonnée cubique.

Si $u_{i+j} = u_{i+j}^m$ et $u_i = u_i^M$ alors (1) ne peut pas être vérifiée. En effet, $u_{i+j}^m < u_{i+j}^M$ par construction de c^M et $u_{i+j}^M \leq u_i^M - j$ par définition de la coordonnée cubique c^M .

Posons $u_{i+j} = u_{i+j}^M$ et $u_i = u_i^m$. Comme u_{i+j}^M est à droite de u_i^m , on peut alors également construire un $(n-1)$ -uplet $c' = \uparrow_{i+j} (\uparrow_{i+j+1} (\dots (\uparrow_{n-1} (c^m)) \dots))$ avec $c'_i = u_i^m$ et $c'_{i+j} = u_{i+j}^M$. Si (1) est vraie, alors c' n'est pas une coordonnée cubique, ce qui est impossible d'après le lemme 5.4.

— Par les mêmes arguments donnés pour les trois cas précédents, appliqués au diagramme de Tamari dual v , nous montrons que (2) ne peut pas être vérifiée.

— Clairement, si u_i et v_j sont égaux à u_i^m et à v_j^m (resp. à u_i^M et à v_j^M) alors (3) est fautive.

Posons $u_i = u_i^m$ et $v_j = v_j^M$. Comme $i < j$, on peut construire un $(n-1)$ -uplet $c' = \uparrow_{j-1} (\uparrow_j (\dots (\uparrow_{n-1} (c^m)) \dots))$ avec $c'_i = u_i^m$ et $c'_{j-1} = v_j^M$. Si (3) est vraie, alors c' n'est pas une coordonnée cubique. Ce qui est impossible par le lemme 5.4.

Posons $u_i = u_i^M$ et $v_j = v_j^m$. Si $v_j \geq j - i$ alors, en particulier, $v_j \geq j - k$ pour $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Donc, pour tous c_k positives avec $i + 1 \leq k \leq j - 1$, on a par la

définition 2.4 que $u_k < j - k$ avec u_k égale à u_k^m ou à u_k^M dans c . On peut alors construire $c' = \uparrow_i (\uparrow_{i+1} (\dots (\uparrow_{n-1} (c^m)) \dots))$ où $c'_l < j - l$ avec $i \leq l \leq j - 1$. Par la définition 5.5, c'_i est la composante c_i^M de c^M . Si (3) est vraie, c'est-à-dire que $u_i \geq j - i$ en plus de $v_j \geq j - i$, alors la composante c_i^M de c^M n'est plus unique, ce qui est impossible.

Comme aucune des trois assertions n'est possible, c est une coordonnée cubique. \square

Une des conséquences directes du théorème 5.8 est que pour toute cellule, on a au moins 2^{n-1} coordonnées cubiques appartenant à la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$.

6. PROPRIÉTÉS DES CELLULES

Nous avons désormais une définition des cellules. De plus, nous savons que chaque cellule contient au moins 2^{n-1} éléments. Nous allons dans cette partie montrer qu'il est possible d'associer bijectivement chaque cellule à une coordonnée cubique synchrone. On en déduit pour finir une formule calculant le volume de la réalisation cubique.

Soient $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n et γ l'application suivante :

$$\gamma(c_i^m, c_i^M) = \begin{cases} c_i^m & \text{si } c_i^m < 0, \\ c_i^M & \text{si } c_i^m \geq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

pour tout $i \in [n - 1]$. D'après la remarque 5.7, les composantes retournées par l'application γ ne sont jamais nulles. En notant (u_i^j, v_{i+1}^j) le couple de lettres correspondant à c_i^j par l'application ϕ , avec $j \in \{m, M\}$ et $i \in [n - 1]$, l'application γ devient :

$$\gamma(c_i^m, c_i^M) = \begin{cases} -v_{i+1}^m & \text{si } c_i^m < 0, \\ u_i^M & \text{si } c_i^m \geq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Notons Γ , l'application qui à une cellule associe un $(n - 1)$ -uplet :

$$\Gamma(\langle c^m, c^M \rangle) = (\gamma(c_1^m, c_1^M), \gamma(c_2^m, c_2^M), \dots, \gamma(c_{n-1}^m, c_{n-1}^M)). \quad (6.3)$$

Par exemple, la cellule $\langle (0, -1, 1, -1, -5, 0, 1, -1, -3), (1, 0, 2, 0, -4, 3, 2, 0, -2) \rangle$ est envoyée sur $(1, -1, 2, -1, -5, 3, 2, -1, -3)$.

Théorème 6.1. *L'application Γ est une bijection de l'ensemble des cellules de taille n vers $\mathcal{CC}_n^{\text{sync}}$.*

Démonstration. Les composantes de $\Gamma(\langle c^m, c^M \rangle)$ appartiennent soit à c^m , soit à c^M . Et dans les deux cas, il s'agit d'une composante non nulle. D'après le théorème 5.8, $\Gamma(\langle c^m, c^M \rangle)$ est donc une coordonnée cubique de taille n . Et par la définition 3.5 et la remarque 5.7, cette coordonnée cubique est synchrone.

Soient $\langle c^m, c^M \rangle$ et $\langle e^m, e^M \rangle$ deux cellules de taille n , telles que $\Gamma(\langle c^m, c^M \rangle) = \Gamma(\langle e^m, e^M \rangle)$. Notons (u_i^j, v_{i+1}^j) le couple de lettres correspondant à c_i^j et (x_i^j, y_{i+1}^j) le couple de lettres correspondant à e_i^j par l'application ϕ , avec $j \in \{m, M\}$ et $i \in [n - 1]$.

Γ est injective si $c_i^j = e_i^j$ pour tout $i \in [n - 1]$ avec $j \in \{m, M\}$. On a supposé que $\gamma(c_i^m, c_i^M) = \gamma(e_i^m, e_i^M)$ pour tout $i \in [n - 1]$. Deux cas sont alors possibles :

- (1) soit $\gamma(c_i^m, c_i^M) = u_i^M$. Dans ce cas, $\gamma(e_i^m, e_i^M) = x_i^M$ et $u_i^M = x_i^M$;

- (2) soit $\gamma(c_i^m, c_i^M) = -v_{i+1}^m$. Dans ce cas, $\gamma(e_i^m, e_i^M) = -y_{i+1}^m$ et $v_{i+1}^m = y_{i+1}^m$.
- Supposons que (1) soit vérifié. Comme $u_i^M \neq 0$, par la remarque 2.5, $v_{i+1}^M = 0$. De même, $x_i^M \neq 0$ implique $y_{i+1}^M = 0$. Donc $c_i^M = e_i^M$.

D'après la remarque 5.7, si $u_i^M \neq 0$ (resp. si $x_i^M \neq 0$) alors $0 \leq u_i^m < u_i^M$ et $v_{i+1}^m = 0$ (resp. alors $0 \leq x_i^m < x_i^M$ et $y_{i+1}^m = 0$). Il reste donc à montrer que $u_i^m = x_i^m$. Supposons que $u_i^m < x_i^m$, et posons $c = \uparrow_{i+1} (\dots (\uparrow_{n-1} (c^m)) \dots)$ et $e = \uparrow_{i+1} (\dots (\uparrow_{n-1} (e^m)) \dots)$. Par le lemme 5.4, c et e sont des coordonnées cubiques. De plus, par la définition 5.5, $c_k = c_k^M$ et $e_k = e_k^M$ pour tout $i+1 \leq k \leq n-1$. Par hypothèse, si c_k est positive, alors $c_k = u_k^M$, et comme dans ce cas $u_k^M = x_k^M$, on a $e_k = x_k^M$. Soit c' un $(n-1)$ -uplet tel que $c'_i = x_i^m$ et $c'_j = c_j$ pour tout $j \neq i$. Par hypothèse, on sait également que $\uparrow c_i = u_i^M$, $\uparrow e_i = x_i^M$, et $u_i^M = x_i^M$. Comme $x_i^m < x_i^M$, alors $x_i^m < u_i^M$. On a donc $u_i^m < x_i^m < u_i^M$. Soient (u, v) et (u', v') les deux paires de mot correspondantes respectivement à c et c' . Le $(n-1)$ -uplet c' est une coordonnée cubique. En effet, comme $v = v'$ et c est une coordonnée cubique, v' est un diagramme de Tamari dual. D'autre part, comme e est une coordonnée cubique, $c'_k = e_k$ si c'_k est positif pour tout $i \leq k \leq n-1$, et que $\uparrow_i (c)$ est également une coordonnée cubique, alors u' est un diagramme de Tamari. Finalement, puisque $\uparrow_i (c) \in \mathcal{CC}_n$, on peut conclure que la définition 2.4 est satisfaite et que c' est une coordonnée cubique. Nous avons donc construit une coordonnée cubique c' distincte de c et de $\uparrow_i (c)$ telle que $c \leq_{cc} c' \leq_{cc} \uparrow_i (c)$, ce qui est impossible d'après la définition 5.1. D'où $c_i^m = e_i^m$.

- Supposons maintenant que (2) soit vérifié. On montre que $c_i^m = e_i^m$ et $c_i^M = e_i^M$ de la même manière que dans (1), en reformulant les arguments pour le dual.

Par définition de γ , on ne peut pas avoir d'autre cas. Ce qui montre l'injectivité de Γ .

Montrons maintenant que le cardinal de l'ensemble des cellules de taille n est égal au cardinal de \mathcal{CC}_n . Rappelons que l'ensemble des cellules de taille n est exactement l'ensemble des éléments minimal-cellulaires de taille n . De plus, c'est également l'ensemble des coordonnées cubiques qui sont couvertes par exactement $n-1$ éléments dans $(\mathcal{CC}_n, \leq_{cc})$. En outre, par l'isomorphisme de posets ψ , nous savons que ces éléments sont les intervalles de Tamari possédant $n-1$ éléments couvrants dans le poset des intervalles de Tamari. Dans [Cha18], Chapoton montre que l'ensemble de ces intervalles de Tamari a le même cardinal que l'ensemble des intervalles de Tamari synchrones (voir le théorème 2.1 et le théorème 2.3 de [Cha18]). Par la proposition 3.6, on peut donc conclure que le cardinal de \mathcal{CC}_n^{sync} et le cardinal de l'ensemble des cellules de taille n sont égaux.

Ceci termine la preuve de la bijection de Γ . \square

Dans la suite, nous utilisons également la *coordonnée cubique opposée* à la coordonnée cubique synchrone. Elle se définit aussi avec la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$ et en utilisant l'application "duale" de γ :

$$\bar{\gamma}(c_i^m, c_i^M) = \begin{cases} c_i^M & \text{si } c_i^m < 0, \\ c_i^m & \text{si } c_i^m \geq 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

pour tout $i \in [n-1]$. On définit ensuite $\bar{\Gamma}$ de manière similaire à Γ :

$$\bar{\Gamma}(\langle c^m, c^M \rangle) = (\bar{\gamma}(c_1^m, c_1^M), \bar{\gamma}(c_2^m, c_2^M), \dots, \bar{\gamma}(c_{n-1}^m, c_{n-1}^M)). \quad (6.5)$$

D'après le théorème 5.8, $\bar{\Gamma}(\langle c^m, c^M \rangle)$ est une coordonnée cubique appartenant à $\langle c^m, c^M \rangle$, appelée *coordonnée cubique opposée*. Pour la coordonnée cubique synchrone c associée à $\langle c^m, c^M \rangle$ par Γ , on note c^{op} la coordonnée cubique opposée. Toutes les composantes de c^{op} sont différentes de celles de c , et ces différences sont les plus grandes possibles. Pour toute coordonnée cubique synchrone c , une telle coordonnée cubique c^{op} existe toujours et est unique.

Nous allons maintenant nous intéresser plus en détail à la géométrie de la réalisation cubique. On sait déjà qu'on a au moins 2^{n-1} coordonnées cubiques formant le "contour" de chaque cellule. Les notions suivantes vont nous permettre d'en dire davantage.

Définition 6.2. Soient $\epsilon \in \{-1, 1\}^{n-1}$ et $c \in \mathcal{CC}_n$. On appelle *région* de c l'ensemble

$$\text{Reg}_\epsilon(c) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i < c_i \text{ si } \epsilon_i = -1, x_i > c_i \text{ sinon}\}. \quad (6.6)$$

Définition 6.3. Soit $c \in \mathcal{CC}_n$. La coordonnée cubique c est *externe* s'il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}^{n-1}$ tel que $\mathcal{CC}_n \cap \text{Reg}_\epsilon(c) = \emptyset$. La région $\text{Reg}_\epsilon(c)$ est alors *vide*. Sinon, c est *interne*.

Proposition 6.4. Soit $c \in \mathcal{CC}_n$. Si c est interne, alors $\phi(c)$ est un diagramme d'intervalle de Tamari nouveau.

Démonstration. Montrons plutôt que si $\phi(c)$ n'est pas nouveau alors c est externe. Notons (u_i, v_{i+1}) le couple de lettres correspondant à c_i par l'application ϕ pour $i \in [n-1]$.

D'après la définition 3.7, $\phi(c)$ est non nouveau s'il existe

- (1) soit $i \in [n-1]$ tel que $u_i = n-i$;
- (2) soit $j \in \{2, \dots, n\}$ tel que $v_j = j-1$;
- (3) soit $k, l \in [n]$ tels que $u_k = l-k-1$ et $v_l = l-k-1$ et $k+1 < l$.

Supposons qu'il existe i vérifiant (1), alors il ne peut pas exister de coordonnée cubique c' telle que $c'_i > c_i$ car par la définition 2.1, $c'_i \leq n-i$. De même, si on suppose qu'il existe j vérifiant (2), alors il ne peut pas exister de coordonnée cubique c' telle que $c'_{j-1} < c_{j-1}$ car par la définition 2.2, $c'_{j-1} \geq 1-j$. Si (3) est vérifiée, alors il ne peut pas exister de coordonnée cubique c' telle que $c'_k > c_k$ et $c'_{l-1} < c_{l-1}$. En effet, si on augmente les valeurs u_k et v_l dans c , le résultat ne peut pas être une coordonnée cubique par la définition 2.4.

Comme dans chaque cas au moins une région est vide, c est externe. \square

Proposition 6.5. Soit $c \in \mathcal{CC}_n^{sync}$. Alors c est externe.

Démonstration. Par la proposition 3.10 on sait que si c est synchrone, alors $\phi(c)$ est non nouveau. Or, on vient de voir par la proposition 6.4 que si $\phi(c)$ est non nouveau, alors c est externe. \square

Proposition 6.6. Soit $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n . Alors il n'existe aucune coordonnée cubique c telle que pour tout $i \in [n-1]$, $c_i^m < c_i < c_i^M$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une telle coordonnée cubique c . Alors par le lemme 5.2, chaque composante c_i de c est différente de 0. En effet, si $c_i^m < 0$ alors $c_i^M \leq 0$, et comme $c_i^m < c_i < c_i^M$, c_i est différente de 0. De même, si $c_i^m \geq 0$ alors $c_i^M > 0$, donc c_i est toujours

différente de 0. Au final, si une telle coordonnée cubique c existe, elle serait synchrone d'après la définition 3.5.

Mais alors, il existerait une coordonnée cubique à la fois synchrone et interne par hypothèse. Ce qui est impossible d'après la proposition 6.5. \square

Nous avons montré avec le théorème 5.8, que chaque cellule contient au moins 2^{n-1} coordonnées cubiques. Ces coordonnées cubiques sont reliées par des flèches représentant les relations de couverture. Avec la proposition 6.6, on peut alors conclure que chaque cellule est un hypercube de dimension $n - 1$ dans la réalisation cubique, possédant seulement des sommets sur son bord.

Avec les coordonnées cubiques minimal-cellulaires et maximal-cellulaires correspondantes formant une cellule, nous pouvons donc calculer le volume de cette cellule.

Soit $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n . Le volume de cette cellule est donné par

$$V(\langle c^m, c^M \rangle) = \prod_{i=1}^{n-1} (c_i^M - c_i^m). \quad (6.7)$$

Notons c^0 la coordonnée cubique telle que pour tout $i \in [n - 1]$, $c_i^0 = 0$. Pour calculer le volume d'une cellule $\langle c^m, c^M \rangle$ à partir de la coordonnée cubique synchrone associée par Γ , nous devons d'abord calculer le volume de l'hypercube formé par c^0 et cette coordonnée cubique synchrone. Récapitulons les données que nous avons jusqu'à présent.

D'après le lemme 5.2, toute cellule est incluse dans une région de la coordonnée cubique c^0 . Cela signifie qu'aucune cellule ne peut couper les hyperplans passant par l'origine.

Selon le lemme 3.3, pour toute coordonnée cubique, remplacer n'importe quelle composante par 0 nous donne une coordonnée cubique. Autrement dit, pour toute coordonnée cubique c , il existe $n - 1$ coordonnées cubiques associées à c qui sont ses projections sur les hyperplans de l'origine. On peut alors engendrer un hypercube avec la coordonnée cubique c^0 et une autre coordonnée cubique quelconque c . L'hypercube ainsi formé, noté $\mathcal{H}(c)$, dépend alors de c et est de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et peut être non vide, au sens où il peut contenir d'autres hypercubes de même dimension.

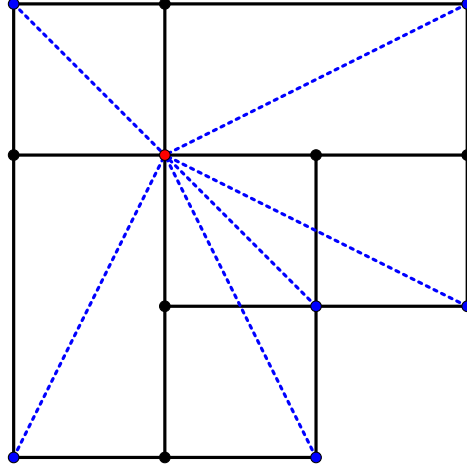
Par l'application Γ , les composantes de la coordonnée cubique synchrone de la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$ sont les plus grandes en valeur absolue entre c^m et c^M . Dans la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$, il s'agit donc de la coordonnée cubique la plus éloignée de c^0 . L'hypercube engendré par c^0 et la coordonnée cubique synchrone contient donc la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$. Cet hypercube est donc de dimension $n - 1$.

Nous pouvons désormais calculer le volume de l'hypercube formé par c^0 et la coordonnée cubique synchrone associée à $\langle c^m, c^M \rangle$. On appelle ce volume le *volume synchrone étendu*.

Définition 6.7. Soit $c \in \mathcal{CC}_n^{sync}$. Notons $\mathcal{V}(c)$ le *volume synchrone étendu* de c défini par

$$\mathcal{V}(c) = \prod_{i=1}^{n-1} |c_i|. \quad (6.8)$$

Le dessin 6.1 illustre dans le cas $n = 3$ le volume synchrone étendu associé à chaque coordonnée cubique synchrone. Les diagonales en pointillés relient c^0 aux coordonnées cubiques synchrones. Par exemple, la diagonale qui relie $(0, 0)$ à la coordonnée $(1, -2)$ est la diagonale associée à

FIGURE 6.1. Volumes synchrones étendus des cellules dans \mathcal{CC}_3 .

l'hypercube formé par les sommets $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(1, 0)$ et $(1, -2)$. Son volume synchrone étendu est de 2.

Soient $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n . L'élément x appartient à $\langle c^m, c^M \rangle$ si pour tout $i \in [n-1]$, $c_i^m \leq x_i \leq c_i^M$.

Munissons l'ensemble \mathcal{CC}_n^{sync} de l'ordre partiel \leq_{ccs} telle que pour $c, c' \in \mathcal{CC}_n^{sync}$, $c' \leq_{ccs} c$ si et seulement si c'_i et c_i sont de même signe et $|c'_i| \leq |c_i|$ pour tout $i \in [n-1]$.

Lemme 6.8. *Soient $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n et c la coordonnée cubique synchrone qui lui est associée par Γ et $x \in \mathcal{H}(c)$. Si $x \notin \langle c^m, c^M \rangle$, alors il existe $c' \in \mathcal{CC}_n^{sync}$ différent de c telle que $c' \leq_{ccs} c$ et $x \in \mathcal{H}(c')$.*

Démonstration. Soit c^{op} la coordonnée cubique opposée de c . Comme $x \notin \langle c^m, c^M \rangle$ et $x \in \mathcal{H}(c)$, alors nécessairement $c^{op} \neq c^0$. On peut donc choisir un i tel que $c_i^{op} \neq 0$ et définir $\nabla_i c$ le $(n-1)$ -uplet tel que $\nabla_i c_i = c_i^{op}$ et $\nabla_i c_k = c_k$ pour tout $k \neq i$. D'après le théorème 5.8, $\nabla_i c$ est une coordonnée cubique et appartient à la cellule $\langle c^m, c^M \rangle$. De plus, $\nabla_i c$ est une coordonnée cubique synchrone qui vérifie $\nabla_i c \leq_{ccs} c$ et qui est différente de c . On peut alors associer à $\nabla_i c$ une cellule, qui est incluse strictement dans $\mathcal{H}(c)$. L'élément x appartient alors à l'hypercube associé à $\nabla_i c$. \square

Corollaire 6.9. *Soit $c \in \mathcal{CC}_n^{sync}$. Alors*

$$\mathcal{H}(c) = \coprod_{c' \leq_{ccs} c} \Gamma^{-1}(c'). \quad (6.9)$$

Démonstration. L'inclusion de $\mathcal{H}(c)$ dans $\coprod_{c' \leq_{ccs} c} \Gamma^{-1}(c')$ est une conséquence du lemme 6.8. L'inclusion réciproque est évidente. \square

Définition 6.10. Soit $c \in \mathcal{CC}_n^{sync}$. Soit $\bar{\mathcal{V}}(c)$ le **volume synchrone** de c défini par :

$$\bar{\mathcal{V}}(c) = \mathcal{V}(c) - \sum_{\substack{c' \leq_{ccs} c \\ c' \neq c}} \bar{\mathcal{V}}(c'). \quad (6.10)$$

L'équation (6.10) est une inversion de Möbius [Sta12].

Théorème 6.11. Soient $\langle c^m, c^M \rangle$ une cellule de taille n et c la coordonnée cubique synchrone associée à $\langle c^m, c^M \rangle$ par Γ . Alors

$$V(\langle c^m, c^M \rangle) = \bar{\mathcal{V}}(c). \quad (6.11)$$

Démonstration. Comme le volume de $\mathcal{H}(c)$ est donné par $\mathcal{V}(c)$, l'égalité (6.11) est une conséquence du corollaire 6.9 et de la définition 6.10. \square

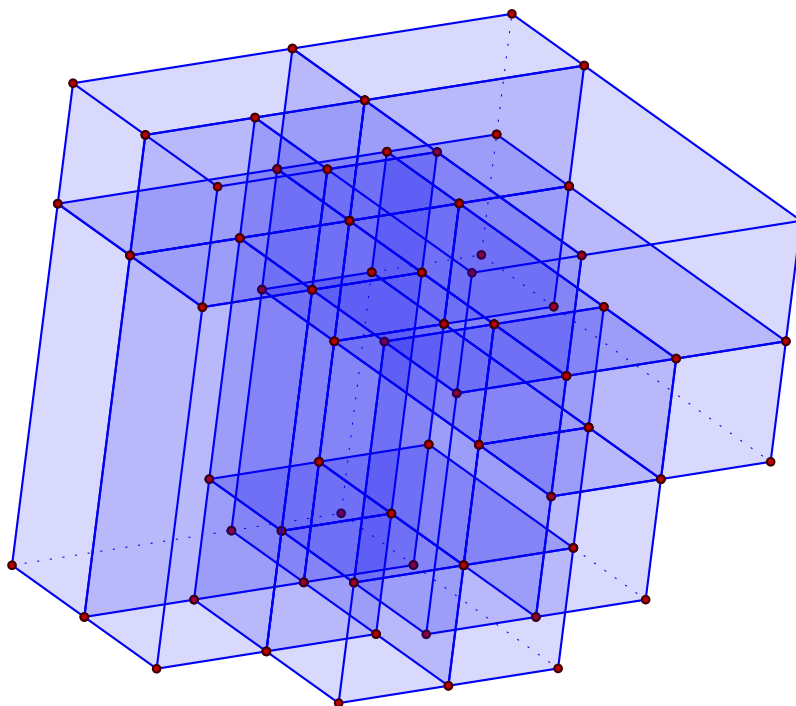


FIGURE 6.2. Réalisation cubique de \mathcal{CC}_4 .

7. EL-ÉTIQUETAGE DE \mathcal{CC}_n

À chaque poset fini P , il est possible d'associer un complexe simplicial $\Delta(P)$ dont les k -faces correspondent aux chaînes de longueur k dans P . Les propriétés du complexe simplicial $\Delta(P)$ telles que la pureté, l'existence d'épluchage, ou encore le type d'homotopie sont fortement liés au poset P . Dans [BW96] et [BW97], Björner et Wachs généralisent la méthode d'étiquetage des relations de couverture des posets gradués au cas des posets non-gradués. En particulier, ils montrent dans [BW97] que le poset de Tamari est EL-épluchable, et donc que le complexe simplicial associé est épluchable. Nous montrons dans cette partie que c'est également le cas pour le poset \mathcal{CC}_n , et donc aussi pour le poset des intervalles de Tamari de taille n .

Nous avons besoin de rappeler certaines notions et résultats de l'article [BW96]. Soit (P, \leq_P) un poset. Le poset P est dit *borné* s'il existe un unique élément maximal pour \leq_P et un unique élément minimal pour \leq_P . Une chaîne dans P est dite *maximale* si elle est maximale pour l'inclusion. Un étiquetage d'arête d'un poset P borné est une application $\lambda : \mathcal{E}(P) \rightarrow \Lambda$, où $\mathcal{E}(P)$ est l'ensemble des arêtes du diagramme de Hasse de P , c'est-à-dire l'ensemble des relation de couverture de P , et Λ est un certain poset. L'application λ associe donc un mot à chaque chaîne de P . Soit ξ une chaîne maximale de P . On dit que ξ est croissante si le mot associé $\lambda(\xi)$ est strictement croissant pour l'ordre lexicographique. Nous pouvons par la suite ordonner les chaînes maximales en utilisant l'ordre lexicographique du mot qui est associé à chacune d'elles. On appelle alors un *étiquetage d'arête lexicographique* (EL-étiquetage) de P un étiquetage d'arête tel que pour tout intervalle de P , il existe une unique chaîne maximale croissante et cette chaîne précède pour l'ordre lexicographique toutes les autres chaînes maximales de cet intervalle.

Le résultat suivant est donné dans [BW96]. Supposons que P est borné et admet un EL-étiquetage. Alors l'ordre lexicographique de la chaîne maximale de P est un épluchage de $\Delta(P)$.

Soient $c, c' \in \mathcal{CC}_n$ tels que $c \leq_v c'$ avec $c_i < c'_i$ pour $i \in [n-1]$. Soit $\lambda : \mathcal{E}(\mathcal{CC}_n) \rightarrow \mathbb{Z}^3$ l'étiquetage d'arête défini comme suit :

$$\lambda(c, c') = (\varepsilon, i, c_i), \quad (7.1)$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } c_i < 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 7.1. *L'étiquetage d'arête λ donne un EL-étiquetage de \mathcal{CC}_n . De plus, il existe au plus une chaîne décroissante pour tout intervalle de \mathcal{CC}_n .*

Démonstration. Soient $c, c' \in \mathcal{CC}_n$ tels que $c \leq_{cc} c'$. Notons, pour $i, j \in [n-1]$,

$$\mathcal{N} = \{i : c_i \neq c'_i \text{ et } c_i < 0\} = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}, \quad (7.2)$$

avec $i_1 < \dots < i_N$, et

$$\mathcal{P} = \{j : c_j \neq c'_j \text{ et } c_j \geq 0\} = \{j_1, j_2, \dots, j_P\}, \quad (7.3)$$

avec $j_1 < \dots < j_P$. Supposons que $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Pour $k \in [N]$, on définit alors $c^{(k)}$ le $(n-1)$ -uplet tel qu'on remplace $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ par $c_{i_1}^{(k)}, c_{i_2}^{(k)}, \dots, c_{i_k}^{(k)}$ dans c , où $c_{i_d}^{(k)} = \min\{0, c'_{i_d}\}$ pour tout $d \in [k]$. Chaque $c^{(k)}$ ainsi défini est une coordonnée cubique. En effet, si on remplace la composante $c_{i_k}^{(k-1)}$ dans $c^{(k-1)}$ par 0, d'après le lemme 3.3, on obtient bien une coordonnée cubique. De même, si la composante $c_{i_k}^{(k-1)}$ est remplacée dans $c^{(k-1)}$ par c'_{i_k} avec $c'_{i_k} < 0$, alors on obtient un diagramme de Tamari dual, qui est bien compatible avec le diagramme de Tamari associé à c , puisque toutes les valeurs du diagramme de Tamari dual associé à c ont été strictement diminuées jusqu'à la composante d'indice $k-1$.

Une coordonnée cubique $c^{(N)}$ est ainsi obtenue (égale à c si $\mathcal{N} = \emptyset$). On remplace alors successivement dans $c^{(N)}$ les composantes $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_l}$ par $c'_{j_1}, c'_{j_2}, \dots, c'_{j_l}$ pour $l \in [P]$. Pour $l = P$, on obtient c' . Comme précédemment, chaque $(n-1)$ -uplet ainsi défini est une coordonnée cubique car le diagramme de Tamari dual associé à $c^{(N)}$ a soit les valeurs du diagramme de Tamari dual associé à c' , soit des valeurs nulles. Comme, à chaque étape, le $(n-1)$ -uplet a le même diagramme de Tamari dual associé que $c^{(N)}$, son diagramme de Tamari associé est compatible.

Ainsi, une chaîne entre c et c' est obtenue, et comme pour chaque intervalle formée par deux éléments consécutifs de cette chaîne, une seule composante diffère entre les deux éléments, chaque intervalle est une chaîne d'étiquette croissante. En concaténant ces chaînes, on contruit une chaîne maximale μ dans $[c, c']$. Cette chaîne maximale est croissante pour l'ordre lexicographique induit par (7.1). En effet, comme on remplace les composantes négatives de c par celles de c' ou par 0 de gauche à droite, puis les composantes positives de $c^{(N)}$ par celles de c' également de gauche à droite, l'ordre est croissant.

De plus, tout autre choix de chaîne maximale entre c et c' revient à choisir, à une certaine étape k , une étiquette plus grande pour l'ordre lexicographique que l'étiquette (ε, k, c_k) de μ , puis à devoir choisir par la suite l'étiquette (ε, k, c_k'') . Ainsi, la chaîne croissante maximale μ est unique et est obtenue en choisissant l'étiquetage le plus petit possible à chaque étape.

S'il existe une chaîne décroissante entre c et c' pour l'ordre lexicographique induit par (7.1), alors elle est obtenue en remplaçant d'abord les composantes $c_{j_P}, c_{j_{P-1}}, \dots, c_{j_l}$ dans c par $c'_{j_P}, c'_{j_{P-1}}, \dots, c'_{j_l}$ pour tout $l \in [P]$, puis, en remplaçant les composantes $c_{i_N}, c_{i_{N-1}}, \dots, c_{i_k}$ de la coordonnée cubique ainsi obtenue par $c'_{i_N}, c'_{i_{N-1}}, \dots, c'_{i_k}$ pour tout $k \in [N]$.

Pour la même raison que toute chaîne maximale croissante est unique pour tout intervalle, si elle existe, la chaîne maximale décroissante est également unique. \square

Par exemple, dans la figure 5.1, la chaîne maximale croissante pour l'ordre lexicographique de l'intervalle $[(-1, -2), (2, 1)]$ est la chaîne

$$(-1, -2), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1).$$

Une des conséquences du théorème 7.1 est que la fonction de Möbius de chaque intervalle du poset \mathcal{CC}_n a pour valeur $+1, -1$ ou 0 . Plus précisément, le complexe simplicial associé à chaque intervalle ouvert de \mathcal{CC}_n est soit homotope à une sphère, soit contractile [BW97].

RÉFÉRENCES

- [BB09] O. Bernardi and N. Bonichon. Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(1) :55–75, 2009. 2
- [BMFPR12] M. Bousquet-Mélou, É. Fusy, and L-F. Prévaille-Ratelle. The number of intervals in the m -Tamari lattices. *Electronic J. Combin.*, 18(2), 2012. 2
- [BPR12] F. Bergeron and L-F. Prévaille-Ratelle. Higher trivariate diagonal harmonics via generalized Tamari posets. *J. Combin.*, (3) :317–341, 2012. 2
- [BW96] A. Björner and M. L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(4) :1299–1327, 1996. 2, 31, 32
- [BW97] A. Björner and M. L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10) :3945–3975, 1997. 2, 31, 33
- [Cha06] F. Chapoton. Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari. *Sém. Lothar. Combin.*, 55 :Art. B55f, 18, 2006. 2
- [Cha18] F. Chapoton. Une note sur les intervalles de Tamari. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 25(2) :299–314, 2018. 27
- [Com19] C. Combe. Cubic realizations of Tamari interval lattices. *À paraître dans Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, 2019. 3

- [CP15] G. Châtel and V. Pons. Counting smaller elements in the Tamari and m -Tamari lattices. *J. Combin. Theory Ser. A*, 134 : 58–97, 2015. [2](#), [3](#), [5](#), [6](#), [16](#)
- [FPR17] W. Fang and L-F. Préville-Ratelle. The enumeration of generalized Tamari intervals. *European J. Combin.*, 61 :69–84, 2017. [2](#)
- [Gir11] S. Giraud. Combinatoire algébrique des arbres. *PhD thesis*, 2011. [9](#), [10](#)
- [Lod11] J-L. Loday. The diagonal of the Stasheff polytope. In *Higher structures in geometry and physics*, volume 287 of *Progr. Math.*, pages 269–292. Birkhäuser/Springer, New York, 2011. [22](#)
- [MP90] E. C. Milner and M. Pouzet. A note on the dimension of a poset. *Order*, 7(1) :101–102, 1990. [21](#)
- [MS06] M. Markl and S. Shnider. Associahedra, cellular W -construction and products of A_∞ -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(6) :2353–2372, 2006. [22](#)
- [MTTV19] N. Masuda, H. Thomas, A. Tonks, and B. Vallette. The diagonal of the associahedra. [arXiv:1902.08059 \[math.AT\]](#), 2019. [22](#)
- [Pal86] J. M. Pallo. Enumerating, ranking and unranking binary trees. *Comput. J.* 29, no. 2, 171–175, 1986. [2](#), [9](#), [10](#)
- [PRV17] L-F. Préville-Ratelle and X. Viennot. The enumeration of generalized Tamari intervals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(7) :5219–5239, 2017. [2](#), [16](#)
- [Rog19] B. Rognerud. Exceptional and modern intervals of the Tamari lattice. *À paraître dans Sém. Lothar. Combin.*, 2019. [17](#), [18](#)
- [Sta12] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. [4](#), [31](#)
- [SU04] S. Saneblidze and R. Umble. Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra. *Homology Homotopy Appl.*, 6(1) :363–411, 2004. [22](#)
- [Tam62] D. Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 10 :131–146, 1962. [2](#), [5](#)
- [Tro02] W. T. Trotter. *Combinatorics and partially ordered sets : Dimension theory*. Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences. The Johns Hopkins University Press, 2002. [21](#)

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE UMR 7501, UNIVERSITÉ DE STRASBOURG ET CNRS 7 RUE RENÉ DESCARTES
67000 STRASBOURG, FRANCE

Email address: combe@math.unistra.fr