

Méthode de resommation de Borel des séries divergentes

Application à l'intégration numérique de problèmes d'évolution

A. Hamdouni, D. Razafindralandy

Université de La Rochelle

Journée Méthode Asymptotique Numérique
Marseille – 15 Décembre 2009

- 1 Pourquoi les séries divergentes
- 2 Introduction à la méthode de resommation de Borel–Laplace
- 3 Cadre théorique
- 4 Algorithme de resommation
- 5 Applications

Un peu d'histoire

• Euler (1760): $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.
- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?
- ▶ Ex: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge. Notons S sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel: $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

Un peu d'histoire

- Euler (1760): $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.

- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?

- ▶ Ex: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge. Notons S sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel: $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

- Séries divergentes \longrightarrow accélération des calculs de séries converg.

- Poincaré (1893): Première formalisation

- ▶ séries convergentes au sens des astronomes \neq au sens des géomètres

- ▶ sommation au plus petit terme

Un peu d'histoire

- Euler (1760): $t^2 \frac{du}{dt} + u = t \longrightarrow \hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$

- ▶ Rayon de convergence nul.
- ▶ Quel sens donner à la “somme” d’une série divergente ?
- ▶ Ex: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge. Notons S sa “somme”

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - [1 - 1 + 1 - \dots] = 1 - S \Rightarrow S = 1/2 (!)$$

- ▶ Théorème d'Abel: $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+t} = 1/2 (!)$

- Séries divergentes \longrightarrow accélération des calculs de séries converg.

- Poincaré (1893): Première formalisation

- ▶ séries convergentes au sens des astronomes \neq au sens des géomètres
- ▶ sommation au plus petit terme

- XX^e siècle: Hardy, Borel (resommation de Borel-Laplace)

- Années 80-90: Ecalle, Malgrange, Balser, Ramis, Loday-Richaud, ...
(fonctions résurgentes et calcul étranger, multisommation)

Pourquoi les séries divergentes ?

Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle: $U(t) = \sum_k U_k t^k$

Pourquoi les séries divergentes ?

Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle: $U(t) = \sum_k U_k t^k$
- $(k+1)MU_{k+1} = \sum_{r=0}^k Q(U_r, U_{k-r}) + LU_k$
- Au plus, une matrice à inverser, même si on fait une continuation

Pourquoi les séries divergentes ?

Equations de Navier–Stokes instationnaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Discrétisation spatiale $\implies \frac{dU}{dt} = Q(U, U) + L(U) + D,$
- Décomposition en série temporelle: $U(t) = \sum_k U_k t^k$
- $(k+1)MU_{k+1} = \sum_{r=0}^k Q(U_r, U_{k-r}) + LU_k$
- Au plus, une matrice à inverser, même si on fait une continuation
- Rayon de convergence: $(\alpha^2 \mathbf{Q}N^2 + \alpha \mathbf{L}N)^{-1}$

N =taille du maillage

Pourquoi les séries divergentes ?

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u, \quad u(t=0, x) = \frac{1}{1-x}$$

- Décomposition en série temporelle

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{(1-x)^{2k+1}} t^k$$

- La série diverge pour tout x

Rayon de convergence
très petit ou nul



MAN (et approximants de Padé)
inefficace ou inutilisable

⇒ Techniques de resommation de séries divergentes

Propriétés des séries divergentes, solution d'une EDO

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

- ▶ Solution série formelle: $\hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$ divergente $\forall t > 0$
- ▶ Solution de l'équation: $v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{t}}}{1 + \xi} d\xi$ valable $\forall t \geq 0$

Propriétés des séries divergentes, solution d'une EDO

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

- ▶ Solution série formelle: $\hat{v}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$ divergente $\forall t > 0$
- ▶ Solution de l'équation: $v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi} d\xi$ valable $\forall t \geq 0$

● Différence entre \hat{v} et v ?

- ▶ $\hat{v}_k(t) =$ Série tronquée à l'ordre $k - 1$. $\hat{v}_k(t) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m m! t^{m+1}$
- ▶ $|v(t) - \hat{v}_k(t)| \leq k! t^k$ minimal lorsque $k \simeq 1/t$
- ▶ $\hat{v}_k(t)$ fournit une assez bonne approximation de la solution si $k \ll 1/t$

● Sommatum aux plus petits termes, utilisée par les astronomes

Propriétés des séries divergentes

Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre k

Pour une précision ϵ donnée

- Série convergente:

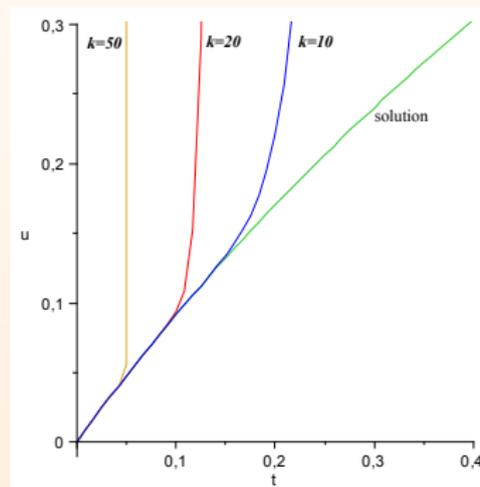
k augmente $\implies t_\epsilon$ augmente (jusqu'au rayon de CV)

Propriétés des séries divergentes

Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre k

Pour une précision ϵ donnée

- Série convergente:
 k augmente $\implies t_\epsilon$ augmente (jusqu'au rayon de CV)
- Certaines séries divergentes:
 k grand et augmente $\implies t_\epsilon$ diminue



Propriétés des séries divergentes

Qualité de l'approximation de la solution par une série tronquée à l'ordre k

Pour une précision ϵ donnée

- Série convergente:

k augmente $\implies t_\epsilon$ augmente (jusqu'au rayon de CV)

- Certaines séries divergentes:

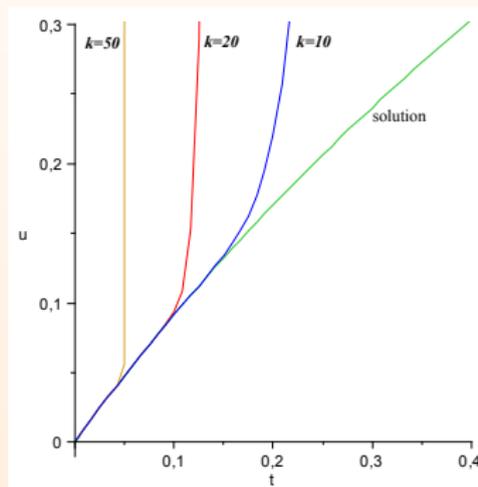
k grand et augmente $\implies t_\epsilon$ diminue

- Séries divergentes en général:

k augmente $\implies t_\epsilon$??????

t_ϵ diminue ? A quelle vitesse ?

ou bien $t_\epsilon = 0$?



Introduction à la méth. de resommation de Borel–Laplace

Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} t^{k+1} \int_0^\infty \xi^k e^{-\xi} d\xi = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \int_0^\infty \xi^k e^{-\xi/t} d\xi$$

Introduction à la méth. de resommation de Borel–Laplace

Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \int_0^\infty \left[\sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k \right] e^{-\xi/t} d\xi$$

Formellement (et en enlevant le terme d'ordre 0):

$$\sum_{k \geq 0} u_{k+1} t^{k+1} = \int_0^\infty \left[\sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k \right] e^{-\xi/t} d\xi$$

- Transformation de Borel $\mathcal{B}\hat{u}$
- Transformation de Laplace
- On obtient une solution holomorphe (dans un certain domaine) si
 - ▶ $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$ possède un rayon de convergence non nul
($\Leftarrow \hat{u}$ ne diverge pas plus vite que le factoriel)
 - ▶ $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$ prolongeable en une fonction analytique $P(\xi)$
au voisinage (secteur) de la demi-droite positive
 - ▶ $P(\xi)$ à croissance au plus exponentielle à l'infini

Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

Série de Gevrey (d'ordre 1)

Une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est dite de Gevrey s' \exists constantes C et A t.q.

$$\forall k \geq 1, \quad |u_k| < CA^k k!$$

Transformation de Borel

La transformation de Borel est:

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k \longmapsto \mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

Série de Gevrey (d'ordre 1)

Une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est dite de Gevrey s' \exists constantes C et A t.q.

$$\forall k \geq 1, \quad |u_k| < CA^k k!$$

- $\hat{u}(t)$ est de Gevrey $\implies \mathcal{B}\hat{u}(\xi)$ est convergente
- La plupart des séries formelles solutions d'une équation différentielle analytique sont de Gevrey d'un certain ordre: $|u_k| < CA^k (k!)^{1/m}$

Cadre théorique

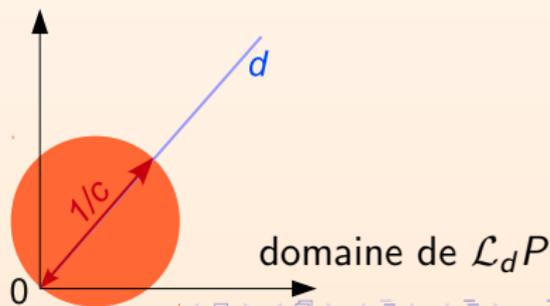
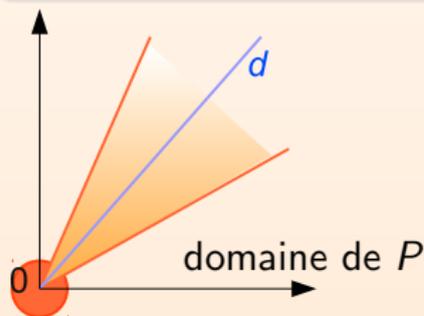
Transformation de Laplace

Soit P une fonct. analytique dans un secteur infini S contenant la direction d . Supposons que P est à croissance au plus exponentielle à l'infini, c-à-d

$$\exists c \text{ tel que } P(\xi) = O(e^{c\xi}) \quad \forall \xi \in S, \xi \text{ assez grand.}$$

Alors la transformée de Laplace de P , dans la direction d , est la fonction

$$\mathcal{L}_d P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$



Transformation de Laplace

Soit P une fonct. analytique dans un secteur infini S contenant la direction d . Supposons que P est à croissance au plus exponentielle à l'infini, c-à-d

$$\exists c \text{ tel que } P(\xi) = O(e^{c\xi}) \quad \forall \xi \in S, \xi \text{ assez grand.}$$

Alors la transformée de Laplace de P , dans la direction d , est la fonction

$$\mathcal{L}_d P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$

- Choix de la direction: éviter les pôles de P
 \longrightarrow besoin de sortir de la droite réelle ($t, \xi \in \mathbb{C}$)
- $|\mathcal{L}_{d_1} P(t) - \mathcal{L}_{d_2} P(t)| = 0$ ou est exponentiellement plate
 ($< C e^{-B/t}$ dans tout sous-secteur compact)

Somme de Borel

Une série $\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k$ est Borel-sommable si:

- $\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$ est à rayon de convergence non nul
- $\mathcal{B}\hat{u}(\xi)$ est prolongeable en une fonction analytique $P(\xi)$ dans un secteur infini contenant une direction d ,
- $P(\xi)$ est à croissance au plus exponentielle à l'infini.

Dans ce cas, la somme de Borel de $\hat{u}(t)$ dans la direction d est

$$BL_d \hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi.$$

Algorithme de resommation de Borel–Laplace

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k$$

$$BL_d \hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel
↓

↑
Laplace (\mathcal{L}_d)

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1}}{k!} \xi^k$$

→ Prolongement

$$P(\xi)$$

$\hat{u}(t)$ est le **développement asymptotique de Gevrey** de $BL_d \hat{u}(t)$

Développement asymptotique de Gevrey = généralisation du développement de Taylor dans des secteurs

Définition

$\hat{u}(t)$ est le développement asymptotique de Gevrey d'une fonction $u(t)$ dans un secteur S au voisinage de l'origine si, pour tout sous-secteur compact $T \subset S$, il existe deux constantes C et A telles que

$$|u(t) - \hat{u}_k(t)| \leq C k! A^k |t|^k \quad \forall k \in \mathbb{N}, t \in T.$$

Exemples

$$\text{Equation d'Euler: } t^2 \frac{du}{dt} + u = t$$

$$\{t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(t) \geq 0\}$$

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel
↓

↑
Laplace (\mathcal{L}_d)

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \xi^k$$

→
Prolong.

$$P(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$$

ex: $d =$ demi-droite positive

Exemples

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k$$

$\{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$

Borel



$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \xi^k$$



$$P(\xi) = -e^{-\xi}$$

ex: d =demi-droite positive

$$1 + \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-\xi/t} d\xi = \frac{1}{1+t}$$

$\{t \in \mathbb{C}, t \neq -1\}$

Laplace (\mathcal{L}_0)



Série convergente \rightarrow Domaine prolongé

Algorithme

$$\hat{u}_{k+1}(t) = \sum_{m=0}^k u_m t^m$$

$$u(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi$$

Borel
↓

↑
Laplace (\mathcal{L}_d)

$$\mathcal{B}\hat{u}_{k+1} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{u_{m+1}}{m!} \xi^m \xrightarrow{\text{Padé}} P(\xi) = \frac{P_0 + P_1 \xi + \cdots + P_L \xi^L}{1 + Q_1 \xi + \cdots + Q_M \xi^M}$$

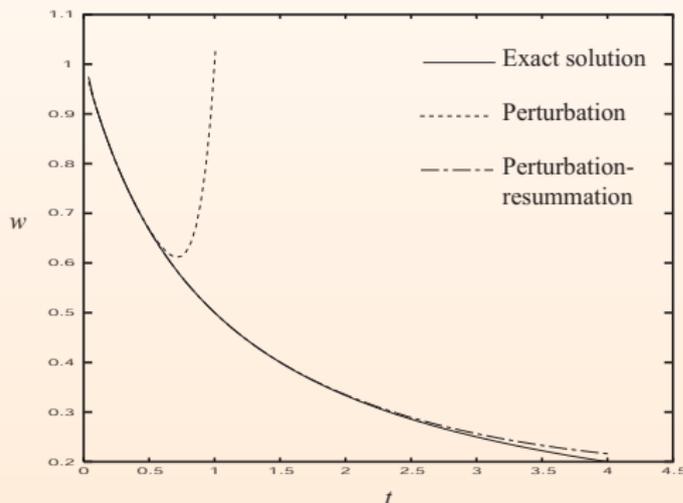
- Les approximants de Padé sont efficaces sur $\mathcal{B}\hat{u}_k$ (série convergente)
- $P(\xi)$ est à croissance au plus exponentielle
- Pôles de $P(\xi) \implies$ choix de d .

Resommation numérique : Exemple

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

→ MAN

→ MAN + resommation



Solution exacte: $\frac{1}{1+t}$

Ordre de tronquature : 8

Perturbation = MAN

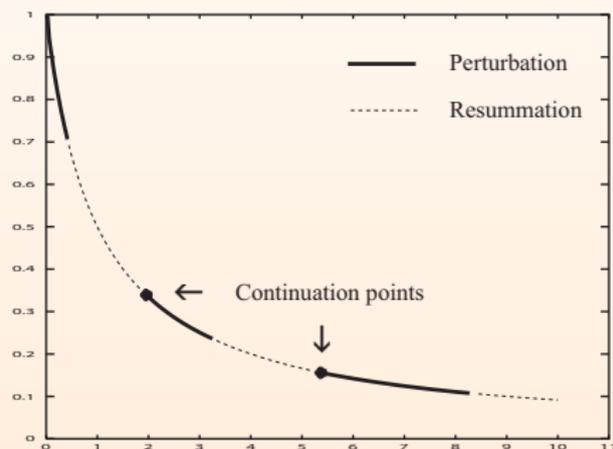
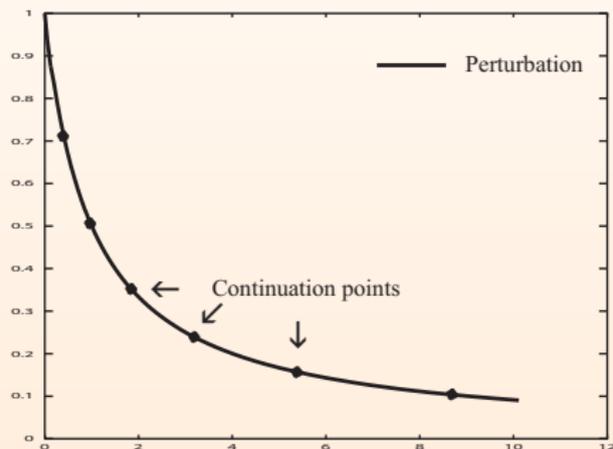
Resommation numérique : Exemple

$$\text{Equation quadratique: } \frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1$$

→ MAN + continuation

→ MAN + resommation + continuation

$$\text{Critère: } \frac{|Res(t)|}{|u(t)|} \geq \epsilon$$



Resommation numérique : Exemple

	ordre=8	ordre=15
MAN + continuation	6 points	5 points
MAN + resommation + continuation	2 points	1 points

- Théorie \longrightarrow Numérique : OK
- Réduit le nombre de continuation

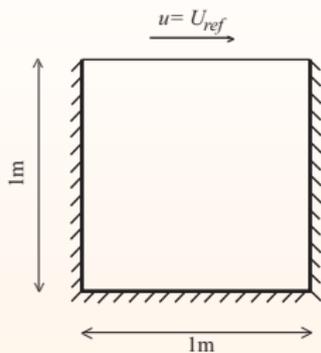
Réduction des équations de Navier–Stokes, POD

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p - \nu \Delta u = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

- Décomposition :
$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varrho^i(t) \Phi_i(x)$$
 - ▶ (Φ_i) = modes, fonctions à divergence nulle
 - ▶ Base optimale pour l'énergie:
très peu de modes suffisent pour capturer presque toute d'énergie
 - ▶ Déterminée numériquement ou expérimentalement, dépend de l'écoulement
- Equations réduites

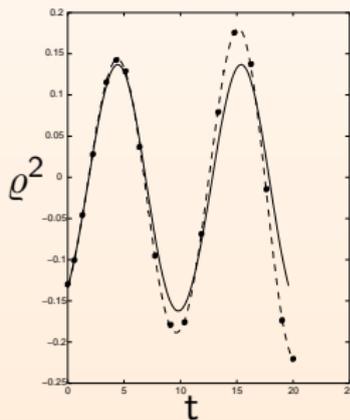
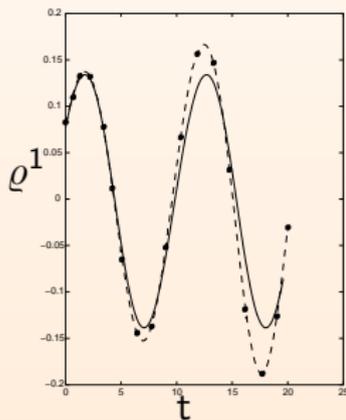
$$\frac{d\varrho^i}{dt} + \sum_{j,l=1}^N Q_{jl}^i \varrho^j \varrho^l + \sum_{j=1}^N L_j^i \varrho^j = F^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Cavité entraînée

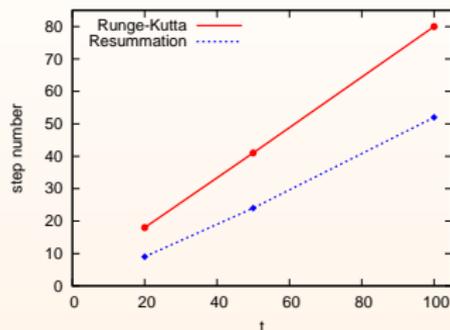


$U=15m/s$, $N = 4$ modes, jusqu'à $t = 20s$

- • • Runge-Kutta d'ordre 5 à pas adaptatif : 29 pas
- - - MAN ordre 10+resommation+continu. : 16 pas
- Solution de Référence (projection d'une solution numérique de Navier-Stokes sur la base (Φ_i))

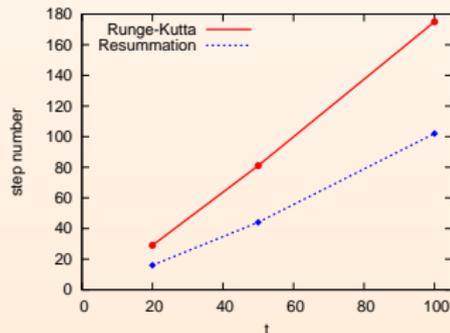


- Si on va plus loin en temps ?



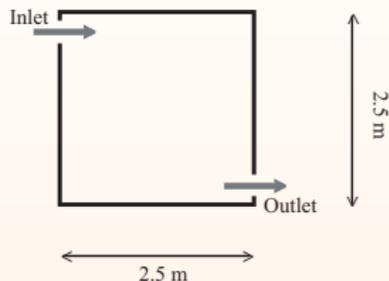
Gain: 35% pour atteindre 100s

- Si on augmente le nombre de modes ? 10 modes au lieu de 4.

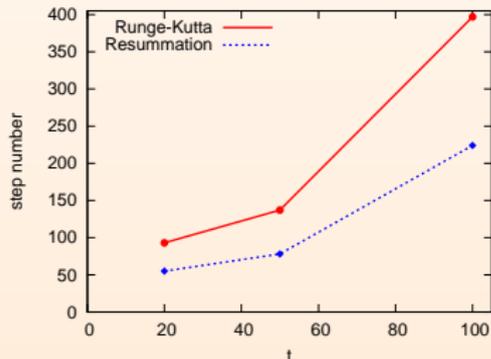


Gain: 42% pour atteindre 100s

Cavité ventilée 2D et particules



Hauteurs entrée et sortie: 31cm,
 $U=0.443\text{m/s}$, $N = 4$ modes



Gain: 44% pour atteindre 100s

- Dans les deux configurations, moins de pas avec la resommation
- Le gain augmente avec le nombre de modes à calculer
- Gain sur le temps de calcul ? Système trop petit

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, u(t, x^r) = u^r \end{cases} \quad (t, x) \in [0, +\infty[\times [x^l, x^r]$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{N-1} \\ u^N \end{pmatrix} = \frac{\nu}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{N-1} \\ u^N \end{pmatrix} + \frac{\nu}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} u^l \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ u^r \end{pmatrix}.$$

Equation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, \quad u(t, x^r) = u^r \end{array} \right. \quad (t, x) \in [0, +\infty[\times [x^l, x^r]$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$


$$\frac{dU}{dt} = BU + d.$$

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t, x) \in [0, +\infty[\times]x^l, x^r[\\ u(t=0, x) = u_0(x) \\ u(t, x^l) = u^l, u(t, x^r) = u^r \end{cases}$$

- Discrétisation spatiale

$$\frac{du^i}{dt} = \nu \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}$$

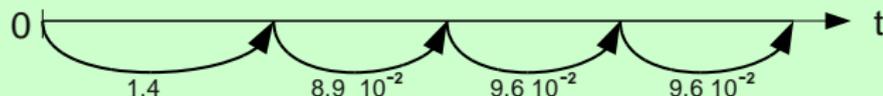

$$\frac{dU}{dt} = BU + d.$$

- Euler explicite: $U^{n+1} = U^n + \Delta t(BU^n + d).$ $\Delta t \leq \Delta x^2/2\nu$
- MAN + resommation: $t_{valide} \geq \Delta x^2/2\nu$?
- Continuation: critère basé sur le résidu, $\frac{\|Residu(t)\|}{\|solution(t)\|} < \varepsilon$

Equation de la chaleur

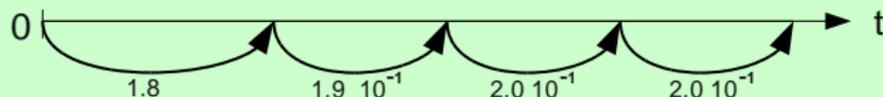
Solution: $e^{-t} \sin x$ sur $[0, \pi]$

- Taille du maillage: $N = 16$. Euler explicite $\Delta t \leq \Delta x^2/2 = 1.7 \cdot 10^{-3}$
Ordre de tronquature : 10



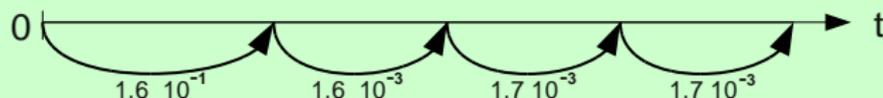
823

- Si on augmente l'ordre de tronquature : 20



1058

- Si on augmente la taille du maillage: $N = 128$.
Ordre de tronquature : 10. Euler explicite $\Delta t \leq \Delta x^2/2 = 3.0 \cdot 10^{-5}$

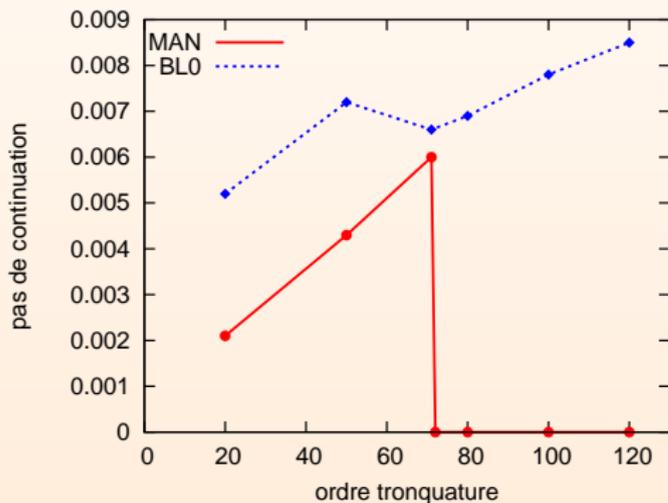


5333

Equation de la chaleur, cas divergent

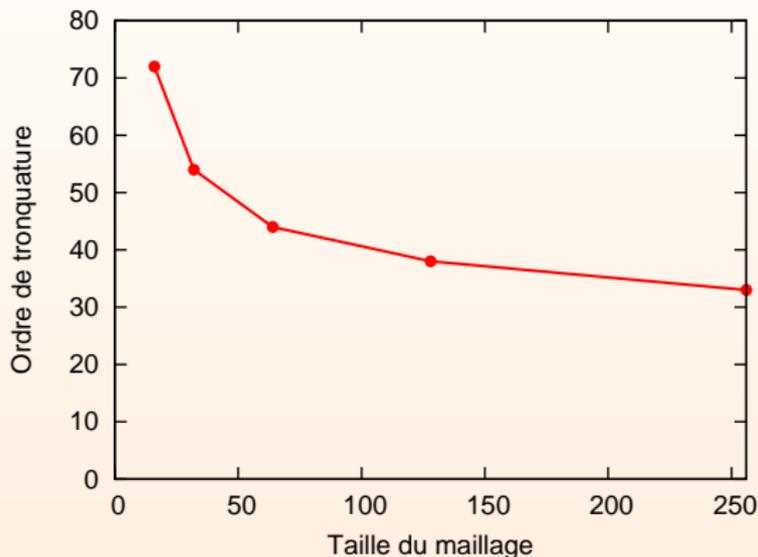
Domaine: $x \in [0, \frac{1}{2}]$, condition initiale: $\frac{1}{1-x}$

- Condition initiale C^∞ sur $[0, \frac{1}{2}]$ mais série divergente
- Taille du maillage $N = 16$. Euler explicite: $\Delta x^2/2 = 1.7 \cdot 10^{-3}$



Equation de la chaleur, cas divergente

A quel ordre la MAN s'arrête-t'elle ?



➔ Et pour Navier–Stokes avec un maillage beaucoup plus gros ?

Conclusion

- Resommation prolonge la MAN
- Se substitue à la MAN lorsque la série diverge
- Choix de d
- Série de Gevrey d'ordre $p > 1$

$$|u_k| < C A^n (n!)^{1/p}$$