

# Méthode de resommation de Borel des séries divergentes

Application à l'intégration numérique de problèmes d'évolution

**A. Hamdouni, D. Razafindralandy**

Université de La Rochelle

Journée Méthode Asymptotique Numérique  
Marseille – 15 Décembre 2009

- 1 Pourquoi les séries divergentes
- 2 Introduction à la méthode de resommation de Borel–Laplace
- 3 Cadre théorique
- 4 Algorithme de resommation
- 5 Applications

## Un peu d'histoire

• Euler (1760):  $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.
- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?
- ▶ Ex:  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  diverge. Notons  $S$  sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel:  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

# Un peu d'histoire

- Euler (1760):  $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.
- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?
- ▶ Ex:  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  diverge. Notons  $S$  sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel:  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

- Séries divergentes  $\longrightarrow$  accélération des calculs de séries converg.
- Poincaré (1893): Première formalisation
  - ▶ séries convergentes au sens des astronomes  $\neq$  au sens des géomètres
  - ▶ sommation au plus petit terme

# Un peu d'histoire

- Euler (1760):  $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.

- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?

- ▶ Ex:  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  diverge. Notons  $S$  sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel:  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

- Séries divergentes  $\longrightarrow$  accélération des calculs de séries converg.

- Poincaré (1893): Première formalisation

- ▶ séries convergentes au sens des astronomes  $\neq$  au sens des géomètres

- ▶ sommation au plus petit terme

- XX<sup>e</sup> siècle: Hardy, Borel (resommation de Borel-Laplace)

- Années 80-90: Ecalle, Malgrange, Balser, Ramis, Loday-Richaud, ...  
(fonctions résurgentes et calcul étranger, multisommation)

# Pourquoi les séries divergentes ?

Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale  $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle:  $U(t) = \sum_k U_k t^k$

# Pourquoi les séries divergentes ?

## Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale  $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle:  $U(t) = \sum_k U_k t^k$
- $(k+1)MU_{k+1} = \sum_{r=0}^k Q(U_r, U_{k-r}) + LU_k$
- Au plus, une matrice à inverser, même si on fait une continuation

# Pourquoi les séries divergentes ?

Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale  $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle:  $U(t) = \sum_k U_k t^k$
- $(k+1)MU_{k+1} = \sum_{r=0}^k Q(U_r, U_{k-r}) + LU_k$
- Au plus, une matrice à inverser, même si on fait une continuation
- Rayon de convergence:  $(\alpha^2 \mathbf{Q}N^2 + \alpha \mathbf{L}N)^{-1}$

$N$ =taille du maillage



# Pourquoi les séries divergentes ?

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u, \quad u(t=0, x) = \frac{1}{1-x}$$

- Décomposition en série temporelle

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{(1-x)^{2k+1}} t^k$$

- La série diverge pour tout  $x$

Rayon de convergence  
très petit ou nul



MAN (et approximants de Padé)  
inefficace ou inutilisable

⇒ Techniques de resommation de séries divergentes

# Propriétés des séries divergentes, solution d'une EDO

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

- ▶ Solution série formelle:  $\hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$       divergente  $\forall t > 0$
- ▶ Solution de l'équation:  $v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{t}}}{1 + \xi} d\xi$       valable  $\forall t \geq 0$

# Propriétés des séries divergentes, solution d'une EDO

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

- ▶ Solution série formelle:  $\hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$       divergente  $\forall t > 0$
- ▶ Solution de l'équation:  $v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi} d\xi$       valable  $\forall t \geq 0$

## ● Différence entre $\hat{v}$ et $v$ ?

- ▶  $\hat{v}_k(t) =$  Série tronquée à l'ordre  $k - 1$ .       $\hat{v}_k(t) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m m! t^{m+1}$
- ▶  $|v(t) - \hat{v}_k(t)| \leq k! t^k$       minimal lorsque  $k \simeq 1/t$
- ▶  $\hat{v}_k(t)$  fournit une assez bonne approximation de la solution si  $k \ll 1/t$

## ● Sommatum aux plus petits termes, utilisée par les astronomes

# Propriétés des séries divergentes

Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre  $k$

Pour une précision  $\epsilon$  donnée

- Série convergente:

$k$  augmente  $\implies t_\epsilon$  augmente (jusqu'au rayon de CV)

# Propriétés des séries divergentes

## Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre $k$

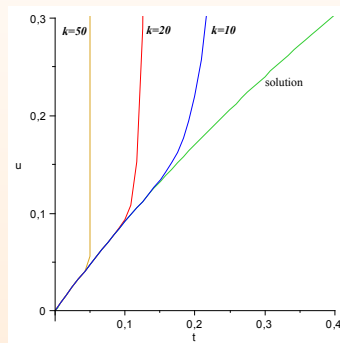
Pour une précision  $\epsilon$  donnée

- Série convergente:

$k$  augmente  $\implies t_\epsilon$  augmente (jusqu'au rayon de CV)

- Certaines séries divergentes:

$k$  grand et augmente  $\implies t_\epsilon$  diminue



# Propriétés des séries divergentes

## Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre $k$

Pour une précision  $\epsilon$  donnée

- Série convergente:

$k$  augmente  $\implies t_\epsilon$  augmente (jusqu'au rayon de CV)

- Certaines séries divergentes:

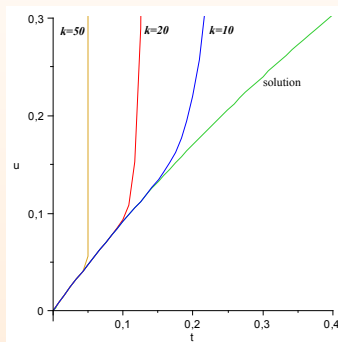
$k$  grand et augmente  $\implies t_\epsilon$  diminue

- Séries divergentes en général:

$k$  augmente  $\implies t_\epsilon$  ??????

$t_\epsilon$  diminue ? A quelle vitesse ?

ou bien  $t_\epsilon = 0$  ?



# Introduction à la méth. de resommation de Borel–Laplace

Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} t^{k+1} \int_0^\infty \xi^k e^{-\xi} d\xi = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \int_0^\infty \xi^k e^{-\xi/t} d\xi$$

# Introduction à la méth. de resommation de Borel–Laplace

Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \int_0^\infty \left[ \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k \right] e^{-\xi/t} d\xi$$



Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \int_0^\infty \left[ \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k \right] e^{-\xi/t} d\xi$$

- Transformation de Borel  $\mathcal{B}\hat{u}$
- Transformation de Laplace
- On obtient une solution holomorphe (dans un certain domaine) si
  - ▶  $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$  possède un rayon de convergence non nul  
( $\Leftarrow \hat{u}$  ne diverge pas plus vite que le factoriel)
  - ▶  $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$  prolongeable en une fonction analytique  $P(\xi)$  au voisinage (secteur) de la demi-droite positive
  - ▶  $P(\xi)$  à croissance au plus exponentielle à l'infini

## Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

## Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

## Série de Gevrey (d'ordre 1)

Une série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  est dite de Gevrey s' $\exists$  constantes  $C$  et  $A$  t.q.

$$\forall k \geq 1, \quad |u_k| < CA^k k!$$

## Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

## Série de Gevrey (d'ordre 1)

Une série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  est dite de Gevrey s' $\exists$  constantes  $C$  et  $A$  t.q.

$$\forall k \geq 1, \quad |u_k| < CA^k k!$$

- $\hat{u}(t)$  est de Gevrey  $\implies \mathcal{B}\hat{u}(\xi)$  est convergente
- La plupart des séries formelles solutions d'une équation différentielle analytique sont de Gevrey d'un certain ordre:  $|u_k| < CA^k (k!)^{1/m}$

# Cadre théorique

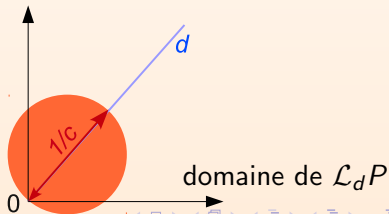
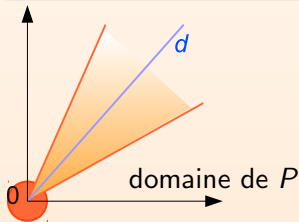
## Transformation de Laplace

Soit  $P$  une fonct. analytique dans un secteur infini  $S$  contenant la direction  $d$ . Supposons que  $P$  est à croissance au plus exponentielle à l'infini, c-à-d

$$\exists c \text{ tel que } P(\xi) = O(e^{c\xi}) \quad \forall \xi \in S, \xi \text{ assez grand.}$$

Alors la transformée de Laplace de  $P$ , dans la direction  $d$ , est la fonction

$$\mathcal{L}_d P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$



## Transformation de Laplace

Soit  $P$  une fonct. analytique dans un secteur infini  $S$  contenant la direction  $d$ . Supposons que  $P$  est à croissance au plus exponentielle à l'infini, c-à-d

$$\exists c \text{ tel que } P(\xi) = O(e^{c\xi}) \quad \forall \xi \in S, \xi \text{ assez grand.}$$

Alors la transformée de Laplace de  $P$ , dans la direction  $d$ , est la fonction

$$\mathcal{L}_d P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$

- Choix de la direction: éviter les pôles de  $P$   
    **→** besoin de sortir de la droite réelle ( $t, \xi \in \mathbb{C}$ )
- $|\mathcal{L}_{d_1} P(t) - \mathcal{L}_{d_2} P(t)| = 0$  ou est exponentiellement plate  
    ( $< C e^{-B/t}$  dans tout sous-secteur compact)

## Somme de Borel

Une série  $\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k$  est Borel-sommable si:

- $\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$  est à rayon de convergence non nul
- $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$  est prolongeable en une fonction analytique  $P(\xi)$  dans un secteur infini contenant une direction  $d$ ,
- $P(\xi)$  est à croissance au plus exponentielle à l'infini.

Dans ce cas, la somme de Borel de  $\hat{u}(t)$  dans la direction  $d$  est

$$BL_d \hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$

# Algorithme de resommation de Borel–Laplace

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k$$

$$BL_d \hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel  
↓

↑  
Laplace ( $\mathcal{L}_d$ )

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

→ Prolongement

$$P(\xi)$$

---

$\hat{u}(t)$  est le **développement asymptotique de Gevrey** de  $BL_d \hat{u}(t)$



Développement asymptotique de Gevrey = généralisation du développement de Taylor dans des secteurs

## Définition

$\hat{u}(t)$  est le développement asymptotique de Gevrey d'une fonction  $u(t)$  dans un secteur  $S$  au voisinage de l'origine si, pour tout sous-secteur compact  $T \subset S$ , il existe deux constantes  $C$  et  $A$  telles que

$$|u(t) - \hat{u}_k(t)| \leq C k! A^k |t|^k \quad \forall k \in \mathbb{N}, t \in T.$$

# Exemples

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

$$\{t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(t) \geq 0\}$$

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel  
↓

↑  
Laplace ( $\mathcal{L}_d$ )

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \xi^k$$

→ Prolong.

$$P(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$$

ex:  $d =$  demi-droite positive

# Exemples

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k$$

$\{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$

Borel



$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \xi^k$$



$$P(\xi) = -e^{-\xi}$$

ex:  $d$ =demi-droite positive

$$1 + \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-\xi/t} d\xi = \frac{1}{1+t}$$

$\{t \in \mathbb{C}, t \neq -1\}$

Laplace ( $\mathcal{L}_0$ )



Série convergente  $\rightarrow$  Domaine prolongé

## Algorithme

$$\hat{u}_{k+1}(t) = \sum_{m=0}^k u_m t^m$$

$$u(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel  
↓

↑  
Laplace ( $\mathcal{L}_d$ )

$$\mathcal{B}\hat{u}_{k+1} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{u_{m+1}}{m!} \xi^m \xrightarrow{\text{Padé}} P(\xi) = \frac{P_0 + P_1\xi + \cdots + P_L\xi^L}{1 + Q_1\xi + \cdots + Q_M\xi^M}$$

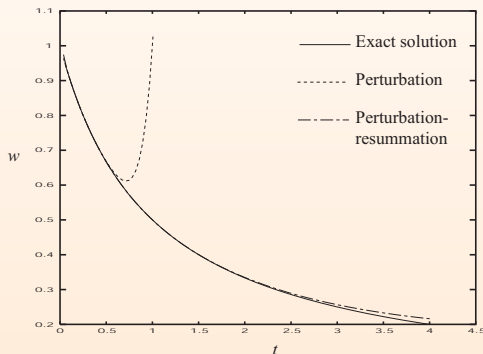
- Les approximants de Padé sont efficaces sur  $\mathcal{B}\hat{u}_k$  (série convergente)
- $P(\xi)$  est à croissance au plus exponentielle
- Pôles de  $P(\xi) \implies$  choix de  $d$ .

# Resommation numérique : Exemple

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

→ MAN

→ MAN + resommation



$$\text{Solution exacte: } \frac{1}{1+t}$$

Ordre de tronquature : 8

Perturbation = MAN

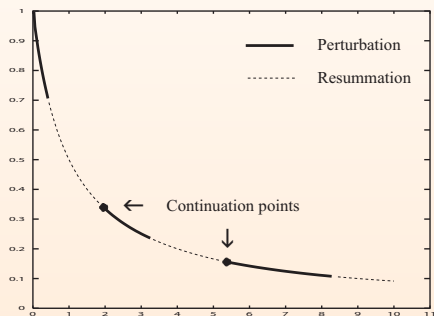
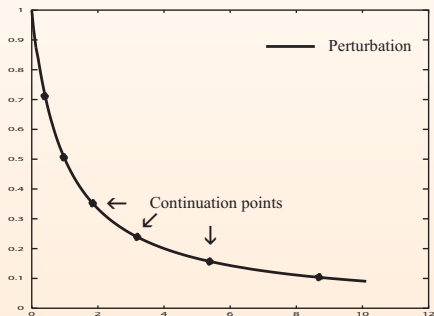
# Resommation numérique : Exemple

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

→ MAN + continuation

→ MAN + resommation + continuation

$$\text{Critère: } \frac{|Res(t)|}{|u(t)|} \geq \epsilon$$



# Resommation numérique : Exemple

	ordre=8	ordre=15
MAN + continuation	6 points	5 points
MAN + resommation + continuation	2 points	1 points

- Théorie  $\longrightarrow$  Numérique : OK
- Réduit le nombre de continuation

# Réduction des équations de Navier–Stokes, POD

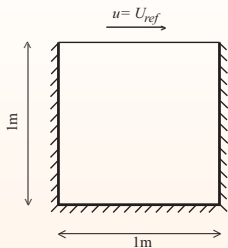
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p - \nu \Delta u = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Décomposition : 
$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varrho^i(t) \Phi_i(x)$$
  - ▶  $(\Phi_i)$  = modes, fonctions à divergence nulle
  - ▶ Base optimale pour l'énergie:  
très peu de modes suffisent pour capturer presque toute d'énergie
  - ▶ Déterminée numériquement ou expérimentalement, dépend de l'écoulement
- Equations réduites

$$\frac{d\varrho^i}{dt} + \sum_{j,l=1}^N Q_{jl}^i \varrho^j \varrho^l + \sum_{j=1}^N L_j^i \varrho^j = F^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

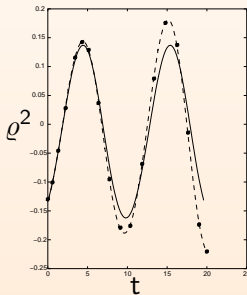
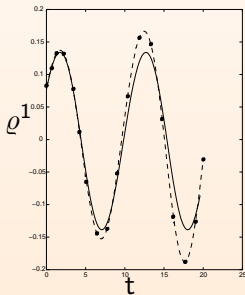


# Cavité entraînée

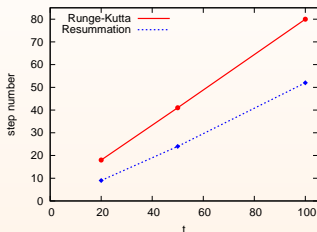


$U=15m/s$ ,  $N = 4$  modes, jusqu'à  $t = 20s$

- • • Runge-Kutta d'ordre 5 à pas adaptatif : 29 pas
- - - MAN ordre 10+resommation+continu. : 16 pas
- Solution de Référence (projection d'une solution numérique de Navier-Stokes sur la base  $(\Phi_i)$ )

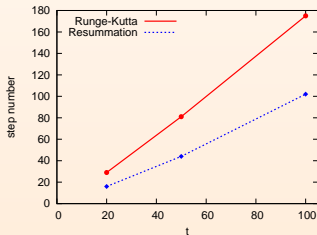


- Si on va plus loin en temps ?



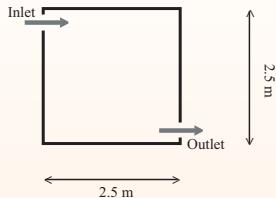
Gain: 35% pour atteindre 100s

- Si on augmente le nombre de modes ? 10 modes au lieu de 4.

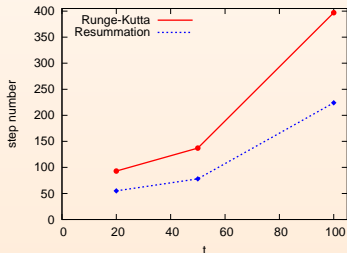


Gain: 42% pour atteindre 100s

# Cavité ventilée 2D et particules



Hauteurs entrée et sortie: 31cm,  
 $U=0.443\text{m/s}$ ,  $N = 4$  modes



Gain: 44% pour atteindre 100s

- Dans les deux configurations, moins de pas avec la resommation
- Le gain augmente avec le nombre de modes à calculer
- Gain sur le temps de calcul ? Système trop petit

# Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, u(t, x^r) = u^r \end{cases} \quad (t, x) \in [0, +\infty[ \times [x^l, x^r]$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$


$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{N-1} \\ u^N \end{pmatrix} = \frac{\nu}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{N-1} \\ u^N \end{pmatrix} + \frac{\nu}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} u^l \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ u^r \end{pmatrix}.$$

# Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, u(t, x^r) = u^r \end{array} \right. \quad (t, x) \in [0, +\infty[ \times [x^l, x^r]$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$



$$\frac{dU}{dt} = BU + d.$$

# Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t, x) \in [0, +\infty[ \times ]x^l, x^r[ \\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, \quad u(t, x^r) = u^r \end{cases}$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$

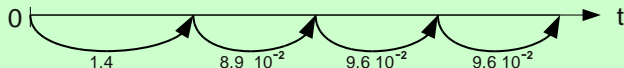

$$\frac{dU}{dt} = BU + d.$$

- Euler explicite:  $U^{n+1} = U^n + \Delta t(BU^n + d).$   $\Delta t \leq \Delta x^2/2\nu$
- MAN + resommation:  $t_{valide} \geq \Delta x^2/2\nu$  ?
- Continuation: critère basé sur le résidu,  $\frac{\|Residu(t)\|}{\|solution(t)\|} < \varepsilon$

# Equation de la chaleur

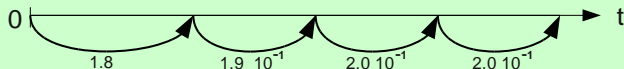
Solution:  $e^{-t} \sin x$  sur  $[0, \pi]$

- Taille du maillage:  $N = 16$ . Euler explicite  $\Delta t \leq \Delta x^2/2 = 1.7 \cdot 10^{-3}$   
Ordre de tronquature : 10



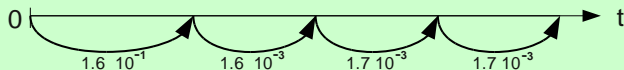
823

- Si on augmente l'ordre de tronquature : 20



1058

- Si on augmente la taille du maillage:  $N = 128$ .  
Ordre de tronquature : 10. Euler explicite  $\Delta t \leq \Delta x^2/2 = 3.0 \cdot 10^{-5}$



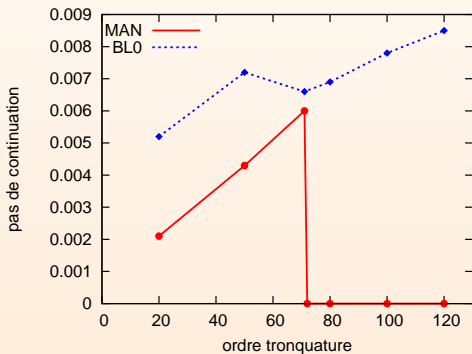
5333



# Equation de la chaleur, cas divergent

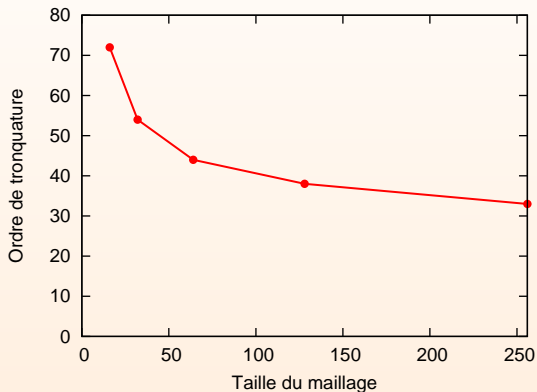
Domaine:  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , condition initiale:  $\frac{1}{1-x}$

- Condition initiale  $C^\infty$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  mais série divergente
- Taille du maillage  $N = 16$ . Euler explicite:  $\Delta x^2/2 = 1.7 \cdot 10^{-3}$



# Equation de la chaleur, cas divergente

A quel ordre la MAN s'arrête-t-elle ?



➔ Et pour Navier–Stokes avec un maillage beaucoup plus gros ?

# Conclusion

- Resommation prolonge la MAN
- Se substitue à la MAN lorsque la série diverge
- Choix de  $d$
- Série de Gevrey d'ordre  $p > 1$

$$|u_k| < C A^n (n!)^{1/p}$$