

Méthode de resommation de séries divergentes utilisée comme schéma d'intégration temporelle

Dina RAZAFINDRALANDY, Université de La Rochelle

Aziz HAMDOUNI, Université de La Rochelle

Erwan LIBERGE, Université de La Rochelle

Ahmad DEEB, Université de La Rochelle

Mots-clés : Resommation de Borel-Laplace, schéma numérique, mécanique des fluides

Les séries divergentes apparaissent en science de l'ingénieur lors de la résolution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles. C'est généralement le cas, par exemple, lorsqu'on cherche la solution de l'équation de la chaleur sous forme d'un développement en série formelle temporelle [1]. La divergence de la série indique l'existence de directions singulières. La solution $u(t)$ n'est alors holomorphe que dans un voisinage sectoriel de l'origine ne contenant pas ces directions singulières.

Connaissant les coefficients de la série formelle $\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k$, on peut approcher $u(t)$ en appliquant la méthode de resommation de Borel-Laplace décrite ci-après, à condition que la série est de Gevrey, c'est-à-dire que u_k est dominé par $(k!)^s$ où $s > 0$. Dans ce cas, la série initiale n'est autre que le développement asymptotique de la solution au sens de Gevrey. Cette condition est vérifiée par l'équation de la chaleur, l'équation de Burgers, et plus généralement par les équations de Navier-Stokes [2].

La méthode de resommation de Borel-Laplace consiste à

- calculer la transformée $B\hat{u}(\xi)$ de Borel de $\hat{u}(t)$ (voir Table 1) qui est une série convergente à l'origine,
- la prolonger analytiquement le long d'une demi-droite d reliant l'origine à l'infini,
- et calculer la transformée de Laplace du prolongement $P(\xi)$.

Lorsque le prolongement est possible et que la transformée de Laplace est bien définie, on obtient la "somme de Borel-Laplace" $LB\hat{u}(t)$ de \hat{u} .

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k & \xrightarrow{\text{asymptotique } \simeq} & LB\hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \\
 \downarrow \text{Borel} & & \uparrow \text{Laplace} \\
 B\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k & \xrightarrow{\text{Prolongement}} & P(\xi)
 \end{array}$$

Table 1: Méthode de Resommation de Borel-Laplace pour $s = 1$

Dans cette communication, on transforme la méthode de resommation en un algorithme numérique où le prolongement est réalisé par des approximants de Padé et la transformation de Laplace par une quadrature de Gauss-Laguerre. On l'applique ensuite à la résolution numérique d'équations différentielles modèles en mécanique des fluides (équation de la chaleur, de Burgers, ...) [3] ainsi qu'aux équations de Navier-Stokes.

Références

- [1] D.A. LUTZ, M. MIYAKE and R. SCHÄFKE, *On the Borel Summability of Divergent Solutions of the Heat Equation*, Nagoya Mathematical Journal, vol 154, 1999.
- [2] O. COSTIN, *On Borel summation and Stokes phenomena for rank one nonlinear systems of ODE's*, Duke Mathematical Journal, vol 93(2), 1998.
- [3] D. RAZAFINDRALANDY and A. HAMDOUNI, *Time integration algorithm based on divergent series resummation, for ordinary and partial differential equations*, Journal of Computational Physics, vol 236, 2013.