



**HAL**  
open science

# Application de la théorie des groupes de symétries de Lie à la modélisation des écoulements turbulents anisothermes

N Al Sayed, Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni

► **To cite this version:**

N Al Sayed, Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni. Application de la théorie des groupes de symétries de Lie à la modélisation des écoulements turbulents anisothermes. 20ème Congrès Français de Mécanique, 2011, Besançon, France. hal-02086493

**HAL Id: hal-02086493**

**<https://hal.science/hal-02086493>**

Submitted on 1 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Application de la théorie des groupes de symétries de Lie à la modélisation des écoulements turbulents anisothermes

N. Al Sayed<sup>a</sup>, D. Razafindralandy<sup>a</sup>, A. Hamdouni<sup>a</sup>

a. LEPTIAB, Université de La Rochelle, Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 01, France

## Résumé :

Comme les groupes de symétries de Lie  $G$  des équations aux dérivées partielles EDP (ensemble de transformations qui laissent invariant l'ensemble de solutions) représentent les propriétés physiques intrinsèques contenues dans les équations, ils offrent un outil efficace de modélisation des phénomènes physiques. On propose une application de la théorie des groupes de symétrie de Lie à la modélisation théorique d'écoulement turbulent anisotherme. D'abord, on construit une classe des modèles de turbulence (LES) invariant par les groupes de symétrie de cet écoulement. Ensuite, de cette classe des modèles, on en déduit deux modèles particuliers : le premier, son tenseur déviatorique  $\tau^d$  est nul à la paroi et sa viscosité de sous-maille  $\nu_{sm}$  a un comportement en  $(y^+)^3$  proche de la paroi, tandis que le deuxième est fortement couplé. Puis, un test numérique est effectué afin de comparer ces deux modèles avec celui de Smagorinsky en convection mixte.

## Abstract :

As the symmetry groups of partial differential equations PDE (set of transformations that leave invariant the set solutions) represent the intrinsic properties contained in the equations, they provide an effective tool for modeling physical phenomena. We proposes an application of the theory of symmetry groups in theoretical and numerical modeling of isothermal turbulent flow. First, we construct a class of turbulence models (LES) is invariant under the symmetry groups of this flow. Then, this class of models, we deduction of two specific models : the first, his deviatoric tensor  $\tau^d$  is zero at the wall and its viscosity subgrid  $\nu_{sm}$  has a following behavior  $y^3$  close to the wall, while the second is strongly coupled. Then, a numerical test is performed to compare these two models with that of Smagorinsky mixed convection.

**Mots clefs :** Groupe de symétrie, modèles de turbulence, lois d'échelles.

## 1 Introduction

Les groupes de Lie [5] et leurs applications ont un rôle important dans la mécanique des fluides. Ces groupes de Lie, en tant que groupes de symétries continus, jouent un rôle fondamental en physique de la turbulence : on peut citer les travaux de M. Oberlack concernant les lois d'échelles isothermes [4]. Par la suite, D. Razafindralandy et A. Hamdouni [6] ont analysé, construit et validé des modèles de simulation des grosses échelles qui respectent les symétries des équations de Navier-Stokes isothermes. Des simulations sur des configurations de type cavité ventilée, montrent que ces modèles présentent une bonne capacité à reproduire l'écoulement proche de la paroi. Dans cette étude, on considère le cas anisotherme.

Cette communication est organisée comme suit : Dans la première section 2, on construit un classe de modèles LES invariants par les groupes de symétries des écoulements anisothermes. Ensuite, de cette classe on déduit deux modèles particuliers. Puis, dans la section 3, on calcule par la méthode de RANS les lois d'échelles des écoulements parallèle anisotherme. Dans la dernière section 4, un test numérique est effectué afin de comparer ces deux modèles avec celui de Smagorinsky en convection mixte.

## 2 Modèles LES invariants par les groupes de symétrie pour un écoulement turbulent anisotherme

La simulation des grandes échelles LES consiste à séparer les petites échelles et les grandes échelles par un filtre. Les équations des écoulements turbulents anisothermes filtrés sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - 2\nu \operatorname{div} \bar{S} - \beta g(\bar{\theta} - \theta_{ref}) e_g + \operatorname{div}(\tau) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \bar{\theta}) - \kappa \operatorname{div}(\nabla \bar{\theta}) + \operatorname{div}(h) = 0 \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $\bar{u}$ ,  $\bar{S} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla^T \bar{u})$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{p}$  et  $e_g$  sont respectivement, les champs de vitesse filtré, tenseur de déformation filtré, la température filtré, le champ de la pression filtré, le vecteur unitaire vertical ascendant et  $\tau = \overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u}$  et  $h = \overline{\theta u} - \bar{\theta} \bar{u}$  sont respectivement le tenseur de sous-maille et le flux thermique de sous-maille. On peut décomposer le tenseur  $\tau$  en deux tenseurs, déviatorique et sphérique

$$\tau = \tau^d + \tau^s \text{ où } \tau^d = \tau - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \tau) I_d \quad \text{et} \quad \tau^s = \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \tau) I_d,$$

de telle façon que la trace de  $\tau^d$  soit nulle. Il reste donc, à modéliser  $\tau^d$  et  $h$  pour fermer les équations [1] (1).

Dans le paragraphe suivant, on fait brièvement un appel à la méthode de construction d'une classe de modèles invariants anisothermes [1].

### 2.1 Construction d'une classe de modèles anisothermes invariants

Pour que le modèle soit invariant par rapport aux groupes des translations temporelles, de pression et galiléenne, il suffit que le tenseur de sous-maille  $\tau^d$  soit indépendant du temps et du pression. Et pour assurer l'invariance par rapport à la translation pression-température, on ne fait intervenir  $\bar{\theta}$  qu'à travers son gradient  $\bar{\mathbb{T}} = \nabla \bar{\theta}$ . Ensuite, pour avoir l'invariance par rotation, on prend :  $-\tau^d = \mathfrak{L}(\bar{S}, \bar{\mathbb{T}})$  et  $-h = \mathfrak{F}(\bar{S}, \bar{\mathbb{T}})$ . D'après la théorie des invariants et l'égalité des traces, on peut modéliser les deux couples  $(\tau^d, h)$  de la manière suivants [1] :

$$\begin{cases} -\tau^d = E_1 \bar{S} + E_2 \operatorname{Adj}^d \bar{S} + E_3 (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d + E_4 [\bar{S} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d + E_5 [\bar{S} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}}) \bar{S}]^d, \\ -h = E_6 \bar{\mathbb{T}} + E_7 \bar{S} \bar{\mathbb{T}} + E_8 \bar{S}^2 \bar{\mathbb{T}}, \end{cases} \quad (2)$$

où les coefficients  $E_i$  sont des fonctions des invariants indépendants formé à partir de  $\bar{S}$  et de  $\bar{\mathbb{T}}$  qui sont :

$\mathcal{X} = \operatorname{tr} \bar{S}^2$ ,  $\xi = \det \bar{S}$ ,  $\vartheta = \bar{\mathbb{T}}^2$ ,  $\omega_1 = \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{S} \bar{\mathbb{T}}$ ,  $\omega_2 = \bar{S} \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{S} \bar{\mathbb{T}}$ , et  $\operatorname{Adj}$  est l'opérateur adjugué ou comatrice tel que :  $\bar{S} \cdot (\operatorname{Adj} \bar{S}) = (\det \bar{S}) I_d$ . De plus, pour que cette classe de modèles soit invariant par les changements d'échelle et qu'il dérive d'un potentiel, on le modélise comme suit [1] :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu \left[ 2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3 \frac{\partial g_m}{\partial v_3} - 6v_4 \frac{\partial g_m}{\partial v_4} \right] \bar{S} + \nu \left[ \mathcal{X}^{-1/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \operatorname{Adj}^d \bar{S} \right. \\ \left. + \mathcal{X}^{-3/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_3} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d + 2\mathcal{X}^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial v_4} [\bar{S} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d \right], \\ -h = \kappa \left( \frac{\partial g_t}{\partial v_2} I_3 + \mathcal{X}^{-1/2} \frac{\partial g_t}{\partial v_3} \bar{S} + \mathcal{X}^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial v_4} \bar{S}^2 \right) \bar{\mathbb{T}}, \end{cases} \quad (3)$$

où les  $g_m$  et  $g_t$  sont des fonctions de invariants  $v_i$   $i = 1, \dots, 4$  qui sont :  $v_1 = \frac{\xi}{\mathcal{X}^{3/2}}$ ,  $v_2 = \frac{\vartheta}{\mathcal{X}^2}$ ,  $v_3 = \frac{\omega_1}{\mathcal{X}^{5/2}}$ ,  $v_4 = \frac{\omega_2}{\mathcal{X}^3}$ .

## 2.2 Modèle invariant exponentiel

Le modèle invariant exponentiel est un cas particulier de la classe de modèles invariants (3) où  $g_m(v) = (C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3))$ ,  $h_t(v) = \frac{\partial g_t}{\partial v} = (C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3))$ , et  $v = v_1 = \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3}$ . Il est donné par :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu (C_s \bar{\delta})^2 \left\{ (2(1 - \exp(-v^3)) - 9v^3 \exp(-v^3)) \bar{S} + \frac{3\nu v^2 \exp(-v^3)}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right\}, \\ -h = \kappa (C_s \bar{\delta})^2 (1 - \exp(-v^3)) \nabla \bar{\theta}. \end{cases} \quad (4)$$

Avec  $\|\bar{S}\| = \sqrt{\text{tr} \bar{S}^2}$ . L'avantage de ce modèle, c'est que la quantité  $\tau^d$  est nulle à la paroi et la viscosité de sous-maille se comporte en  $(y^+)^3$  près de la paroi, comme le modèle de WALL [3]. De plus, il est invariant par tous les groupes de symétries des écoulements anisothermes qui n'est pas le cas du modèle de WALL.

## 2.3 Modèle invariant couplé

Supposons que  $g_m(v_1, v_2) = c_m(v_1 + \frac{1}{v_2})$ ,  $v_2 = \frac{(\nabla \bar{\theta})^2}{\|\bar{S}\|^4}$  et  $h_t(v_1) = C_t v_1$ , alors le modèle invariant couplé est de la forme :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu (C_s \bar{\delta})^2 \left\{ \left( -\frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} + \frac{3 \|\bar{S}\|^4}{2 \|\nabla \bar{\theta}\|^2} \right) \bar{S} + \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \right\}, \\ -h = \kappa (C_s \bar{\delta})^2 \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3} \nabla \bar{\theta}. \end{cases} \quad (5)$$

## 2.4 Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky est défini par :  $\tau^d = -2\nu_{sm} \bar{S}$  et  $h = -\kappa_{sm} \nabla \bar{\theta}$ , avec  $\nu_{sm}$  est la viscosité de sous-maille turbulente définie par :  $\nu_{sm} = (C_s \bar{\delta})^2 \sqrt{2 \text{tr}(\bar{S}^2)}$ , et  $\kappa_{sm}$  est la diffusivité thermique de sous-maille :  $\kappa_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{Pr_{sm}}$ ,  $Pr_{sm} = 0.5$ ,  $C_s = 0.17$ , et  $\bar{\delta} = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{\frac{1}{3}}$ .

Dans le paragraphe suivant, on présente d'autres propriétés intéressantes des modèles invariants 2.2 et 2.3 ces qu'ils sont contiennent des lois d'échelles.

## 3 Lois d'échelles d'un écoulement turbulent anisotherme moyenné

Considérons un fluide visqueux newtonien, incompressible, de coefficient d'expansion thermique  $\beta$  et de diffusivité thermique  $k$ , dans un canal. Ce fluide est alors régi par les équations des écoulements turbulents anisothermes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u \otimes u) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \text{div}(S) + \beta g(\theta - \theta_{ref}) e_g \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(u\theta) = \kappa \text{div}(\nabla \theta) \\ \text{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Pour prouver la conservation des lois d'échelles par les modèles invariants, on filtre d'abord ces équations par le principe de LES (1). Ensuite, on décompose les grandeurs filtrées des équations (1) par la méthode de RANS. Puis, on suppose que l'écoulement est dans la direction  $x_1$  perpendiculaire à l'axe  $x_2$ , et la pression moyenne remplacée par  $\bar{P}(x_2) - x_1 K$ , avec  $K$  une constante. On cherche les lois d'échelles (lois de paroi) pour un écoulement bidimensionnel stationnaire en moyenne et on suppose que l'écoulement

est de couche très mince, ce qui implique :  $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_3} = 0$ .  
Supposons de plus que les moyennes  $\bar{U}_1, \bar{\Theta}$  et  $\bar{P}$  ne dépendent que de  $x_2$ , alors les équations deviennent :

$$\begin{cases} M_i = \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial t} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_1} + \bar{u}'_2 \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \delta_{i1} - \left( K + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2} \right) \delta_{i1} + \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} - \beta g \bar{\Theta} \right) \delta_{i2} + \\ \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}'_i}{\partial x_k^2} - \beta g \bar{\theta}' \delta_{i2} + (\text{div}(\tau^d))_i = 0 \\ N = \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}' \bar{u}'_j}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial x_j^2} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_2^2} + \bar{u}'_2 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_2} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial x_1} + \text{div}(h) = 0. \\ \Psi = \frac{\partial \bar{u}'_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Dans le paragraphe suivant, on détermine les groupes de symétries des équations (7) sans les termes  $(\text{div}(\tau^d))_i$  et  $\text{div}(h)$ .

### 3.1 Groupe de symétrie et lois d'échelles

Les équations (7) sont équivalentes à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 de la forme :

$$S(t, x_i, \bar{U}_1, \bar{\Theta}, \bar{P}, \bar{u}'_i, \bar{\theta}', \bar{p}') = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Soit  $T_a$  une transformation à un paramètre local  $a$  de la forme :

$$T_a : (t, x_i, \bar{U}_1, \bar{\Theta}, \bar{P}, \bar{u}'_i, \bar{\theta}', \bar{p}') \mapsto (\hat{t}, \hat{x}_i, \hat{\bar{U}}_1, \hat{\bar{\Theta}}, \hat{\bar{P}}, \hat{\bar{u}}'_i, \hat{\bar{\theta}}', \hat{\bar{p}}').$$

$T_a$  est appelée symétrie du système (8) si l'image de la solution est aussi une solution de (8), ainsi :  $S(\hat{t}, \hat{x}_i, \hat{\bar{U}}_1, \hat{\bar{\Theta}}, \hat{\bar{P}}, \hat{\bar{u}}'_i, \hat{\bar{\theta}}', \hat{\bar{p}}') = 0, i = 1, 2, 3$ .

Soit  $X$  un générateur infinitésimal du groupe de symétrie  $G$  du système (8), il est de la forme :

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{\bar{U}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{U}_1} + \xi_{\bar{\Theta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\Theta}} + \xi_{\bar{P}} \frac{\partial}{\partial \bar{P}} + \xi_{\bar{u}'_i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}'_i} + \xi_{\bar{\theta}'} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'} + \xi_{\bar{p}'} \frac{\partial}{\partial \bar{p}'}, \quad (9)$$

où  $\xi_t = \left. \frac{\partial \hat{t}}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\xi_{x_i} = \left. \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\eta_{\bar{U}_1} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{U}}_1}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\eta_{\bar{\Theta}} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{\Theta}}}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\eta_{\bar{P}} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{P}}}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\eta_{\bar{u}'_i} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{u}}'_i}{\partial a} \right|_{a=0}$ ,  $\eta_{\bar{\theta}'} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{\theta}}'}{\partial a} \right|_{a=0}$ , et  $\eta_{\bar{p}'} = \left. \frac{\partial \hat{\bar{p}}'}{\partial a} \right|_{a=0}$   $i = 1, 2, 3$ . sont les composantes infinitésimales.  $X^{(2)}$  est le prolongement de

$X$  d'ordre 2 [5]. La condition de symétrie [5] :  $S = 0 \Rightarrow X^{(2)}.S = 0$ , nous donne les composantes infinitésimales suivantes<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \xi_t &= [n - 2m]t + A, \\ \xi_{x_1} &= [n - m]x_1 + \alpha_1(t) + l, \xi_{x_2} = [n - m]x_2 + b \text{ et } \xi_{x_3} = [n - m]x_3 + \alpha_2(t) + q \\ \xi_\nu &= n\nu, \xi_\kappa = n\kappa \\ \xi_{\bar{u}'_1} &= m\bar{u}'_1 + H(t) + c(t, x_2) - I(x_2, \bar{U}_1, \bar{P}), \xi_{\bar{u}'_2} = m\bar{u}'_2 \text{ et } \xi_{\bar{u}'_3} = m\bar{u}'_3 + \dot{\alpha}_2(t), \\ \xi_{\bar{U}_1} &= m\bar{U}_1 - H(t) - c(t, x_2) + I(x_2, \bar{U}_1, \bar{P}) + \dot{\alpha}_1(t), \\ \xi_{\bar{p}'} &= 2m\bar{p}' + [K(n - 3m) - \dot{H}(t) - c_t(t, x_2)]x_1 - \dot{\alpha}_2(t)x_3 + G(t, x_2) - g_3(x_2, \bar{U}_1, \bar{P}), \\ \xi_{\bar{P}} &= 2m\bar{P} + c_t(t, x_2)x_1 + \beta gh(t, x_1, x_3)x_2 - G(t, x_2) + F(t, x_1, x_3) + g_3(x_2, \bar{U}_1, \bar{P}), \\ \xi_{\bar{\Theta}} &= [3m - n]\bar{\Theta} - L(x_2) + h(t, x_1, x_3) \text{ et } \xi_{\bar{\theta}'} = [3m - n]\bar{\theta}' + L(x_2). \end{aligned}$$

1. Noter que ces calculs est fait avec un logiciel de calcul symbolique on utilisant **Maple** et les codes **GeM**

Toutes les constantes et les fonctions arbitraires dépendent de  $\nu$  et  $\kappa$ . A partir des ces listes de générateurs infinitésimaux, on cherche les lois d'échelles en passant par les solutions auto-similaires  $\bar{U}_1$  et  $\bar{\Theta}$  invariantes par les groupes de symétries, et qui vérifient :  $X.\bar{U}_1 = 0$  et  $X.\bar{\Theta} = 0$ .

A partir de ces deux relations, on obtient les lois d'échelles suivantes :

- Loi puissance, où  $n \neq m, n \neq 3m$  et  $m \neq 0$  :

$$\bar{U}_1 = C_1 \left[ x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{m}{n-m}} + \frac{C_2}{m} \quad \text{et} \quad \bar{\Theta} = C_3 \left[ x_2 + \frac{b}{n-m} \right]^{\frac{3m-n}{n-m}} + \frac{C_4}{3m-n} \quad (10)$$

- Loi logarithmique, où  $m = 0$ , et  $n \neq 0$  :

$$\bar{U}_1 = \frac{C_5}{n} \ln \left( x_2 + \frac{b}{n} \right) + C_6 \quad \text{et} \quad \bar{\Theta} = C_7 \left[ x_2 + \frac{b}{n} \right]^{-1} - \frac{C_8}{n} \quad (11)$$

- Loi linéaire, où  $m = n = 0$  :  $\bar{U}_1 = \frac{C_9}{b} x_2 + C_{10}$  et  $\bar{\Theta} = \frac{C_{11}}{b} x_2 + C_{12}$

- Loi exponentielle, où  $m = n \neq 0$  :

$$\bar{U}_1 = C_{13} \exp \left( \frac{mx_2}{b} \right) - \frac{C_9}{m} \quad \text{et} \quad \bar{\Theta} = C_{14} \exp \left( \frac{2mx_2}{b} \right) - \frac{C_{15}}{2m} \quad (12)$$

avec  $C_i, i = 1, \dots, 14$  sont les constantes des intégrales. Ces quatre nouvelles lois d'échelles sont aussi lois d'échelles du système (7) en supposant que le tenseur  $\tau^d = \tau_{inv}^d$  et le flux  $h = h_{inv}$  de sous-maille sont ceux des modèles invariants. En effet, grâce aux propriétés des ces deux modèles invariants, on peut montrer alors, que ces lois d'échelles sont valables pour le système (7). Donc, les modèles invariants conservent ces lois d'échelles.

Dans le paragraphe suivant, on teste les deux modèles invariants de 2.2, 2.3 et le modèle de Smagorinsky dans une cavité ventilée anisotherme.

## 4 Test numérique en convection mixte

Considérons un écoulement d'air dans une chambre tridimensionnelle chauffée et ventilée FIGURE 1, dans laquelle la vitesse d'entrée est  $U_{in} = 0.57 \text{ m s}^{-1}$ , la température des toutes les parois est de  $15^\circ\text{C}$  sauf la paroi basse où la température est égale à  $T_f = 35^\circ\text{C}$ .  $T_{ref} = \frac{T_w + T_f}{2} = 298.15\text{K}$ ,  $\beta = \frac{1}{T_{ref}}$  et  $Pr_{sm} = 0.699$ . Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse  $U_{in}$  et la hauteur  $h_{in}$  d'entrée :

$$Re = \frac{U_{in} h_{in}}{\nu} = 678. \text{ La conductivité thermique } \lambda \text{ de l'air à la}$$

température  $T_{ref}=298 \text{ K}$  est environ :  $\lambda = 0.02695 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Le maillage est de taille  $(86 \times 86 \times 12)$ . Le schéma de discrétisation temporelle est le schéma de Crank-Nicolson d'ordre 2 avec un pas de temps constant  $\Delta t$  égale à  $7 \times 10^{-3} \text{ s}$ . Le schéma de discrétisation spatiale est centré avec les termes sources suivant :

$$\beta g(\bar{\theta} - \theta_{ref}) e_g, \frac{3\nu v^2 \exp(-v^3)}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S}, \text{ et } \frac{1}{\|\bar{S}\|} \text{Adj}^d \bar{S} \text{ sont}$$

considérés comme explicite.

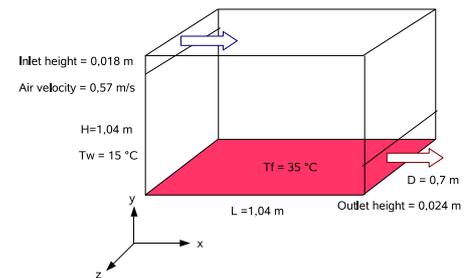
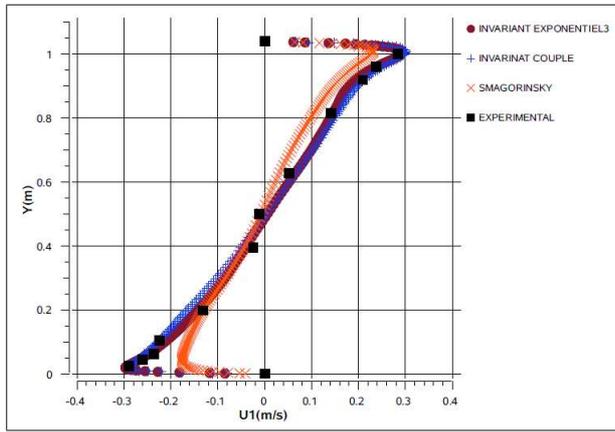


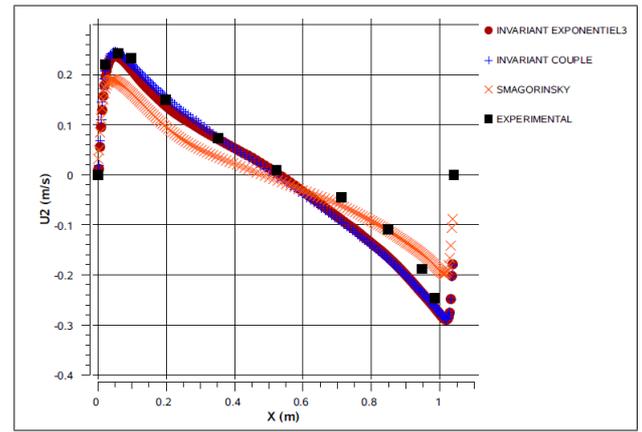
FIGURE 1 – Cavité chauffée et ventilée

## 5 Conclusions

Dans cette communication, nous avons construit une classe de modèles LES des écoulements anisothermes en utilisant la théorie des groupes de symétrie. Ensuite, nous avons calculé des nouvelles lois d'échelles du même écoulement, et on a montré que ces lois sont conserver par cette classe de modèles qui les reproduisent naturellement sans introduire de fonctions empiriques. Puis, un test numérique a été fait, en convection mixte, pour deux modèles invariants 2.2 2.3 et le modèle de Smagorinsky. On



(a) Vitesse moyenne  $\bar{u}_1$  dans le plan  
 $x = 0.502 \text{ m}$

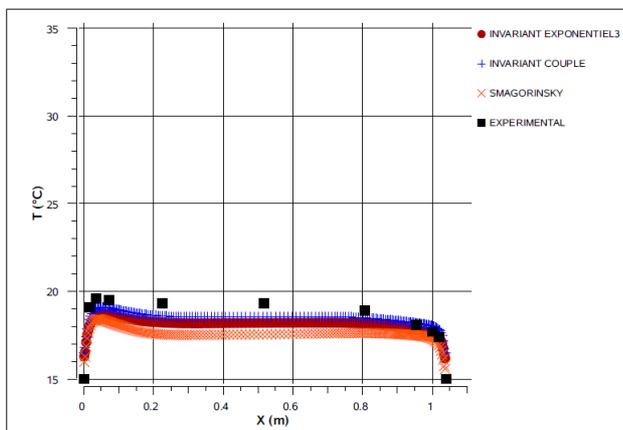


(b) Vitesse moyenne  $\bar{u}_2$  dans le plan  
 $y = 0.502 \text{ m}$

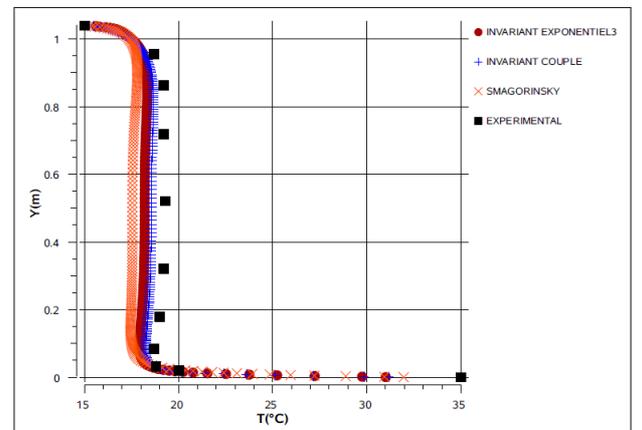
remarque que les modèles invariants donnent des résultats très proches du résultat expérimental [2] et plus performants que le modèle de Smagorinsky notamment à côté de la paroi, voir figures (a), (b), (c) et (d).

## Références

- [1] N. Al Sayed, A. Hamdouni, E. Liberge, and D. Razafindralandy. The symmetry group of the non-isothermal Navier-Stokes equations and turbulence modelling. *Symmetry*, 2 :848–867, 2010.
- [2] D.Baly, S. Mergui, and C. Niculae. Confined turbulent mixed convection in the presence of a horizontal buoyant wall jet, in : Fundamentals of mixed convection. *ASME, New York, HTD-Vol. 213* :pp. 65–72, 1992.
- [3] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, April 1999.
- [4] M. Oberlack. A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, Vol. 427 :299–328, 2001.
- [5] P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [6] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Consequences of symmetries on the analysis and construction of turbulence models. *Journal of Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA)*, Vol. 2 :Paper 052, 20 pages, 2006.



(c) Température moyenne dans le plan  
 $y = 0.502 \text{ m}$



(d) Température moyenne dans le plan  
 $x = 0.502 \text{ m}$