



HAL
open science

Une approche énergétique de l'électromagnétisme et de la gravitation

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Une approche énergétique de l'électromagnétisme et de la gravitation. 2019. hal-02085996v3

HAL Id: hal-02085996

<https://hal.science/hal-02085996v3>

Preprint submitted on 31 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche énergétique de l'électromagnétisme et de la gravitation



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

Table des matières

I - Introduction	3
II - Les Lagrangiens	6
III - Aspect énergétique des équations d'EINSTEIN	14
IV - Les équations de MAXWELL	18
V - La linéarisation des équations d'EINSTEIN	22
VI - Les coordonnées harmoniques et la condition de jauge harmonique.....	29
VII - Identification des équations de MAXWELL.....	40
VIII - Métrique du champ électromagnétique dans la jauge magnétostatique	45
IX - Analyse des relations obtenues en jauge magnétostatique.....	47
X - Cas général.....	59
XI - L'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle	69
XII - Mouvement d'une particule chargée	74
XIII - Expression énergétique des équations de MAXWELL.....	81
XIV - Conclusion	84
Bibliographie.....	86

I - Introduction

Les progrès constants dans la connaissance et la compréhension du monde qui nous entoure ont conduit les physiciens à élaborer des modèles théoriques de plus en plus généraux, en partie grâce aux outils de plus en plus performants élaborés par les mathématiciens. Parmi les succès majeurs de ces modélisations, figurent en bonne place et par ordre chronologique, les équations de l'électromagnétisme, de la gravitation, et de la mécanique quantique.

Ce traitement morcelé des différents domaines de la physique a conduit régulièrement les physiciens à s'interroger sur la possibilité de définir un schéma le plus général possible de description de la physique.

Cet objectif a conduit à des réflexions souvent extrêmement complexes sur la manière dont on pourrait donner une vision globale de l'ensemble des phénomènes physiques. Parmi les plus impressionnantes, on doit citer celles d'Albert EINSTEIN, qui consacra une part importante de sa vie à tenter de construire une théorie qui permettrait de rendre compte à la fois des phénomènes électromagnétiques et gravitationnels. Il fut suivi, accompagné ou critiqué dans ses travaux par des spécialistes chevronnés de l'analyse tensorielle parmi lesquels on peut citer, Walter MAYER, Wolfgang PAULI, Marie-Antoinette TONNELAT, Hermann WEIL, Theodor KALUZA, Oskar KLEIN.....

Dans le prolongement du succès des équations de la gravitation, ces travaux cherchaient à prolonger ou étendre le formalisme de la courbure de l'espace-temps qui avait conduit à des équations tensorielles tellement fécondes.

Les efforts nombreux et intenses développés en ce sens n'ont pas permis à ce jour de fournir le cadre général attendu.

Lorsqu'EINSTEIN a construit sa théorie de la gravitation, il a été soutenu, dès le départ de sa réflexion, par un principe physique fort : localement, rien ne permet de distinguer ce qui se passe dans un référentiel accéléré de ce qui se passe dans un référentiel soumis à un champ de gravitation uniforme. Il savait dès lors qu'en travaillant sur une théorie des référentiels accélérés, il devrait être possible de faire apparaître les effets de la gravitation. Ce fut un travail long et difficile, mais dont certains aspects mathématiques complexes pouvaient être reliés aux aspects physiques par le principe d'équivalence.

Les succès magnifiques de sa théorie de la gravitation l'ont alors conduit, accompagné en cela par plusieurs autres chercheurs, à chercher un prolongement qui permettrait d'inclure de manière naturelle les équations de l'électromagnétisme. Ces prolongements ont pris des formes variées et extrêmement complexes, dont le point fort est généralement constitué par la grande rigueur mathématique des développements qui sont proposés.

Lorsqu'on s'intéresse à ces développements, on constate qu'ils ont perdu ce lien fort avec la physique qui a conduit au succès de la relativité générale. C'est seulement après avoir construit mathématiquement leur théorie que les physiciens vont chercher des exemples possibles de validations de leurs travaux.

Nous allons tenter dans ce mémoire d'explorer une autre manière de progresser vers une vision cohérente de la physique, du monde quantique au monde macroscopique. On n'y trouvera pas de résultats véritablement nouveau par rapport aux connaissances actuelles des grands domaines de la physique, sauf peut-être en ce qui concerne l'énergie électromagnétique que l'on peut associer à une charge ponctuelle. Mais on y trouvera un fil conducteur, dans lequel la conservation de l'énergie et l'invariance des lois de la physique par changement de référentiel sont des postulats qui sont admis sans aucune réserve. On y trouvera également la mise en évidence d'un formalisme commun aux équations de la gravitation et de l'électromagnétisme, à condition de se placer dans un cadre linéarisé.

Les solutions de l'équation de DIRAC sous la forme d'ondes stationnaires montrent qu'on peut interpréter ces solutions comme des échanges d'énergies entre l'énergie du vide et l'énergie de masse ou impulsionnelle des particules de l'infiniment petit. Sur la base de cette interprétation, toutes les formes de quantifications qui sont observées dans l'infiniment petit relèvent des conditions classiques de quantification des phénomènes stationnaires.

En se regroupant sous la forme d'atomes, puis de molécules, puis d'objets macroscopiques, ces particules vont transmettre leur énergie de masse et leur énergie impulsionnelle au monde qui nous est familier. Pour les particules chargées, il faut ajouter l'énergie électromagnétique aux échanges précédents.

Dans une interprétation de cette nature, l'origine de toute action énergétique macroscopique trouve sa source dans l'énergie du vide. Lorsqu'on adopte cette vision, on est conduit à admettre que toute la physique se résume à être capable de décrire les différentes transformations d'énergies, depuis leur origine issue du vide, jusqu'à leur perception macroscopique.

En d'autres termes, nous allons nous intéresser dans ce document à la manière dont on peut réfléchir à un socle cohérent pour l'ensemble de la physique, en prenant pour base une évolution de l'énergie contenue dans le vide.

Nous devons dans un premier temps préciser quels sont les postulats qui nous sont nécessaires. Ces postulats doivent par nature être vérifiés par l'ensemble des lois physiques connues de la nature.

Le postulat de base consiste à admettre que le vide contient de l'énergie, que l'on caractérisera en général par une densité volumique. Si les visions quantiques et cosmologiques divergent dans des ordres de grandeurs catastrophiques, il n'en reste pas moins que les deux théories admettent l'une et l'autre que le vide doit posséder de l'énergie. La très grande majorité des physiciens semble en accord sur ce point.

Le second postulat sera celui de la conservation de l'énergie. On admettra que l'énergie est une propriété physique qui ne peut ni être créée, ni être détruite, mais seulement transformée. A la connaissance de l'auteur, il n'existe pas d'expériences physiques connues mettant en cause ce postulat.

Pour compléter la ligne directrice que nous nous fixons, nous devons être capables de décrire l'évolution temporelle et spatiale de cette énergie : nous admettrons que cette évolution nous est donnée, dans le cas général, par le principe de moindre action. Il apparaît que ce principe s'applique à tous les domaines de la physique, et qu'il conduit aux équations de la gravitation, aux équations de l'électromagnétisme, et aux équations de la mécanique quantique. Il s'impose de manière naturelle comme un élément fédérateur de l'ensemble des lois qui décrivent la physique et fera l'objet d'un rappel général dans le chapitre suivant.

Sur la base de ces considérations, nous allons développer quelques arguments en faveur d'une vision énergétique de la physique.

II - Les Lagrangiens

Le principe de moindre action en lui-même peut être assimilé à une coquille vide : il nécessite pour son application la définition préalable d'un Lagrangien. Ce Lagrangien dépend du domaine de la physique considéré, et des échanges d'énergie qui sont envisagés.

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement les principaux Lagrangiens utilisés en mécanique, électromagnétisme, relativité, et mécanique quantique, ainsi que les propriétés qui en découlent par application des équations de LAGRANGE.

Nous ne reprenons pas les éléments de réflexion qui ont conduit à l'élaboration de ces Lagrangiens. Ces informations peuvent être retrouvées dans la plupart des cours relatifs aux méthodes variationnelles. Elles peuvent également être consultées sur le [document suivant](#).

On notera en particulier les échanges d'énergie qui apparaissent de manière explicite ou implicite au cœur des Lagrangiens. Ce sont ces échanges qui constituent l'ossature commune à l'ensemble de la physique que nous souhaitons mettre en évidence.

I – La mécanique de NEWTON

Considérons un point matériel de masse m et de vitesse v suivant l'axe des x , pour laquelle on adopte la notation :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (\text{II-1})$$

Ce point matériel se déplace dans une portion de l'espace où il est possible de lui associer une énergie potentielle, dont un exemple classique est l'énergie potentielle de gravitation.

On admet que l'énergie cinétique dépend uniquement de la vitesse et de l'instant considéré, tandis que l'énergie potentielle dépend uniquement de la position et de l'instant considéré. Dans ces conditions, à tout instant, la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle peut s'écrire sous la forme d'une fonction de la position, de la vitesse et du temps :

$$L(x, \dot{x}, t) = E_c(\dot{x}, t) - E_p(x, t) \quad (\text{II-2})$$

où L est appelé le Lagrangien du système.

L'évolution énergétique du système instaure des échanges entre énergie cinétique et énergie potentielle. Entre deux instants t_A et t_B , la somme de ces échanges est donnée par l'intégrale suivante, qui est appelée « action » :

$$S_A^B = \int_{t_A}^{t_B} (E_c(\dot{x}, t) - E_p(x, t)) dt = \int_{t_A}^{t_B} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (\text{II-3})$$

On procède alors au raisonnement suivant :

A l'instant t_A , la masse se trouve à la position A, et à l'instant t_B , la masse se trouve à la position B. Considérons l'ensemble des trajectoires possibles entre A et B : cela revient à dire qu'à chaque instant la position et la vitesse de la masse peuvent être quelconques. D'un point de vue mathématique, cette propriété peut être transposée en considérant que les variables position et vitesses sont des variables indépendantes. Dans ces conditions, LAGRANGE a montré que la trajectoire qui rend l'action stationnaire impose la relation suivante :

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (\text{II-4})$$

En appliquant cette relation au Lagrangien de la mécanique classique (II-2), on obtient, en rappelant que les variables position et vitesse doivent être considérées comme des variables indépendantes :

$$\frac{\partial \{E_c(\dot{x}, t) - E_p(x, t)\}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \{E_c(\dot{x}, t) - E_p(x, t)\}}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial E_p(x, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{E_c(\dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (\text{II-5})$$

En rappelant que la force dérive d'une énergie potentielle suivant la relation :

$$F_x = -\frac{\partial E_p(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II-6})$$

et que l'énergie cinétique s'exprime, en mécanique non relativiste, par l'expression :

$$E_c(\dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{II-7})$$

On déduit de la relation de LAGRANGE (II-5)

$$F_x - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x - m\ddot{x} = 0 \quad (\text{II-8})$$

En généralisant aux trois dimensions de l'espace, on parvient ainsi à la conclusion qu'un raisonnement purement énergétique, basé sur les échanges d'énergie décrits par le principe de moindre action, permet de construire l'ensemble de la physique qui découle du principe fondamental de la dynamique.

II – La relativité restreinte

Le Lagrangien de la relativité restreinte est donné par la relation:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{II-9})$$

et l'action se présente donc sous la forme :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -m_0 c^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad (\text{II-10})$$

Puisque m_0 qui représente la masse au repos est une constante, et c également, on conclut que rendre l'action maximum entre les instants initiaux et finaux revient à minimiser (à cause du signe moins) le temps propre entre ces deux évènements.

L'élément de longueur quadri dimensionnel s'écrit :

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (\text{II-11})$$

si bien qu'une autre expression de l'action couramment utilisée est celle qui minimise la trajectoire quadridimensionnelle :

$$S = -mc_0^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -m_0 c \int_{s_1}^{s_2} ds \quad (\text{II-12})$$

Suivant cette définition, l'action sera maximum lorsque la longueur quadridimensionnelle parcourue par l'objet sera minimum : cela revient à dire qu'entre deux évènements, l'objet va se déplacer suivant une géodésique de l'espace-temps.

III – Les équations de MAXWELL dans le vide

Il est connu que l'énergie électromagnétique se présente sous deux aspects différents : énergie apportée par le champ électrique E et énergie apportée par le champ magnétique H . Dans une approche énergétique, le lagrangien associé au champ électromagnétique présent dans un volume Ω est donné par la relation :

$$L = \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega \quad (\text{II-13})$$

Il exprime, à chaque instant, les échanges entre énergie électrique et énergie magnétique au sein du volume Ω .

La quantité ΔL , qui dépend uniquement du champ électromagnétique, est désignée par densité lagrangienne: elle est homogène à une densité volumique d'énergie.

$$\Delta L = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{II-14})$$

En appliquant les équations de LAGRANGE au lagrangien électromagnétique (II-13), on obtient les équations de MAXWELL dans le vide.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{II-15}$$

La densité volumique ΔL s'exprime également, à une constante multiplicative près, comme la « norme » du tenseur de champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$. Ce tenseur comporte toutes les composantes du champ électromagnétique, dans un ordre qui dépend de la métrique utilisée.

Sa « norme » fournit une grandeur qui ne dépend pas du référentiel dans lequel est exprimé le champ électromagnétique, ce qui en fait une grandeur invariante par changement de référentiel de la même manière que la norme d'un vecteur est invariante par changement de repère.

$$\Delta L = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{II-16}$$

IV – L'interaction électromagnétique

On désigne par interaction électromagnétique, l'action d'un champ électromagnétique représenté par son potentiel scalaire ϕ et son potentiel vecteur \vec{A} , sur une particule de charge ponctuelle égale à q et animée d'une vitesse v . On sait que dans cette situation, le champ électromagnétique communique une part de son énergie à la charge, et on peut définir le Lagrangien d'interaction sous la forme :

$$L = q(-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) \tag{II-17}$$

L'application des équations de LAGRANGE conduit à l'expression de la force de LORENTZ exprimée en fonction des potentiels scalaire et vecteur :

$$\vec{F} = q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) + q \left(-\vec{\nabla} \cdot \phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) = q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) + q \vec{\nabla} (-\phi + (\vec{v} \cdot \vec{A})) \tag{II-18}$$

Le mouvement d'une charge relativiste de masse au repos m_0 s'obtient en utilisant le Lagrangien de la relativité restreinte associé au Lagrangien de l'interaction électromagnétique :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q(-\phi + (\vec{v} \cdot \vec{A})) \tag{II-19}$$

V – Les équations de MAXWELL en présence de charges et de courants

En associant le Lagrangien d'interaction électromagnétique au Lagrangien du champ électromagnétique, on obtient :

$$L = q(-\varphi + (\vec{v} \cdot \vec{A})) + \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega \quad (\text{II-20})$$

Afin d'homogénéiser cette expression, on considère que la charge q est répartie dans le volume Ω avec une densité ρ , ce qui conduit à la formulation suivante :

$$L = \iiint_{\Omega} \rho(-\varphi + (\vec{v} \cdot \vec{A})) d\Omega + \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega \quad (\text{II-21})$$

$$L = \iiint_{\Omega} (-\rho\varphi + (\vec{J} \cdot \vec{A})) d\Omega + \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega \quad (\text{II-22})$$

dans laquelle \vec{J} représente la densité volumique de courant. On en déduit la densité volumique lagrangienne électromagnétique en présence de charges et de courants :

$$\Delta L = (-\rho\varphi + \vec{J} \cdot \vec{A}) + \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) \quad (\text{II-23})$$

L'application des équations de LAGRANGE conduit alors à la formulation des équations de MAXWELL en présence de charges et de courants :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

VI – Relativité générale : interaction du champ de gravitation avec un objet massif

En relativité générale, la métrique est caractérisée par les coefficients g_{ij} , et l'élément d'espace-temps au carré s'écrit :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{II-25})$$

Par analogie avec la relativité restreinte, on peut définir une action par la relation suivante :

$$S = -m_0 c \int_{s_1}^{s_2} ds = -m_0 c \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (\text{II-26})$$

L'application du principe de moindre action permet de montrer que la trajectoire de la particule de masse m_0 est une géodésique de l'espace-temps ayant pour équation :

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (\text{II-27})$$

L'expression des coefficients de CHRISTOFFEL est donnée par :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (\text{II-28})$$

VII – Relativité générale : équations d'EINSTEIN dans le vide

Il revient au mathématicien David HILBERT d'avoir montré qu'on peut obtenir les équations de la gravitation à partir d'un principe variationnel. L'action est une grandeur qui est par nature invariante par changement de référentiel. On définit ainsi une action construite à partir du scalaire de courbure R, car il s'agit d'une grandeur qui est invariante par changement de référentiel :

$$S = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint (R) \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint (g^{ij} R_{ij}) \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{II-29})$$

Dans cette expression on peut regrouper sous l'appellation $d\Omega$ l'élément de volume quadridimensionnel invariant par changement de référentiel :

$$d\Omega = \sqrt{|g|} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{II-30})$$

où g désigne le déterminant de la matrice des g_{ij} , et où x^0 désigne la variable temporelle égale à ct .

Un calcul variationnel complet permet de montrer que la variation de l'action peut se mettre sous la forme :

$$\delta S = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint \left\{ R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right\} \sqrt{-g} \delta(g^{ij}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{II-31})$$

Pour que cette action soit stationnaire, il faut que le terme entre accolades soit nul, ce qui conduit aux équations d'EINSTEIN dans le vide :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad (\text{II-32})$$

VIII – Relativité générale : équations d'EINSTEIN en présence de matière

L'action du paragraphe précédent est modifiée pour tenir compte du tenseur impulsion-énergie de la matière T_{ij} :

$$S = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint (R - \chi T) \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint (g^{ij} R_{ij} - \chi g^{ij} T_{ij}) \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{II-33})$$

On en déduit la variation de l'action :

$$\delta S = -\frac{1}{\chi c} \int \iiint \left\{ R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \chi T_{ij} \right\} \sqrt{-g} \delta(g^{ij}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{II-34})$$

Les équations de la gravitation en présence de matière peuvent être mises en évidences :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi T_{ij} \quad (\text{II-35})$$

Il est possible d'introduire la constante cosmologique dans ces démonstrations afin d'obtenir les équations les plus générales.

IX – Mécanique quantique : équation de DIRAC

Une formulation couramment utilisée pour définir la densité Lagrangienne de DIRAC est la suivante :

$$\Delta L = \bar{\psi} (j\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - m_0 c^2) \psi \quad (\text{II-36})$$

dans laquelle ψ désigne le bispineur de DIRAC, $\bar{\psi}$ le bispineur adjoint et γ^μ les matrices de DIRAC.

Le Lagrangien est obtenu de la même manière qu'en électromagnétisme ou en relativité générale, en intégrant cette densité volumique sur un volume Ω :

$$L = \iiint_{\Omega} \bar{\psi} (j\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - m_0 c^2) \psi d\Omega$$

En choisissant pour variables indépendantes le bispineur et son adjoint, l'application des relations de LAGRANGE permet de d'établir l'équation de DIRAC relative à chacun d'eux.

Pour une particule de charge q , placée dans un champ électromagnétique défini par son potentiel scalaire ϕ et son potentiel vecteur \vec{A} , les deux étant regroupés sous la forme d'un quadrivecteur A_μ , la densité Lagrangienne devient :

$$\Delta L = \bar{\psi} (j\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + jqA_\mu) - m_0 c^2) \psi \quad (\text{II-37})$$

Enfin, la densité Lagrangienne de l'électrodynamique quantique s'obtient en ajoutant une interaction avec le champ électromagnétique :

$$\Delta L = \bar{\psi} (j\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + jqA_\mu) - m_0 c^2) \psi + \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) \quad (\text{II-38})$$

$$\Delta L = \bar{\psi} (j\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + jqA_\mu) - m_0 c^2) \psi - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

C'est à partir de cette densité Lagrangienne que sont obtenues les comparaisons entre théorie et expérimentation les plus précises de l'histoire de la physique.

X – Conclusion

Il s'avère que les équations qui décrivent les principaux domaines de la physique tels que l'électromagnétisme, la mécanique classique incluant la gravitation, la relativité restreinte et générale, la mécanique quantique, peuvent être exprimés à l'aide du principe de moindre action.

D'une manière générale, ce principe minimise les échanges d'énergie sous ses différentes formes, dans un intervalle de temps donné.

Si on admet que le vide de l'univers est constitué d'une énergie infiniment fluide servant de base aux échanges quantiques, ces derniers servant eux-mêmes de bases pour des échanges d'énergie macroscopiques, alors on voit apparaître une profonde unité de l'ensemble de la physique autour de la notion d'énergie et du principe de moindre action.

Pour autant, plusieurs équations fondamentales, bien que découlant du principe de moindre action, ne décrivent pas explicitement une évolution énergétique du domaine considéré.

Un exemple simple est constitué par les équations de MAXWELL. Ces équations décrivent l'évolution des champs électromagnétiques en fonction des charges et courants qui en sont à l'origine sans référence explicite à des échanges d'énergie.

Nous proposons de réfléchir, dans la suite de ce document, à la possibilité d'une signification énergétique des équations qui régissent les principaux domaines de la physique, et en particulier les deux domaines fondamentaux que sont la gravitation et l'électromagnétisme.

III - Aspect énergétique des équations d'EINSTEIN

En prenant pour ligne directrice de sa pensée, l'équivalence entre un référentiel placé dans un champ de gravitation uniforme et un référentiel uniformément accéléré, EINSTEIN a montré que les équations de la gravitation pouvaient s'exprimer sous la forme :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} = \chi T_{ij} \quad (\text{III-1})$$

Dans cette expression :

- R_{ij} représente le tenseur de courbure de RICCI, obtenu par contraction du tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL. Chaque terme du tenseur R_{ij} a pour dimension des m^{-2} .
- R est appelé le scalaire de courbure obtenu par contraction du tenseur de courbure, et a pour dimension des m^{-2} .
- g_{ij} est le tenseur métrique, chaque terme est sans dimension.
- G est la constante gravitationnelle, elle a pour dimension des $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.
- c représente la vitesse de la lumière, elle s'exprime en $m.s^{-1}$.
- T_{ij} est appelé le tenseur impulsion énergie. Chaque terme a la dimension d'une densité volumique d'énergie. Il s'exprime en joules par mètre cube, ou encore en $m^{-1}.kg.s^{-2}$.
- χ est la constante d'EINSTEIN. Elle s'exprime en $m.kg.s^{-2}$, ou encore en mètre/joule.

La courbure de l'espace-temps se manifeste à travers les coefficients de la métrique g_{ij} , et de leurs dérivées qui sont présentes dans le tenseur R_{ij} . Il est apparent que cette courbure est imposée par la présence de l'énergie contenue dans le tenseur impulsion-énergie T_{ij} . Dès lors, l'interprétation de cette équation communément admise est la suivante :

En l'absence de matière, l'espace-temps est « plat », il est décrit par la relativité restreinte. La métrique correspondante est appelée la métrique de MINKOWSKY. Dans la suite de ce document, elle sera représentée par l'écriture matricielle suivante :

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2})$$

Tous les termes sont nuls en dehors de la diagonale principale, c'est-à-dire pour i différent de j . Cette propriété sera souvent mise à profit pour simplifier les calculs relatifs à une métrique linéarisée qui vont être développés dans les chapitres suivants.

La présence de matière se manifeste à travers le tenseur impulsion énergie T_{ij} et modifie la métrique de l'espace-temps de MINKOWSKY : elle sera désormais désignée par le tenseur g_{ij} . Les modifications qui viennent se rajouter à la métrique de l'espace-temps plat sont directement reliées au potentiel gravitationnel généré par la présence des masses.

On décrit cet effet en affirmant que la présence de matière modifie la métrique de l'espace-temps de MINKOWSKY. La nouvelle métrique est alors représentative d'un espace que l'on qualifie de courbe.

Si maintenant on place une masse d'épreuve dans cet espace-temps dont la métrique modifiée est caractérisée par les g_{ij} , alors cette masse d'épreuve va évoluer suivant une trajectoire qui correspond à une géodésique de l'espace-temps représenté par le tenseur g_{ij} .

On décrit cet effet en affirmant que la courbure de l'espace-temps due au champ de gravitation impose la trajectoire de la masse d'épreuve.

La parfaite adéquation des résultats expérimentaux avec cette théorie nous conduit à admettre sa validité sans aucune réserve.

L'interprétation des équations d'EINSTEIN en termes de courbure de l'espace-temps a ouvert un horizon dans lequel les mathématiciens se sont pleinement épanouis. Les variables de temps et d'espace constituent depuis toujours des variables qui sont à la base de constructions mathématiques extrêmement élaborées et extrêmement fécondes.

Pour le physicien, cette interprétation génère une certaine frustration, car il est difficile d'apercevoir un phénomène physique sous-jacent à la notion d'espace-temps. La notion de force a disparu, alors même que c'était un élément clé de la compréhension des phénomènes physiques et de leur évolution, et en particulier de la gravitation de NEWTON. Après plus d'un siècle de réflexions, on ne voit toujours pas où se cache physiquement la force dans les équations d'EINSTEIN, alors qu'on aurait là un élément permettant de progresser dans la compréhension des phénomènes physiques décrits par ces équations tensorielles.

Nous avons mentionné en introduction que lorsqu'on tente d'avoir une vision globale de la physique, il y avait un intérêt à faire ressortir ses aspects énergétiques. Il en découle immédiatement la question suivante : peut-on donner une interprétation énergétique aux équations d'EINSTEIN ?

Il apparaît que cette interprétation peut se faire sans efforts. En partant de la formulation habituellement utilisée :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \chi T_{ij} \quad (\text{III-3})$$

il suffit de transporter la constante d'EINSTEIN de l'autre côté de l'égalité pour obtenir :

$$\frac{R_{ij}}{\chi} - \frac{1}{2\chi}Rg_{ij} = T_{ij} \quad (\text{III-4})$$

Dans cette égalité, chacun des termes principaux a désormais la dimension d'une densité volumique d'énergie.

Dans le vide, et en l'absence de matière, la densité volumique d'énergie est uniforme et constante.

La présence de matière va modifier cette répartition uniforme d'énergie. Cette modification imposée est donnée par le tenseur énergie-impulsion de la matière T_{ij} . Les termes de gauche vont alors décrire l'évolution de la densité volumique d'énergie du vide sous la contrainte temporelle et spatiale dictée par T_{ij} .

Nous pouvons avancer encore dans la définition des dimensions des grandeurs qui composent le tenseur de RICCI :

$$R_{ij} = \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} \quad (\text{III-5})$$

Si nous posons :

$$R'_{ij} = \frac{R_{ij}}{\chi} \quad (\text{III-6})$$

$$R' = \frac{R}{\chi}$$

Les équations de la gravitation s'écrivent :

$$R'_{ij} - \frac{1}{2} R' g_{ij} = T_{ij} \quad (\text{III-7})$$

Avec :

$$R'_{ij} = \frac{\Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m}{\chi} - \frac{\Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m}{\chi} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\chi \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\chi \partial x^j}$$

$$R'_{ij} = \frac{\Gamma_{mk}^k}{\sqrt{\chi}} \frac{\Gamma_{ij}^m}{\sqrt{\chi}} - \frac{\Gamma_{mj}^k}{\sqrt{\chi}} \frac{\Gamma_{ik}^m}{\sqrt{\chi}} + \frac{\partial \frac{\Gamma_{ij}^k}{\sqrt{\chi}}}{\partial(\sqrt{\chi} x^k)} - \frac{\partial \frac{\Gamma_{ik}^k}{\sqrt{\chi}}}{\partial(\sqrt{\chi} x^j)} \quad (\text{III-7})$$

$$R'_{ij} = \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL modifiés (avec un prime) ont désormais pour dimension la racine carrée d'une densité volumique d'énergie. On remarque un élément de cohérence avec l'interprétation énergétique de l'équation de DIRAC dans laquelle la fonction d'onde a également la dimension de la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

Il en résulte que les variables d'espace modifiées (avec un prime) ont la dimension de l'inverse de la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

L'évolution du tenseur de RICCI modifié R'_{ij} , qui est proportionnel au tenseur de RICCI non modifié R_{ij} dans un rapport χ , peut donc être interprété uniquement en termes de variations de densité volumique d'énergie.

Il vient de cette interprétation que la notion de temps et d'espace découle directement d'une évolution énergétique. Dans un système sans évolution énergétique, le temps et l'espace n'existent pas, car il n'existe aucun moyen de les mettre en évidence.

Pour les équations de la gravitation, le passage d'une interprétation classique à une interprétation énergétique est donc immédiat. Il n'apporte pas véritablement, pour l'instant, d'éclairage supplémentaire.

IV - Les équations de MAXWELL

Dans une approche énergétique globale, on aimerait que le formalisme tensoriel qui décrit le comportement de l'énergie attachée à une masse puisse s'appliquer à d'autres domaines de la physique, et en tout premier lieu l'électromagnétisme. L'analogie statique entre gravitation et électrostatique est tellement parfaite quelle incite à explorer cette voie.

La relativité restreinte a permis de montrer la cohérence parfaite entre la notion de force issue de l'électromagnétisme, et la notion de force issue de la gravitation : ces deux forces se transforment de la même manière entre deux référentiels en mouvement de translation uniforme.

Or la notion d'énergie peut être définie par le résultat d'une force qui a subi ou généré un déplacement. La cohérence issue de la relativité restreinte incite à penser que s'il existe une loi générale de transformation de l'énergie, cette loi doit s'appliquer autant à l'énergie gravitationnelle qu'à l'énergie électromagnétique. Cette loi ne peut être qu'une loi tensorielle, par nature indépendante du référentiel dans lequel elle est décrite : celle qui vient à l'esprit est décrite par les équations d'EINSTEIN.

I – Rappel sur les équations de MAXWELL

L'électromagnétisme fait partie des grands domaines de la physique. Il est décrit de manière extrêmement précise par les équations de MAXWELL. Dans le vide, et en présence de charges et de courants, ces équations s'écrivent en régime temporel :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{IV-1}$$

Aucune formulation énergétique n'apparaît directement dans ces équations. Elles peuvent pourtant être déduites des lagrangiens suivants à l'aide du principe de moindre action :

$$\begin{aligned}L &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega \\ L &= q(-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) = \iiint_{\Omega} \rho(-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) d\Omega = \iiint_{\Omega} (-\rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A}) d\Omega\end{aligned}\tag{IV-2}$$

Ce constat indique qu'on peut leur attribuer une origine énergétique.

Les potentiels scalaires et vecteurs qui apparaissent dans le lagrangien (VI-2) à côté des sources du champ électromagnétique sont solutions de l'équation d'onde :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial(ct)^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \bar{\nabla}^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial(ct)^2} &= -\mu_0\vec{J}\end{aligned}\tag{IV-3}$$

Ces équations d'ondes doivent être associées au choix de jauge qui a permis leur détermination, c'est-à-dire la jauge de LORENZ :

$$\bar{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0\tag{IV-4}$$

Comme précédemment, aucun aspect énergétique évident n'apparaît dans ces équations.

II – Essai de définition d'un tenseur énergie-impulsion des sources de rayonnement du champ électromagnétique

Pour une densité volumique de matière ρ_m , animée d'une vitesse ayant pour composantes v_x, v_y, v_z , nous savons définir un tenseur impulsion-énergie. Dans la métrique (-,+,+,+), nous lui donnons la forme suivante :

$$T_{ij} = -\rho_m \begin{pmatrix} c^2 & -cv_x & -cv_y & -cv_z \\ -cv_x & v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ -cv_y & v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ -cv_z & v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix}\tag{IV-5}$$

Ce tenseur impulsion énergie est à l'origine de la modification de la densité volumique d'énergie qui entoure chaque masse. En régime statique, il se réduit au terme T_{00} , qui intégré sur le volume contenant la masse fournit l'énergie de masse au repos : m_0c^2 .

Ce tenseur peut être qualifié de tenseur intrinsèque à une densité volumique d'énergie de masse en déplacement, car il ne contient aucun terme en provenance du champ gravitationnel.

Le problème avec l'électromagnétisme, c'est que nous ne savons pas définir un tenseur impulsion-énergie intrinsèque relatif à une densité volumique de charge ρ . En d'autres termes, nous ne savons pas attribuer une quantité d'énergie purement électromagnétique à une charge électrostatique q .

Il s'agit d'un problème fondamental : sans ce tenseur énergétique relatif aux sources de rayonnement électromagnétique, on voit mal comment il serait possible d'envisager un rapprochement de l'électromagnétisme avec les équations de la gravitation d'EINSTEIN.

Pour proposer la structure d'un tel tenseur, nous allons nous inspirer du rasoir d'Ockham : les hypothèses suffisantes les plus simples doivent être préférées.

Nous conjecturons que l'évolution de l'énergie doit être identique ; que ce soit pour l'énergie de masse ou pour l'énergie électromagnétique.

Son évolution doit donc être décrite par les mêmes équations. On peut considérer qu'il s'agit d'une conséquence des postulats de base que nous nous sommes imposés en introduction.

Par conséquent, nous adoptons le tenseur suivant pour tenseur impulsion-énergie des sources de champ électromagnétique :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = -\lambda \rho \begin{pmatrix} c^2 & -cv_x & -cv_y & -cv_z \\ -cv_x & v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ -cv_y & v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ -cv_z & v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & -J_x v_x & -J_x v_y & -J_x v_z \\ cJ_y & -J_y v_x & -J_y v_y & -J_y v_z \\ cJ_z & -J_z v_x & -J_z v_y & -J_z v_z \end{pmatrix} \quad (IV-6)$$

La quantité ρ représente la densité volumique de charges, tandis que les quantités J_x, J_y, J_z représentent les densités volumiques de courant suivant chaque direction de l'espace.

La constante multiplicative λ qui apparaît a pour but de donner à ce tenseur la dimension d'une densité volumique d'énergie, et d'assurer la cohérence de ce tenseur avec les équations de la gravitation. Nous justifierons par la suite son expression :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \quad (IV-7)$$

Dans cette expression, ϵ_0 représente la permittivité du vide, et G la constante gravitationnelle. On en déduit une valeur approchée de λ :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi * 8.85 * 10^{-12} * 6.67 * 10^{-11}}} \approx 1.16 * 10^{10} \text{ A}^{-1}\text{s}^{-1}\text{Kg} \quad (IV-8)$$

Dans une métrique linéarisée, le tenseur deux fois contravariant s'obtient en changeant les signes de la ligne 0 et de la colonne 0 :

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = -\lambda \rho \begin{pmatrix} c^2 & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ cv_y & v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ cv_z & v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & J_x v_x & J_x v_y & J_x v_z \\ cJ_y & J_y v_x & J_y v_y & J_y v_z \\ cJ_z & J_z v_x & J_z v_y & J_z v_z \end{pmatrix} \quad (IV-9)$$

Pour un système isolé d'influences extérieures, la divergence de ce tenseur doit être nulle :

$$\frac{\partial \Gamma^{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial \Gamma^{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^{i3}}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

Nous obtenons pour la première ligne (i=0) :

$$\frac{\partial \Gamma^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^{03}}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{IV-11})$$

Soit encore :

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(J_x)}{\partial x} + \frac{\partial(J_y)}{\partial y} + \frac{\partial(J_z)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{IV-12})$$

La divergence est nulle car elle vérifie l'équation de conservation de la charge. A une constante multiplicative près, elle est identique à la loi de conservation de l'énergie qui s'impose au tenseur impulsion-énergie T^{ij} .

Sur la base de ce tenseur impulsion-énergie, nous allons chercher à montrer que les équations de MAXWELL sont incluses de manière approchée dans les équations de la gravitation. Les approximations qui nous seront nécessaires sont constituées, pour partie, par la linéarisation des équations d'EINSTEIN : c'est cet aspect qui va être abordé dans les chapitres suivants.

V - La linéarisation des équations d'EINSTEIN

Les équations d'EINSTEIN rappelées ci-dessous s'expriment en fonction du tenseur énergie-impulsion dans le membre de droite, des coefficients de la métrique g_{ij} , et de leurs dérivées partielles premières et secondes dans le membre de gauche.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (V-1)$$

Le tenseur d'EINSTEIN est repris plus en détail ci-dessous :

$$R_{ij} = \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j}$$

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (V-2)$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Ces équations sont non linéaires : si on multiplie le tenseur énergie-impulsion T_{ij} par 2, les g_{ij} qui sont solutions ne sont pas multipliés par 2. Cela est apparent dans le passage des coefficients de la métrique covariants aux coefficients contravariants : l'inversion de la matrice introduit un dénominateur formé par le déterminant des g_{ij} , ce qui enlève toute linéarité aux coefficients de CHRISTOFFEL.

Par opposition, les équations de MAXWELL sont linéaires : si on multiplie par 2 les charges à l'origine des champs électromagnétiques, ces champs se retrouvent multipliés par 2. On connaît de plus leur cohérence totale avec la relativité restreinte, qui est décrite par la métrique de MINKOWSKI dont nous avons déjà adopté la signature :

$$\eta_{00} = \eta^{00} = -1, \quad \eta_{11} = \eta^{11} = 1, \quad \eta_{22} = \eta^{22} = 1, \quad \eta_{33} = \eta^{33} = 1 \quad (V-3)$$

Cette métrique est caractéristique d'un espace-temps plat, car elle rend nuls les coefficients de CHRISTOFFEL ainsi que le tenseur de RICCI.

Il est admis que les équations de MAXWELL s'appuient sur la métrique de MINKOWSKY de manière exacte. On peut alors s'interroger sur la manière dont un espace temps rigoureusement plat peut permettre au champ électromagnétique de se propager. De ce point de vue, il est plus satisfaisant pour l'esprit d'imaginer que cet espace-temps est sujet à des fluctuations infiniment petites qui se propagent à la manière de n'importe quelle perturbation dans son milieu de propagation.

Une telle représentation a l'avantage de concilier la cohérence des équations de MAXWELL avec la métrique de MINKOWSKY, car si les perturbations sont suffisamment faibles, elles peuvent être considérées comme négligeables dans les coefficients de la métrique de MINKOWSKY. On assure également la cohérence avec une propagation à travers l'espace-temps qui peut être décrite à travers les équations d'EINSTEIN.

On arrive ainsi à la conclusion que si l'hypothèse suivant laquelle les champs électromagnétiques se propagent grâce à une déformation de l'espace-temps est valide, il doit être possible de préciser cette déformation par introduction du tenseur énergie-impulsion des sources électromagnétiques dans l'équation d'EINSTEIN.

L'idée d'une résolution exacte étant abandonnée à cause de la difficulté, il reste qu'on peut travailler dans le cadre des équations d'EINSTEIN, lorsqu'elles sont écrites pour des g_{ij} infiniment proches des η_{ij} qui caractérisent la métrique de MINKOWSKY. On se situe alors dans le cadre des équations d'EINSTEIN linéarisées.

La première étape de ce travail consiste à réécrire ces équations en introduisant les simplifications apportées lorsqu'on considère un écart infinitésimal par rapport à la métrique de MINKOWSKY. Ce travail a été exploré par EINSTEIN lui-même, et a conduit progressivement à un formalisme rigoureux adopté pour décrire la propagation des ondes gravitationnelles. Les grandes lignes de cette linéarisation sont décrites dans les paragraphes suivants.

Par la suite, tous les indices utilisés en notation tensorielle varient de 0 à 3. Lorsque ce ne sera pas le cas, cela sera mentionné explicitement.

I – Le tenseur métrique qui propage la perturbation électromagnétique

Un espace-temps plat est représenté par la métrique de MINKOWSKY dont nous adopterons la représentation ci-dessous :

$$\eta_{ij} = \eta^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (V-4)$$

On suppose que cette métrique est l'objet de petites perturbations h_{ij} qui vérifient la condition :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |h_{ij}| \ll 1 \quad (V-5)$$

Les coefficients de la métrique perturbée g_{ij} , c'est à dire de la métrique qui est attachée à l'onde électromagnétique, s'écrivent comme la somme des coefficients de la métrique de MINKOWSKY, plus les petites perturbations h_{ij} .

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} = \begin{pmatrix} -1 + h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & 1 + h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 1 + h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & 1 + h_{33} \end{pmatrix} \quad (V-6)$$

On suppose les perturbations h_{ij} suffisamment petites pour qu'on puisse considérer leurs effets comme linéaires sur la métrique g_{ij} : nous justifierons cette hypothèse ultérieurement. Dans ces conditions, on pourra dans un premier temps négliger les termes du second ordre qui correspondent à des produits de h_{ij} .

La première étape consiste à établir l'expression du tenseur métrique contravariant g^{ij} . On sait que la matrice des g^{ij} contravariants est la matrice inverse de celle des g_{ij} covariants. On pourrait penser procéder à une inversion formelle de la matrice (V-6), mais si on suppose les termes du second ordre négligeable, on peut simplifier l'inversion et vérifier immédiatement que le produit des matrices suivantes donne bien la matrice identité, à l'approximation indiquée :

$$\begin{pmatrix} -1 + h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & 1 + h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 1 + h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & 1 + h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & 1 - h_{11} & -h_{12} & -h_{13} \\ h_{20} & -h_{21} & 1 - h_{22} & -h_{23} \\ h_{30} & -h_{31} & -h_{32} & 1 - h_{33} \end{pmatrix} \quad (V-7)$$

Puisque le tenseur covariant η_{ij} et contravariant η^{ij} de la métrique de MINKOWSKY est identique, on déduit que les éléments du tenseur contravariant de la métrique perturbée peuvent s'écrire :

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij} \quad (V-8)$$

avec :

$$h^{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & -h_{01} & -h_{02} & -h_{03} \\ -h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ -h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ -h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (V-9)$$

On peut attirer l'attention sur le fait que dans cette approche linéarisée, les h^{ij} qui sont les éléments contravariants du tenseur h_{ij} , peuvent être déduits de ce dernier grâce à la métrique de MINKOWSKY :

$$h^{ij} = \eta^{im} \eta^{jn} h_{mn} \quad (V-10)$$

II - Les coefficients de CHRISTOFFEL

Ils sont construits à partir du tenseur métrique perturbé suivant la relation rappelée pour mémoire :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (V-11)$$

où l'expression du tenseur métrique perturbé contravariant a été établie précédemment :

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij} \quad (V-12)$$

Puisque les η_{ij} sont constants, leur dérivée est nulle, et il reste :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} (\eta^{rk} - h^{rk}) \left\{ \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (V-13)$$

La condition $|h^{rk}| \ll |\eta^{rk}| = 1$ permet une simplification supplémentaire :

$$\Gamma_{ij}^r \approx \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (V-14)$$

et puisque les seuls η^{rk} non nuls sont les η^{rr} , il ne reste finalement que :

$$\Gamma_{ij}^r \approx \frac{1}{2} \eta^{rr} \left\{ \frac{\partial h_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^r} \right\} \quad (V-15)$$

III - Le tenseur de RICCI

Nous utilisons l'expression du tenseur de RICCI ci-dessous :

$$R_{ij} = \Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} \quad (V-16)$$

dont l'écriture développée dans un espace à 4 dimensions prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \Gamma_{ij}^1 \{ \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{10}^0 \} + \Gamma_{ij}^2 \{ \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{20}^0 \} \\ & + \Gamma_{ij}^3 \{ \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{30}^0 \} + \Gamma_{ij}^0 \{ \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^0 \} \\ & - (\Gamma_{1j}^1 \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{2j}^1 \Gamma_{i1}^2 + \Gamma_{3j}^1 \Gamma_{i1}^3 + \Gamma_{0j}^1 \Gamma_{i1}^0) - (\Gamma_{1j}^2 \Gamma_{i2}^1 + \Gamma_{2j}^2 \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{3j}^2 \Gamma_{i2}^3 + \Gamma_{0j}^2 \Gamma_{i2}^0) \\ & - (\Gamma_{1j}^3 \Gamma_{i3}^1 + \Gamma_{2j}^3 \Gamma_{i3}^2 + \Gamma_{3j}^3 \Gamma_{i3}^3 + \Gamma_{0j}^3 \Gamma_{i3}^0) - (\Gamma_{1j}^0 \Gamma_{i0}^1 + \Gamma_{2j}^0 \Gamma_{i0}^2 + \Gamma_{3j}^0 \Gamma_{i0}^3 + \Gamma_{0j}^0 \Gamma_{i0}^0) \\ & + \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{i1}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i2}^2}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i3}^3}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial x^j} \right\} \end{aligned} \quad (V-17)$$

Il est apparent que sans hypothèse simplificatrice supplémentaire, rechercher une solution exacte en utilisant l'expression complète du tenseur de RICCI est un travail probablement insurmontable.

Puisque nous nous plaçons dans le cadre d'un écart infinitésimal par rapport à la métrique de MINKOWSKY, nous en déduisons que les coefficients de CHRISTOFFEL sont très voisins de ceux d'un espace-temps plat, c'est à dire très voisins de 0. Dans ces conditions, le produit des coefficients de CHRISTOFFEL peut être considéré comme un infiniment petit du second ordre, et peut donc être négligé.

Sous ces hypothèses, on est amené à évaluer le tenseur de RICCI simplifié:

$$\mathbf{R}_{ij} \approx \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^j} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{i1}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i2}^2}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i3}^3}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial x^j} \right\} \quad (\text{V-18})$$

Il vient en introduisant l'expression approchée des coefficients de CHRISTOFFEL (V-14) rappelée pour mémoire :

$$\Gamma_{ij}^r \approx \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (\text{V-19})$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^r} + \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} \right\} - \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^r \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_{rk}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 h_{ir}}{\partial x^j \partial x^k} \right\} \quad (\text{V-20})$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{rk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_{ir}}{\partial x^j \partial x^k} \right\} \quad (\text{V-21})$$

On peut simplifier cette expression en développant les produits par le tenseur métrique η^{rk} . Ce dernier se comporte comme une constante et peut passer sous le signe dérivée, ce qui permet d'élever ou d'abaisser un indice, lorsque cette opération est pertinente :

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x^i \partial x^r} - \eta^{rk} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} - \eta^{rk} \frac{\partial^2 h_{rk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} \right\} \quad (\text{V-22})$$

Dans la métrique de MINKOWSKY, les seuls coefficients non nuls sont les η^{rr} , et sont rappelés pour mémoire :

$$\eta^{00} = -1 \quad \eta^{11} = 1 \quad \eta^{22} = 1 \quad \eta^{33} = 1 \quad (\text{V-23})$$

si bien que le terme :

$$\eta^{rk} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} = \eta^{rr} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^r} = -\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial z^2} = \square(h_{ij}) \quad (V-24)$$

représente le d'Alembertien de la perturbation dans la métrique (- + + +), tandis que le terme :

$$\eta^{rk} h_{rk} = \eta^{rr} h_{rr} = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = h \quad (V-25)$$

représente la trace de la perturbation. Avec ces conventions d'écriture, le tenseur de RICCI linéarisé se met sous la forme :

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) \right\} \quad (V-26)$$

IV - Le scalaire de courbure R

Il s'obtient à partir du tenseur de RICCI R_{ij} et du tenseur métrique η^{ij} par la contraction :

$$R = g^{ij} R_{ij} = (\eta^{ij} - h^{ij}) R_{ij} \approx \eta^{ij} R_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) \right\} \quad (V-27)$$

Le tenseur métrique η^{ij} permet d'abaisser ou d'élever les indices des termes entre accolades :

$$R = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} - \eta^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h^{jk}}{\partial x^j \partial x^k} - \square(\eta^{ij} h_{ij}) \right\} \quad (V-28)$$

Les sommes décrites dans les termes dérivés des deux tenseurs deux fois contravariants h^{ik} et h^{jk} sont identiques, ce qui permet de les regrouper :

$$R = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} - \square(\eta^{ij} h_{ij}) \right\} \quad (V-29)$$

Comme précédemment, on utilise le fait que tous les termes du tenseur métrique η^{ij} sont nuls, sauf pour $i = j$: dans ces conditions, comme indiqué plus haut, les deux derniers termes entre accolades correspondent au d'Alembertien de la trace h , et on obtient après cette ultime contraction :

$$R = \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - \square(h) \quad (V-30)$$

V – L'équation d'EINSTEIN linéarisée

Les équations des champs s'écrivent en fonction du tenseur impulsion-énergie qui décrit les sources électromagnétiques et qui est rappelée pour mémoire :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (V-31)$$

En reportant dans cette expression, les résultats partiels obtenus pour l'expression de R_{ij} (V-26) et de R (V-30), on obtient l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le cadre d'une métrique linéarisée :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) \right\} - \frac{1}{2} g_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 h^{pq}}{\partial x^p \partial x^q} - \square(h) \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (V-32)$$

et puisque les g_{ij} sont sensiblement égaux aux η_{ij} , l'équation des champs portant sur de petites perturbations h^{ij} prend la forme très générale :

$$\frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) - \eta_{ij} \frac{\partial^2 h^{pq}}{\partial x^p \partial x^q} + \eta_{ij} \square(h) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (V-33)$$

On peut obtenir une autre formulation, en partant d'une forme équivalente de l'équation d'EINSTEIN (V-31) déduite à l'aide de la relation : $-R = \chi T$ (obtenue en multipliant l'équation d'EINSTEIN par le tenseur métrique contravariant g^{ij}) :

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (V-34)$$

Seule l'expression linéarisée de R_{ij} (V-25) est nécessaire, et on a :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (V-35)$$

soit encore :

$$\frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) = \frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (V-36)$$

Les deux équations obtenues (V-33) et (V-36) ne se prêtent pas encore à une interprétation directe en termes de propagation des champs électromagnétiques et nécessitent des simplifications qu'il est indispensable de justifier : ce sera l'objet du chapitre suivant.

VI - Les coordonnées harmoniques et la condition de jauge harmonique

Le problème de jauge se pose en électromagnétisme lorsqu'on souhaite écrire les équations de MAXWELL en termes de potentiels plutôt qu'en termes de composantes de champ électrique et magnétique. On constate que, pour un champ électromagnétique donné, les potentiels qui représentent ce champ ne sont pas définis de manière unique. Il convient alors de faire un choix parmi l'infinité des potentiels possibles, et ce choix est appelé choix de jauge. Il apparaît finalement qu'il n'y a qu'un choix de jauge qui permet de conserver l'invariance des équations de MAXWELL par changement de référentiel : il s'agit de la jauge de LORENZ.

Le problème se pose en termes analogues avec les équations des champs. Des réflexions approfondies, notamment dans le cadre d'une meilleure compréhension des ondes gravitationnelles et de leur mise en équation, ont permis d'établir un cadre rigoureux de choix de jauge, dont les grandes lignes sont présentées ci-dessous.

Nous avons obtenu, au chapitre précédent, deux expressions de l'équation de propagation d'une petite perturbation de la métrique de MINKOWSKY, en linéarisant l'une ou l'autre des équations d'EINSTEIN :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (\text{VI-1})$$

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (\text{VI-2})$$

Pour ce faire, nous avons considéré une métrique de MINKOWSKY η_{ij} dans laquelle nous avons injecté une petite perturbation h_{ij} . Nous en avons déduit que la métrique perturbée g_{ij} était de la forme :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad (\text{VI-3})$$

Nous avons ensuite calculé le tenseur de RICCI R_{ij} et le scalaire de courbure R de l'espace perturbé en fonction de la perturbation h_{ij} .

L'indétermination de cette méthode vient du fait que si on se place dans un espace ayant une métrique légèrement différente (représentée par le signe \sim dans les paragraphes suivants), on a :

$$\tilde{g}_{ij} = \eta_{ij} + \tilde{h}_{ij} \quad (\text{VI-4})$$

et que, aux approximations imposées, g_{ij} et \tilde{g}_{ij} peuvent conduire au même tenseur de RICCI R_{ij} et au même scalaire de courbure R . Il y a donc une infinité de h_{ij} qui conduisent à la même équation d'onde, et, par analogie avec l'électromagnétisme, le choix que l'on sera amené à opérer parmi cette infinité sera désigné par choix de jauge.

Pour établir cette propriété, on procède en deux étapes :

- On se place dans un espace ayant une métrique légèrement différente en considérant un petit changement de coordonnée, et on montre que la perturbation initiale h_{ij} se transforme en une perturbation \tilde{h}_{ij} .
- On montre que, sous certaines hypothèses, cette nouvelle perturbation \tilde{h}_{ij} conduit au même tenseur de RICCI linéarisé que h_{ij} et donc aux mêmes équations des champs.

I – Invariance de l'équation d'EINSTEIN linéarisée sous une petite variation de la métrique.

On considère que chaque coordonnée x^i subit une petite variation ε^i et devient \tilde{x}^i dans un nouveau système de coordonnées :

$$\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon^i \quad (\text{VI-5})$$

On supposera dans cette transformation que ε^i est une quantité infiniment petite du premier ordre (comme h_{ij}), et de plus que cette modification de coordonnées est lentement variable, ce qui permet de considérer que la quantité $\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i}$ est également un infiniment petit du premier ordre. Dans ces conditions, on déduit de la transformation (VI-5) :

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^i} = 1 + \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^i} = 1 - \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i} \quad (\text{VI-6})$$

Le tenseur g_{ij} qui porte la métrique perturbée va subir le changement de coordonnées (VI-5), et on sait qu'un tenseur covariant du second ordre se transforme par changement de coordonnées suivant la relation :

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^j} g_{ij} \quad (\text{VI-7})$$

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, cette transformation se développe en fonction des ε^i :

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^j} g_{ij} \approx \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i}\right) \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^j}{\partial x^j}\right) g_{ij} \approx \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon^j}{\partial x^j}\right) g_{ij} \quad (\text{VI-8})$$

En explicitant les g_{ij} , on fait apparaître la métrique de MINKOWSKY ainsi que ses petites perturbations h_{ij} :

$$\tilde{\eta}_{ij} + \tilde{h}_{ij} \approx \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon^j}{\partial x^j}\right) (\eta_{ij} + h_{ij}) \quad (\text{VI-9})$$

Au premier ordre, $\tilde{\eta}_{ij} = \eta_{ij}$ et il reste :

$$\tilde{h}_{ij} \approx h_{ij} - \eta_{ij} \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^i} - \eta_{ij} \frac{\partial \varepsilon^j}{\partial x^j} \quad (\text{VI-10})$$

Parce que le tenseur métrique de la métrique de MINKOWSKY η_{ij} est constant, il peut être inclus dans la dérivée partielle, et on obtient la relation qui relie les petites perturbations h_{ij} sous une petite transformation de coordonnées ε_i :

$$\tilde{h}_{ij} \approx h_{ij} - \frac{\partial(\eta_{ij}\varepsilon^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\eta_{ij}\varepsilon^j)}{\partial x^j} = h_{ij} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} \quad (\text{VI-11})$$

On note que cette relation est cohérente avec l'hypothèse de coordonnées lentement variables faites en (VI-5) et (VI-6), car les variations de coordonnées doivent être de l'ordre de grandeur des h_{ij} pour assurer l'homogénéité de la relation (VI-11).

Au chapitre précédent, nous avons montré que le tenseur de RICCI linéarisé s'écrit en fonction des petites perturbations h_{ij} :

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{rk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_{ir}}{\partial x^j \partial x^k} \right\} \quad (\text{VI-12})$$

Si on modifie les h_{ij} d'une petite quantité qui correspond à une variation infinitésimale des coordonnées ε_i , les h_{ij} deviennent, conformément à la relation établie ci-dessus :

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} \quad (\text{VI-13})$$

Cette modification des h_{ij} introduit une modification du tenseur de RICCI δR_{ij} qui s'évalue en portant les h_{ij} modifiés (VI-13) dans l'expression (VI-12) :

$$\mathbf{R}_{ij} + \delta \mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \frac{\partial^2 \left(h_{jk} - \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^k} \right)}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 \left(h_{ij} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} \right)}{\partial x^r \partial x^k} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \left(h_{rk} - \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x^r} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x^k} \right)}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \left(h_{ir} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^r} \right)}{\partial x^j \partial x^k} \right\} \quad (\text{VI-14})$$

soit encore pour la seule modification δR_{ij} :

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \left(-\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^k} \right)}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 \left(-\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} \right)}{\partial x^r \partial x^k} \\ - \frac{\partial^2 \left(-\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x^r} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x^k} \right)}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \left(-\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^r} \right)}{\partial x^j \partial x^k} \end{array} \right\} \quad (VI-15)$$

En développant l'expression entre accolades, on obtient :

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2} \eta^{rk} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^3 \varepsilon_k}{\partial x^i \partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial^3 \varepsilon_j}{\partial x^i \partial x^k \partial x^r} + \frac{\partial^3 \varepsilon_j}{\partial x^i \partial x^k \partial x^r} + \frac{\partial^3 \varepsilon_i}{\partial x^i \partial x^k \partial x^r} \\ + \frac{\partial^3 \varepsilon_k}{\partial x^i \partial x^j \partial x^r} + \frac{\partial^3 \varepsilon_r}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^3 \varepsilon_r}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^3 \varepsilon_i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^r} \end{array} \right\} = 0 \quad (VI-16)$$

soit donc $\delta R_{ij} = 0$.

La modification des h_{ij} (VI-13) ne modifie pas l'équation des ondes gravitationnelles puisqu'elle ne modifie pas le tenseur de RICCI R_{ij} .

En électromagnétisme, on peut trouver une infinité de potentiels qui représentent le même champ électromagnétique.

De même, ε_i étant une petite quantité à priori quelconque (mais respectant les hypothèses énoncées plus haut), la relation (VI-13) permet de trouver une infinité de h_{ij} qui représentent le même champ gravitationnel se propageant dans l'espace-temps.

II – Les coordonnées harmoniques.

Les équations de propagation des h_{ij} obtenues au chapitre précédent sont rappelées pour mémoire :

$$\frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \eta_{ij} \frac{\partial^2 h^{pq}}{\partial x^p \partial x^q} - \square(h_{ij}) - \square(h) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (VI-17)$$

$$\frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x^i \partial x^r} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(h_{ij}) = \frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (VI-18)$$

Malgré le cadre linéarisé, ce sont des équations aux dérivées partielles d'une grande complexité et pratiquement impossibles à résoudre en l'état. Une idée consiste alors à rechercher, parmi l'infinité de systèmes de coordonnées que représente l'écriture tensorielle, s'il n'en existe pas un qui permet de simplifier l'écriture de ces équations.

C'est un problème qu'on rencontre dans d'autres situations, par exemple en analyse variationnelle pour alléger les calculs de l'expression :

$$\delta(\mathbf{R}_{ij}) = \delta \left(\Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} \right) \quad (\text{VI-19})$$

on se place dans un système de coordonnées localement géodésique pour lesquelles :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-20})$$

Dans ces conditions, les coefficients de CHRISTOFFEL sont nuls (mais pas leur dérivée), ce qui simplifie l'expression (VI-19).

Cette simplification n'enlève rien à la généralité de la démonstration à condition de veiller à toujours travailler avec des variables ayant la qualité tensorielle : on sait que dans ces conditions, la forme des relations obtenues est indépendante du système de coordonnée choisi.

Dans le cas présent, l'utilisation de coordonnées localement géodésiques n'apporte pas de simplification notable et le fait qu'on voit apparaître une équation de propagation dans les expressions ci-dessus a probablement contribué à suggérer l'idée d'essayer d'utiliser un système de coordonnées harmoniques. On verra plus tard que ces coordonnées s'imposent de manière naturelle car elles traduisent sur les coefficients de la métrique, les propriétés de divergence nulle qui s'imposent aux potentiels électromagnétiques.

II-1 Notion de fonction harmonique :

Une fonction f de quatre variables est dite harmonique si :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0 \quad (\text{VI-21})$$

Dans une métrique de MINKOWSKY, cette relation représente le d'Alembertien qui s'écrit en fonction des variables spatiales et temporelles :

$$\square(f) = -\frac{\partial^2 f(x, y, z, ct)}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, ct)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, ct)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, ct)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{VI-22})$$

Il s'agit d'une équation de propagation. Dans le cas d'une propagation suivant une dimension x , toute fonction $f(x - ct)$ ou $f(x + ct)$ est solution, la première exprimant la propagation vers les $x > 0$, la seconde vers les $x < 0$. Le fait que la fonction f soit quelconque exprime que la forme de l'onde qui se propage peut être a priori quelconque, et on retrouve à la distance x à l'instant $t = x/c$ la forme de l'onde en $x = 0$ à $t = 0$, ce qui est la traduction physique du phénomène de propagation.

Si on revient aux équations des champs linéarisées (VI-17,18), on peut supputer que si on se place localement dans un système de coordonnées qui évolue suivant la forme de l'onde qui se propage, cela devrait entraîner une simplification de ces équations.

II-2 Système de coordonnées harmonique :

On va donc choisir un système de coordonnées x^μ telles que les x^μ soient des coordonnées harmoniques au sens de l'analyse tensorielle : le laplacien est écrit en dérivées covariantes dont la définition pour un tenseur d'ordre 1 est rappelée ci-dessous :

$$\frac{DA^i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^i A^m \quad \frac{DA_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^m A_m \quad (\text{VI-23})$$

Le laplacien d'une fonction scalaire Φ se construit suivant la définition classique :

$$\nabla^2 \Phi = \text{Div}(\overrightarrow{\text{Grad}}(\Phi)) \quad (\text{VI-24})$$

Pour une fonction scalaire, le gradient en dérivée covariante se réduit à un tenseur covariant d'ordre 1 suivant la relation :

$$A_k = \overrightarrow{\text{Grad}}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (\text{VI-25})$$

Appliquée à ce tenseur, la dérivée covariante (VI-23) fournit un tenseur covariant d'ordre 2 :

$$A_{jk} = \frac{DA_k}{\partial x^j} = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \Gamma_{kj}^m A_m = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{kj}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x^m} \quad (\text{VI-26})$$

Le laplacien s'obtient en prenant le tenseur associé d'ordre 0 obtenu par contraction de ce tenseur deux fois covariant, le résultat étant un scalaire :

$$\nabla^2 \Phi = g^{jk} A_{jk} = g^{jk} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{kj}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x^m} \right) \quad (\text{VI-27})$$

En appliquant ce traitement à chaque coordonnée x^μ , et en recherchant un système de coordonnées tel que le laplacien soit nul, on doit imposer la condition :

$$\nabla^2(x^\mu) = g^{jk} A_{jk} = g^{jk} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{kj}^m \frac{\partial x^\mu}{\partial x^m} \right) = 0 \quad (\text{VI-28})$$

Les coordonnées étant des variables indépendantes, on en déduit en fonction du symbole de KRONECKER δ_a^b valant 1 pour $a = b$, et 0 pour a différent de b :

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^k} = \delta_k^\mu \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (\text{VI-29})$$

La relation qui définit les coordonnées harmoniques (VI-28) se réduit finalement après changement d'indices, à :

$$\nabla^2(x^\mu) = -g^{ij} \Gamma_{ij}^\mu = 0 \quad (\text{VI-30})$$

On peut l'exprimer en fonction des coefficients de la métrique en développant le symbole de CHRISTOFFEL :

$$\nabla^2(x^\mu) = -g^{ij}\Gamma_{ij}^\mu = -\frac{1}{2}g^{ij}g^{\mu k} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} = 0 \quad (\text{VI-31})$$

Dans l'approximation des champs faibles décomposée en une petite perturbation h_{ij} sur la métrique η_{ij} de l'espace de MINKOWSKY suivant la somme rappelée ci-dessous :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad (\text{VI-32})$$

la relation (VI-31) devient :

$$\nabla^2(x^\mu) = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\eta^{\mu k} \left\{ \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right\} = 0 \quad (\text{VI-33})$$

Les coefficients η^{ij} de la métrique de MINKOWSKY sont des constantes, et peuvent donc passer sous le signe dérivée :

$$\nabla^2(x^\mu) = -\frac{1}{2}\eta^{\mu k} \left\{ \frac{\partial(\eta^{ij}h_{ik})}{\partial x^j} + \frac{\partial(\eta^{ij}h_{jk})}{\partial x^i} - \frac{\partial(\eta^{ij}h_{ij})}{\partial x^k} \right\} = 0 \quad (\text{VI-34})$$

$$\nabla^2(x^\mu) = -\frac{1}{2}\eta^{\mu k} \left\{ \frac{\partial(h_k^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(h)}{\partial x^k} \right\} = 0 \quad (\text{VI-35})$$

Une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que la relation ci-dessus soit vérifiée, est que l'expression entre accolades soit nulle.

On en déduit la condition qui définit les coordonnées harmoniques :

$$\frac{\partial(h_k^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(h)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-36})$$

Les deux premiers termes de la somme ci-dessus sont identiques, ce qui conduit à une expression plus concise de la condition définissant les coordonnées harmoniques relatives à la perturbation h_k^i :

$$2\frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(h)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-37})$$

III – L'équation d'onde en coordonnées harmoniques.

Le tenseur de RICCI de la perturbation obtenu au chapitre précédent, dans un cadre linéarisé, est donné par la relation :

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_j^k}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_i}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_i^k}{\partial x^j \partial x^k} - \square(\mathbf{h}_{ij}) \right\} \quad (\text{VI-38})$$

Si on le réécrit en coordonnées harmoniques, en utilisant la relation (VI-37), les 3 premiers termes entre accolade s'annulent, et il reste :

$$\mathbf{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \square(\mathbf{h}_{ij}) \quad (\text{VI-39})$$

On en déduit la forme du scalaire de courbure en coordonnées harmoniques :

$$\mathbf{R} = \eta^{ij} \mathbf{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \square(\mathbf{h}_{ij}) = -\frac{1}{2} \square(\eta^{ij} \mathbf{h}_{ij}) = -\frac{1}{2} \square(\mathbf{h}) \quad (\text{VI-40})$$

On peut alors écrire l'équation d'EINSTEIN relative à la perturbation en coordonnées harmoniques, sous ses deux formes classiques :

$$\mathbf{R}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}_{ij} \quad (\text{VI-41})$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\mathbf{T}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{T} \right) \quad (\text{VI-42})$$

ce qui conduit, à l'approximation $\eta_{ij} = g_{ij}$, aux deux équations d'onde équivalentes :

$$\square(\mathbf{h}_{ij}) - \frac{1}{2} \eta_{ij} \square(\mathbf{h}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \mathbf{T}_{ij} \quad (\text{VI-43})$$

$$\square(\mathbf{h}_{ij}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(\mathbf{T}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{T} \right) \quad (\text{VI-44})$$

On reconnaît dans cette dernière expression une équation d'onde classique qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\square(\mathbf{h}_{ij}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial z^2} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(\mathbf{T}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{T} \right) \quad (\text{VI-45})$$

Le changement de variable :

$$\bar{\mathbf{h}}_{ij} = \mathbf{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \mathbf{h} \quad (\text{VI-46})$$

permet une formulation équivalente de l'équation (VI-43) puisque le Laplacien traverse tous les termes de droite de la relation (VI-46).

On met ainsi explicitement en évidence une équation de propagation appliquée à la perturbation modifiée \bar{h}_{ij} :

$$\square(\bar{h}_{ij}) = -\frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial(ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial z^2} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (\text{VI-47})$$

Si nécessaire, on peut inverser la relation (VI-46) afin d'exprimer la perturbation h_{ij} en fonction de la perturbation modifiée \bar{h}_{ij} . En notant que :

$$\bar{h} = \eta^{ij} \bar{h}_{ij} = \eta^{ij} \left(h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} h \right) = \eta^{ij} h_{ij} - \frac{1}{2} \eta^{ij} \eta_{ij} h \quad (\text{VI-48})$$

et en faisant usage du résultat déjà explicité :

$$\eta^{ij} \eta_{ij} = 4 \quad (\text{VI-49})$$

on obtient :

$$\bar{h} = h - 2h = -h \quad (\text{VI-50})$$

soit donc en introduisant cette relation dans (VI-46) :

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h} \quad (\text{VI-51})$$

Il reste à expliciter la condition de jauge harmonique associée à l'équation de propagation (VI-47) en fonction de la perturbation modifiée \bar{h}_{ij} .

Les coordonnées harmoniques ont été définies en fonction de la perturbation h_{ij} par la relation (VI-37) rappelée pour mémoire ci-dessous après échange du rôle des indices i et k :

$$\frac{\partial(h_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial(h)}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{VI-52})$$

On déduit de (VI-46) :

$$\eta^{jk} \bar{h}_{ij} = \eta^{jk} h_{ij} - \frac{1}{2} \eta^{jk} \eta_{ij} h \quad (\text{VI-53})$$

soit donc :

$$\bar{h}_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \eta_i^k h \quad (\text{VI-54})$$

où encore :

$$h_i^k = \bar{h}_i^k + \frac{1}{2} \eta_i^k h = \bar{h}_i^k - \frac{1}{2} \eta_i^k \bar{h} \quad (\text{VI-55})$$

et en reportant ce résultat dans (VI-52) :

$$\frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \eta_i^k \frac{\partial(\bar{h})}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{h})}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{VI-56})$$

Les coefficients de la métrique η_i^k s'évaluent suivant la relation :

$$\eta_i^k = \eta^{jk} \eta_{ji} = \eta^{0k} \eta_{0i} + \eta^{1k} \eta_{1i} + \eta^{2k} \eta_{2i} + \eta^{3k} \eta_{3i} \quad (\text{VI-57})$$

Ils sont non nuls uniquement pour $i = k$, et prennent alors la valeur 1. On en déduit de (VI-56) :

$$\frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{h})}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{h})}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{VI-58})$$

soit pour conclure la relation définissant les coordonnées harmoniques à partir de la perturbation modifiée :

$$\frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-59})$$

IV – Résumé et conclusions.

Pour une petite perturbation h_{ij} de la métrique de MINKOWSKY η_{ij} , l'équation d'onde associée aux coordonnées harmoniques se présente sous deux formes :

$$\square(h_{ij}) - \frac{1}{2} \eta_{ij} \square(h) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad \text{avec} \quad 2 \frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(h)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-60})$$

$$\square(h_{ij}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad \text{avec} \quad 2 \frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} - \frac{\partial(h)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-61})$$

L'introduction de la perturbation modifiée :

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} h \quad (\text{VI-62})$$

permet de réécrire les deux équations d'onde (VI-60,61) sous la forme suivante, associée aux coordonnées harmoniques relatives à la perturbation modifiée :

$$\square(\bar{h}_{ij}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-63})$$

$$\square(\bar{h}_{ij}) - \frac{1}{2} \eta_{ij} \square(\bar{h}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{VI-64})$$

Si on se place dans le vide, cela revient à dire qu'on annule le tenseur impulsion énergie T_{ij} , et des simplifications immédiates apparaissent. Les équations (VI-60) et (VI-61) deviennent :

$$\square(h_{ij}) - \frac{1}{2}\eta_{ij}\square(h) = 0 \quad (\text{VI-65})$$

$$\square(h_{ij}) = 0 \quad (\text{VI-66})$$

On en déduit que le laplacien de la trace de la perturbation $\square(h)$ est nécessairement nul. Cette condition ne définit pas la trace h de manière unique.

Un choix simplificateur consiste à prendre $h = 0$. Dans ce cas, la perturbation modifiée \bar{h}_{ij} donnée par (VI-62) est égale à la perturbation h_{ij} et on conclut que les quatre équations (VI-60,61,63,64) se réduisent à une seule :

$$\square(h_{ij}) = 0 \quad (\text{VI-67})$$

à laquelle il faut adjoindre les conditions de jauge que nous avons imposées :

$$h = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(h_k^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{VI-68})$$

VII - Identification des équations de MAXWELL

Nous avons montré au chapitre précédent que les équations d'EINSTEIN linéarisées se réduisent à une équation d'onde :

$$\square(\bar{h}_{ij}) = -\frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{(\partial ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial z^2} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} = -2\chi T_{ij} \quad (\text{VII-1})$$

Cette équation doit être associée à la condition de jauge harmonique :

$$\frac{\partial(\bar{h}_i^k)}{\partial x^k} = \frac{\partial(\bar{h}_i^0)}{\partial x^0} + \frac{\partial(\bar{h}_i^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\bar{h}_i^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\bar{h}_i^3)}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{VII-2})$$

Soit encore, après multiplication par le tenseur métrique approché :

$$-\frac{\partial(\bar{h}_{i0})}{\partial x^0} + \frac{\partial(\bar{h}_{i1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\bar{h}_{i2})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\bar{h}_{i3})}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{VII-3})$$

Nous pouvons donner une écriture un peu plus développée de l'équation d'onde générale (VII-1) :

$$\begin{pmatrix} \square \bar{h}_{00} & \square \bar{h}_{01} & \square \bar{h}_{02} & \square \bar{h}_{03} \\ \square \bar{h}_{10} & \square \bar{h}_{11} & \square \bar{h}_{12} & \square \bar{h}_{13} \\ \square \bar{h}_{20} & \square \bar{h}_{21} & \square \bar{h}_{22} & \square \bar{h}_{23} \\ \square \bar{h}_{30} & \square \bar{h}_{31} & \square \bar{h}_{32} & \square \bar{h}_{33} \end{pmatrix} = -\frac{16\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-4})$$

Nous introduisons le tenseur énergie impulsion des sources électromagnétiques qui a été proposé dans les chapitres précédents :

$$\begin{pmatrix} \square \bar{h}_{00} & \square \bar{h}_{01} & \square \bar{h}_{02} & \square \bar{h}_{03} \\ \square \bar{h}_{10} & \square \bar{h}_{11} & \square \bar{h}_{12} & \square \bar{h}_{13} \\ \square \bar{h}_{20} & \square \bar{h}_{21} & \square \bar{h}_{22} & \square \bar{h}_{23} \\ \square \bar{h}_{30} & \square \bar{h}_{31} & \square \bar{h}_{32} & \square \bar{h}_{33} \end{pmatrix} = -\frac{16\pi G}{c^4} \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & -J_x v_x & -J_x v_y & -J_x v_z \\ cJ_y & -J_y v_x & -J_y v_y & -J_y v_z \\ cJ_z & -J_z v_x & -J_z v_y & -J_z v_z \end{pmatrix} \quad (\text{VII-5})$$

La question que nous nous posons est la suivante : est-il possible d'identifier dans l'équation (VII-5) les équations de MAXWELL sous la forme d'une équation d'onde relative aux potentiels électromagnétiques ?

Nous formulons l'hypothèse que la métrique du champ électromagnétique est décrite en fonction du tenseur \bar{h}_{ij} , et nous poursuivons l'identification sous cette hypothèse.

Les équations d'onde des potentiels sont rappelées pour mémoire :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\mu_0\rho c^2 \\ \bar{\nabla}^2\bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\bar{J}\end{aligned}\tag{VII-4}$$

Soit encore en écriture développée :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial(ct)^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial z^2} &= -\mu_0\rho c \\ -\frac{\partial^2 A_x}{\partial(ct)^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\mu_0 J_x \\ -\frac{\partial^2 A_y}{\partial(ct)^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\mu_0 J_y \\ -\frac{\partial^2 A_z}{\partial(ct)^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu_0 J_z\end{aligned}\tag{VII-5}$$

On se heurte alors à la difficulté suivante : il n'existe que 4 composantes pour le potentiel électromagnétique, alors qu'il existe 16 termes dans le tenseur qui représente la métrique modifiée.

Nous conjecturons que si les équations de MAXWELL doivent apparaître dans le tenseur métrique, alors ce sera nécessairement dans les termes dominants de ce tenseur.

Nous ne connaissons pas, à priori, les termes dominants du tenseur métrique, mais nous connaissons ceux du tenseur impulsion énergie : ce sont ceux qui contiennent le terme c ou c^2 . Si nous supposons la vitesse des charges très inférieure à la vitesse de la lumière, nous aurons approximativement :

$$\begin{pmatrix} \square\bar{h}_{00} & \square\bar{h}_{01} & \square\bar{h}_{02} & \square\bar{h}_{03} \\ \square\bar{h}_{10} & \square\bar{h}_{11} & \square\bar{h}_{12} & \square\bar{h}_{13} \\ \square\bar{h}_{20} & \square\bar{h}_{21} & \square\bar{h}_{22} & \square\bar{h}_{23} \\ \square\bar{h}_{30} & \square\bar{h}_{31} & \square\bar{h}_{32} & \square\bar{h}_{33} \end{pmatrix} = -\frac{16\pi G}{c^4} \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & 0 & 0 & 0 \\ cJ_y & 0 & 0 & 0 \\ cJ_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{VII-6}$$

Nous conjecturons que les termes dominants du tenseur \bar{h}_{ij} seront analogues aux termes dominants du tenseur T_{ij} :

$$\begin{pmatrix} \square \bar{h}_{00} & \square \bar{h}_{01} & \square \bar{h}_{02} & \square \bar{h}_{03} \\ \square \bar{h}_{10} & 0 & 0 & 0 \\ \square \bar{h}_{20} & 0 & 0 & 0 \\ \square \bar{h}_{30} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{16\pi G}{c^4} \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & 0 & 0 & 0 \\ cJ_y & 0 & 0 & 0 \\ cJ_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VII-7})$$

Il convient de remarquer que la relation (VII-6) ci-dessus n'implique pas la nullité des coefficients \bar{h}_{ij} pour i et j différents de 0 qui est proposée en (VII-7). Mais si nous supposons que les équations de MAXWELL doivent apparaître à travers la métrique des \bar{h}_{ij} , cela conduit à admettre que les termes dominants de cette métrique sont ceux qui contiennent au moins une fois l'indice 0. C'est dans le cadre de cette hypothèse que nous considérons que les termes tels que i et j différents de 0 peuvent être négligés en première approximation.

L'écriture développée de la première ligne s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial z^2} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} (-\lambda \rho c^2) \\ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial z^2} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{01} = -\frac{16\pi G}{c^4} (\lambda cJ_x) \\ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial z^2} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{02} = -\frac{16\pi G}{c^4} (\lambda cJ_y) \\ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial z^2} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{03} = -\frac{16\pi G}{c^4} (\lambda cJ_z) \end{aligned} \quad (\text{VII-8})$$

Ces relations doivent être associées à la condition de jauge harmonique :

$$-\frac{\partial(\bar{h}_{10})}{\partial x^0} + \frac{\partial(\bar{h}_{11})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\bar{h}_{12})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\bar{h}_{13})}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{VII-9})$$

L'identification des équations des potentiels (VII-5) avec les équations (VII-8) conduit à poser :

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= -\frac{\phi}{c} \frac{16\pi G}{c^4} \frac{(\lambda \rho c^2)}{\mu_0 \rho c} = -\frac{\phi}{c} \frac{16\pi G}{\mu_0 c^4} \frac{c}{\sqrt{4\pi \epsilon_0 G}} = -\frac{\phi}{c} \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \\ \bar{h}_{01} &= A_x \left(\frac{4}{\lambda c} \right) = \bar{h}_{10} \\ \bar{h}_{02} &= A_y \left(\frac{4}{\lambda c} \right) = \bar{h}_{20} \\ \bar{h}_{03} &= A_z \left(\frac{4}{\lambda c} \right) = \bar{h}_{30} \end{aligned} \quad (\text{VII-10})$$

On peut alors exprimer la condition de jauge harmonique pour $i=0$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial(\bar{h}_{00})}{\partial x^0} + \frac{\partial(\bar{h}_{01})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\bar{h}_{02})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\bar{h}_{03})}{\partial x^3} = 0 \\
& \frac{\partial(\phi/c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0
\end{aligned}
\tag{VII-11}$$

Elle correspond de manière exacte à la jauge de LORENZ.

Pour $i=1, 2, \text{ et } 3$, l'expression approchée du tenseur des sources électromagnétiques que nous avons proposé en (VII-6) montre que la condition de jauge harmonique n'est plus vérifiée de manière exacte, mais seulement de manière approchée. Cette condition s'écrit en effet :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{h}_{10})}{\partial x^0} = \frac{\partial(\bar{h}_{10})}{\partial(ct)} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\bar{h}_{10})}{\partial t} = 0 \\
& \frac{\partial(\bar{h}_{20})}{\partial x^0} = \frac{\partial(\bar{h}_{20})}{\partial(ct)} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\bar{h}_{20})}{\partial t} = 0 \\
& \frac{\partial(\bar{h}_{30})}{\partial x^0} = \frac{\partial(\bar{h}_{30})}{\partial(ct)} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\bar{h}_{30})}{\partial t} = 0
\end{aligned}
\tag{VII-12}$$

Le coefficient $1/c$ garantit que ces termes sont petits, mais ne garantit pas qu'ils soient nuls. Nous examinerons les conséquences de cette approximation dans un prochain chapitre.

En toute rigueur, dans l'approximation considérée, la condition de jauge harmonique n'est vérifiée de manière exacte que pour des potentiels vecteurs qui sont indépendants du temps, c'est-à-dire relatifs à la magnétostatique. Le potentiel scalaire n'est pas affecté par cette limitation.

Nous désignons par jauge magnétostatique la condition de jauge définie par les trois relations ci-dessus. Si on observe le tenseur énergie-impulsion simplifié associé à cette jauge :

$$\lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & 0 & 0 & 0 \\ cJ_y & 0 & 0 & 0 \\ cJ_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\tag{VII-13}$$

On remarque que l'équation de conservation de l'énergie sur les lignes 1, 2, et 3 s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial J_x}{\partial t} = 0 \\
& \frac{\partial J_y}{\partial t} = 0 \\
& \frac{\partial J_z}{\partial t} = 0
\end{aligned}
\tag{VII-14}$$

En d'autres termes, les termes nuls que nous avons injectés dans le tenseur impulsion-énergie (VII-13) nous permettent une exploitation rigoureuse de ce tenseur uniquement pour les courants continus.

On peut vérifier que les termes qui expriment la modification de la métrique sont d'un ordre de grandeur très inférieur à 1. On évalue pour cela :

$$\left(\frac{4}{\lambda c}\right) = \frac{\sqrt{64\pi\epsilon_0 G}}{c} \approx \frac{8\sqrt{3,14 * 8,85 \cdot 10^{-12} * 6,67 \cdot 10^{-11}}}{(3 \cdot 10^8)} \approx 1,14 \cdot 10^{-18} \quad (\text{VII-13})$$

Le coefficient de la métrique décrivant le potentiel scalaire est rappelé ci-dessous :

$$\bar{h}_{00} = -\frac{\phi}{c} \left(\frac{4}{\lambda c}\right) \quad (\text{VII-14})$$

Ce terme s'approche de la valeur 1 (en valeur absolue) lorsque le potentiel ϕ s'approche de la valeur 10^{25} Volt. On ne connaît à ce jour aucune expérience mettant en jeu des potentiels aussi élevés, ce qui justifie les approximations linéaires utilisées.

A ce stade, l'identification formelle des équations de MAXWELL dans les équations d'EINSTEIN est terminée, mais elle n'est pas satisfaisante car elle ne permet pas de traiter les courants variables dans le temps. Nous verrons comment pallier à cette difficulté dans un prochain chapitre.

VIII - Métrique du champ électromagnétique dans la jauge magnétostatique

Le chapitre précédent a montré que le champ électromagnétique pouvait être représenté par de petites perturbations de la métrique de MINKOWSKY, ou encore, dans une interprétation énergétique, par de petites variations de la densité volumique d'énergie du vide.

Dans la jauge magnétostatique, le tenseur représentatif de ces variations a été approximé dans une expression de la forme :

$$\bar{h}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{00} & \bar{h}_{01} & \bar{h}_{02} & \bar{h}_{03} \\ \bar{h}_{10} & \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & \bar{h}_{13} \\ \bar{h}_{20} & \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} & \bar{h}_{23} \\ \bar{h}_{30} & \bar{h}_{31} & \bar{h}_{32} & \bar{h}_{33} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{64\pi\epsilon_0 G}}{c} \begin{pmatrix} -\phi/c & A_x & A_y & A_z \\ A_x & 0 & 0 & 0 \\ A_y & 0 & 0 & 0 \\ A_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-1})$$

Ces variations sont exprimées à l'aide des perturbations de la métrique modifiées (surmontée d'une barre), dont les relations avec les perturbations non modifiées ont été établies dans le chapitre relatif aux jauges :

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h} \quad (\text{VIII-3})$$

Avec

$$\bar{h} = \eta^{ij} \bar{h}_{ij} = \eta^{00} \bar{h}_{00} + \eta^{11} \bar{h}_{11} + \eta^{22} \bar{h}_{22} + \eta^{33} \bar{h}_{33} = -\bar{h}_{00} \quad (\text{VIII-4})$$

D'où l'expression des perturbations de la métrique non modifiée :

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} + \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h}_{00} \quad (\text{VIII-5})$$

Chacun des termes peut être repris dans une expression matricielle :

$$\mathbf{h}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{00} & \mathbf{h}_{01} & \mathbf{h}_{02} & \mathbf{h}_{03} \\ \mathbf{h}_{10} & \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \mathbf{h}_{13} \\ \mathbf{h}_{20} & \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{23} \\ \mathbf{h}_{30} & \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} & \mathbf{h}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{h}_{00}}{2} & \bar{h}_{01} & \bar{h}_{02} & \bar{h}_{03} \\ \bar{h}_{10} & \frac{\bar{h}_{00}}{2} & 0 & 0 \\ \bar{h}_{20} & 0 & \frac{\bar{h}_{00}}{2} & 0 \\ \bar{h}_{30} & 0 & 0 & \frac{\bar{h}_{00}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{64\pi\epsilon_0 G}}{c} \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{2c} & A_x & A_y & A_z \\ A_x & -\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ A_y & 0 & -\frac{\phi}{2c} & 0 \\ A_z & 0 & 0 & -\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-6})$$

Les coefficients complets de la métrique (les g_{ij}) sont obtenus en ajoutant les petites variations précédentes (les h_{ij}) aux coefficients de la métrique de MINKOWSKY (les η_{ij}) :

$$\mathbf{g}_{ij} = \eta_{ij} + \mathbf{h}_{ij} = \begin{pmatrix} -1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right)\frac{\phi}{2c} & \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_x & \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_y & \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_z \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_x & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right)\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_y & 0 & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right)\frac{\phi}{2c} & 0 \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right)A_z & 0 & 0 & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right)\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \quad (\text{VIII-7})$$

On en déduit l'élément d'espace-temps au carré suivant la relation :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{VIII-8})$$

On obtient l'écriture développée en fonction des seuls g_{ij} non nuls :

$$ds^2 = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + 2g_{02} dx^0 dx^2 + 2g_{03} dx^0 dx^3 \quad (\text{VIII-9})$$

Et pour terminer, l'expression de la métrique en fonction des potentiels électromagnétiques :

$$ds^2 = \left(-1 - \frac{2\phi}{\lambda c^2}\right) d(ct)^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{\lambda c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\left(\frac{4A_x}{\lambda c}\right) d(ct) dx + 2\left(\frac{4A_y}{\lambda c}\right) d(ct) dy + 2\left(\frac{4A_z}{\lambda c}\right) d(ct) dz \quad (\text{VIII-10})$$

La métrique de l'espace-temps peut être exprimée en fonction des potentiels électromagnétiques, de manière analogue aux phénomènes gravitationnels.

IX - Analyse des relations obtenues en jauge magnétostatique

Dans les chapitres précédents, nous avons été conduits à annuler certains termes pour permettre une identification de certains coefficients de la métrique perturbée avec les potentiels électromagnétiques. Nous avons observé que cette approximation avait rompu la condition exacte de jauge harmonique. La complexité des équations d'EINSTEIN nous suggère d'examiner en détail les conséquences de cette approximation.

Dans ce chapitre, nous proposons d'effectuer le calcul direct et détaillé des coefficients du tenseur RICCI afin d'évaluer sur chacun des termes les conséquences des hypothèses simplificatrices que nous avons proposées.

I – Rappel sur les hypothèses de travail

Nous utiliserons pour cette vérification la forme suivante de l'équation d'EINSTEIN :

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (IX-1)$$

Nous définissons la métrique de MINKOWSKY par les coefficients η_{ij} :

$$\eta_{ij} = \eta^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (IX-2)$$

Cette métrique subit de petites perturbations h_{ij} , dont on peut donner une représentation matricielle :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |h_{ij}| \ll 1 \quad (IX-3)$$

On en déduit la représentation matricielle de la métrique associée au potentiel électromagnétique :

$$\mathbf{g}_{ij} = \eta_{ij} + \mathbf{h}_{ij} = \begin{pmatrix} -1 + h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & 1 + h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 1 + h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & 1 + h_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-4})$$

Nous avons proposé, dans les chapitres précédents, un tenseur impulsion-énergie T_{ij} pour les sources du champ électromagnétique. Ce tenseur a fait l'objet d'une expression approchée qui est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & 0 & 0 & 0 \\ cJ_y & 0 & 0 & 0 \\ cJ_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & cJ_x & cJ_y & cJ_z \\ cJ_x & 0 & 0 & 0 \\ cJ_y & 0 & 0 & 0 \\ cJ_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IX-5})$$

Nous pouvons évaluer la contraction de ce tenseur approché :

$$\mathbf{T} = g^{ij} T_{ij} \approx \eta^{ij} T_{ij} = \eta^{00} T_{00} + \eta^{11} T_{11} + \eta^{22} T_{22} + \eta^{33} T_{33} = \eta^{00} T_{00} = -T_{00} \quad (\text{IX-6})$$

Nous avons supposé que les coefficients de la métrique modifiée sont reliés aux potentiels électromagnétiques de la manière suivante :

$$\mathbf{h}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{64\pi\epsilon_0 G}}{c} \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{2c} & A_x & A_y & A_z \\ A_x & -\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ A_y & 0 & -\frac{\phi}{2c} & 0 \\ A_z & 0 & 0 & -\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-7})$$

Nous utiliserons dans les calculs des termes du tenseur de RICCI, quelques propriétés qui sont apparentes dans les coefficients du tenseur h_{ij} qui est donné ci-dessus :

- 1) Il s'agit d'un tenseur symétrique : $h_{ij} = h_{ji}$.
- 2) Plusieurs termes de ce tenseur sont supposés, en première approximation, avoir une valeur nulle :

$$h_{12} = h_{13} = h_{21} = h_{23} = h_{31} = h_{32} = 0 \quad (\text{IX-8})$$

- 3) Les termes de la diagonale principale sont égaux :

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} \quad (\text{IX-9})$$

- 4) Les termes représentatifs des potentiels doivent respecter la jauge de LORENZ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial(\phi/c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{03}}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{IX-10})$$

Nous rappelons l'expression de la constante multiplicative λ :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \quad (\text{IX-11})$$

Les termes de la métrique modifiée h_{ij} s'écrivent donc en fonction de la constante λ :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \frac{4}{\lambda c} \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{2c} & A_x & A_y & A_z \\ A_x & -\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ A_y & 0 & -\frac{\phi}{2c} & 0 \\ A_z & 0 & 0 & -\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-12})$$

Nous en déduisons les coefficients de la métrique associée aux potentiels électromagnétique :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} = \begin{pmatrix} -1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right) \frac{\phi}{2c} & \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_x & \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_y & \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_z \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_x & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right) \frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_y & 0 & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right) \frac{\phi}{2c} & 0 \\ \left(\frac{4}{\lambda c}\right) A_z & 0 & 0 & 1 - \left(\frac{4}{\lambda c}\right) \frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-13})$$

Nous disposons désormais de tous les éléments permettant une vérification directe des équations d'EINSTEIN.

II – Les équations d'EINSTEIN

Nous adoptons la représentation du tenseur de RICCI suivante :

$$R_{ij} = \Gamma_{mr}^r \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{mj}^r \Gamma_{ir}^m + \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^j} \quad (\text{IX-14})$$

Dans un cadre linéarisé, nous admettons que les produits des coefficients de CHRISTOFFEL peuvent être négligés en tant qu'infiniment petits du second ordre. Les termes du tenseur de RICCI seront donc évalués à l'aide de l'expression ne faisant intervenir que les dérivées des coefficients de CHRISTOFFEL :

$$\mathbf{R}_{ij} \approx \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^j} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i1}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i2}^2}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{i3}^3}{\partial x^j} \right\} \quad (\text{IX-15})$$

L'expression générale de ces coefficients est la suivante :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{rk} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (\text{IX-16})$$

Leur écriture développée suivant la variable muette k est donnée par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^r &= \frac{1}{2} \mathbf{g}^{r0} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{g}_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^0} \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{r1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{g}_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^1} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{g}^{r2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{g}_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^2} \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{r3} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{g}_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-17})$$

La forme très particulière des $\mathbf{g}_{ij} = \eta_{ij} + \mathbf{h}_{ij}$, avec η_{ij} égal à une constante (+1 ou -1) et $|\mathbf{h}_{ij}| \ll 1$ montre que cette expression devient dans un cadre linéarisé :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^r &\approx \frac{1}{2} \eta^{r0} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^0} \right\} + \frac{1}{2} \eta^{r1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^1} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \eta^{r2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^2} \right\} + \frac{1}{2} \eta^{r3} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-18})$$

Puisque les seuls η^{rk} non nuls sont ceux pour lesquels $r = k$, on obtient l'expression finale qui sera utilisée dans les calculs :

$$\Gamma_{ij}^r \approx \frac{1}{2} \eta^{rr} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^r} \right\} \quad (\text{IX-19})$$

soit explicitement pour chaque valeur de r :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{ij}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{ij}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^2} \right\} \\ \Gamma_{ij}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{h}_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-20})$$

La vérification va désormais consister à injecter ces coefficients dans le tenseur de RICCI linéarisé rappelé en (IX-15).

III – Le terme R_{00}

De l'expression du tenseur de RICCI linéarisé (IX-15), nous obtenons pour $i=0$ et $j=0$:

$$R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma_{00}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^r}{\partial x^0} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{00}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{00}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} \right\} \quad (\text{IX-21})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme R_{00} sont déduits des relations (IX-20) et exprimés ci-dessous en fonction des seuls h_{ij} non nuls :

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial h_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^2} \right\} \\ \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial h_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-22})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{22}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{33}}{\partial x^0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-23})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont maintenant introduits dans l'expression de R_{00} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{00}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{00}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} \right\} \\ R_{00} &\approx \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial x^1 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} + 2 \frac{\partial^2 h_{02}}{\partial x^2 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2 \partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial x^3 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^3 \partial x^3} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-24})$$

On obtient après une réorganisation des termes :

$$\begin{aligned}
R_{00} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^3 \partial x^3} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{02}}{\partial x^2 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial x^3 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} \\
&- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} \\
R_{00} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} \right\} + \\
&\frac{\partial}{\partial x^0} \left[\left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{03}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{IX-25}$$

Faisant usage de la relation $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$, il vient :

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{03}}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \right\} \tag{IX-26}$$

Le second terme à droite de l'égalité est nul car il exprime la conservation de l'énergie (IX-10). Il ne reste plus finalement que le d'Alembertien de h_{00} , à un facteur multiplicatif près :

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} \right\} \tag{IX-27}$$

Il apparaît que les hypothèses simplificatrices qui ont conduit à annuler les coefficients $h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{23}, h_{31}, h_{32}$, sont sans incidence sur le calcul du terme R_{00} . En d'autres termes, la condition de jauge magnétostatique n'est pas nécessaire pour que le terme R_{00} représente rigoureusement l'équation d'onde relative au potentiel scalaire.

Nous devons maintenant faire le lien avec le tenseur impulsion énergie à l'aide de l'équation d'EINSTEIN (IX-1). Avec $i=0$ et $j=0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \approx \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} + \frac{1}{2} T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{00} \right) \\
R_{00} &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{T_{00}}{2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{\lambda \rho c^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{IX-28}$$

On obtient donc explicitement :

$$\begin{aligned}
R_{00} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{-\lambda \rho c^2}{2} \right) \\
R_{00} &\approx \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} (\lambda \rho c^2) \\
R_{00} &\approx \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial (ct)^2} \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} (\lambda \rho c^2)
\end{aligned}
\quad \text{avec} \quad \begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \\
h_{00} &= -\left(\frac{4}{\lambda c}\right) \frac{\phi}{2c} = -\frac{2\phi}{\lambda c^2}
\end{aligned}$$

(IX-29)

La substitution de h_{00} en fonction de ϕ conduit à l'expression finale de l'équation d'onde portant sur le potentiel scalaire ϕ :

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial (ct)^2} \right\} &= -\frac{8\pi G}{c^4} (\lambda \rho c^2) \frac{\lambda c}{2} \\
\left\{ \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial (ct)^2} \right\} &= -(\rho c^2) \frac{4\pi G}{c^4} \frac{c}{4\pi\epsilon_0 G} \\
\left\{ \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial (ct)^2} \right\} &= -\mu_0 \rho c \\
\left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial (ct)^2} \right\} &= -\mu_0 \rho c^2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

(IX-30)

IV – Le terme R_{01} (et les termes analogues $R_{02}, R_{03}, R_{10}, R_{20}, R_{30}$)

De l'expression du tenseur de RICCI linéarisé (IX-15), nous obtenons pour $i=0$ et $j=1$:

$$R_{01} \approx \frac{\partial \Gamma_{01}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^1}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{01}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^1} \right\} \quad (IX-31)$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme R_{01} sont déduits des relations (IX-20) et listés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{01}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{01}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} \right\} \\
\Gamma_{01}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned}$$

(IX-32)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{01}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{02}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{03}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-33}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont maintenant introduits dans l'expression de R_{01} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
R_{01} &\approx \frac{\partial \Gamma_{01}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^1}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{01}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^1} \right\} \\
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0 \partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-34}$$

On obtient après une réorganisation des termes, et en utilisant la relation $\mathbf{h}_{00} = \mathbf{h}_{11} = \mathbf{h}_{22} = \mathbf{h}_{33}$:

$$\begin{aligned}
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} \right\} \\
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-35}$$

La condition de jauge harmonique annule le second terme à droite de l'égalité, et il reste :

$$R_{01} \approx \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) \tag{IX-36}$$

Soit encore en faisant apparaître le laplacien généralisé à la variable temporelle :

$$R_{01} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} \tag{IX-37}$$

La condition de jauge harmonique modifiée par les termes nuls que nous avons introduits dans la métrique des h_{ij} , désignée par condition de jauge magnétostatique, est rappelée pour mémoire :

$$\frac{\partial(\bar{h}_{10})}{\partial x^0} = \frac{\partial(h_{10})}{\partial x^0} = 0 \quad (\text{IX-38})$$

Il s'avère que l'équation d'onde relative au potentiel vecteur n'est rigoureusement vérifiée que si la condition de jauge magnétostatique est vérifiée, c'est-à-dire si la dépendance temporelle du potentiel vecteur est nulle. Le terme R_{01} décrit alors exactement le laplacien spatial de la composante du potentiel vecteur suivant l'axe des x .

Nous pouvons faire le lien avec le tenseur impulsion énergie à l'aide de l'équation d'EINSTEIN (IX-1). Avec $i=0$ et $j=1$, nous avons :

$$R_{01} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{01} - \frac{1}{2} g_{01} T \right) \approx \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{01} - \frac{1}{2} \eta_{01} T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{01} = \frac{8\pi G}{c^4} (\lambda c J_x) \quad (\text{IX-39})$$

On obtient explicitement :

$$R_{01} \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{01}}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{(\partial x^3)^2} \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} (\lambda c J_x) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}$$

$$R_{01} \approx \left\{ \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial z^2} \right\} = \frac{16\pi G}{c^4} (\lambda c J_x) \quad h_{01} = \left(\frac{4}{\lambda c} \right) A_x \quad (\text{IX-40})$$

La substitution de h_{01} en fonction de A_x conduit à l'expression finale de l'équation d'onde portant sur la composante suivant x du potentiel vecteur :

$$\left\{ -\frac{\partial^2 A_x}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right\} = -\frac{16\pi G}{c^4} (\lambda c J_x) \frac{\lambda c}{4}$$

$$\left\{ -\frac{\partial^2 A_x}{\partial (ct)^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right\} = -\frac{4\pi G}{c^2} \lambda^2 J_x = -\frac{4\pi G}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} J_x = -\frac{J_x}{c^2 \epsilon_0} = -\mu_0 J_x \quad (\text{IX-41})$$

V – Le terme R_{11} (et les termes analogues R_{22} , R_{33})

De l'expression du tenseur de RICCI linéarisé (IX-15), nous obtenons pour $i=1$ et $j=1$:

$$R_{11} \approx \frac{\partial \Gamma_{11}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} \right\} \quad (\text{IX-42})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme R_{11} sont déduits des relations (IX-20) et listés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial h_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^2} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^2} \right\} \\
\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^3} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-43}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{11}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{12}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{13}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{33}}{\partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-44}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont maintenant introduits dans l'expression de R_{11} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
R_{11} &\approx \frac{\partial \Gamma_{11}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} \right\} \\
R_{11} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^1 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{IX-45}$$

Faisant usage de la relation $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$, il vient :

$$R_{11} \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^1 \partial x^0} \right\} \tag{IX-46}$$

Comme dans le paragraphe précédent, le terme R_{11} ne décrit rigoureusement l'équation d'onde relative au potentiel scalaire que lorsque la condition de jauge magnétostatique est vérifiée.

VI – Le terme R_{12} (et les termes analogues R_{13} , R_{21} , R_{23} , R_{31} , R_{32})

De l'expression du tenseur de RICCI linéarisé (IX-15), nous obtenons pour $i=1$ et $j=2$:

$$\mathbf{R}_{12} \approx \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial \mathbf{x}^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial \mathbf{x}^2} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{12}^0}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^3}{\partial \mathbf{x}^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \quad (\text{IX-47})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme \mathbf{R}_{12} sont déduits des relations (IX-20) et listés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{20}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{20}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{21}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \\ \Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{23}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^3} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IX-48})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \\ \Gamma_{11}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \\ \Gamma_{12}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \\ \Gamma_{13}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial \mathbf{x}^3} + \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial \mathbf{x}^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-49})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont maintenant introduits dans l'expression de \mathbf{R}_{12} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &\approx \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial \mathbf{x}^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial \mathbf{x}^2} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{12}^0}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^3}{\partial \mathbf{x}^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \\ \mathbf{R}_{12} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^0 \partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{20}}{\partial \mathbf{x}^0 \partial \mathbf{x}^1} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{33}}{\partial \mathbf{x}^1 \partial \mathbf{x}^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-50})$$

Faisant usage de la relation $\mathbf{h}_{00} = \mathbf{h}_{11} = \mathbf{h}_{22} = \mathbf{h}_{33}$, on obtient finalement :

$$\mathbf{R}_{12} \approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{10}}{\partial \mathbf{x}^0 \partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{20}}{\partial \mathbf{x}^0 \partial \mathbf{x}^1} \right\} \quad (\text{IX-51})$$

Il apparaît que le terme \mathbf{R}_{12} du tenseur de RICCI n'est rigoureusement nul que dans la condition de jauge magnétostatique, c'est-à-dire lorsque les dérivées temporelles du potentiel vecteur sont nulles.

IV – Conclusion

Les équations de la gravitation linéarisée fournissent un cadre dans lequel nous avons essayé de faire apparaître les équations de MAXWELL.

Lorsqu'on tente une approche énergétique en imaginant un tenseur impulsion énergie pour une charge en mouvement parfaitement analogue au tenseur impulsion énergie que l'on connaît pour une masse en mouvement, on se heurte à plusieurs difficultés.

Les équations de MAXWELL nous indiquent que ce sont des densités de charges qui sont à l'origine du champ électromagnétique. Ces densités forment un quadri-vecteur, et comportent donc 4 composantes, alors qu'un tenseur impulsion-énergie symétrique en comporte 10. Nous avons donc supposé que certaines composantes du tenseur impulsion-énergie pouvaient être négligées en première approximation.

Lorsque nous mettons en place cette hypothèse, nous faisons le constat que la condition de jauge harmonique, qui a permis d'obtenir l'équation d'onde à partir des équations d'EINSTEIN linéarisées, n'est plus rigoureusement vérifiée.

Il nous faut donc admettre que le cadre simplifié dans lequel nous espérons voir apparaître les équations de MAXWELL ne permet pas une identification correcte. Nous devons donc reprendre le travail de ce chapitre en conservant tous les termes du tenseur impulsion-énergie : ce sera l'objet du chapitre suivant.

X - Cas général

Le chapitre précédent nous a montré que les simplifications proposées, en annulant certains termes du tenseur impulsion énergie et du tenseur des perturbations de la métrique, ne permettent pas de retrouver les équations des potentiels sur la première ligne et la première colonne du tenseur des h_{ij} .

Nous reprenons l'étude en considérant le tenseur impulsion énergie des sources de rayonnement que nous avons proposé en (IV-6), sans y négliger aucun terme :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \lambda\rho \begin{pmatrix} -c^2 & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & -v_x v_x & -v_x v_y & -v_x v_z \\ cv_y & -v_y v_x & -v_y v_y & -v_y v_z \\ cv_z & -v_z v_x & -v_z v_y & -v_z v_z \end{pmatrix} \quad (X-1)$$

Dans une métrique linéarisée, le produit de ce tenseur avec le tenseur métrique fournit la relation :

$$\begin{aligned} T &= g^{ij}T_{ij} \approx \eta^{ij}T_{ij} = \eta^{00}T_{00} + \eta^{11}T_{11} + \eta^{22}T_{22} + \eta^{33}T_{33} = -T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ T &= \lambda\rho(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \lambda\rho(c^2 - v^2) \end{aligned} \quad (X-2)$$

Nous en déduisons le tenseur qui est au second membre des équations de la gravitation, toujours dans une métrique linéarisée où on a sensiblement $g_{ij} \sim \eta_{ij}$:

$$T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T = \lambda\rho \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(c^2 + v^2) & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & -v_x v_x - \frac{1}{2}(c^2 - v^2) & -v_x v_y & -v_x v_z \\ cv_y & -v_y v_x & -v_y v_y - \frac{1}{2}(c^2 - v^2) & -v_y v_z \\ cv_z & -v_z v_x & -v_z v_y & -v_z v_z - \frac{1}{2}(c^2 - v^2) \end{pmatrix} \quad (X-3)$$

Dans une approximation du premier ordre, nous négligeons les termes en v^2 devant les termes en c^2 dans la diagonale principale :

$$\mathbf{T}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{T} \approx \lambda \rho \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{2} & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & -\frac{c^2}{2} & -v_x v_y & -v_x v_z \\ cv_y & -v_y v_x & -\frac{c^2}{2} & -v_y v_z \\ cv_z & -v_z v_x & -v_z v_y & -\frac{c^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{X-4})$$

Nous effectuons un travail analogue sur le tenseur des perturbations. Partant du tenseur des perturbations modifiées :

$$\bar{\mathbf{h}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{h}_{00} & \bar{h}_{01} & \bar{h}_{02} & \bar{h}_{03} \\ \bar{h}_{10} & \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & \bar{h}_{13} \\ \bar{h}_{20} & \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} & \bar{h}_{23} \\ \bar{h}_{30} & \bar{h}_{31} & \bar{h}_{32} & \bar{h}_{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \begin{pmatrix} -\phi/c & A_x & A_y & A_z \\ A_x & \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & \bar{h}_{13} \\ A_y & \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} & \bar{h}_{23} \\ A_z & \bar{h}_{31} & \bar{h}_{32} & \bar{h}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{X-5})$$

Nous en déduisons le tenseur des perturbations non modifiées par la relation :

$$\mathbf{h}_{ij} = \bar{\mathbf{h}}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{\mathbf{h}} \quad (\text{X-6})$$

Avec

$$\bar{\mathbf{h}} = \eta^{ij} \bar{\mathbf{h}}_{ij} = \eta^{00} \bar{h}_{00} + \eta^{11} \bar{h}_{11} + \eta^{22} \bar{h}_{22} + \eta^{33} \bar{h}_{33} = -\bar{h}_{00} + \bar{h}_{11} + \bar{h}_{22} + \bar{h}_{33} \quad (\text{X-7})$$

Le traitement est analogue à celui qui a été effectué ci-dessus pour le tenseur impulsion-énergie, et on obtient :

$$\mathbf{h}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \approx \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{2c} & A_x & A_y & A_z \\ A_x & -\frac{\phi}{2c} & h_{12} & h_{13} \\ A_y & h_{21} & -\frac{\phi}{2c} & h_{23} \\ A_z & h_{31} & h_{32} & -\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{X-8})$$

Les termes $h_{12} = h_{21}$, $h_{13} = h_{31}$, et $h_{23} = h_{32}$ restent provisoirement indéterminés.

Nous utiliserons couramment par la suite, l'égalité de tous les termes de la diagonale principale :

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$$

Comme précédemment, nous souhaitons vérifier directement l'incidence de l'approximation du second ordre que nous avons effectué en (X-4) sur les équations d'EINSTEIN rappelées pour mémoire :

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (X-9)$$

Dans une métrique linéarisée, en utilisant les résultats partiels établis ci-dessus, ces équations prennent la forme suivante :

$$\left(\frac{4}{\lambda c} \right) \begin{pmatrix} \square h_{00} & \square h_{01} & \square h_{02} & \square h_{03} \\ \square h_{10} & \square h_{11} & \square h_{12} & \square h_{13} \\ \square h_{20} & \square h_{21} & \square h_{22} & \square h_{23} \\ \square h_{30} & \square h_{31} & \square h_{32} & \square h_{33} \end{pmatrix} = \lambda \rho \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{2} & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & -\frac{c^2}{2} & -v_x v_y & -v_x v_z \\ cv_y & -v_y v_x & -\frac{c^2}{2} & -v_y v_z \\ cv_z & -v_z v_x & -v_z v_y & -\frac{c^2}{2} \end{pmatrix} \quad (X-10)$$

Les contraintes supportées par les h_{ij} sont essentiellement celles de la jauge harmonique. Nous développons quelques éléments complémentaires sur cette jauge dans le paragraphe suivant.

I – Retour sur la contrainte de jauge harmonique

Lorsque nous recherchons des solutions de l'équation d'onde :

$$\square(\bar{h}_{ij}) = -\frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{(\partial ct)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial z^2} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} = -2\chi T_{ij} \quad (X-11)$$

Nous avons deux contraintes à satisfaire pour que ces solutions correspondent aux solutions des équations de la gravitation : la première porte sur la conservation de l'énergie du tenseur impulsion-énergie, la seconde porte sur la jauge harmonique qui permet de réduire chaque composante du tenseur de RICCI à un d'Alembertien.

Afin de mieux comprendre comment ces deux contraintes interagissent, nous proposons de détailler la relation entre ces deux contraintes. Sur la première ligne du tenseur deux fois covariant ($i = 0$), les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial T_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{03}}{\partial x^3} &= 0 \\ -\frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{h}_{03}}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad (X-12)$$

Mais nous savons également que ces grandeurs sont liées par l'équation d'onde :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^3)^2} &= -2\chi T_{00} \\
-\frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^3)^2} &= -2\chi T_{01} \\
-\frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^3)^2} &= -2\chi T_{02} \\
-\frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^3)^2} &= -2\chi T_{03}
\end{aligned} \tag{X-13}$$

Lorsque nous écrivons la relation de conservation de l'énergie sur les termes T_{0j} , cela implique la relation suivante sur les termes \bar{h}_{0j} :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{00}}{\partial(x^3)^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{01}}{\partial(x^3)^2} \right\} \\
+ \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{02}}{\partial(x^3)^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{03}}{\partial(x^3)^2} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{X-14}$$

On obtient après réorganisation des termes :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \left\{ -\frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} + \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left\{ -\frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} \\
+ \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \left\{ -\frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \left\{ -\frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{X-15}$$

Les autres lignes se traitent de manière analogue. On en conclut qu'il y a compatibilité entre les deux contraintes et qu'elles peuvent donc être satisfaites simultanément.

Il reste à formuler explicitement, dans le cas général, la contrainte de jauge harmonique pour le tenseur deux fois covariant de la perturbation de la métrique h_{ij} . Cette contrainte a déjà été explicitée pour le tenseur mixte dans le chapitre sur les jauges :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_k^i}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial(h)}{\partial x^k} &= 0 \\
\frac{\partial h_k^0}{\partial x^0} + \frac{\partial h_k^1}{\partial x^1} + \frac{\partial h_k^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h_k^3}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial(-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33})}{\partial x^k} &= 0 \\
-\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{1k}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{2k}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{3k}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial(-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33})}{\partial x^k} &= 0
\end{aligned} \tag{X-16}$$

On obtient :

pour $k = 0$:

$$-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{30}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial(-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33})}{\partial x^0} = 0 \quad (\text{X-17})$$

Soit encore avec la condition $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$:

$$-2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{30}}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{X-18})$$

pour $k = 1$:

$$-\frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{31}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial(-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33})}{\partial x^1} = 0 \quad (\text{X-19})$$

Soit encore avec la condition $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$:

$$-\frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{31}}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{X-20})$$

La relation est analogue pour $k = 2$ et $k = 3$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{32}}{\partial x^3} &= 0 \\ -\frac{\partial h_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{X-21})$$

Nous disposons de tous les éléments permettant une vérification directe des équations de la gravitation dans le cas général.

II – Le terme R_{00}

Les nouveaux termes introduits dans le tenseur des perturbations ($h_{12} = h_{21}$, $h_{13} = h_{31}$, et $h_{23} = h_{32}$) n'apportent aucune modification par rapport au chapitre précédent :

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^3)^2} \right\} \quad (\text{X-22})$$

III – Le terme R_{01} (et les termes analogues R_{02} , R_{03} , R_{10} , R_{20} , R_{30})

L'expression linéarisée du terme R_{01} est rappelée ci-dessous :

$$R_{01} \approx \frac{\partial \Gamma_{01}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^1}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{01}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^1} \right\} \quad (\text{X-23})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme R_{01} sont listés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{01}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{01}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2} \right\} \\
\Gamma_{01}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{X-24}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{01}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{02}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{03}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0} \right\}
\end{aligned} \tag{X-25}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont introduits dans l'expression de R_{01} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
R_{01} &\approx \frac{\partial \Gamma_{01}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{0r}^1}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{01}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^1} \right\} \\
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{12}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{13}}{\partial x^0 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{22}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{33}}{\partial x^0 \partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{X-26}$$

On obtient après une réorganisation des termes, et en utilisant la relation $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$:

$$\begin{aligned}
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{12}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{13}}{\partial x^0 \partial x^3} \right\} \\
R_{01} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{03}}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^0} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ -\frac{\partial \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{X-27}$$

Les conditions de jauge harmonique annulent les second et troisième termes à droite de l'égalité, et il reste :

$$\mathbf{R}_{01} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{01}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) \quad (\text{X-28})$$

IV – Le terme \mathbf{R}_{11} (et les termes analogues \mathbf{R}_{22} , \mathbf{R}_{33})

L'expression linéarisée du terme \mathbf{R}_{11} est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{R}_{11} \approx \frac{\partial \Gamma_{11}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} \right\} \quad (\text{X-29})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme \mathbf{R}_{11} sont listés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^0} \right\} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^2} \right\} \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{X-30})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{10}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{00}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{11}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{11}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{12}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{12}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{13}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{h}_{13}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{33}}{\partial x^1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{X-31})$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont introduits dans l'expression de \mathbf{R}_{11} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
R_{11} &\approx \frac{\partial \Gamma_{11}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^1} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} \right\} \\
R_{11} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^1 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^1 \partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{X-32}$$

Faisant usage de la relation $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$, il vient :

$$\begin{aligned}
R_{11} &\approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} + \left\{ -\frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x^1 \partial x^3} \right\} \\
R_{11} &\approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ -\frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{X-33}$$

La condition de jauge harmonique annule le second terme à droite de l'égalité, et il reste :

$$R_{11} \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \tag{X-34}$$

V – Le terme R_{12} (et les termes analogues R_{13} , R_{21} , R_{23} , R_{31} , R_{32})

L'expression linéarisée du terme R_{12} est rappelée ci-dessous :

$$R_{12} \approx \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{12}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^2} \right\} \tag{X-35}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL nécessaires au développement du terme R_{12} sont listés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^0} \right\} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^2} \right\} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{X-36}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^0 &\approx \frac{1}{2} \eta^{00} \left\{ \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{11}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{11}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{12}^2 &\approx \frac{1}{2} \eta^{22} \left\{ \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{22}}{\partial x^1} \right\} \\
\Gamma_{13}^3 &\approx \frac{1}{2} \eta^{33} \left\{ \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{33}}{\partial x^1} \right\}
\end{aligned} \tag{X-37}$$

Les coefficients de CHRISTOFFEL détaillés ci-dessus sont introduits dans l'expression de R_{12} rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
R_{12} &\approx \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{1r}^r}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial \Gamma_{12}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^3}{\partial x^3} \right\} - \left\{ \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^2} \right\} \\
R_{12} &\approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^0 \partial x^0} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\}
\end{aligned} \tag{X-38}$$

Faisant usage de la relation $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33}$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
R_{12} &\approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 h_{21}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial x^1 \partial x^3} \right\} \\
R_{12} &\approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ -\frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ -\frac{\partial h_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^3} \right\}
\end{aligned} \tag{X-39}$$

Les conditions de jauge harmonique annulent les second et troisième termes à droite de l'égalité, et il reste :

$$R_{12} \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^3 \partial x^3} \right\} \tag{X-40}$$

VI – Conclusion

Par rapport au potentiel vecteur A_x, A_y, A_z , défini en électromagnétisme, les termes $h_{12} = h_{21}, h_{13} = h_{31}$, et $h_{23} = h_{32}$ que nous sommes amenés à considérer dans le tenseur des perturbations h_{ij} doivent vérifier les conditions de jauge harmonique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{10}}{\partial x^0} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c} \right) \frac{\partial A_x}{\partial(ct)} \\ \frac{\partial h_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{20}}{\partial x^0} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c} \right) \frac{\partial A_y}{\partial(ct)} \\ \frac{\partial h_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{30}}{\partial x^0} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c} \right) \frac{\partial A_z}{\partial(ct)}\end{aligned}\quad (X-41)$$

Dans le respect de ces contraintes, l'introduction d'un tenseur énergie-impulsion des sources du champ électromagnétique dans les équations d'EINSTEIN linéarisées permet de retrouver les équations des potentiels électromagnétiques sur la première ligne et la première colonne du tenseur de RICCI.

Puisque les équations des potentiels sont équivalentes aux équations de MAXWELL à condition de satisfaire la jauge de LORENZ, cela implique que les équations de MAXWELL peuvent être considérée comme incluses dans les équations de la gravitation linéarisées.

Ce traitement analogue de l'électromagnétisme et de la gravitation ne peut apparaître que si on considère l'ensemble des termes du tenseur énergie impulsion et du tenseur de la perturbation métrique modifiée. On peut toutefois, comme cela a été fait dans ce chapitre, négliger dans la diagonale principale certains termes au carré. Cette approximation, considérée comme du second ordre, conserve toutes les contraintes de jauge et de linéarisation. En particulier, elle n'impacte pas l'aspect relativiste des équations des potentiels.

L'élément d'espace-temps au carré s'obtient en utilisant désormais tous les termes du tenseur de la perturbation métrique :

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{ij}dx^i dx^j = g_{00}dx^0 dx^0 + g_{11}dx^1 dx^1 + g_{22}dx^2 dx^2 + g_{33}dx^3 dx^3 \\ &+ 2g_{01}dx^0 dx^1 + 2g_{02}dx^0 dx^2 + 2g_{03}dx^0 dx^3 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + 2g_{13}dx^1 dx^3 + 2g_{23}dx^2 dx^3\end{aligned}\quad (X-42)$$

On obtient en termes de potentiels :

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(-1 - \frac{2\phi}{\lambda c^2} \right) d(ct)^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{\lambda c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &+ 2 \left(\frac{4A_x}{\lambda c} \right) d(ct) dx + 2 \left(\frac{4A_y}{\lambda c} \right) d(ct) dy + 2 \left(\frac{4A_z}{\lambda c} \right) d(ct) dz \\ &+ 2h_{12} dx dy + 2h_{13} dx dz + 2h_{23} dy dz\end{aligned}\quad (X-43)$$

Les termes $h_{12} = h_{21}, h_{13} = h_{31}$, et $h_{23} = h_{32}$ vérifient à la fois les conditions de jauge harmonique rappelée en (X-41) et les équations d'onde générales relatives à chaque terme du tenseur h_{ij} . La compatibilité entre ces contraintes a été montrée dans le paragraphe I) ci-dessus.

XI - L'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle

I – Relations avec les unités de PLANCK

La démarche des chapitres précédents nous a conduits à proposer un tenseur impulsion-énergie des sources du champ électromagnétique :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \lambda \rho \begin{pmatrix} -c^2 & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & -v_x v_x & -v_x v_y & -v_x v_z \\ cv_y & -v_y v_x & -v_y v_y & -v_y v_z \\ cv_z & -v_z v_x & -v_z v_y & -v_z v_z \end{pmatrix} \quad (\text{XI-1})$$

Dans cette expression, v_x, v_y, v_z , représente les composantes de vitesse des charges suivant chaque direction de l'espace. Pour des charges statiques, ce tenseur prend l'expression simplifiée :

$$T_{ij} = \lambda \rho \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI-2})$$

La densité volumique totale d'énergie électromagnétique est donnée par la valeur absolue du terme T_{00} . En intégrant cette densité volumique sur l'ensemble de l'espace, on obtient la charge totale de la particule, que l'on pose égale à q . L'énergie purement électromagnétique W_q associée à la particule s'en déduit immédiatement :

$$W_q = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 \quad (\text{XI-3})$$

Nous nous interrogeons sur cette relation dont on ne trouve pas de trace dans la littérature scientifique, et recherchons quelques éléments susceptibles de confirmer ou infirmer son intérêt.

Un élément de cohérence apparaît dans le potentiel qui est associé à la charge q pour lui fournir son énergie électromagnétique :

Si on pose :

$$W_q = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 = qV_p \quad (\text{XI-4})$$

Le potentiel V_p qui est mis en évidence n'est pas un potentiel quelconque : il correspond exactement au potentiel décrit par les unités de PLANCK, ou potentiel de PLANCK.

$$V_p = \frac{c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = 1,0432 \cdot 10^{27} \text{ Volt} \quad (\text{XI-5})$$

Si on assimile ce potentiel au potentiel du vide, la relation (XI-4) est en totale cohérence avec la physique classique : l'énergie électromagnétique d'une charge placée dans le vide obéit à la même relation que lorsqu'elle est placée dans n'importe quel potentiel.

Plus précisément, si une charge q est placée dans un potentiel V_0 par rapport au vide, son énergie électromagnétique totale sera égale à :

$$W_0 = q (V_p + V_0) \quad (\text{XI-6})$$

Si elle se déplace jusqu'à un point de potentiel V_1 par rapport au vide, son énergie totale devient :

$$W_1 = q (V_p + V_1) \quad (\text{XI-7})$$

L'énergie échangée au cours de ce déplacement s'écrit :

$$\Delta W = W_1 - W_0 = q (V_1 - V_0) \quad (\text{XI-8})$$

conformément au résultat classique d'électrodynamique.

Dans l'approche développée dans ce document, les variations de potentiels sont décrites par les variations du tenseur h_{ij} .

$$\begin{aligned} h_{00} &= -\left(\frac{2\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c^2}\right)\phi \\ h_{01} = h_{10} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c}\right)A_x \\ h_{02} = h_{20} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c}\right)A_y \\ h_{03} = h_{30} &= \left(\frac{4\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}}{c}\right)A_z \end{aligned} \quad (\text{XI-9})$$

Ces variations de potentiel sont directement reliées aux variations des densités volumiques d'énergie électromagnétique du vide, conformément aux équations d'EINSTEIN, interprétées dans leur aspect énergétique.

Pour un électron de charge e , on peut établir une autre expression de l'énergie électromagnétique totale en fonction des unités de PLANCK.

La constante de structure fine, désignée par α , est donnée par l'expression :

$$\alpha = \left(\frac{e}{q_p} \right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c \hbar} = \frac{1}{137.046} \quad (\text{XI-20})$$

où q_p désigne la charge de PLANCK.

L'énergie électromagnétique totale de l'électron W_e est donnée par la relation (XI-4) avec $q = e$:

$$W_e = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 \quad (\text{XI-21})$$

On peut exprimer cette énergie en fonction de la constante de structure fine :

$$W_e = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c \hbar}} c^2 \sqrt{\frac{c \hbar}{G}} = \sqrt{\alpha} c^2 \sqrt{\frac{c \hbar}{G}} = \sqrt{\alpha} E_p \quad (\text{XI-22})$$

où E_p représente l'énergie de PLANCK.

On peut également s'intéresser à une dimension, appelée parfois abusivement « dimension de l'électron ». Cette dimension est obtenue en supposant que l'énergie électromagnétique de l'électron W_e est répartie à partir d'une distribution à symétrie sphérique de rayon a , et qu'elle est gouvernée par la relation électrostatique jusqu'au « rayon » a de l'électron. L'énergie électrostatique totale est calculée en intégrant la densité volumique d'énergie électrostatique depuis le rayon $r = a$ jusqu'au rayon r infini :

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int E_r^2 r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{r=a}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad (\text{XI-23})$$

L'égalité avec l'expression déduite du terme T_{00} du tenseur énergie-impulsion électromagnétique fournit la relation :

$$W_e = \left(\frac{e}{\sqrt{4\pi G \epsilon_0}} \right)^2 c^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad (\text{XI-24})$$

On en déduit un « diamètre » $d = 2a$ de l'électron sous la forme :

$$d = 2a = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c \hbar}} \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} = \sqrt{\alpha} L_p \quad (\text{XI-25})$$

où L_p désigne la longueur de PLANCK :

$$L_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (\text{XI-26})$$

Le temps mis par la lumière pour « traverser » l'électron est relié au temps de PLANCK par la constante de structure fine :

$$t = \frac{d}{c} = \sqrt{\alpha} \frac{l_p}{c} = \sqrt{\alpha} t_p \quad (\text{XI-27})$$

On peut également s'intéresser aux relations entre l'énergie électromagnétique et l'énergie de masse à l'échelle de PLANCK.

L'énergie de masse W_m associée à une masse m est donnée par la relation d'EINSTEIN :

$$W_m = mc^2 \quad (\text{XI-28})$$

L'énergie électromagnétique associée à une charge q est donnée par le terme T_{00} du tenseur impulsion-énergie électromagnétique :

$$W_q = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 \quad (\text{XI-29})$$

On en déduit que la masse qui contient la même quantité d'énergie que la charge q est donnée par la relation :

$$m = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = \lambda q \quad (\text{XI-30})$$

Ces relations mettent en évidence une analogie simple entre les expressions de l'énergie de masse W_m et l'énergie électromagnétique W_q d'une charge à l'échelle de PLANCK (on rappelle que E_p désigne l'énergie de PLANCK) :

$$W_q = \frac{q}{q_p} E_p \quad W_m = \frac{m}{m_p} E_p \quad (\text{XI-31})$$

Si le vide est constitué, comme le suggère DIRAC, par une mer d'électrons situés sur le plus bas niveau d'énergie et respectant le principe d'exclusion de PAULI, les relations ci-dessus s'interprètent de manière simple : les propriétés du vide qui sont sous-jacentes aux unités de PLANK sont directement reliées aux propriétés de l'électron par la constante de structure fine α .

II) Retour sur la notion de force

La notion de force est liée à la notion d'énergie par une relation simple : énergie = force multiplié par déplacement. Toutefois, si on considère deux masses ou deux charges ponctuelles immobiles, la notion de force est présente, alors qu'aucun échange d'énergie n'est mis en jeu.

On peut interpréter ce phénomène en adoptant un point de vue purement énergétique.

Considérons deux systèmes qui génèrent chacun une certaine répartition de l'énergie dans l'espace. Si on admet, par une loi fondamentale de la physique, que cette énergie a une tendance naturelle à devenir plus homogène, ou dit autrement, à évoluer vers un état où elle serait globalement plus stable, alors il existe une force entre ces deux systèmes.

Ce changement de point de vue semble anodin, mais il éclaire la physique issue de l'énergie du vide d'une manière différente : l'énergie n'est plus la conséquence d'une force qui s'est déplacée, c'est la force qui est la conséquence d'une certaine répartition d'énergie qui cherche à évoluer dans l'espace.

Si nous adoptons ce point de vue, alors des répartitions d'énergie analogues doivent entraîner des forces analogues.

Considérons alors une masse ponctuelle m et une charge ponctuelle q qui possèdent la même énergie, répartie dans l'espace avec une même symétrie sphérique. Elles doivent vérifier la relation :

$$mc^2 = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} c^2 \quad (\text{XI-32})$$

Soit encore :

$$m = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = \lambda q \quad (\text{XI-32})$$

Le raisonnement énergétique suggéré plus haut nous indique alors que la force exercée entre deux masses F_m doit être identique à la force exercée entre deux charges F_q , lorsqu'elles sont dans des conditions spatiales identiques :

$$F_m = G \frac{m^2}{r^2} \quad F_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{XI-33})$$

Pour $m = \lambda q$, on obtient :

$$F_m = G \frac{m^2}{r^2} = G \frac{(\lambda q)^2}{r^2} = G \lambda^2 \frac{q^2}{r^2} = \frac{G}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{q^2}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = F_q \quad (\text{XI-34})$$

Il apparaît que l'énergie électromagnétique totale associée à une charge, déduite du tenseur impulsion-énergie proposé dans ce document, semble cohérente avec la physique fondamentale qui régit les forces entre charges et les forces entre masses.

XII - Mouvement d'une particule chargée

I – Approche heuristique de l'équation du mouvement d'une particule chargée

La théorie de la relativité générale fournit un nouveau concept permettant de prévoir la trajectoire d'un objet massif dans un champ de gravitation. Cette trajectoire n'est plus déterminée par des forces agissantes sur la masse en mouvement, mais par la courbure de l'espace-temps. Cette courbure de l'espace-temps « guide » la masse d'épreuve suivant l'équation d'une géodésique :

$$\frac{d^2x^r}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (\text{XII-1})$$

Dans cette relation, τ représente le temps propre, et les coefficients de CHRISTOFFEL sont donnés par la relation :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (\text{XII-2})$$

La courbure de l'espace-temps apparaît dans les dérivées des termes de la métrique (les g_{ij}). Puisque le potentiel de gravitation est présent à travers ces termes, on en déduit que la courbure représentée par les coefficients de CHRISTOFFEL est imposée par le potentiel de gravitation.

Lorsqu'on cherche à comprendre comment cette relation rejoint la loi de NEWTON, on est amené à faire plusieurs approximations.

On remplace le temps propre τ par le temps Newtonien absolu t :

$$\frac{d^2x^r}{dt^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (\text{XII-3})$$

On multiplie cette égalité par la masse d'épreuve m :

$$m \frac{d^2x^r}{dt^2} + m \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (\text{XII-4})$$

On ne retient que les indices $r = 1, r = 2, r = 3$ qui correspondent aux composantes de forces suivant $x, y,$ et z :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^1}{dt^2} &= -m \Gamma_{ij}^1 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \\ m \frac{d^2 x^2}{dt^2} &= -m \Gamma_{ij}^2 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \\ m \frac{d^2 x^3}{dt^2} &= -m \Gamma_{ij}^3 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \end{aligned} \quad (\text{XII-5})$$

Nous sommes alors en présence de la loi de NEWTON, dans laquelle la force qui s'exerce sur la masse d'épreuve est exprimée de deux manières. La première (à gauche de l'égalité) est identifiée comme la force d'inertie, tandis que la seconde (à droite de l'égalité) est identifiée comme la force extérieure agissante.

Dans le cas d'une particule chargée placée dans un champ électromagnétique, la force agissante dépend uniquement de la charge et de la nature du champ, ce qui suggère une modification adéquate du terme à droite de l'égalité.

Les coefficients de CHRISTOFFEL traduisent la courbure générée par présence du champ électromagnétique dans lequel la charge évolue. De plus, l'énergie présente dans ce terme est relative à l'énergie électromagnétique de la charge q . Ces observations suggèrent de modifier l'équation du mouvement de la particule de la manière suivante :

$$(m) \frac{d^2 x^r}{d\tau^2} + (\lambda q) \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (\text{XII-6})$$

La démarche heuristique qui a conduit à cette formulation ne constitue pas une justification rigoureuse, et elle doit par conséquent être considérée avec prudence.

Il s'avère qu'une justification rigoureuse n'est pas simple à obtenir. Nous sommes en possession d'un tenseur représentatif des potentiels électromagnétiques, et donc en possession des coefficients de CHRISTOFFEL relatifs à ce tenseur. Mais la relation énergétique ci-dessus est plus exigeante : elle suppose que nous connaissions rigoureusement ce tenseur lorsque le champ électromagnétique est perturbé par la charge d'épreuve. Cette exigence peut être rapprochée de celle qui est nécessaire pour la mise en évidence des ondes gravitationnelles.

Nous allons malgré tout proposer une ébauche de vérification en tentant d'identifier la force de LORENTZ dans le terme relatif à l'énergie électromagnétique.

Il convient d'apprécier à leur juste valeur les éléments qui vont suivre : cette ébauche de vérification ne constitue pas une preuve de la validité de la relation (XII-6) ci-dessus, mais seulement quelques éléments de réflexion en accord avec la conjecture proposée.

Afin de faire apparaître la force de LORENTZ, nous remplaçons le temps propre τ par le temps Newtonien t , et nous écrivons la relation (XII-6) sous la forme :

$$m \frac{d^2 x^r}{dt^2} = -(\lambda q) \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \quad (\text{XII-7})$$

Le terme à gauche de l'égalité représente la force d'inertie, tandis que le terme à droite doit représenter la force de LORENTZ pour les composantes telles que $r = 1$, $r = 2$, et $r = 3$.

Le développement par rapport à l'indice i , permet d'obtenir :

$$-(\lambda q)\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = -(\lambda q) \left\{ \Gamma_{0j}^r \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{1j}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{2j}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{3j}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right\} \quad (\text{XII-8})$$

On en déduit l'expression développée par rapport à l'indice j :

$$-(\lambda q)\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = -(\lambda q) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{00}^r \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{01}^r \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{02}^r \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{03}^r \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{10}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{11}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{12}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{13}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{20}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{21}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{22}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{23}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{30}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{31}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{32}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{33}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^3}{dt} \end{array} \right\} \quad (\text{XII-9})$$

Dans cette expression, tous les termes n'ont pas le même ordre de grandeur : cela est apparent en posant $x^0 = ct$ et donc, $dx^0/dt = c$:

$$-(\lambda q)\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = -(\lambda q) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{00}^r c^2 + \Gamma_{01}^r c \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{02}^r c \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{03}^r c \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{10}^r c \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{11}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{12}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{13}^r \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{20}^r c \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{21}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{22}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{23}^r \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} \\ + \Gamma_{30}^r c \frac{dx^3}{dt} + \Gamma_{31}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_{32}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \Gamma_{33}^r \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^3}{dt} \end{array} \right\} \quad (\text{XII-10})$$

En supposant les composantes de vitesse petites devant la vitesse de la lumière, nous conservons uniquement les termes dominants :

$$-(\lambda q)\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \approx -(\lambda q) \left\{ \Gamma_{00}^r c^2 + (\Gamma_{01}^r + \Gamma_{10}^r) c \frac{dx^1}{dt} + (\Gamma_{02}^r + \Gamma_{20}^r) c \frac{dx^2}{dt} + (\Gamma_{03}^r + \Gamma_{30}^r) c \frac{dx^3}{dt} \right\} \quad (\text{XII-11})$$

La symétrie des coefficients de CHRISTOFFEL permet finalement d'obtenir l'expression suivante :

$$-(\lambda q)\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \approx -(\lambda q) \left\{ \Gamma_{00}^r c^2 + 2\Gamma_{01}^r c \frac{dx^1}{dt} + 2\Gamma_{02}^r c \frac{dx^2}{dt} + 2\Gamma_{03}^r c \frac{dx^3}{dt} \right\} \quad (\text{XII-12})$$

II – Mouvement dans un potentiel scalaire

Nous plaçons la particule dans un potentiel scalaire ϕ , défini par les h_{ij} qui représentent les modifications de la métrique de MINKOWSKY :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\phi}{2c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\phi}{2c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi}{2c} \end{pmatrix} \quad (\text{XII-13})$$

Ce potentiel scalaire doit vérifier la condition de jauge harmonique, par conséquent nous admettrons qu'il est indépendant du temps.

Nous supposons que la particule d'épreuve chargée ne perturbe pas, au premier ordre, cette métrique qui contient les termes dominants du tenseur h_{ij} .

Nous en déduisons les coefficients de CHRISTOFFEL utiles à la description de la force de LORENTZ. Pour la composante de force suivant x qui correspond à $r = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} \\ \Gamma_{01}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} \right\} = 0 \\ \Gamma_{02}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} \right\} = 0 \\ \Gamma_{03}^1 &\approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{XII-14})$$

Nous en déduisons la composante de force suivant x :

$$\begin{aligned} F_x &\approx -(\lambda q)\Gamma_{00}^1 c^2 = -\frac{1}{2}(\lambda q) \left\{ -\frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} c^2 = \frac{1}{2}(\lambda q) \left\{ \frac{\partial h_{00}}{\partial x} \right\} c^2 = \frac{1}{2}(\lambda q) \left\{ \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-\phi}{2c} \right) \right\} c^2 \\ F_x &\approx -(\lambda q)\Gamma_{00}^1 c^2 = q \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = qE_x \end{aligned} \quad (\text{XII-15})$$

Dans cette expression, E_x représente la composante de champ électrique déduite de la variation du potentiel scalaire relative à x , suivant la relation :

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (\text{XII-16})$$

On obtient de manière analogue, pour les autres composantes :

$$F_y \approx -(\lambda q)\Gamma_{00}^2 c^2 = q \left\{ -\frac{\partial\phi}{\partial y} \right\} = qE_y$$

$$F_z \approx -(\lambda q)\Gamma_{00}^3 c^2 = q \left\{ -\frac{\partial\phi}{\partial z} \right\} = qE_z \quad (\text{XII-17})$$

Dans les hypothèses simplificatrices que nous avons énoncées, il apparaît que la conjecture issue d'une analyse énergétique et modifiant l'équation des géodésiques suivant la relation (XII-7) conduit exactement aux termes qui décrivent la force de LORENTZ.

III – Mouvement dans un potentiel vecteur

Nous plaçons la particule dans un potentiel vecteur de composantes A_x, A_y, A_z , défini par les h_{ij} qui représentent les modifications correspondantes de la métrique de MINKOWSKY :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \begin{pmatrix} 0 & A_x & A_y & A_z \\ A_x & 0 & 0 & 0 \\ A_y & 0 & 0 & 0 \\ A_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XII-18})$$

Ce potentiel vecteur doit vérifier la condition de jauge harmonique, par conséquent nous admettons qu'il est indépendant du temps.

Nous supposons, comme dans le paragraphe précédent, que la particule chargée ne perturbe pas, au premier ordre, cette métrique, mais nous devons garder à l'esprit que les h_{ij} qui représentent le potentiel vecteur sont d'un ordre de grandeur inférieur à ceux qui représentent le potentiel scalaire. En d'autres termes, nous sommes descendus d'un ordre de grandeur par rapport au potentiel scalaire, et il n'est pas à exclure que la présence de la charge ait des effets qui ne soient plus négligeables sur cette métrique.

Nous évaluons les coefficients de CHRISTOFFEL utiles à la description de la force de LORENTZ. Pour la composante de force suivant x qui correspond à $r = 1$, on obtient :

$$\Gamma_{00}^1 \approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} \right\} = 0$$

$$\Gamma_{01}^1 \approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{01}}{\partial x^1} \right\} = 0$$

$$\Gamma_{02}^1 \approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} \right\}$$

$$\Gamma_{03}^1 \approx \frac{1}{2} \eta^{11} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} \right\} \quad (\text{XII-19})$$

Nous en déduisons la composante de force suivant x :

$$\begin{aligned}
 F_x &= -(\lambda q) \left\{ \Gamma_{00}^r c^2 + 2\Gamma_{01}^r c \frac{dx^1}{dt} + 2\Gamma_{02}^r c \frac{dx^2}{dt} + 2\Gamma_{03}^r c \frac{dx^3}{dt} \right\} \\
 F_x &= -(\lambda q) \left\{ \left(\frac{\partial h_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x^1} \right) c \frac{dx^2}{dt} + \left(\frac{\partial h_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x^1} \right) c \frac{dx^3}{dt} \right\} \\
 F_x &= -(\lambda q) \left\{ \left(\frac{\partial h_{01}}{\partial y} - \frac{\partial h_{02}}{\partial x} \right) c \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial h_{01}}{\partial z} - \frac{\partial h_{03}}{\partial x} \right) c \frac{dz}{dt} \right\}
 \end{aligned} \tag{XII-20}$$

Nous obtenons après substitution des expressions des potentiels en fonction des h_{ij} :

$$\begin{aligned}
 F_x &= -(\lambda q) \left(\frac{4}{\lambda c} \right) \left\{ \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) c \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) c \frac{dz}{dt} \right\} \\
 F_x &= -4q \left\{ \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{dz}{dt} \right\}
 \end{aligned} \tag{XII-21}$$

L'expression des champs électrique et magnétique en fonction des potentiels est rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
 \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\overrightarrow{\text{Grad}}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{XII-22}$$

On obtient par identification :

$$F_x = 4q \left\{ B_z \frac{dy}{dt} - B_y \frac{dz}{dt} \right\} \tag{XII-23}$$

Les composantes suivant y et suivant z génèrent des relations analogues :

$$\begin{aligned}
 F_y &= 4q \left\{ B_x \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dx}{dt} \right\} \\
 F_z &= 4q \left\{ B_y \frac{dx}{dt} - B_x \frac{dy}{dt} \right\}
 \end{aligned} \tag{XII-24}$$

Il apparaît que l'expression obtenue recouvre exactement la force de LORENTZ, mais à un facteur 4 près.

On peut naturellement suspecter les modifications de la métrique par la charge test qui ne sont pas prises en compte dans le raisonnement, mais il conviendrait d'apporter des éléments de preuve convaincants qui n'ont pas été établis pour l'instant.

Ces résultats, bien qu'encourageants, montrent que des travaux de compréhension complémentaires doivent être effectués avant de pouvoir infirmer ou confirmer l'hypothèse proposée sur une modification du sens physique de l'équation des géodésiques.

XIII - Expression énergétique des équations de MAXWELL

Nous disposons des éléments qui permettent de formuler une expression énergétique des équations de MAXWELL. Nous espérons ainsi voir apparaître une formulation dont les équations aux dimensions seront analogues à celles des équations de la gravitation.

Le terme « analogue » veut dire ici que les termes qui représentent les sources des champs électromagnétiques ou gravitationnels auront la dimension d'une densité volumique d'énergie.

Les termes qui représentent les relations d'évolution entre les champs ou potentiels, et l'espace-temps (en général, ce sont des dérivées partielles), vont être exprimés comme le produit de deux termes, chacun ayant la dimension de la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

I – Retour sur l'expression énergétique des équations de la gravitation

Nous rappelons, dans un premier temps, comment il est possible de faire apparaître un aspect énergétique dans les équations d'EINSTEIN. Partant de la formulation habituelle :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} = \chi T_{ij} \quad (\text{XIII-1})$$

On divise cette égalité par la constante d'EINSTEIN :

$$\frac{R_{ij}}{\chi} - \frac{R}{2\chi} g_{ij} = T_{ij} \quad (\text{XIII-2})$$

On obtient une relation dont chacun des termes principaux a la dimension d'une densité volumique d'énergie.

On exprime ensuite le tenseur de RICCI en fonction des coefficients de CHRISTOFFEL :

$$\frac{R_{ij}}{\chi} = \frac{\Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m}{\chi} - \frac{\Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m}{\chi} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\chi \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\chi \partial x^j} \quad (\text{XIII-3})$$

Dans la recherche d'une dimension physique de chacun des termes, on procède de manière empirique, en décomposant ce tenseur sous la forme :

$$\frac{R_{ij}}{\chi} = \frac{\Gamma_{mk}^k \Gamma_{ij}^m}{\sqrt{\chi} \sqrt{\chi}} - \frac{\Gamma_{mj}^k \Gamma_{ik}^m}{\sqrt{\chi} \sqrt{\chi}} + \frac{\partial \frac{\Gamma_{ij}^k}{\sqrt{\chi}}}{\partial(\sqrt{\chi}x^k)} - \frac{\partial \frac{\Gamma_{ik}^k}{\sqrt{\chi}}}{\partial(\sqrt{\chi}x^j)} \quad \sqrt{\chi} = \frac{\sqrt{8\pi G}}{c^2} \quad (\text{XIII-4})$$

Cette expression fait apparaître deux catégories de termes :

$$\frac{\Gamma_{ij}^k}{\sqrt{\chi}} \quad (\text{XIII-5})$$

$$\frac{\partial}{\partial(\sqrt{\chi}x^k)} \quad (\text{XIII-6})$$

Chacun de ces termes a la dimension de la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

L'expression (XIII-6) interprète toute dérivée spatiale (ou temporelle multipliée par c) comme une quantité qui est homogène la racine carrée d'une densité volumique d'énergie. Nous utiliserons désormais cette expression dans la recherche de formulations énergétiques.

II – Expression énergétique des équations de MAXWELL

Dans le vide, et dans leur description temporelle, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{XIII-7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

La troisième équation permet un traitement direct en rapport avec les relations énergétiques établies dans ce mémoire. Nous partons de son écriture développée :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{XIII-8})$$

Nous multiplions les deux membres de cette équation par le facteur qui rend le terme de droite homogène à une densité volumique d'énergie :

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \frac{\epsilon_0 c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \frac{\epsilon_0 c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} \quad (\text{XIII-9})$$

Nous introduisons l'expression énergétique de la dérivée spatiale (XIII-6) issue des équations d'EINSTEIN :

$$\left(\frac{\partial(\sqrt{\chi}E_x)}{\partial(\sqrt{\chi}x)} + \frac{\partial(\sqrt{\chi}E_y)}{\partial(\sqrt{\chi}y)} + \frac{\partial(\sqrt{\chi}E_z)}{\partial(\sqrt{\chi}z)} \right) \frac{\epsilon_0 c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}G} = \frac{\rho c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}G} \quad (\text{XIII-10})$$

Soit encore :

$$\frac{\partial(\sqrt{2\epsilon_0}E_x)}{\partial(\sqrt{\chi}x)} + \frac{\partial(\sqrt{2\epsilon_0}E_y)}{\partial(\sqrt{\chi}y)} + \frac{\partial(\sqrt{2\epsilon_0}E_z)}{\partial(\sqrt{\chi}z)} = \frac{\rho c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}G} \quad (\text{XIII-11})$$

Le terme de droite représente la densité volumique d'énergie associée à la charge q , tandis que les termes de gauches sont constitués par l'association de deux quantités :

$\sqrt{2\epsilon_0}E_x$ représente une quantité directement proportionnelle à la racine carrée de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à la composante E_x .

$\frac{\partial}{\partial(\sqrt{\chi}x)}$ représente une dérivée spatiale qui est homogène à la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

Un travail analogue sur les autres équations permet de proposer une formulation énergétique des équations de MAXWELL sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\nabla}}{\sqrt{\chi}} \Lambda(\sqrt{2\epsilon_0}\vec{E}) &= -\frac{\partial(\sqrt{2\mu_0}\vec{H})}{\partial(\sqrt{\chi}ct)} \\ \frac{\vec{\nabla}}{\sqrt{\chi}} \Lambda(\sqrt{2\mu_0}\vec{H}) &= \frac{\vec{J}_c}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}G} + \frac{\partial(\sqrt{2\epsilon_0}\vec{E})}{\partial(\sqrt{\chi}ct)} \\ \frac{\vec{\nabla}}{\sqrt{\chi}} \cdot (\sqrt{2\epsilon_0}\vec{E}) &= \frac{\rho c^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}G} \\ \frac{\vec{\nabla}}{\sqrt{\chi}} \cdot (\sqrt{2\mu_0}\vec{H}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{XIII-12})$$

Il est clair qu'une telle formulation n'apporte rien de plus en ce qui concerne le traitement mathématique de ces équations.

Par contre, du point de vue de la physique, cette écriture permet de souligner le rôle fondamental de la racine carrée de la densité volumique d'énergie associée à chacune des composantes du champ électromagnétique. Elle met en évidence une possible interprétation de l'électromagnétisme à partir des variations de la densité d'énergie électromagnétique du vide, en cohérence avec les travaux des précédents chapitres.

XIV - Conclusion

Le concept d'énergie est un concept omniprésent en physique. En lui associant le principe de moindre action, on parvient à décrire l'ensemble des lois fondamentales qui gouvernent à la fois l'infiniment petit et le monde macroscopique. En lui associant une hypothèse supplémentaire qui suppose que toute énergie est extraite de l'énergie du vide, on obtient une description cohérente de l'ensemble de la physique.

Pour souligner cette cohérence, il est utile de mettre en évidence les aspects énergétiques des principales lois de la physique.

Concernant la mécanique quantique, il apparaît que de nombreuses propriétés peuvent trouver une interprétation énergétique (Cf [Approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique](#)).

Concernant la gravitation, le chapitre III montre que les équations d'EINSTEIN peuvent être analysées comme des équations énergétiques par un simple changement de point de vue.

Concernant l'électromagnétisme, il semble que ce domaine de la physique puisse s'interpréter de manière analogue à la gravitation, à condition de pouvoir formuler un tenseur impulsion-énergie des sources de champ électromagnétique. Un tel tenseur a été proposé, et quelques éléments de réflexion ont été développés autour de cette idée.

Dans une approche énergétique, le cadre de la relativité restreinte fait référence à une énergie du vide qui est répartie de manière uniforme dans tout l'espace. Cette répartition uniforme est associée à un espace-temps plat. On peut donc associer une répartition non uniforme de l'énergie du vide à un espace-temps courbe.

Lorsqu'on introduit une masse ou une charge dans un espace-temps plat, on modifie sa courbure, et donc, on modifie également la répartition de l'énergie du vide qui ne sera plus homogène comme dans le cas de la relativité restreinte.

Si on place une particule d'épreuve dans cet espace non homogène, cette particule et son énergie propre environnante vont évoluer en respectant le principe de moindre action. La notion de force apparaît naturellement comme la conséquence de densités d'énergie qui sont différentes en deux points de l'espace, ce qui permet de rejoindre sans effort le point de vue de la mécanique classique.

Le point de vue énergétique nous amène à supposer qu'électromagnétisme et gravitation sont régis par les mêmes équations. Plusieurs réflexions sont avancées en ce sens dans ce document.

Ce traitement analogue de l'énergie électromagnétique et gravitationnelle n'est pas sans soulever quelques questions. La première d'entre elles semble être la suivante : pourquoi n'observe-t-on pas d'effet magnétique dans les phénomènes gravitationnels alors qu'ils sont très facilement observables pour les phénomènes électromagnétiques ?

On peut tenter d'apporter un début de réponse de la manière suivante.

Pour des charges en mouvement à des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière, les phénomènes magnétiques sont d'un ordre de grandeur inférieur aux phénomènes électriques dans un rapport égale à c . En d'autres termes, il faut aller chercher la 7^{ème} ou 8^{ème} décimale dans les phénomènes électriques pour y déceler une modification apportée par les effets magnétiques.

Si ces effets sont malgré tout perceptibles pour des courants qui circulent et génèrent un champ magnétique, c'est parce que le conducteur est électriquement neutre : les effets électrostatiques sont nuls (à chaque électron qui circule dans le conducteur, il y a un proton qui compense son champ électrostatique), et il ne reste plus que les effets dus au mouvement des charges dans le conducteur. Bien que faibles, ces effets peuvent être mis en évidence facilement car ils sont pratiquement les seuls à exister

Le problème avec la gravitation, c'est qu'il n'existe pas de masses négatives. L'effet gravitationnel analogue à l'effet électrostatique ne peut jamais être annulé. Il s'ensuit que les effets magnétiques seraient très difficilement discernables, car noyés dans les effets « gravitostatiques ».

Si ce comportement analogue de l'énergie électromagnétique et gravitationnelle se confirmait, il induirait des conséquences sur notre vision des équations de MAXWELL, dont une formulation plus complète serait donnée par les équations d'EINSTEIN, associées à un tenseur impulsion-énergie des sources électromagnétiques. Il a été montré que les variations de la métrique de MINKOWSKY induites par la présence des potentiels étaient extrêmement faibles devant 1 ($\sim 10^{-18}$), ce qui permet de comprendre pourquoi cette métrique reste particulièrement bien adaptée à l'étude de l'électromagnétisme.

Il n'en reste pas moins que sur de très longues distances, ou sur des temps très longs, de faibles variations pourraient apparaître par rapport à l'électromagnétisme de MAXWELL. En particulier, il reste un travail de compréhension à effectuer pour donner une interprétation des termes ($h_{12} = h_{21}$, $h_{13} = h_{31}$, et $h_{23} = h_{32}$) qui sont apparus dans le tenseur des perturbations relatives aux potentiels.

En conclusion, le travail présenté dans ce document a permis de développer des analogies de comportement entre les lois de l'électromagnétisme et de la gravitation, lorsqu'elles sont examinées à travers le prisme énergétique des équations d'EINSTEIN. Si on y ajoute l'aspect énergétique des équations de DIRAC, ce sont des pans importants de la physique qui semblent trouver une cohérence autour du concept d'énergie.

Bibliographie

Sur les théories unitaires :

- A. Einstein, *Théorie unitaire du champ physique*, Annales de l'I. H. P., tome 1, n°1 (1930), p. 1-24, http://www.numdam.org/article/AIHP_1930__1_1_1_0.pdf
- M. A. Tonnelat. *Théorie unitaire affine du champ physique*. J. Phys. Radium, 1951, 12 (2), pp.81-88, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00234360/document>
- G. Petiau, *Sur les principes généraux d'une nouvelle théorie unitaire des champs*, J. Phys. Radium, 1946, 7 (8), pp.226-227, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233984/document>
- R. Tardif, R. Breton, *Rapport présenté pour le cours Physique des particules (PHY-3501)*, 2017, <http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/pp/17kk/Théorie de Kaluza Klein Rébecca Tardif et Rébecca Breton.pdf>
- W. Pauli, J. Solomon, *La théorie unitaire d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac*, J. Phys. Radium, 1932, 3 (10), pp.452-463, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233114/document>
- G. Stephenson, *La géométrie de Finsler et les théories du champ unifié*, Annales de l'I. H. P., tome 15, n°3 (1957), p. 205-215, http://www.numdam.org/article/AIHP_1957__15_3_205_0.pdf

Electromagnétisme – relativité – gravitation :

- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
Voir en particulier le chapitre 20.
- A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, New York N.Y. Academic press Inc., publishers, 1952
On trouvera dans le livre d'A. Sommerfeld une des rares tentatives d'évaluation de l'énergie électromagnétique contenue dans un électron (voir §33, Electromagnetic theory of the electron, p273-).
- L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Third English edition 1971
Le paragraphe 101 page 304 explique en détail pourquoi le tenseur impulsion-énergie d'une masse isolée ne respecte plus la conservation de l'énergie lorsque cette masse est plongée dans un champ de gravitation.
Par analogie, cela conduit aux réflexions abordées dans l'avant dernier chapitre (XII).
- J.M. Raimond. *Electromagnétisme et relativité*. 2006, <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092954/document>
- C. Magnan, *relativité générale*, <https://lacosmo.com/relativiteG/index.html>
- T. Damour, *La Relativité générale aujourd'hui*, Séminaire Poincaré IX (2006) 1 - 40, <http://www.bourbaphy.fr/damour4.pdf>
Dans cet article, T. Damour souligne à plusieurs reprises les analogies significatives qui existent entre ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles.
- B. Linet, *Notes de cours de relativité générale*, 2005, <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~linet/coursRG.pdf>
- E.ourgoulhon, *cours de relativité générale*, <https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>

Sur l'énergie du vide :

- E. Margan, *Estimating the Vacuum Energy Density - an Overview of Possible Scenarios*, Experimental Particle Physics Department, "Jožef Stefan" Institute, Ljubljana, Slovenia, http://www-f9.ijs.si/~margan/Articles/vacuum_energy_density.pdf

Sur une vision énergétique de la physique :

H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, 1902,

https://www.ebooksgratuits.com/html/poincare_science_hypothese.html

Ce mathématicien et physicien avait déjà perçu l'intérêt d'une vision énergétique de la physique à travers le principe de moindre action. On trouve en particulier au chapitre X (Les théories de la physique moderne), deux phrases qui ne laissent aucun doute sur ses idées :

« Ce que je viens de dire éclaire en même temps le rôle des principes généraux tels que le principe de moindre action, ou celui de la conservation de l'énergie.

Ces principes ont une très haute valeur ; on les a obtenus en cherchant ce qu'il y avait de commun dans l'énoncé de nombreuses lois physiques ; ils représentent donc la quintessence d'innombrables observations »