



HAL
open science

Schéma d'intégration temporelle basés sur la resommation de séries divergentes

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Ahmad Deeb, Erwan Liberge

► **To cite this version:**

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Ahmad Deeb, Erwan Liberge. Schéma d'intégration temporelle basés sur la resommation de séries divergentes. Colloque de Mécanique Théorique et Applications, en l'honneur d'Alain Cimetière, 2014, La Rochelle, France. hal-02086603

HAL Id: hal-02086603

<https://hal.science/hal-02086603>

Submitted on 1 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Motivations

On souhaite construire un schéma d'intégration temporelle pour la résolution numérique d'un problème d'évolution:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, u(t)), \quad u(0) \text{ donné}, \quad (1)$$

- ▶ dans un **grand intervalle de temps** (ex: écoulement d'un fluide instationnaire)
- ▶ autorisant des **pas de temps grossiers**,
- ▶ permettant l'étude des **bifurcations** instationnaires,
- ▶ et facilement parallélisable, pour la rapidité des calculs.

Pour cela, on utilise la méthode asymptotique.

Méthode asymptotique

On cherche la solution sous-forme de série temporelle:

$$\bar{u}(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n. \quad (2)$$

- ◆ La solution est numériquement valable pour $t \in [0, \delta t]$. On considère δt comme le "pas de temps" de la méthode.
- ◆ **Avantages** de la méthode asymptotique:
 - l'algorithme obtenu est explicite et linéaire,
 - efficace pour l'étude numérique des bifurcations.
- ◆ **Mais:** δt peut être faible ou nul. Pour l'augmenter, on utilise la méthode de resommation de séries divergentes, dite de Borel-Laplace.

Resommation de Borel-Laplace

$$\bar{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \quad \xrightarrow{\text{Borel}} \quad \mathcal{B}\bar{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

$$\mathcal{S}\bar{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \quad \xrightarrow{\text{Laplace}} \quad P(\xi) \text{ analytique dans } D \supset d = [0, e^{i\theta} \infty[$$

- La **somme de Borel** $\mathcal{S}\bar{u}(t)$ existe si:
- ◆ \bar{u} est de Gevrey (d'ordre 1): $|u_k| < CA^k k!$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
 - ◆ Le prolongement P de $\mathcal{B}\bar{u}$ dans un domaine D contenant la demi-droite d reliant l'origine à l'infini existe,
 - ◆ $|P(\xi)| = O(e^{c\xi})$ quand $\xi \rightarrow \infty$ dans la direction d .
- Dans ce cas, $\mathcal{S}\bar{u}(t)$ est asymptotique de Gevrey à la série $\bar{u}(t)$.

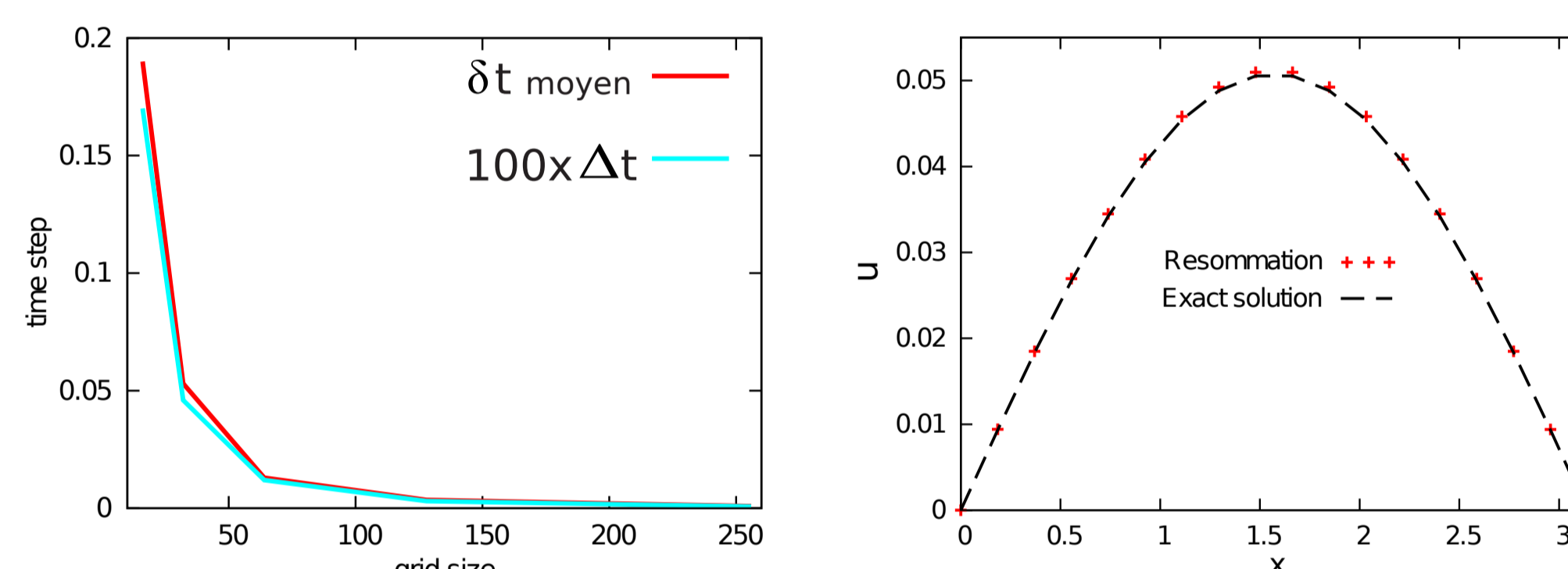
Algorithme Borel-Padé-Laplace

Numériquement, la série est tronquée. Le prolongement peut s'effectuer via les approximants de Padé, et la transformée de Laplace se calcule par quadrature de Gauss. On obtient alors le premier algorithme suivant:

$$\bar{u}^n(t) = \sum_{k=0}^n u_k t^k \quad \xrightarrow{\text{Borel}} \quad \mathcal{B}\bar{u}^n(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

$$\mathcal{S}^n \bar{u}(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{n_G} P^n(\xi_i, t) \omega_i \quad \xrightarrow{\text{Gauss-Laguerre}} \quad P^n(\xi) = \frac{A_0 + \dots + A_{n_1} \xi^{n_1}}{1 + \dots + B_{n_2} \xi^{n_2}}$$

Equation de la chaleur



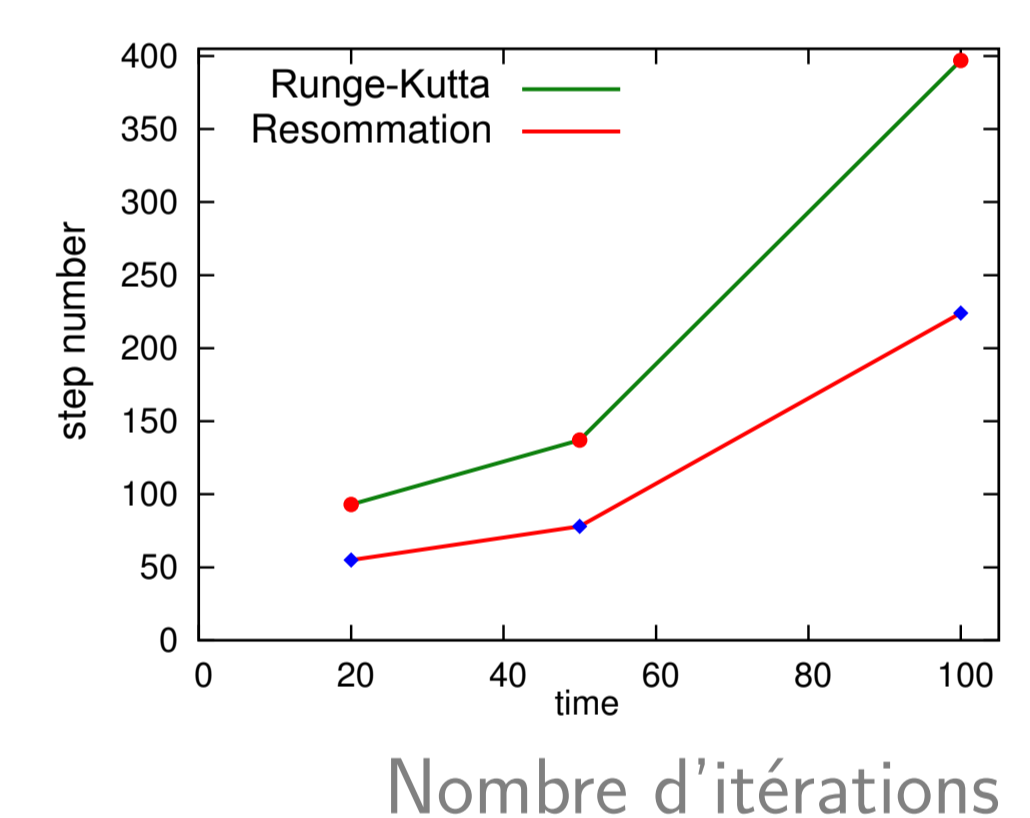
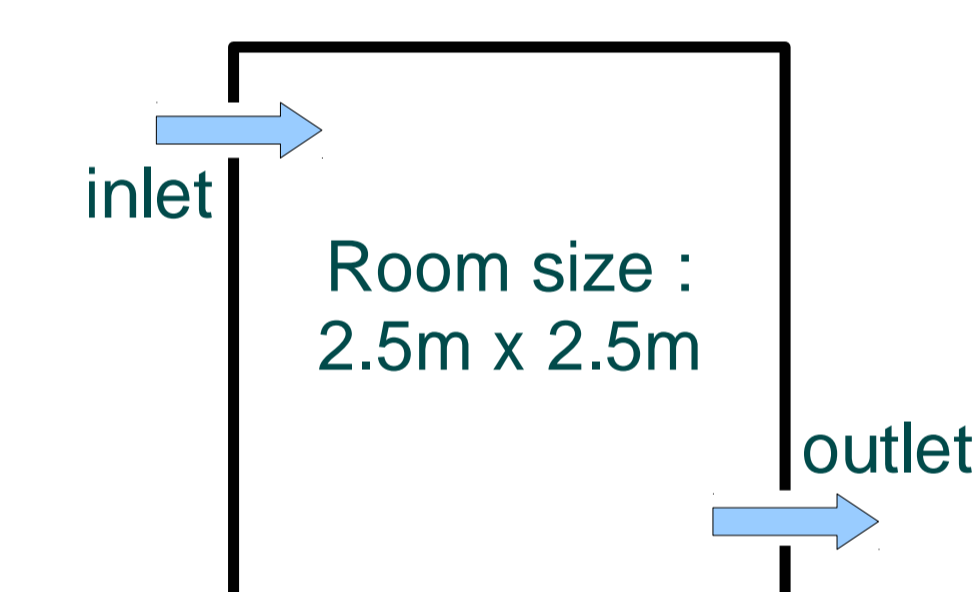
A gauche: pas de temps. A droite: solution approchée.

Le pas de temps δt est en moyenne environ 100 fois plus grand que $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2\nu}$ qui est le pas de temps limite du schéma d'Euler explicite [2].

Dispersion de particules dans une chambre ventilée

Résolution numérique des équations du fluide (air) et des particules, réduites par la P.O.D. (décomposition orthogonale aux valeurs propres) [3]:

$$\frac{d\varrho^i}{dt} + \sum_{j,l=1}^m Q_{jl}^i \varrho^j \varrho^l + \sum_{j=1}^m L_j^i \varrho^j = F^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$



Nombre d'itérations

Equations de Navier-Stokes complètes

Algorithme:

- Etape 1.** $u_0 = u(0, x)$ donné
- Etape 2.** Pour $k = 1, \dots, n$, résoudre

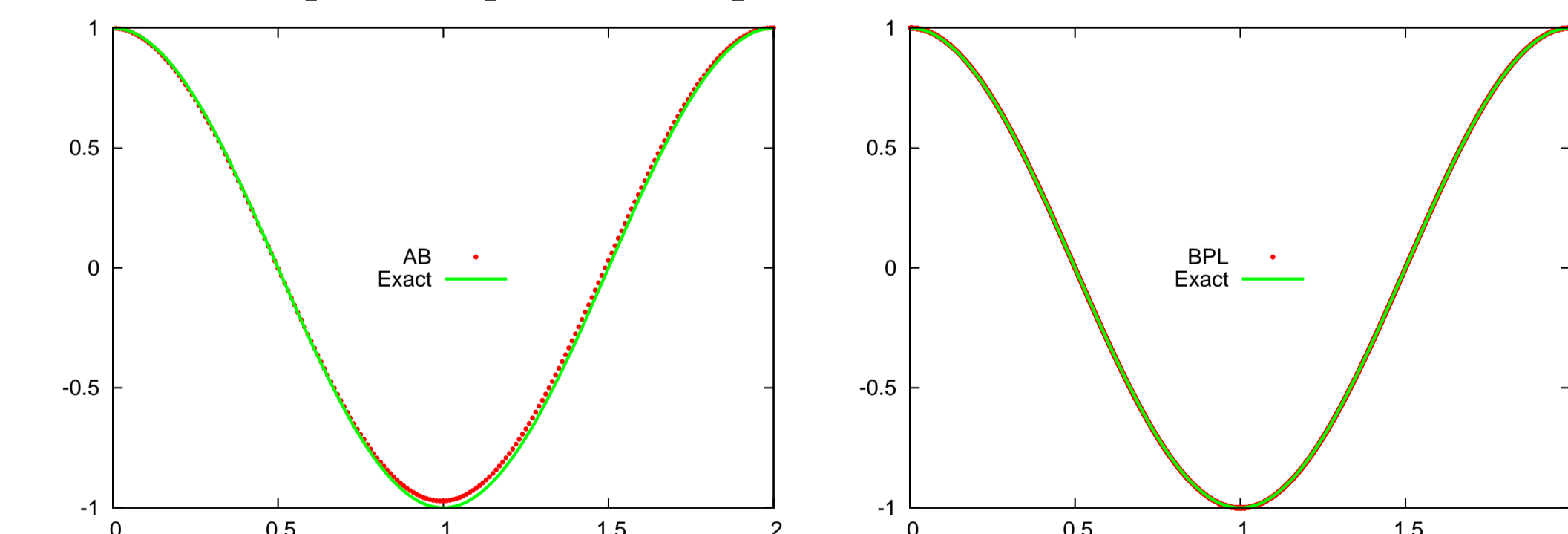
$$\begin{cases} k u_k + \nabla p_{k-1} = F(u_0, \dots, u_{k-1}, p_0, \dots, p_{k-2}) \\ \text{div } u_k = 0 \end{cases}$$
- Etape 3.** Resommation

Remarques:

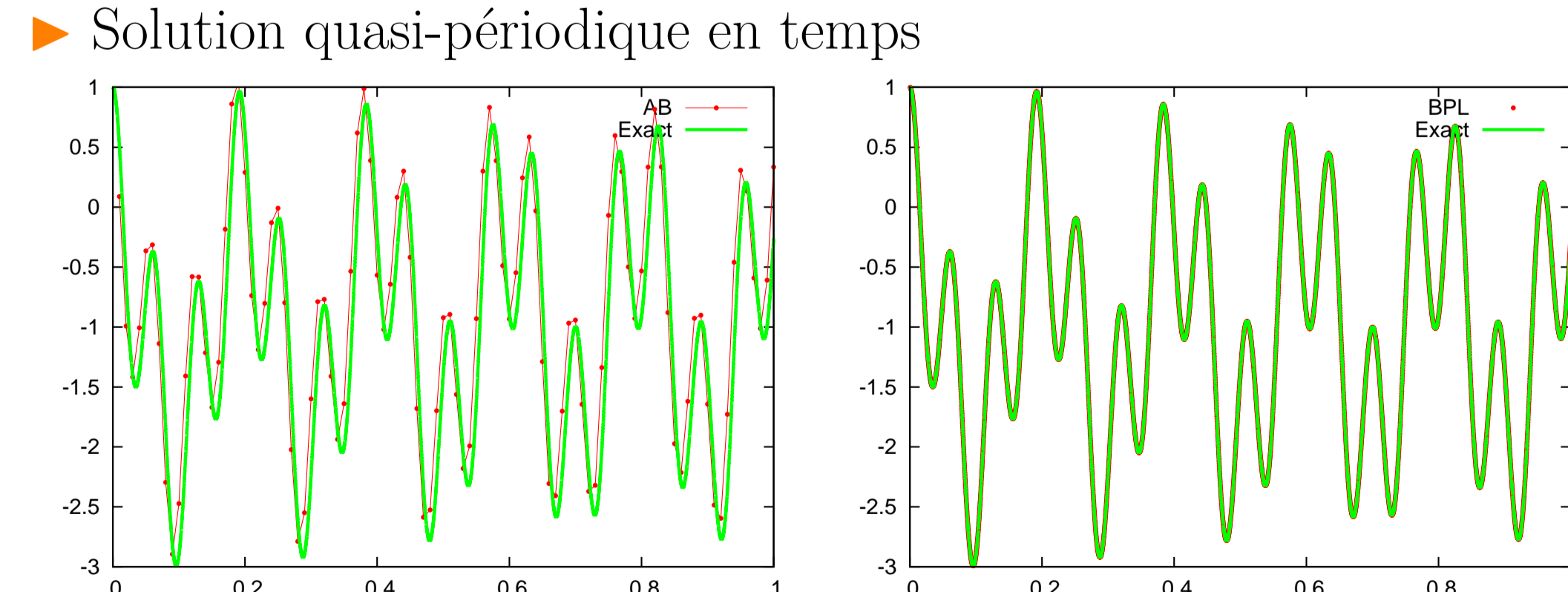
- ✓ Les séries $\bar{u}(t, x) = \sum_{k \geq 0} u_k(x) t^k$ et $\bar{p}(t, x) = \sum_{k \geq 0} p_k(x) t^k$ sont de Gevrey [1].
- ✓ L'opérateur (de Darcy) est linéaire.
- ✓ Le schéma est explicite

Tests numériques:

▶ Solution périodique en temps



▶ Solution quasi-périodique en temps



AB = Adams-Bashforth. BPL = Décomposition en série + resommation

Algorithme utilisant les séries de factorielles généralisées

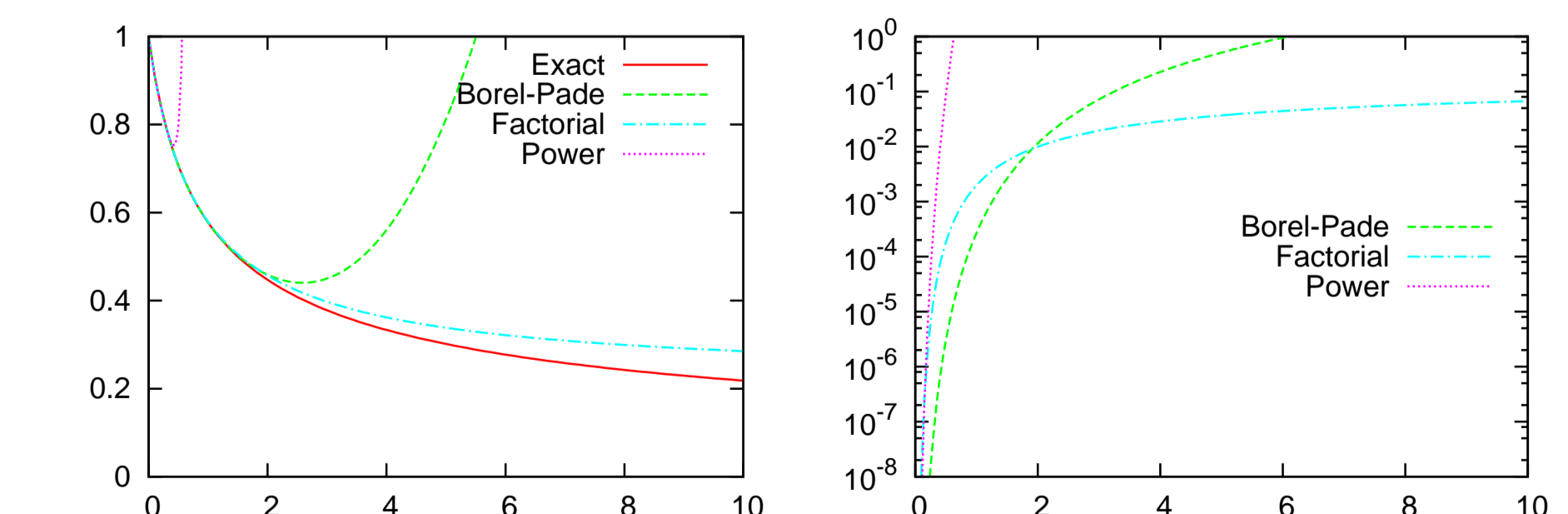
On peut aussi représenter la somme de Borel par une série de factorielles généralisées convergente:

$$\mathcal{S}\bar{u}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad \text{où } z = \frac{1}{t}.$$

Avantages par rapport à Borel-Padé-Laplace:

- Evite les problèmes de calcul des approximants de Padé (non robustesse, pôles artificiels).
- Evite le passage par l'espace de Borel.

Exemple: $\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}u^3 = 0$



A gauche: solutions approchées. A droite: erreurs num.

Remerciements. Ce projet a été financé par le Fonds Européen de Développement Régional (FEDER).

References

- [1] O. Costin, G. Luo, and S. Tanveer. Divergent expansion, Borel summability and three-dimensional Navier-Stokes equation. *Phil. Trans. R. Soc.*, 2008.
- [2] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Time integration algorithm based on divergent series resummation, for ordinary and partial differential equations. *J. Comp. Phys.*, 2013.
- [3] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and C. Allery. Numerical divergent series resummation in fluid flow simulation. *Eur. J. Comp. Mech.*, 2008.