



HAL
open science

Forme de la surface d'un liquide ou d'un solide se comportant quasiment comme un liquide sous l'action de l'indentation par un poinçon plat - effet de la tension de surface en milieu fini

Christophe Fond

► **To cite this version:**

Christophe Fond. Forme de la surface d'un liquide ou d'un solide se comportant quasiment comme un liquide sous l'action de l'indentation par un poinçon plat - effet de la tension de surface en milieu fini. 2019. hal-02087329

HAL Id: hal-02087329

<https://hal.science/hal-02087329v1>

Preprint submitted on 2 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Forme de la surface d'un liquide ou d'un solide se comportant quasiment comme un liquide sous l'action de l'indentation par un poinçon plat - effet de la tension de surface en milieu fini

Christophe Fond

Laboratoire ICube, 2 rue Boussingault, F67000 Strasbourg

Résumé

Le contact entre un indenteur plat cylindrique et un liquide est considéré. Le comportement est totalement contrôlé par la tension de surface supposée constante. Une approche analytique et une solution numérique sont développées pour décrire la forme de la surface en fonction de la force appliquée et calculer la pression induite dans le liquide.

Keywords: indentation, tension de surface, élasticité, adhésion, contact, Boussinesq, film, membrane, liquide, compressible, quasi-incompressible, solution analytique

1. Préambule

Cet article fait suite à un article, en version anglaise (Fond, 2018b) et française (Fond, 2018a), concernant un milieu pour lequel seule la tension de surface agirait, les effets de la réponse élastique du massif étant négligeables, i. e. milieu très souple et très compressible. Afin de pouvoir valider les calculs par éléments finis en milieux finis concernant l'indentation de matière souple en présence de tension de surface dans le cas où le comportement mécanique du solide s'approche d'un liquide compressible¹, il convient de connaître la solution pour un liquide dans le contexte d'un milieu fini.

¹milieu extrêmement souple en cisaillement et relativement raide en compressibilité

2. Introduction

La tension de surface γ , supposée constante, équilibre une pression p exercée sur la surface². Cette pression est classiquement donnée par :

$$p = \frac{\gamma}{R_1} + \frac{\gamma}{R_2} \quad (1)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures de la surface. Dans le cas d'un modèle axisymétrique, voir Fig. 1 et 2, les deux rayons de courbures sont donnés par :

$$R_1 = \frac{r}{\sin\beta} \quad (2)$$

où β est fonction de r . Notons que $\tan\beta = \frac{\partial\delta}{\partial r}$ et

$$R_2 = \frac{(1 + \delta'^2)^{3/2}}{\delta''} \quad (3)$$

où δ est fonction de r , $\delta' = \frac{\partial\delta}{\partial r}$ et $\delta'' = \frac{\partial^2\delta}{\partial r^2}$. Considérons p la pression "sous" la surface, i. e. $z < 0$. Il convient de remarquer que $\beta > 0 \Rightarrow p(R_1) < 0$ et $\delta'' > 0 \Rightarrow p(R_2) < 0$. De l'éq. 1 il vient donc en l'absence de force de gravité :

$$p = -\gamma\left(\frac{\sin(\arctan\delta')}{r} + \frac{\delta''}{(1 + \delta'^2)^{3/2}}\right) \quad (4)$$

Cette équation peut se réécrire $p = -\gamma\left(\frac{\delta'}{r\sqrt{1+\delta'^2}} + \frac{\delta''}{(1+\delta'^2)^{3/2}}\right)$.

La Fig. 3 présente deux conditions de bord envisageables. Seule la condition de droite correspondant à un milieu fini sera considérée plus loin, la condition de milieu pseudo-périodique ne présentant pas d'intérêt immédiat. L'équilibre du poinçon plat est donné par (voir Fig. 4) :

$$F = 2\pi a f + \pi a^2 p \quad (5)$$

où f désigne la tension de ligne au coin du poinçon donnée par $f = \gamma \sin(\beta(a))$.

² $p = \frac{-1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

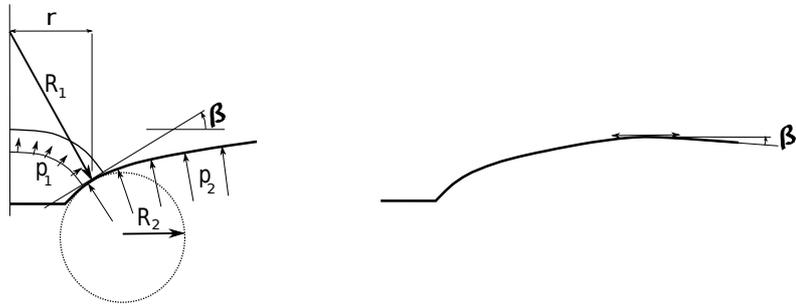


Figure 1: Pressions et courbures pour un modèle axisymétrique.

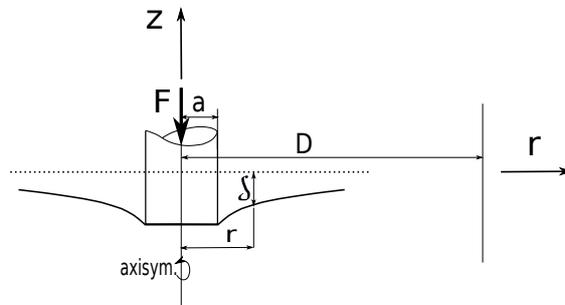


Figure 2: Géométrie du modèle.

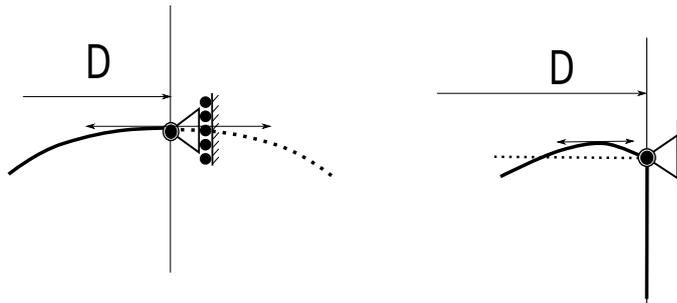


Figure 3: Deux conditions de bord correspondant à une situation pseudo-périodique où la surface est tangente au plan initial (à gauche) et bord fixe (à droite).

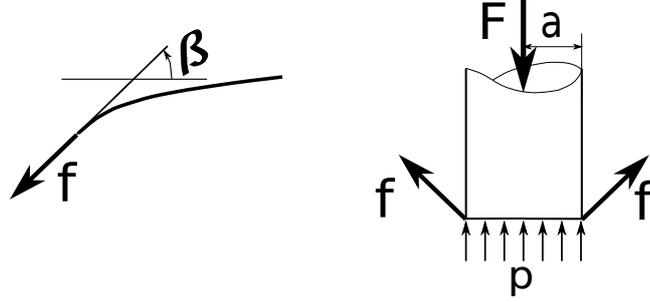


Figure 4: Équilibre du poinçon.

3. Forme de la surface - solution pour de faibles rotations

3.1. Équations constitutives

Lorsque $\beta \ll 1$ on peut approximer $\sin\beta \approx \beta$ et $a \tan\delta' \approx \beta$ et il vient $p + \gamma\left(\frac{\sin(a \tan\delta')}{r} + \frac{\delta''}{(1+\delta'^2)^{3/2}}\right) \approx p + \gamma\left(\frac{\delta'}{r} + \delta''\right)$. L'équation différentielle à résoudre, en l'absence de gravité, est donc :

$$p + \gamma\left(\frac{\delta'}{r} + \delta''\right) = 0 \quad (6)$$

Si l'on souhaite fixer $\delta(a) = 0$ la solution est donnée par :

$$\delta = c \log\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{p(r^2 - a^2)}{4\gamma} \quad (7)$$

où c est une constante définie par l'angle de la surface $\sin(\beta(a))$ au coin du poinçon. De $\delta'(r) = \frac{c}{r} - \frac{pr}{2\gamma}$ il vient :

$$\delta = \left(a\beta(a) + \frac{p a^2}{2\gamma}\right) \log\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{p(r^2 - a^2)}{4\gamma} \quad (8)$$

De l'équ. 5, on peut déduire $p = \frac{F}{\pi a^2} - \frac{2\gamma \sin\beta(a)}{a}$ puis :

$$\delta = \frac{F}{2\pi\gamma} \log\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{2\pi\gamma} - a\beta(a)\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (9)$$

En pratique, compte-tenu d'un niveau de précision attendu de l'ordre du pour-cent, les calculs seront conduits jusqu'à $\beta = 0.25 \text{ rad} \approx 14.3 \text{ deg}$ ³. La

³ $\sin 0.25 \approx 0.247$ et $\tan 0.25 \approx 0.255$

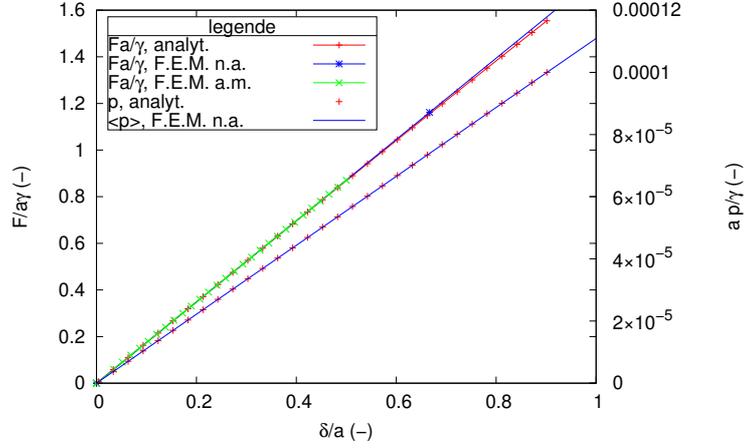


Figure 5: Courbes force de réaction sur l'indenteur plat et pression dans le liquide en fonction de la profondeur d'indentation pour $a = 100nm$, $\gamma = 0.03N/m$, $D = H = 100a$, $K = 2GPa$. Pour les calculs par éléments finis (F.E.M.) l'élasticité du solide est telle que $\mu = 1Pa$.

Fig. 5 montre que pression et force varient quasiment linéairement en fonction du chargement pour les petites valeurs de δ . Les calculs par éléments finis concordent avec cette remarque. Ceux-ci seront détaillées par ailleurs et discutés plus loin. Il sera donc loisible de considérer les valeurs des raideurs F/δ et p/δ puisque les évolutions sont linéaires au début du chargement.

4. Solution pour des rotations quelconques

Pour l'objectif visé, c'est à dire la détermination de la raideur en indentation, la solution aux grandes rotations ne présente - pour l'instant - qu'un intérêt mineur. Un calcul par intégration numérique de l'équ. 4 a toutefois été développé. Le segment de droite défini par les deux points a et D à la cote $z = 0$, i. e. $(a, 0) - (D, 0)$, est discrétisé en sous segments $(r_i, 0) - (r_{i+1}, 0)$, i variant de 0 à n avec $r_0 = a$ et $r_n = D$. Notons $b_a = \log_{10}(a)$ et $b_D = \log_{10}(D)$, le découpage est effectué de sorte que $r_i = 10^{b_a + (i/n)(b_D - b_a)}$. La surface est composée de segments de droite $(r_i, \delta_i) - (r_{i+1}, \delta_{i+1})$. Étant donné un angle $\beta(a)$, le premier segment est donné par $(r_0, 0) - (r_1, \delta_1)$ ou δ_1 désigne $(r_1 - a)(\tan(\beta(a)))$. Afin de connaître les points suivants (r_2, δ_2) puis (r_i, δ_i) une procédure par dichotomie cherche la valeur de δ_i qui respecte l'équ. 4 avec une précision $abs(\frac{\delta_i^m - \delta_i^{m-1}}{\delta_{i-1} - \delta_{i-2}})$ typiquement de 10^{-4} où m désigne l'itération par

dichotomie pour trouver δ_i . Les courbures δ' et δ'' sont calculées à partir du polynôme du second degré qui passe par les trois points (r_i, δ_i) , (r_{i+1}, δ_{i+1}) et $(r_{i+2}, \delta_{i+2}^m)$. La pente δ' est la pente de la fonction polynomiale au milieu du segment. Lorsque δ_n a été calculé, la procédure fait le chemin inverse à partir de (r_n, δ_n) et (r_{n-1}, δ_{n-1}) . Si les "trajets aller et retour" ne se chevauchent pas il faut rejeter le résultat du calcul et tenter d'augmenter les découpage et précision exigée.

La Fig. 6 compare les profils de surface pour $a = 30nm$, $a = 300nm$ et $a = 3\mu m$ considérant que $D = 1cm$ en l'absence de force de pesanteur pour $\gamma = 0.03J/m^2$ et pour $p = 0$. Le découpage considère $n = 300$ segments. Pour les relativement petites rotations, typiquement $\beta(a) < 0.25rad$ l'intégration numérique de l'équation différentielle non simplifiée coïncide avec la solution analytique approchée aux petits angles. Il apparaît qu'aux grandes rotations, ici $\beta(a) = 1.4rad$, que le profil de surface suit aussi une évolution du type $\delta(r) \sim \log(r)$. La solution approximative valable aux petits angles surestime l'enfoncement $\delta(a)$ pour une force donnée.

La Fig. 7 montre qu'en fait les pentes $F(\delta(D0))/\delta(D)$ estimées avec les équations approximatives aux petits angles permettent une très bonne approximation de la force en fonction du déplacement du poinçon plat jusqu'à des angles au coin du poinçon approchant les 80° .

Bien sûr les solution présentées ici ne correspondent pas aux observations terrestres de la surface d'un fluide puisqu'en réalité la perturbation apportée par un objet microscopique flottant tend vers zéro à l'infini, i. e. $\delta(r) \neq \log(r)$. En effet, la pesanteur étant négligée jusqu'ici, on n'obtient pas cette tendance. Les effets de la pesanteur seront examinés plus loin.

5. Variation de volume et équilibre en pression - résultats pour de faibles rotations

5.1. Équations constitutives

Si le volume est fini, ce volume de matière peut être calculé connaissant la forme de la surface. Rappelons que δ est calculé à partir de $r = a$ dans les équations précédentes qui définissent la forme de la surface à partir du poinçon plat, i. e. $\delta(a) = 0$. Pour un diamètre D et une hauteur initiale H en l'absence de sollicitation de l'indentateur, i. e. $\delta(r) = 0 \forall r$, la hauteur actuelle à la distance r est donnée par $H - \delta(D) + \delta(r)$ (voir Fig. 8). Le

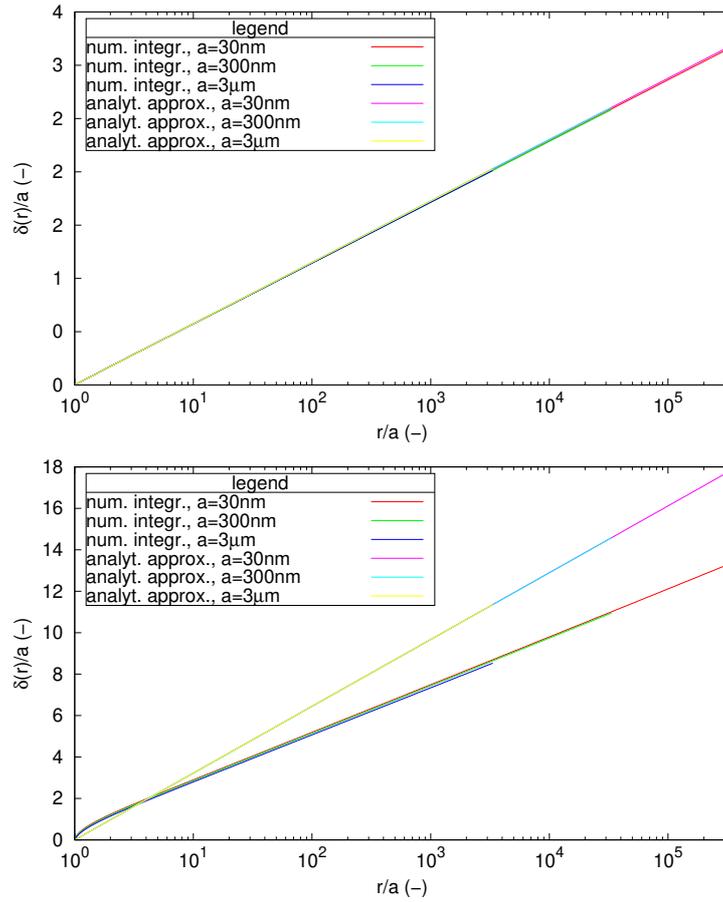


Figure 6: Profils de surface, comparaison de la solution analytique approximative valable pour les petites rotations avec celle fournie par intégration numérique de l'équation différentielle du second ordre. En haut $\beta(a) = 0.25 \text{ rad}$ et en bas $\beta(a) = 1.4 \text{ rad}$.

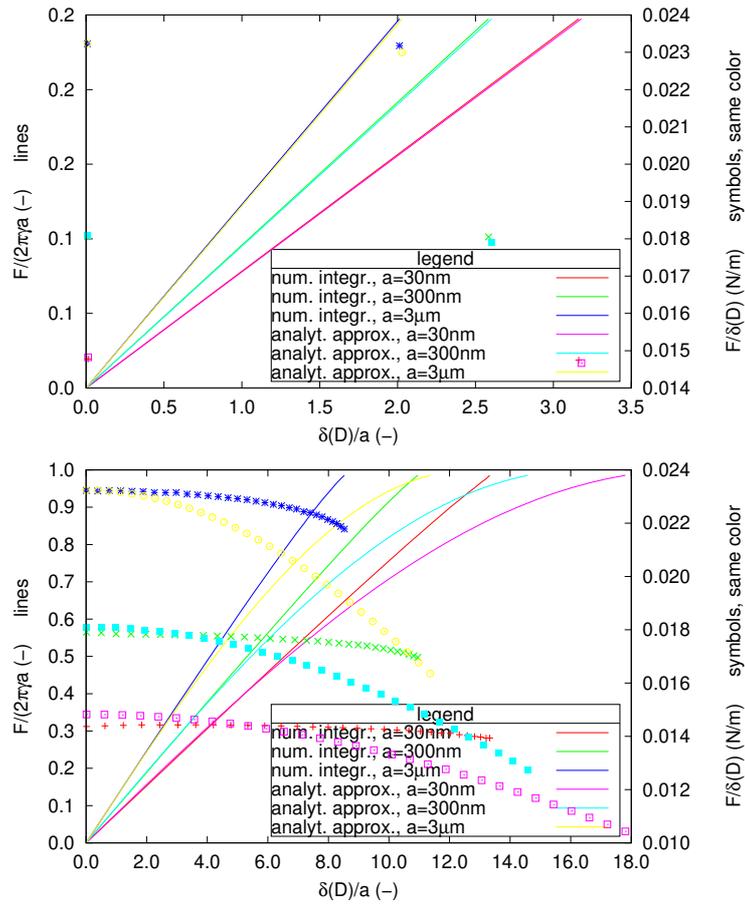


Figure 7: Courbes de chargement, comparaison de la solution analytique approximative valable pour les petites rotations avec celle fournie par intégration numérique de l'équation différentielle du second ordre. En haut $\beta(a) = 0.25 \text{ rad}$ et en bas $\beta(a) = 1.4 \text{ rad}$.

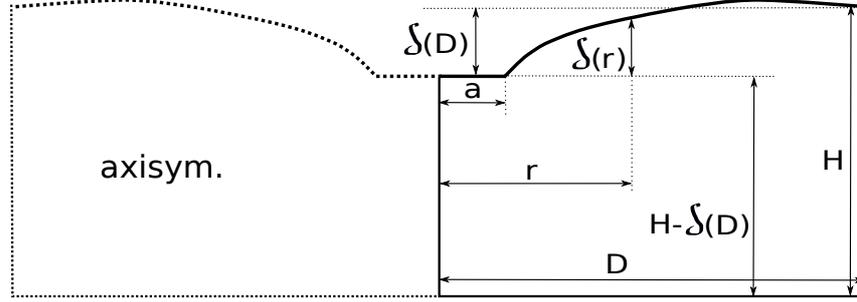


Figure 8: Volume axisymétrique défini par D et H .

volume actuel V_a est donc :

$$V_a = \pi D^2(H - \delta(D)) + \int_a^D \delta(r) 2\pi r dr \quad (10)$$

ce qui donne:

$$V_a = \pi D^2(H - \delta(D)) + \frac{\pi}{8} \left[D^2 \left(4c \left(2 \log \left(\frac{D}{a} \right) - 1 \right) - \frac{p(D^2 - 2a^2)}{\gamma} \right) + a^2 \left(4c - \frac{a^2 p}{\gamma} \right) \right] \quad (11)$$

Le résultat de l'intégrale a été bien sûr vérifié intégration numérique. Le volume initial V_i est donné par $V_i = \pi D^2 H$. La pression peut être déduite de la variation de volume connaissant le module de compressibilité K du milieu de sorte que⁴ :

$$p = K \frac{V_i - V_a}{V_i} \quad (12)$$

La pression p intervient dans le calcul de δ , équ. 8, donc dans le calcul de $V - a$. Les équations 12 et 8 doivent être satisfaites simultanément. Une procédure numérique permet de trouver la pression p à 10^{-4} près pour satisfaire au problème en milieu fini. Une précision de 10^{-4} sur la pression procure une précision de 10^{-4} , voire mieux, sur l'estimation de la force F .

5.2. Validation par éléments finis

La Fig. 9 compare les profils de surface calculés avec la présente solution analytique aux petits angles et par éléments finis pour $a = 10nm$, $H =$

⁴la contrainte hydrostatique $\sigma_{hyd} = K \frac{V_a - V_i}{V_i}$ vaut $-p$

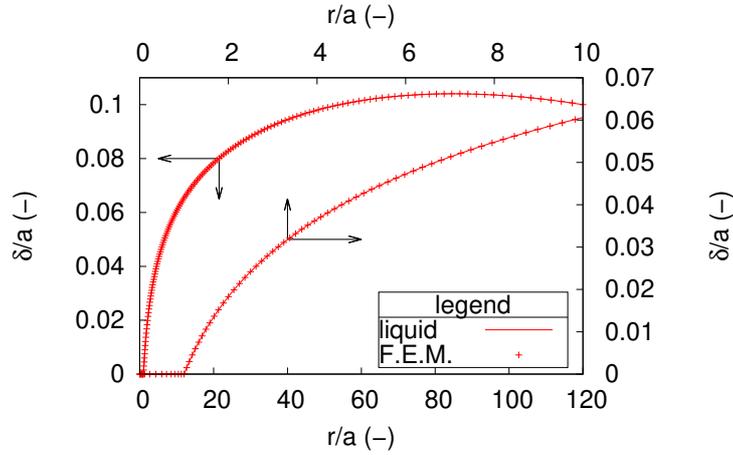


Figure 9: Exemple de profil de la surface obtenu par la présente solution analytique aux petits angles et par éléments finis avec un zoom à proximité du poinçon.

$D = 120a$, $K = 2GPa$, $\gamma = 0.03N/m$ et $\mu = 1Pa$ pour les éléments finis⁵. L'accord est fort convenable. Concernant les pressions estimées, la pression moyenne $\langle p \rangle$ résultant du calcul par éléments finis vaut $21.99Pa$ et celle fournie par le calcul analytique vaut $22.00Pa$. Concernant les forces estimées agissant sur le poinçon plat pour $\delta = 0.1 a = 10^{-9}m$, celle résultant du calcul par éléments finis vaut $4.9768 \cdot 10^{-11}N$ et celle fournie par le calcul analytique vaut $4.925 \cdot 10^{-11}N$, soit un écart de 1%. La procédure numérique par éléments finis sera présentée dans un autre article, le présent article ayant pour but de fournir une validation mutuelle aux calculs par éléments finis. De l'équ. 5 on peut déduire la contribution de la pression p sous la pointe et le ratio $\frac{\pi a^2 p}{2\pi a f} = \frac{a p}{f}$ vaut $1.4 \cdot 10^{-4}$ pour le jeu de paramètres ci-avant. La Fig. 10 fournit la contribution de la pression sous l'indenteur rapportée à la tension de ligne au coin de l'indenteur plat pour $a \in [10^{-8}m; 10^{-3}m]$, $\gamma \in [3 \cdot 10^{-3}N/m; 3 \cdot 10^{-1}N/m]$, $D \in [12.5a; 200a]$ et $H \in [12.5a; 200a]$. Les lignes en pointillé correspondent à $a = 10^{-7}m$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-2}N/m$ et $D = H$. Il apparaît que la contribution de la pression sous l'indenteur est négligeable devant la contribution de la tension de ligne, celle-ci étant dans tous les cas envisagés inférieure à 2%.

⁵il s'agit d'un solide se comportant quasiment comme un liquide puisque le rapport K/μ vaut $2 \cdot 10^9$

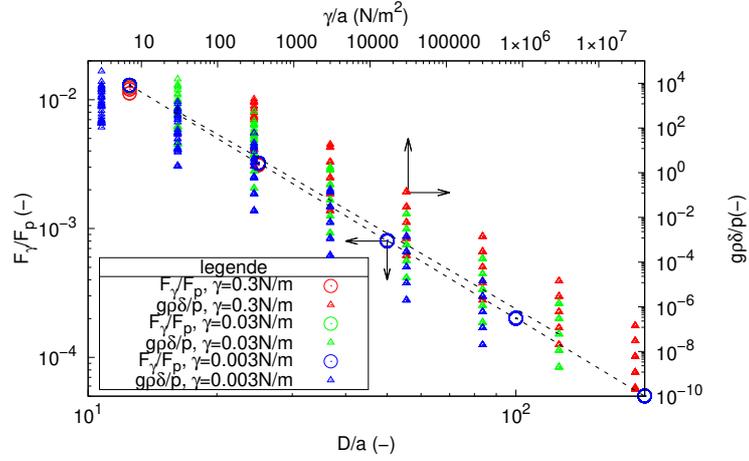


Figure 10: Contribution de la pression sous l'indenteur rapportée à la tension de ligne au coin de l'indenteur plat (cercles) et pression liée à la gravité rapportée à la pression dans le liquide sous l'effet de l'indentation (triangles).

5.3. Cas d'effet négligeable de la gravité en milieu fini

Lorsque $D/a \rightarrow \infty$ la solution qui néglige la pesanteur peut ne plus être satisfaisante puisque qu'elle prédit $\frac{F}{\delta} \rightarrow 0$. Si les forces de gravité g agissent selon l'axe $-\vec{z}$, il convient de modifier l'équ. 4 de la pression avec $-\rho g \delta$, où ρ désigne la densité du liquide. L'équation complète du problème statique devient :

$$p - \rho g \delta = -\gamma \left(\frac{\sin(\text{atan} \delta')}{r} + \frac{\delta''}{(1 + \delta'^2)^{3/2}} \right) \quad (13)$$

En effet la gravité induit un gradient de pression sous la surface, la différence de pression à la distance r vaut $\Delta p(r) = \rho g \delta(r)$. La Fig. 10 fournit la valeur de la pression liée à la gravité rapportée à la pression dans le liquide sous l'effet de l'indentation pour $a \in [10^{-8}m; 10^{-3}m]$, $\gamma \in [3 \cdot 10^{-3}N/m; 3 \cdot 10^{-1}N/m]$, $D \in [12.5a; 200a]$ et $H \in [12.5a; 200a]$. Les lignes en pointillé correspondent à $a = 10^{-7}m$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-2}N/m$ et $D = H =$. La ligne du dessus correspond à $\frac{g\rho\delta}{P_{hyd}}$ pour $D = H = 50a$. En pratique pour les problèmes qui sont concernés ici $\Delta p(r) \sim 1000 \cdot 9.81 \cdot a$. Ne perdons pas de vue qu'il s'agit de fournir des éléments de validation en milieux finis pour lesquels typiquement $D/a < 200$. Pour $\gamma/a > 10^4$ le ratio $\Delta p(r)/P_{hyd}$ est toujours inférieur à typiquement 1%.

⁶en effet, choisir des valeurs de D/a de l'ordre de 10^2 pour le modèle par éléments finis suffit pour convenablement retrouver les valeurs prédites par le modèle de Boussinesq qui

Pour typiquement $\gamma = 0.03N/m$ cela conduit à la validation de l'hypothèse de gravité négligeable pour $a < 3\mu m$. Par exemple, pour $a = \delta = 1\mu m$, $H = D = 120a$ on obtient $p = 2.2Pa$ et $\Delta p \approx 0.01Pa$. Pour $a = \delta = 0.1mm$ et $H = D = 120a$ on obtient $p = 0.022Pa$ $\Delta p \approx 1Pa$. Il apparaît que le gradient de pression lié à la gravité sous la surface est donc négligeable pour la précision recherchée dans la gamme des paramètres matériau d'une indentation microscopique d'un matériau organique.

Pour l'objectif visé il n'a donc pas été nécessaire de chercher à résoudre analytiquement l'équ. 13. Toutefois, les calculs par éléments finis ayant fait leurs preuves, il est loisible de les utiliser pour confirmer ces propos. La Fig. 11 montre les isovaleurs de la pression hydrostatique pour $a = 30\mu m$, $\gamma = 0.03J/m^2$, $g = 9.81m/s^2$, $K = 2GPa$, $\mu = 1Pa$. La dimension D a été fixée à $12.5a$ pour une meilleure lisibilité de la figure. Il y apparaît que la pression est légèrement supérieure sous le poinçon que plus loin sous la surface du fait de la différence d'altitude. La Fig. 12 présente les courbes force normée ($\frac{F}{2\pi\gamma a}$) versus profondeur d'indentation normée ($\frac{z}{a}$) pour $a = 3\mu m$, $a = 30\mu m$, $D = 120a$, $\gamma = 0.03J/m^2$, $g = 0m/s^2$, $g = 9.81m/s^2$, $K = 2GPa$, $\mu = 1Pa$ et $\rho = 1000kg/m^3$ où ρ désigne la masse volumique du matériau. On constate qu'en effet, pour les jeux de paramètres qui nous intéressent, l'effet de la pesanteur commence à se manifester lorsque la taille du poinçon dépasse quelques micromètres. En effet, pour $a = 3\mu m$ les courbes se superposent alors que pour $a = 30\mu m$ elles se différencient. Comme attendu, la pesanteur tend à augmenter la force pour un enfoncement donné. Pour les très grandes valeurs de D/a , la pesanteur doit toujours être prise en compte ainsi que pour les grandes valeurs de a . Il est aisé d'estimer grossièrement la limite de validité de la prise en considération de la pesanteur. Supposons que la force liée à la tension de surface soit du même ordre que la force exercée par la pression sous le poinçon. Posons donc :

$$\frac{F}{2} \sim \frac{2\pi\gamma\delta}{\log(D/a)} \sim \pi a^2 p \quad (14)$$

considère un milieu semi-infini. En effet, les prédictions de raideur par éléments finis F/δ tendent vers la valeur asymptotique prédite par Boussinesq. Par contre, lorsque seule la tension de surface est sensible, la réponse du milieu dépend toujours de $\frac{D}{a}$ quelles que soient les valeurs de $\frac{D}{a}$. Les prédictions de raideur par éléments finis F/δ ne tendent pas vers une asymptote dans ce cas. Les approches analytiques et numériques concordent aussi dans ce cas ce qui valide les approche analytique et numérique.

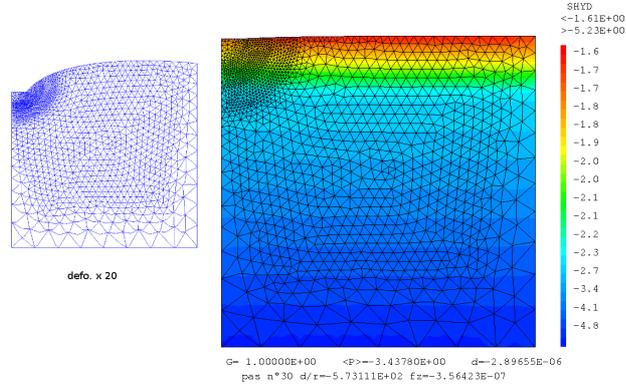


Figure 11: À gauche déformée amplifiée 20 fois, à droite isovaleurs de la pression hydrostatique montrant l'effet de la pesanteur pour $a = 30\mu m$, $D = 12.5a$, $\gamma = 0.03J/m^2$, $g = 9.81m/s^2$, $K = 2GPa$, $\mu = 1Pa$ et $\rho = 1000kg/m^3$.

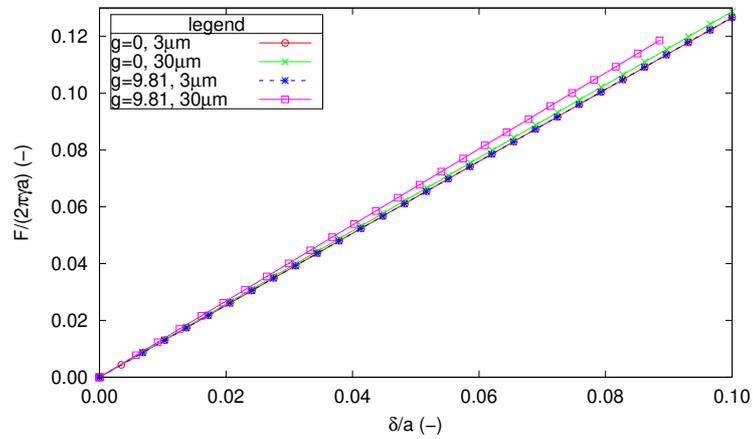


Figure 12: Courbes force normée versus profondeur d'indentation normée pour $D = 120a$, $\gamma = 0.03J/m^2$, $K = 2GPa$, $\mu = 1Pa$ et $\rho = 1000kg/m^3$.

Il vient $\frac{D}{a} \sim \exp(\frac{2\gamma}{\rho a^2 g})$. Considérons $\gamma = 0.03 J/m^2, \rho = 1000 kg/m^3$ et $g = 9.81 m/s^2$. Pour $a = 3 mm$ on obtient $D/a \approx 2$ ce qui indique que pour $D \gg a$ la tension de surface a un effet du second ordre sur la force F . Pour $a = 1 mm$ on obtient $D/a \approx 450$ ce qui indique qu'il faut considérer typiquement $D \sim 1000a$ et prendre en compte simultanément pesanteur et tension de surface dans une simulation numérique pour estimer convenablement la force F . Enfin, pour $a < 1 mm$, très vite $D/a \rightarrow \infty$ ce qui indique qu'il est difficilement envisageable de procéder à une simulation numérique par éléments finis pour un indenteur nanoscopique dans un cas où la pesanteur aurait une influence.⁷

6. Discussion

La Fig. 13 présente les raideurs normées pour la force agissant sur l'indenteur plat (cercles) et la pression dans le liquide sous l'effet de l'indentation (triangles) en fonction des rapports de dimension du milieu pour les jeux de paramètres $a \in [10^{-8} m; 10^{-3} m]$, $\gamma \in [3 \cdot 10^{-3} N/m; 3 \cdot 10^{-1} N/m]$, $D \in [12.5a; 200a]$ et $H \in [12.5a; 200a]$. Les lignes en pointillé correspondent à $a = 10^{-7} m$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-2} N/m$ et $D = H$. Il apparaît que les valeurs de $F/\delta\gamma$ dépendent de D/a mais peu de H/a . La pression p induite dans le liquide est sensible à la dimension H bien que cette pression n'influence que peu la réaction sur l'indenteur dans la gamme des paramètres considérée ici. La Fig. 14 montre qu'en-deçà d'une certaine raideur en cisaillement, typiquement pour $\mu < 100Pa$, un solide compressible peut-être considéré comme un liquide de même compressibilité en ce qui concerne la microindentation en présence de tension de surface. Dans la mesure où des calculs par éléments finis sont disponibles et fournissent des résultats satisfaisants, en cas de besoin, tous les cas ne se prêtant pas à simplification⁸ pourront être traités au cas par cas numériquement.

⁷Il s'agira dans une prochaine étude de lever l'aberration $\delta(D) \rightarrow \infty$ quand $D \rightarrow \infty$ puisque cela ne correspond pas aux observations en présence de pesanteur. En effet, à l'infini - loin de l'indenteur - la surface vient tangenter l'horizontale, i. e. la perturbation du profil de surface liée à un objet flottant tend vers zéro.

⁸par exemple lorsqu'on ne peut plus négliger l'effet de la gravité

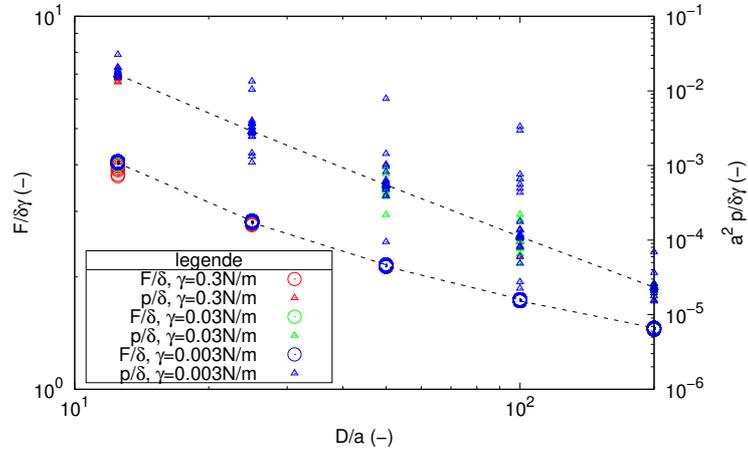


Figure 13: Raideurs normées pour la force agissant sur l'indenteur plat (axe de gauche, cercles) et la pression dans le liquide sous l'effet de l'indentation (axe de droite, triangles) en fonction des rapports de dimension du milieu.

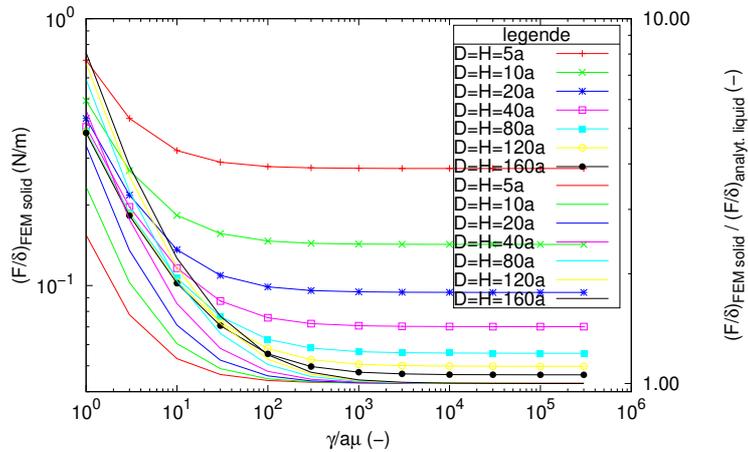


Figure 14: Courbes de raideur apparente du matériau solide à l'indentation en fonction du paramètre adimensionnel $\gamma/a\mu$ (axe de gauche, lignes et symboles) et comparaison avec la raideur du liquide ayant la même compressibilité (axe de droite, lignes) pour $a = 10nm$, $\gamma = 0.03N/m$, $K = 2GPa$. La raideur apparente du liquide est obtenue analytiquement, celle du solide par éléments finis.

7. Conclusion

Les calculs présentés dans cet article pour un liquide concordent avec ceux de (Fond, 2018b), (Fond, 2018a) pour des membrane fortement tendues. Ils permettent de situer les domaines de validité pour permettre de négliger certains paramètres. Ils fournissent des arguments de validation pour les calculs numériques par éléments finis. Compte-tenu du volume d'informations relativement important nécessaire à bien présenter ce modèle numérique, celui-ci sera présenté dans un article séparé.

Appendix A. Comparaison membrane fortement tendue et liquide compressible avec tension de surface

Afin d'obtenir la pente initiale de la courbe F vs δ , i. e. la raideur apparente du matériau, les profondeurs d'indentation sont choisies de sorte que $\delta/a < 0.1$. La Fig. A.15 présente les résultats pour $a = 10^{-8}m$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}N/m$, $D \in [12.5a; 3200a]$, $H \in [12.5a; 3200a]$ et $K = 2GPa$ pour le modèle de liquide. Cette figure montre que la force prédite par le modèle de liquide avec tension de surface est toujours supérieure à celle du modèle de membrane fortement tendue. La solution pour les liquides avec tension de surface conviendra mieux aux cas des matériaux quasi-incompressibles. Comme dit au §5.2, la contribution de la pression sous l'indenteur, second terme de l'équ. 5 est un terme du second ordre. Nonobstant, la relativement petite pression générée par la compression du liquide change légèrement la forme de la surface et, en particulier, augmente l'angle au coin de l'indenteur de sorte que la force agissant sur le poinçon plat est un peu plus grande que pour une membrane fortement tendue dans les mêmes conditions. Fort heureusement, les résultats des calculs de la Tab. A.1 montrent que le rapport entre les forces prédites par le modèle de liquide compressible avec tension de surface et le modèle de membrane fortement tendue est quasiment constant quand seul le paramètre H varie et pour des valeurs de $\gamma/a > 3 \cdot 10^6 Pa^9$. Ceci permet d'utiliser simplement la formule approximative fournie en (Fond, 2018b), i. e. $\delta(D) \approx \frac{F}{2\pi\gamma} \log(D/a)$, avec un coefficient correctif pour passer d'un modèle à l'autre.

⁹pour des valeurs plus élevées de γ/a il conviendra de considérer que la correction à apporter n'est pas constante, et ceci d'autant plus que H est petit

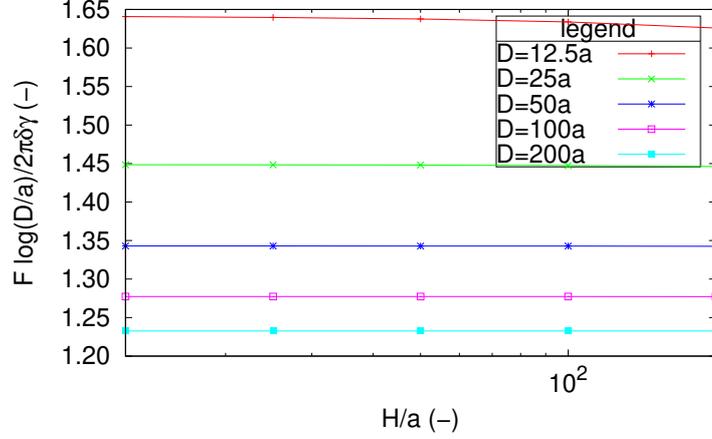


Figure A.15: Comparaison entre le modèle de liquide compressible avec tension de surface et le modèle de membrane fortement tendue.

$$F \approx c_{ML}(D/a) \frac{2\pi\gamma\delta}{\log(D/a)} \quad (\text{A.1})$$

Pour les milieux semi-infinis et des matériaux quasi-incompressibles¹⁰, il conviendra donc d'utiliser comme référence analytique lorsque $\frac{\gamma}{a\mu} \ll 1$ l'équation de Boussinesq $F = 8a\mu\delta$ et lorsque $\frac{\gamma}{a\mu} \gg 1$ l'équation fournie ci-avant $F \approx \frac{c_{ML}(D/a) 2\pi\gamma\delta}{\log(D/a)}$. Il est loisible d'approximer par une fonction dans l'intervalle $D/a \in [12.5a; 3200a]$ pour obtenir :

$$F \approx \left(1.13 + 2.19 \frac{D^{-0.59}}{a}\right) \frac{2\pi\gamma\delta}{\log(D/a)} \quad (\text{A.2})$$

References

Fond, C., 2018a. Enfoncement d'un poinçon plat dans une membrane fortement précontrainte : solution analytique.

Fond, C., 2018b. Indentation of a highly prestressed membrane by a flat punch: analytical solution.

¹⁰dans la gamme des paramètres considérés ici convenant aux matériaux organiques et à des indentateurs nanométriques à micrométriques

D/a	$c_{ML}(H/a = 12.5)$	$c_{ML}(H/a = 200)$
12.5	1.6407	1.6260
25	1.4484	1.4461
50	1.3430	1.3426
100	1.2773	1.2772
200	1.2326	1.2326
400	1.2003	1.2003
800	1.1759	1.1759
1600	1.1568	1.1568
3200	1.1414	1.1414

Table A.1: Rapports entre les raideurs prédites par les modèles de liquide et de membrane tendue, influences de D/a et H/a .

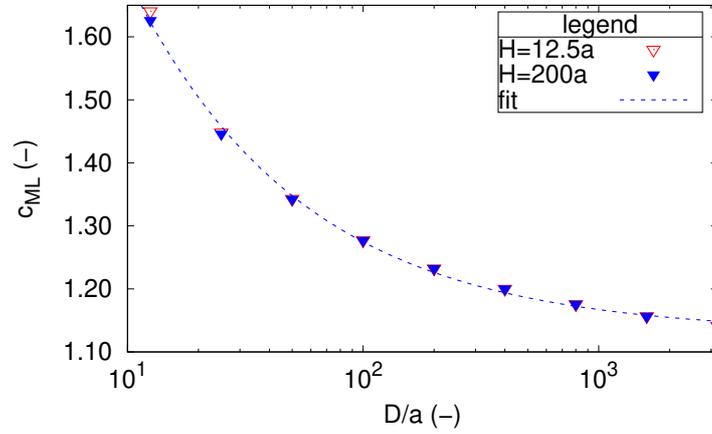


Figure A.16: Évolution du coefficient c_{ML} avec D/a dans la gamme $H/a \in [12.5a; 3200a]$, $D/a \in [12.5a; 3200a]$ et $\gamma/a > 3 \cdot 10^6 Pa$.