



**HAL**  
open science

## Caractériser l'analogie entre automates cellulaires déterministes et systèmes physiques

Lionel Tabourier

► **To cite this version:**

Lionel Tabourier. Caractériser l'analogie entre automates cellulaires déterministes et systèmes physiques. *Lato Sensus, revue de la Société de philosophie des sciences*, 2018, 5 (2), pp.13-31. 10.20416/LSRSPS.V5I2.2 . hal-02085266

**HAL Id: hal-02085266**

**<https://hal.science/hal-02085266>**

Submitted on 8 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Caractériser l’analogie entre automates cellulaires déterministes et systèmes physiques

Lionel Tabourier  
Sorbonne Université, CNRS, LIP6 UMR 7606  
4 place Jussieu 75005 Paris  
lionel.tabourier@lip6.fr

## Résumé

La classification de Wolfram des automates cellulaires déterministes repose sur l’analogie entre le comportement dynamique des automates et celui de systèmes physiques au cours d’une transition de phase. Pour évaluer la valeur scientifique de la classification, longuement débattue, on doit s’interroger sur les caractéristiques de cette analogie. Nous établissons ici quels éléments, présents dans les transitions de phase, n’ont pas d’équivalent dans le domaine des automates. Ensuite, nous discutons la notion de potentiel d’une analogie en la comparant à deux autres exemples de la littérature.

## Abstract

Wolfram’s classification of deterministic cellular automata rely on the analogy between the dynamical behaviour of automata and the one of physical systems enduring a phase transition. In order to assess the widely discussed scientific value of the classification, the specific features of this analogy must be considered. We establish here which are the elements of the phase transition, which have no equivalent in the field of automata. Then, we discuss the notion of potential of an analogy by comparison to two other examples of the literature.

*Mots-clefs* – automates cellulaires, transition de phase, analogie, classification de Wolfram

## 1 Introduction

Depuis les années 1960, les machines de calcul se sont largement répandues au sein de la communauté scientifique, notamment grâce à la production de microprocesseurs qui a réduit considérablement les coûts de production et les dimensions des ordinateurs. De nouvelles pratiques scientifiques, telles que l’expérimentation numérique, se sont alors diffusées : il s’agit de reproduire à l’aide de programmes le comportement de systèmes naturels ou artificiels dont on fixe la règle de fonctionnement. L’étude de certains systèmes a particulièrement bénéficié de ce mouvement dans les décennies 70 et 80, en particulier ceux pouvant être représentés à l’aide d’objets élémentaires soumis à des règles d’interactions simples, mais d’où émergent des comportements complexes. En effet, de telles représentations nécessitent des ressources modestes en mémoire et en vitesse de calcul, comparativement à ce qui est aujourd’hui possible dans ce domaine ; les technologies de l’époque étaient donc suffisantes pour observer des propriétés caractéristiques de tels systèmes. Il devint par exemple possible de simuler la dynamique de systèmes gravitationnels à  $N$  corps (Van Albada, 1968), un problème dont la description théorique est simple et concise, mais pour lequel on ne dispose pas d’une solution analytique utilisable en pratique.

Les automates cellulaires déterministes (ACD dans ce qui suit) sont des systèmes discrets en tout point de vue : nombre d'états discret, petit nombre de voisins avec lesquels interagir, évolution par pas de temps. C'est pourquoi ils sont adaptés à une représentation numérique, dont une des contraintes est la discrétisation des variables continues. À ceci s'ajoute la possibilité de représenter leur évolution de manière relativement simple avec les moyens de l'époque. En effet, le comportement dynamique de certains ACD, dits élémentaires, peut être décrit à l'aide d'une simple grille à deux dimensions dont les cellules blanches ou noires traduisent l'évolution de l'état des automates au cours du temps<sup>1</sup>.

Malgré cette simplicité de formulation et de représentation, les différents ACD présentent une variété de comportements dynamiques étonnante. Ils permettent la création de structures aux propriétés difficiles à imaginer en l'absence d'expérimentations numériques. Une illustration frappante de ce potentiel est le "Jeu de la Vie" de Conway (Berlekamp et al., 2001), avec lequel on sait synthétiser des structures de portes logiques, ou résoudre des problèmes mathématiques tels que trouver les décimales de  $\pi$ . Il a même été démontré que cet automate est une machine de Turing universelle, autrement dit, il a en théorie la capacité de réaliser les mêmes tâches qu'un ordinateur.

Ces propriétés remarquables justifient certainement l'immense engouement que les ACD ont suscité dans la communauté scientifique depuis cette époque et jusqu'à aujourd'hui. Celle-ci s'est naturellement interrogée sur l'étendue de ce qu'il était possible de faire à l'aide d'ACD, ou plus exactement de certains ACD. En effet, la quantité des règles imaginables est énorme, et même potentiellement infinie. Nous ferons donc souvent référence à *l'espace des règles* d'ACD, et au problème de la localisation des automates "intéressants" dans cet espace. L'objet de cet article touche à un volet de cette histoire récente de l'informatique : les travaux initiés par Stephen Wolfram dans les années 1980, dont un point central est la classification des ACD en fonction de leurs comportements asymptotiques.

Ce travail était initialement motivé par l'observation des très vives polémiques au sein de la communauté scientifique suscitées par les travaux de Wolfram et leur descendance. Celles-ci portaient à la fois sur le fond des travaux de Wolfram, mais également sur d'autres points tenant davantage au caractère et au discours du personnage, voir par exemple dans Gray (2003). Le point de départ de ce travail était donc d'identifier les caractéristiques de cette classification et d'en comprendre les forces et les faiblesses. Mais comme nous le verrons, cette question nous mènera à un problème plus fondamental, qui consiste à s'interroger sur la notion d'analogie, et les propriétés spécifiques à l'analogie entre les automates cellulaires et les transitions de phase physiques, qui joue un rôle central dans la construction de la classification de Wolfram. Nous sommes alors amenés à discuter du potentiel explicatif et prédictif d'une analogie en fonction de ses caractéristiques, au travers de ce cas d'étude concret.

La première partie de cet article est consacrée à une présentation des travaux de Wolfram et de ses successeurs dans le but de construire cette analogie. Nous cherchons à décrire les particularités de cet exemple historique, dont une caractéristique inhabituelle est que les auteurs de ces travaux cherchent à décrire un système artificiel à l'aide d'un analogue physique. L'analogie est développée selon deux directions distinctes : la première utilise le lexique des systèmes dynamiques et est construite autour de la comparaison des comportements asymptotiques, la seconde fait appel à une description statistique du comportement dynamique du système, en cherchant des points communs avec les mesures réalisées au cours de transitions de phase physiques. Notons toutefois que ces deux domaines de la physique sont étroitement liés car les équations qui décrivent les transitions de phase sont classiques dans l'étude des systèmes dynamiques et plus précisément des phénomènes de bifurcation. On peut citer particulièrement la théorie des transitions de phase de Landau (1937), dans laquelle la mise en équation qui découle des principes de la thermodynamique relève directement de l'étude des bifurcations d'un système dynamique. Wolfram cherche à construire ce que nous qualifierons de thermodynamique d'espaces artificiels, dans la mesure où les éléments de l'espace (les automates définis par leur règle) sont des objets construits,

---

<sup>1</sup>Liste des automates cellulaires élémentaires, accessible sur <http://mathworld.wolfram.com/ElementaryCellularAutomaton.html>, accès le 16/01/2017.

et donc *a priori* connus de l'utilisateur. Il peut sembler surprenant d'utiliser le vocabulaire de la physique statistique, usuellement employé pour décrire des systèmes naturels, sur des systèmes artificiels. Pourtant, ces méthodes sont pertinentes étant donné le caractère difficilement prédictible des automates, qui évoque le comportement de systèmes naturels. Nous montrons que cette analogie tient essentiellement à des *apparences* analogues, mais qu'aucun fondement théorique commun n'a été identifié. En effet, Wolfram introduit dans la description de ses simulations des notions polysémiques : l'*ordre*, le *chaos*, ou encore l'idée de *système complexe*. Ces termes sont également utilisés dans la physique des transitions de phase, mais le lien entre l'usage qui est fait de ces termes dans l'un et l'autre domaine tient essentiellement à l'ambiguïté de leur signification. D'autres auteurs, comme Christopher Langton ont cherché à préciser davantage l'analogie de Wolfram. Nous examinons ces tentatives, et montrons que malgré leur ingéniosité, elles ne permettent pas d'identifier un socle théorique commun.

La deuxième partie de notre travail concerne plus précisément la ressemblance existant entre les automates cellulaires et le modèle d'Ising des matériaux magnétiques. En effet, alors que les ACD synchrones échouent à représenter ce modèle et la transition de phase dont il est le siège, d'autres systèmes d'automates en sont capables. Nous développons cette distinction en décrivant deux autres familles de systèmes d'automates cellulaires, proches des ACD synchrones, mais qui présentent des différences fondamentales quant à l'analogie qui les associe au modèle d'Ising des milieux magnétiques : les automates probabilistes synchrones et les automates déterministes asynchrones. Nous décrivons relativement brièvement ces deux nouvelles analogies et identifions des éléments-clés de la théorie que ces automates sont capables d'imiter, par opposition aux ACD. L'étude de ces analogies au modèle d'Ising nous amène à nous questionner sur les différences essentielles qui les opposent. Pour répondre à cette interrogation, nous établissons quelles sont les contributions positives et négatives à ces analogies, autrement dit, nous listons les éléments qui permettent d'évaluer à quel point une analogie peut être fructueuse. Puis nous évaluons ce que nous appelons *potentiel supposé* d'une analogie pour notre cas d'étude, c'est-à-dire l'étendue des propriétés que le créateur de l'analogie prétend extrapoler du domaine source vers le domaine cible. Nous mettons en évidence que ces analogies sont très différentes au regard de tous ces points, et suggérons que créer une typologie des analogies serait très utile pour mieux les décrire, nous proposons alors quelques pistes de travail pour réaliser une telle classification.

## 2 Transition de phase et automates déterministes synchrones

### 2.1 Classification de Wolfram

Précisons d'abord que par soucis de concision, nous ne reprendrons pas les définitions usuelles du domaine qui peuvent être trouvées dans la littérature sur les automates, voir par exemple Sarkar (2000) ou Wolfram (1983). Nous rappelons seulement ici que la règle d'évolution d'un ACD indique quel sera l'état d'une cellule au pas de temps  $t + 1$  connaissant l'état du voisinage de cette cellule à l'instant  $t$ . On peut donc résumer la règle par un ensemble de configurations du voisinage et l'état que chacune produit.

Dans une série d'articles du milieu des années 1980 (Wolfram, 1983, 1984, 1985, 1986), Wolfram propose et discute une classification *phénoménologique* des automates cellulaires déterministes (ACD), à mise à jour synchrone, en fonction de l'état stationnaire de leur évolution dynamique. Phénoménologique signifie ici que c'est l'ensemble des observations expérimentales, sur un ensemble fini de simulations qui guide la classification, et non la règle de mise à jour définissant l'automate. Cette démarche évoque celle d'un naturaliste : face à l'étendue et la diversité des objets examinés, une méthodologie de travail classique consiste à en établir une typologie. Un des intérêts majeurs de cette classification est d'être construite par analogie avec la physique des systèmes dynamiques. Par ce moyen, Wolfram construit des parallèles avec les comportements observables sur des systèmes naturels et suggère de poser les fondements d'une physique des ACD.

L'étude est limitée aux ACD dont la règle est déterministe et indépendante du temps et la mise à

jour se fait de manière synchrone pour toutes les cellules. Soulignons que même avec cette restriction, l'espace des règles à considérer est immense : le nombre de règles pour un automate à  $k$  états et dont le voisinage compte  $\Theta$  cellules est de  $k^{\Theta}$ . Par exemple, l'espace des règles dans lequel est sélectionné le "Jeu de la Vie" contient de l'ordre de  $10^{154}$  règles ( $k=2$ ,  $\Theta=9$ ). Étant donné que cette classification n'est pas rigide, elle peut être élargie à d'autres types de systèmes, en particulier les automates probabilistes, mais, sauf mention contraire, nous resterons ici dans le cadre de l'analyse des automates déterministes synchrones.

Nous allons d'abord présenter les quatre classes décrites par Wolfram, les implications de l'existence de cette classification au sens de l'auteur, ainsi que les questions qu'elle soulève. Nous verrons ensuite que cette classification, fondée sur des observations expérimentales, comporte des faiblesses intrinsèques que nous discuterons ; puis nous étudierons d'autres propositions de classifications visant à résoudre ou contourner ces problèmes.

### 2.1.1 Les quatre classes de Wolfram

La classification de Wolfram est une catégorisation qualitative des règles en fonction du comportement limite *majoritaire* des automates. Le terme majoritaire renvoie ici à l'expression "*almost all*" employée par Wolfram (1984) ; il ne lui donne nulle part de définition précise, et comme nous le verrons, il est difficile de trouver une définition qui soit à la fois stricte et pratique à ce terme (c.f. 2.2.1).

Plus précisément, la classification est fondée sur le constat expérimental qu'après une phase transitoire, les dynamiques des automates tendent vers quatre comportements "typiques", représentés sur la figure 1 :

- *Classe I* : l'automate tend vers un comportement homogène, toutes ses cellules sont dans le même état.
- *Classe II* : l'automate tend vers des structures périodiques stables.
- *Classe III* : l'automate tend vers des structures qui ne semblent pas avoir d'ordre spatio-temporel et sont en apparence chaotiques.
- *Classe IV* : l'automate évolue selon des structures complexes et localisées, dont le temps de vie peut être long.

Plusieurs évolutions typiques de chaque classe sont représentées dans Wolfram (1984) dans le cas d'ACD à une dimension. Notons que cette classification ne devrait avoir de sens que relativement à un espace cellulaire infini : en effet, pour un espace cellulaire à  $N$  cellules et  $k$  états, il y a au plus  $k^N$  configurations possibles, et donc, d'après le théorème de récurrence de Poincaré, pour un système discret, toute évolution serait périodique après une phase transitoire. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Cette classification est guidée par la notion d'attracteurs dans les systèmes dynamiques usuels, c'est-à-dire dans un espace-temps continu (Milnor, 2006). Dans ce domaine, si l'on considère un système dynamique dont l'attracteur est ponctuel, il tend vers un point unique de l'espace des phases. L'analogie de cette situation pour un système discret serait de tendre vers une configuration unique de l'espace des états. Cela correspond aux configurations finales homogènes associées aux automates cellulaires de classe I, mais aussi à certains cas de classe II, où la configuration finale (même si non homogène) se répète à l'identique d'un pas de temps au suivant.

Dans le cas où l'attracteur est un cycle limite, le système dynamique est asymptotiquement cantonné à un sous-espace borné de l'espace des phases. On peut alors associer ce cas aux automates de classe II, qui présentent une configuration finale invariante à une transformation de l'espace cellulaire près. Par exemple, certains automates élémentaires atteignent une configuration inhomogène qui se translate à l'identique d'une cellule à chaque itération. L'évolution de l'ACD est donc asymptotiquement limitée à

un ensemble circonscrit de configurations de l'espace des états, mais pour un espace cellulaire infini, cet ensemble peut être infini.

Enfin, un système qui tend vers un attracteur étrange a un comportement asymptotique apériodique, difficilement prédictible, mais limité à une certaine région de l'espace des phases. Il pourrait correspondre aux ACD associés à la classe III. Toutefois, le parallèle est moins clair que dans les cas précédents et peu approfondi par Wolfram. Par exemple, on peut avoir des représentations d'attracteurs étranges dans l'espace des phases d'un système dynamique continu, alors que la partie de l'espace des configurations accessible pour les ACD de classe III n'est pas facile à établir. D'ailleurs, nous verrons que certains comportements assimilés à la classe III peuvent être extrêmement complexes, ce qui indique que le terme de *chaos* que Wolfram lui associe cache une grande diversité de comportements.

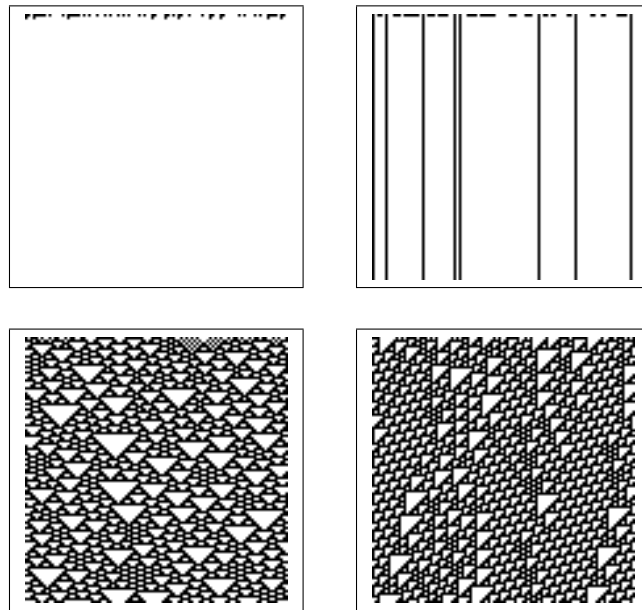


FIGURE 1 : Illustrations des classes d'ACD de Wolfram sur des automates élémentaires. Chaque ligne représente l'état de l'espace cellulaire à un pas de temps, la ligne du haut est l'état initial, la ligne du bas l'état final. En haut à gauche : classe I (règle 8 selon la règle de nommage de Wolfram), l'automate converge vers un espace cellulaire uniforme. En haut à droite : classe II (règle 4), l'automate converge vers un espace cellulaire non-uniforme, mais stable. En bas à gauche : classe III (règle 122), l'automate ne semble pas converger vers un état cellulaire régulier. En bas à droite : classe IV (règle 110), l'automate présente des structures transitoires complexes.

On peut chercher à définir les classes à l'aide d'autres caractéristiques des systèmes dynamiques. Wolfram cherche par exemple à élargir le concept d'exposant de Lyapunov aux ACD (Wolfram, 1984, 1986). En fait, l'analogie n'est pas détaillée, et il s'agit essentiellement de mesurer la vitesse de croissance de la partie de l'espace cellulaire contenant l'information. Cependant, cette mesure peut servir à la recherche d'une classification stricte, point sur lequel nous reviendrons.

Wolfram n'a donc pas donné de définition stricte qui permettrait de construire une correspondance entre les concepts de la physique des systèmes dynamiques et les automates cellulaires, et donc d'établir la portée et les limites de l'analogie entre les deux domaines.

### 2.1.2 Enjeux de la classification

Wolfram formule plusieurs questions et conjectures, dont certaines sont importantes relativement au concept d'analogie, mais aussi pour prendre la mesure de la portée supposée des travaux de Wolfram et ainsi comprendre pourquoi ces articles ont tant suscité la controverse.

**Des machines de calcul.** Wolfram proposait que la classe IV contiennent des automates ayant une propriété exceptionnelle : la Turing-universalité. On lit en effet dans Wolfram (1985), *Problem 16* : “*One speculates that cellular automata identified on statistical grounds as class 4 are in fact generically capable of universal computation.*” En quelques mots, la Turing-universalité est la capacité d'un modèle à simuler la logique de n'importe quel algorithme (Sipser, 2006). Cette propriété est partagée par un grand nombre de langages informatiques implémentés sur ordinateur (si l'on suppose qu'ils ont à leur disposition une mémoire et un temps de calcul infini). En revanche, la Turing-universalité est une propriété rare pour un modèle qui n'est pas construit dans cet objectif précis. Elle est aussi réalisée par divers modèles abstraits, dont une représentation classique est la machine de Turing. Nous ne souhaitons pas entrer ici dans une description détaillée d'une machine de Turing, qui peut être trouvée par exemple dans Turing et Girard (1995), mais il est intéressant d'en donner quelques caractéristiques qui mettent en évidence leur ressemblance avec certains automates cellulaires, pour mieux comprendre comment il serait possible “d'embarquer” une telle machine dans un ACD.

Une machine de Turing peut être décrite comme une bande infinie de cellules, chacune pouvant prendre un nombre fini d'états, qu'on appellera états de cellule. Elle est également munie d'une tête de lecture qui lit les cellules de la bande et qui peut elle-même prendre un nombre fini d'états (états de tête). Enfin, elle comporte une liste finie d'instructions fixées, qui produisent une action en fonction de l'état de tête et de l'état de la cellule ; un exemple typique serait : “modifier l'état de la cellule de A à B, modifier l'état de tête de 4 à 6, et déplacer la tête de lecture sur la bande vers la droite”.

Comparativement aux ACD, la bande de la machine joue un rôle analogue à l'espace cellulaire, la combinaison d'états cellule/tête aurait la fonction des états cellulaires, et la liste d'instruction celle de la règle d'automate. Soulignons qu'il existe aussi des différences notables : la machine de Turing modifie l'état cellule par cellule, elle est donc asynchrone, alors que l'automate met à jour simultanément toutes les cellules. De plus la notion d'état de tête de lecture (en général munie d'états type marche/arrêt) n'est pas trivialement transposable aux ACD. À ce titre, la machine de Turing a un fonctionnement plus proche d'une machine de calcul conçue par l'homme qu'un automate cellulaire. On peut néanmoins insérer un mécanisme de machine de Turing universelle dans certains automates cellulaires (Dhar et al., 1995).

En plus de l'intérêt théorique de cette idée, la recherche de la localisation d'automates cellulaires aux propriétés de calcul intéressantes vise certainement à en tirer des applications pratiques pour les calculateurs. Par exemple, les ACD synchrones sont par construction des calculateurs parallèles, puisque la mise à jour de toutes les cellules est simultanée. On pourrait donc espérer améliorer les performances des machines en effectuant les calculs élémentaires en parallèle via des ACD. Notons toutefois que si l'idée est simplement énoncée, elle ne correspond pas aux techniques de parallélisation effectivement utilisées actuellement. Et plus généralement, les applications des ACD aux machines de calcul sont à notre connaissance inutilisées pratiquement.

**Thermodynamique d'espaces artificiels.** Dans la perspective de notre étude, une dimension essentielle des travaux de Wolfram est la volonté de créer une thermodynamique d'espaces artificiels. On entend par cette expression une thermodynamique qui s'appliquerait à un ensemble de systèmes artificiels, en l'occurrence une famille (ou sous-famille) de règles d'ACD. Le terme *espace* renvoie au fait que cet ensemble n'est pas seulement une collection d'objets, il est structuré et l'on cherche à décrire cette structure. De plus, il faut ici comprendre thermodynamique comme une représentation simple et condensée d'un système comportant un grand nombre de constituants élémentaires. L'idée

est régulièrement présente dans les articles cités, parfois même de manière explicite, e.g., “*How does thermodynamics apply to cellular automata ?*” (Problème 6 de Wolfram (1985)). Mais elle est en fait continuellement présente en toile de fond de tous ces travaux. Par exemple la classification est formulée comme la description des phases d’un espace physique, notion essentielle en thermodynamique.

Wolfram aspire à donner à une famille de comportements qualitatifs une caractérisation quantitative qui permettrait de prévoir l’évolution du système à partir d’informations faciles à obtenir (règle de l’ACD, mesures locales). Or, reformuler dans une écriture simple et compacte ces systèmes complexes est un programme de recherche très ambitieux, car une de leurs principales caractéristiques est la difficulté de prévoir le comportement autrement que par la simulation (voir par exemple Zwirn (2006)). Cette intention renvoie au courant de pensée de la “*digital philosophy*” auquel Wolfram est souvent associé, mais la description de ce courant sort du cadre de ce travail.

En revanche, nous allons revenir en détails sur le contenu de l’analogie entre espace des règles d’automates et thermodynamique chez Wolfram, mais surtout dans les textes d’auteurs qui ont cherché à construire cette analogie de manière rigoureuse.

### 2.1.3 Limites intrinsèques

La classification présente plusieurs faiblesses qui ont été abondamment commentées par la suite. La principale est qu’elle ne propose pas de méthode pour classer systématiquement un ACD depuis sa règle. Plus précisément, elle est guidée par des observations très partielles des comportements dynamiques des ACD. Ainsi, les observations numériques de 1984 sont basées sur des automates cellulaires élémentaires, c’est-à-dire des ACD à 2 états, dont l’espace cellulaire est de dimension 1, et le voisinage définissant la règle est constitué de la cellule et de ses deux voisines directes<sup>2</sup>. Nous décrivons ici des faiblesses qui découlent de l’absence de définitions strictes des classes de Wolfram : *a posteriori*, il faut un grand nombre d’hypothèses et de précisions pour lever les ambiguïtés.

**Échantillonnage des conditions initiales.** La définition d’un comportement dynamique moyen est problématique. S’il s’agit d’un comportement moyen dans le sens de *plus probable*, on ne connaît pas le détail des conventions adoptées par Wolfram pour réaliser l’échantillonnage des conditions initiales. Plus fondamentalement, la définition des classes repose sur un espace cellulaire de dimension infini. Est-il seulement possible de réaliser un échantillonnage satisfaisant d’un tel espace ?

En fait, la classification de Wolfram repose sur une généralisation intuitive aux espaces cellulaires infinis depuis une série de comportements sur des systèmes de taille finie. Dans les simulations numériques de Wolfram, l’espace cellulaire est fini et limité à  $N$  cellules, les ACD élémentaires employés sont alors construits selon des conditions aux limites périodiques : en effet on considère que la  $N^{\text{ième}}$  cellule est voisine de la première. En pratique, une étude expérimentale de l’évolution d’ACD en fonction de leurs conditions initiales est *de facto* une restriction à un ensemble de configurations, puisqu’elle suppose de se limiter à un sous-ensemble fini de conditions initiales.

Un type de configurations initiales couramment utilisées par Wolfram, mais aussi par ses successeurs (en particulier Langton, dont nous discutons les travaux par la suite), sont qualifiées de  $q$ -finies. Elles supposent que l’automate soit muni d’un état quiescent, c’est-à-dire d’un état tel qu’une configuration où tout le voisinage est dans un état  $q$  laisse la cellule dans l’état  $q$ . De cette manière, une région de l’espace cellulaire entièrement quiescente ne peut générer spontanément d’autre état (un état actif). Ses cellules ne peuvent devenir actives que par contamination depuis les bords de la région. Les conditions initiales  $q$ -finies sont telles que l’ensemble des cellules actives est limité à une partie finie de l’espace cellulaire. Implicitement, c’est l’existence d’un tel état dans la règle qui permet de définir les classes I et II : on ne pourrait pas avoir de comportement limite stable s’il n’existait pas de tel état.

---

<sup>2</sup>Dans ce qui suit, nous évoquerons certains de ces automates élémentaires. Leur dénomination suit la convention édictée dans Wolfram (1984).



Nous proposons ici un exemple pratique de procédure possible pour définir un échantillonnage dans le cas de règles munies d'un état quiescent. Un comportement dynamique pourrait être qualifié de *rare* pour un ACD si l'ensemble des conditions initiales générant une telle dynamique est de taille nulle (au sens d'une mesure sur cet espace). Par exemple, si le nombre de configurations tendant vers un espace cellulaire totalement inactif (quiescent) est fini, alors que l'ensemble des configurations initiales est infini, on pourrait considérer que l'automate n'est pas de classe I. Nous reviendrons sur cette question, mais à notre connaissance Wolfram ne fait aucune proposition de ce type, qui permettrait de passer d'une description d'un échantillon de comportements à une classe pour l'automate.

**Existence de la classe IV.** Il n'existe pas de définition stricte à la classe IV, dont le rôle est pourtant de première importance dans les articles de Wolfram. La caractérisation de cette classe est semble-t-il davantage liée à l'intérêt que lui porte l'observateur qu'à un critère mathématique strict. En effet, la classe IV est décrite comme le "*bord du chaos*" (*edge of chaos*), située à la frontière entre l'ordre (classe I et II) et le chaos (classe III). Elle n'est pas définie mais décrite : elle regroupe les ACD exhibant des comportements complexes, de longues phases transitoires faisant apparaître des motifs plus ou moins réguliers, semblant interagir les uns avec les autres.

Le parallèle entre la classe IV et les propriétés de calcul pourrait amener à la définir à l'aide de la Turing-universalité. Mais il est possible de montrer de diverses manières que cette propriété ne peut être attribuée à une seule classe. Ainsi, nous verrons en section 2.2.1 que la proposition d'un critère strict fait apparaître la possibilité de considérer des automates de classe III comme universels. Par ailleurs, des auteurs ont montré qu'il est possible, via un filtrage simple, de faire apparaître dans une évolution apparemment de classe III, des comportements complexes qui seraient attribuables à des automates de classe IV (c.f. par exemple Mitchell (1998)). Enfin nous pouvons citer ici Dhar et al. (1995), article dans lequel les auteurs insèrent un calculateur universel (une machine de Minsky) dans des ACD de classes variées.

En quelques mots, non seulement la Turing-universalité ne semble pas être un critère adapté pour définir une éventuelle classe IV, mais nous ne disposons en fait d'aucune caractéristique claire pour définir cette classe. Les structures complexes décrites comme typiques de cette classe ne peuvent être que des comportements transitoires : en effet, soulignons à nouveau que dans un espace cellulaire fini, tous les comportements asymptotiques sont périodiques.

## 2.2 Classifications strictes des comportements dynamiques

D'autres auteurs ont cherché à lever l'ambiguïté sur les définitions des classes et des comportements dynamiques qui les caractérisent. Nous présentons certaines de ces tentatives dans cette partie et discutons de ce qu'elles impliquent.

### 2.2.1 Formulation à l'aide du taux de croissance

Parmi les tentatives de régularisation de la classification de Wolfram, nous faisons un examen particulier de celle de Baldwin et Shelah (2000).

Les auteurs cherchent à formaliser la notion de taux de croissance à laquelle Wolfram fait appel, notamment pour décrire la classe III ("*Pattern grows indefinitely at a fixed rate*"). Pour les automates munis d'un état quiescent, on peut définir le taux de croissance  $V$  à chaque instant en déclarant que l'état de la cellule d'indice  $i$  à l'instant  $t$  est influencé par l'ensemble des cellules situées dans le cône d'espace-temps délimité par les indices cellulaires  $(i - V \cdot (t' - t))$  et  $(i + V \cdot (t' - t))$ , avec  $t'$  un instant antérieur à  $t$ . On examine alors la limite pour  $t \rightarrow \infty$  du taux de croissance  $V$ .

Cette définition permet de classer non pas un automate, mais une dynamique d'automate, c'est-à-dire un couple (automate, conditions initiales), depuis des conditions initiales  $q$ -finies. En effet, si l'ensemble

des cellules actives de l'automate est contenu dans une région bornée de l'espace cellulaire, Baldwin et Shelah prouvent que seuls quatre comportements sont possibles :

- la région active tend à disparaître,
- sa taille tend vers une valeur finie non-nulle,
- sa taille s'étend indéfiniment et sa croissance devient monotone,
- sa taille s'étend indéfiniment et sa croissance ne devient pas monotone.

Cette classification définit donc de manière stricte quatre classes de dynamique, et on peut y voir une correspondance claire avec celles de Wolfram.

Cependant, Baldwin et Shelah insistent sur le fait qu'il s'agit d'une classification des dynamiques, ramenant alors au problème précédemment évoqué dans la partie sur l'échantillonnage des conditions initiales. Comment, depuis une classification des dynamiques, obtenir une classification des automates eux-mêmes ? Un même automate peut produire plusieurs dynamiques de classes différentes, selon les conditions initiales. Une possibilité serait de mesurer sur l'ensemble des conditions initiales  $q$ -finies, la fraction produisant chaque classe de dynamiques, puis de classer l'automate en fonction de cela ; par exemple un automate produisant majoritairement des dynamiques dont la région active disparaît serait considéré comme de classe I. Mais cette tâche suppose qu'on ait trouvé des ensembles de conditions initiales pour lesquelles la dynamique soit classée, ce qui est une tâche tout aussi complexe.

Par ailleurs, il est montré dans Baldwin et Shelah (2000) que pour tout couple de rationnels  $p$  et  $q$  tels que  $0 \leq p, q \leq 1$  et  $p + q = 1$ , il existe un automate tel que, selon la condition initiale (finie), il ait une probabilité  $p$  d'avoir un comportement asymptotique de classe III et une probabilité  $q$  d'avoir un comportement de classe IV, selon le critère du taux de croissance présenté précédemment. Même si ces automates sont rares, la question de leur classement selon un critère de fraction de conditions initiales comme celui énoncé ci-dessus sera difficile à résoudre. La définition proposée par Baldwin et Shelah est donc très pertinente au regard des observations de Wolfram, mais elle ne permet pas de classer facilement un automate.

### 2.2.2 Classification de Braga

La classification de Braga et al. (1995) aurait inspiré à Baldwin et Shelah l'idée que les dynamiques d'automates partant d'états  $q$ -finis ne peuvent évoluer que selon quatre possibilités. Les trois classes de cette classification sont construites selon la version primitive de cette idée :

- a) Toutes les configurations tendent vers l'état uniformément quiescent.
- b) Toutes les configurations tendent vers l'état uniformément quiescent, excepté pour une région bornée de l'espace.
- c) Il existe au moins une configuration qui s'étend indéfiniment.

Cette classification présente l'avantage d'être logiquement décidable, et les auteurs proposent une méthode qui permet de déterminer la classe à partir de la seule règle, pour les ACD élémentaires. Elle a en revanche également un défaut majeur, elle repose sur une idée que nous pourrions qualifier de *tout ou rien* : si une seule configuration s'étend indéfiniment, l'automate est dans la classe (c). Or, cette caractéristique est extrêmement courante pour des automates dont certaines conditions initiales donnent lieu à des motifs complexes. Braga et ses collaborateurs eux-mêmes estiment que leur classification ne peut être qu'un point de départ à une analyse plus poussée : “[The classification] could be refined to better suit Wolfram’s observations about pattern behavior. However, we take it as a good starting point for the analysis of pattern growth in CAs.”.

### 2.2.3 Classification d'Ishii

La classification d'Ishii (1992) porte sur des automates partant de configurations infinies quelconques. L'auteur donne un sens précis à la formulation de trajectoires *presque toutes* régulières, en introduisant la mesure de probabilité  $\mu$  sur l'ensemble des configurations. Celle-ci est construite de manière à ce que  $\mu \in [0; 1]$ , avec  $\mu(E) = 0$  pour un ensemble  $E$  dont les éléments sont rares dans l'ensemble – ça sera par exemple le cas si  $E$  est de taille finie ; et  $\mu(E) = 1$  signifie que les éléments de  $E$  sont au contraire fréquents dans l'ensemble complet, c'est-à-dire si  $\mu(\bar{E}) = 0$ . La classification d'Ishii est alors définie de la manière suivante :

- a) Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers une configuration homogène en un temps fini.
- b) Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers un attracteur cyclique en un temps fini.
- c) Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires évoluent vers un attracteur cyclique.
- d) Pour presque toutes les configurations initiales, les trajectoires n'évoluent pas vers un attracteur simple.

La classification peut donc être énoncée simplement, mais elle souffre d'un défaut analogue à celle de Braga : la classe d est très large, car elle regroupe tous les automates dont le comportement n'est pas très majoritairement régulier. Cela induit des anomalies vis-à-vis d'un classement intuitif (au sens de Wolfram), par exemple la règle d'ACD élémentaire 210 devrait être considérée comme régulière (classe I ou II de Wolfram) car son état stationnaire peut être réduit à un comportement périodique composé avec une translation, or elle appartient à la classe complexe (d) selon Ishii.

### 2.2.4 Classification de Culik et Yu

La classification de Culik II et Yu (1988) concerne les automates  $q$ -finis. Elle est présentée par commodité sous forme hiérarchique, chaque classe étant incluse dans la suivante :

- a) Toutes les configurations ( $q$ -finies) vont à l'état quiescent.
- b) Toutes les configurations sont finalement périodiques.
- c) Connaissant une configuration  $\alpha$  et une configuration  $\beta$ , la question de savoir si on peut atteindre la configuration  $\beta$  en partant de  $\alpha$  est décidable.
- d) La dernière classe contient tous les automates.

Cette hiérarchie est construite à l'aide de la question de décidabilité. Culik et Yu affirment qu'un automate de classe (c) ne peut pas être universel. L'intention sous-jacente est de "repousser" vers la classe (d) tous les automates complexes que Wolfram associait à sa classe IV. Mais cette démonstration est mise à défaut dans Baldwin et Shelah (2000) et dans Martin (2001), où les auteurs montrent que l'ACD élémentaire noté usuellement 110, dont on sait qu'il est universel (par exemple Cook (2004)), appartient à la classe (c). De plus, Culik et Yu démontrent que la question de savoir à laquelle de ces classes appartient un automate est elle-même indécidable : il n'existe donc pas d'algorithme qui permette de déduire systématiquement d'une règle d'automate sa classe au sens de Culik et Yu.

### 2.2.5 Conclusion sur la classification des comportements dynamiques

Il existe certainement dans la littérature d'autres tentatives de classification des ACD que l'on pourrait comparer à celle de Wolfram, et la revue qui précède ne prétend pas être exhaustive. Par exemple, les classifications basées sur la théorie ergodique font appel à des notions de topologie, telles que les attracteurs, ou la stabilité dans le contexte des espaces de configuration, voir entre autres Hurley (1988); Gilman (1988). Si les définitions de ces classifications sont certainement intéressantes pour structurer l'espace des règles des automates cellulaires, nous ne voyons pas apparaître de parallèle clair avec les tentatives de classification de Wolfram.

Et dans toutes ces tentatives, nous voyons la même alternative : soit le classement d'un automate reste difficile ; soit il est (relativement) simple de décider de la classe d'un automate, mais dans ce cas une classe agglomère un très grand nombre de comportements qu'on souhaiterait séparer. Autrement dit, aucune des classifications proposées est à la fois simple et utile dans la perspective de lever l'ambiguïté sur la classification de Wolfram. En fait, le caractère complexe des propriétés dynamiques recherchées suggère qu'aucune classification ne puisse apporter satisfaction sur ces deux points – cette hypothèse est également défendue dans Baldwin et Shelah (2000).

## 2.3 L'analogie thermodynamique

Dans les articles précédemment cités (en particulier Wolfram (1985)), Wolfram propose plusieurs pistes pour définir des critères quantitatifs de classification. Dans Wolfram (1984), l'auteur avance un point fondamental : la proposition d'une analogie entre les espaces artificiels d'ACD et les variables d'état de systèmes thermodynamiques au cours d'une transition de phase. Soulignons à nouveau que les transitions de phase en thermodynamique sont souvent formalisées à la manière d'un système dynamique changeant d'attracteur, faisant de ces comparaisons les deux aspects d'une même analogie. Les implications d'une telle analogie sont potentiellement considérables. En effet, s'il est effectivement possible d'appliquer des raisonnements thermodynamiques aux AC, on pourrait caractériser la dynamique à l'aide d'un petit nombre de grandeurs statistiques mesurables. Cela serait certainement une avancée importante pour notre maîtrise des ACD : elle permettrait de construire rapidement des automates aux propriétés particulières, puis de les combiner, etc.

Pour explorer la signification de cette analogie, nous rappelons d'abord quelques éléments de la théorie des transitions de phase en physique. Ensuite, nous étudierons les travaux d'auteurs ayant cherché des mesures pour décrire statistiquement le comportement des automates. Nous détaillerons les éléments que l'on retrouve dans l'un et l'autre domaines, et discuterons si ceux-ci sont suffisants pour transposer les raisonnements de la physique des transitions de phase aux espaces des règles d'automates cellulaires.

### 2.3.1 Phases thermodynamiques

La théorie des transitions de phase met en évidence des comportements spécifiques des paramètres thermodynamiques, dont on cherche les équivalents dans le domaine des automates cellulaires. Les concepts fondamentaux de la thermodynamique sont présentés de manière détaillée dans les ouvrages de référence du domaine, par exemple Callen (1998). Dans cette section, nous présentons quelques uns de ces concepts, que nous identifions comme des éléments importants pour établir des liens avec le domaine des ACD.

**État.** Une première notion fondamentale est celle d'état thermodynamique : on suppose que le comportement d'un système peut être décrit à l'aide d'un petit nombre de variables (les variables d'état). Plus précisément, sans perturbation extérieure, le système évolue vers une situation d'équilibre dans laquelle il peut être caractérisé à l'aide d'un *petit nombre* de grandeurs macroscopiques mesurables. Ces quantités sont associées entre elles par une ou plusieurs équations qui caractérisent le système : les équations

d'état. À ce point de la réflexion, il n'y a pas d'équivalent explicite à ces notions pour les ACD. Cependant, l'état du système est décrit par l'état cellulaire, dont l'évolution est entièrement déterminée par la règle, qui jouerait donc le rôle d'équation d'état (ou contiendrait celle-ci).

Notons que, dans le cas thermodynamique, le système peut être caractérisé par son énergie, dont les variations peuvent être exprimées à l'aide d'autres variables thermodynamiques. Par ailleurs, une variable souvent pertinente pour la description du système est l'entropie. On la décrit souvent abusivement comme une mesure de "désordre". Il serait plus exact de dire qu'elle mesure le manque d'information à l'échelle macroscopique sur la constitution du système à l'échelle microscopique. L'énergie et l'entropie jouent un rôle particulier car elles interviennent respectivement dans le premier et le second principe de la thermodynamique. S'il s'avère possible de construire une analogie avec les ACD, il serait capital de savoir s'il est nécessaire de trouver un équivalent à ces principes.

**Paramètre de contrôle.** Dans le cas des transitions de phase, les dispositifs expérimentaux sont conçus de manière à ce qu'une variable soit contrôlée par l'expérimentateur. Ses variations permettent alors de se déplacer dans l'espace des états du système, et on qualifie cette variable de *paramètre de contrôle*. Un exemple classique serait celui de l'observation des transitions liquide-gaz en modifiant le volume du dispositif expérimental (par exemple à l'aide d'un piston pour une enceinte fermée). C'est donc ici le volume qui joue le rôle de paramètre de contrôle. Nous nous interrogerons sur la possibilité de définir un tel paramètre dans le contexte des ACD, où il n'y a pas d'équivalent simple à la notion d'état thermodynamique.

**Caractéristiques des transitions.** Le passage d'une phase à une autre se caractérise par des changements qualitatifs dans le comportement du système ; la théorie des transitions de phase traduit mathématiquement les changements observés. Ainsi, la classification historique d'Ehrenfest (e.g. Stanley (1987)) permet de caractériser les transitions de phase à l'aide de discontinuités mathématiques des variables d'état. Certaines transitions, comme la transition solide - liquide, sont caractérisées par la discontinuité des dérivées premières de l'énergie libre de Gibbs du système par rapport à certaines variables thermodynamiques. Par exemple, le volume du système est discontinu lors d'une transformation isotherme, pour laquelle le volume s'exprime comme la dérivée de l'énergie libre par rapport à la pression. Pour d'autres transitions, ce sont les dérivées secondes de l'énergie libre qui sont discontinues. C'est le cas du changement d'état ferromagnétique - paramagnétique, sur lequel nous reviendrons par la suite.

La classification d'Ehrenfest n'est plus très utilisée aujourd'hui et la classification actuelle des changements d'état prend en considération des transitions où certaines grandeurs divergent près de la transition, par exemple la capacité calorifique d'un matériau ferromagnétique. Cette classification s'appuie notamment sur la théorie de Landau (1937), qui permet de décrire les transitions dites de second ordre, où certaines grandeurs thermodynamiques divergent près du point de transition. Nous allons leur accorder un intérêt particulier car les régimes transitoires longs dans les ACD sont décrits comme une caractéristique de la classe IV. Cela suggère qu'une hypothétique transition de phase dans les ACD soit caractérisée par la divergence de grandeurs mesurables. La description de Landau utilise les symétries existant dans chacune des deux phases et tire parti du fait qu'une phase apparaît souvent plus ordonnée que l'autre<sup>3</sup>. Dans les transitions du second ordre, on peut définir un paramètre d'ordre de la transition : une grandeur ayant la propriété d'être nulle dans la phase désordonnée et non-nulle dans la phase ordonnée.

Dans le contexte des automates cellulaires, si l'on pense qu'ils sont l'objet d'une transition de phase, il serait légitime de rechercher une grandeur mesurable dans le système d'automates qui soit discontinue ou divergente à la transition. En effet, si l'on souhaite établir une correspondance forte entre l'un et l'autre domaine, une piste consiste à rechercher des analogues aux paramètres d'ordre, variables d'état et phases du système.

---

<sup>3</sup>Dans le sens où le groupe de symétrie de celle-ci est inclus dans celui de l'autre.

### 2.3.2 Mesures statistiques

Wolfram cherche à définir un ensemble d'observables permettant de décrire le système comme le font les variables d'états pour un système thermodynamique. Ces mesures sont réalisées indépendamment de la règle, le but étant de définir des lois autonomes à l'échelle de la dynamique du système (par opposition à des lois dépendant de la règle). Pour que la description de Wolfram admette une formulation comparable à celle de la thermodynamique, une hypothèse fondamentale consiste à supposer que la description du système peut être faite à l'aide d'un petit nombre de variables dont la donnée suffit à déterminer le comportement. Dans cette partie, nous définissons l'entropie de Shannon et l'information mutuelle qui sont les deux mesures statistiques fondamentales employées par Wolfram et ses successeurs.

**Entropie de Shannon.** L'entropie thermodynamique peut être exprimée à l'aide de la formule de Boltzmann ; celle-ci la décrit comme une fonction du nombre d'états microscopiques correspondant à l'état thermodynamique (macroscopique) observé. Cette grandeur mesure donc à quel point la connaissance de l'état thermodynamique informe sur le système à l'échelle microscopique. L'entropie de Shannon est construite par analogie dans le contexte de la théorie de l'information. On la définit alors, pour une variable  $x$  pouvant prendre les valeurs discrètes  $\{x_1, \dots, x_n\}$  selon une distribution de probabilité  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , comme :

$$S(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log(p_i)$$

Les automates cellulaires étant des systèmes à états discrets, ils se prêtent à une formulation de ce type : l'ensemble des valeurs accessibles est constitué par les états de l'automate et  $p_i$  est la probabilité d'observer une cellule dans l'état  $i$ . Selon l'ensemble de cellules  $E$  dont on mesure l'état, il existe des variations sur cette définition :  $E$  peut être constitué des différents états d'une même cellule au cours de son évolution (on parlera alors d'entropie temporelle, ou d'entropie par cellule) ; il peut également s'agir d'un bloc de cellules à un même pas de temps (entropie spatiale), ou encore d'un mélange des deux. Dans tous les cas, l'objectif est de mesurer la diversité des états pris par l'automate. Ainsi, pour des automates de classes I et II, pour lesquels le comportement asymptotique est majoritairement régulier, on attend une entropie spatiale et temporelle faible comparativement aux ACD de classe III.

**Information mutuelle.** Dans les transitions de phase de second ordre, les corrélations spatiales des grandeurs thermodynamiques tendent à diverger près de la transition. Wolfram cherche alors une mesure dont le comportement serait analogue dans les systèmes d'ACD. Les corrélations sont utiles pour caractériser les transitions : elles divergent près du point critique pour les transitions du second ordre selon une loi de puissance, voir par exemple Stanley (1987). De plus, la divergence des corrélations près du point critique se traduirait par l'apparition de motifs dont la taille caractéristique peut être grande, ce qui évoque le comportement des automates de classe IV.

Pour mesurer les corrélations entre états dans les ACD, une fonction classique de théorie de l'information est l'information mutuelle. On la définit ici entre deux ensembles de cellules  $E_x$  et  $E_y$  par :

$$I(E_x, E_y) = S(E_x) + S(E_y) - S(E_x, E_y) = S(E_x) - S(E_x|E_y) = \sum_{x_i, y_j} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

Où  $S(E_x, E_y)$  désigne l'entropie conjointe des deux ensembles de cellules et  $S(E_x|E_y)$  l'entropie conditionnelle de  $E_x$  sachant  $E_y$ . Avec cette définition, si l'état d'un ensemble de cellules est indépendant de l'état de l'autre, l'information mutuelle est nulle. Cela devrait être le cas dans la classe III, où les cellules semblent prendre des configurations aléatoires.

Pour les classes I et II, dans l'état asymptotique, on peut déduire les états des cellules les uns à partir des autres. Par exemple pour un automate de classe I, connaître une cellule permet de connaître l'état

de toutes les autres ; cependant, l'entropie étant elle-même faible ou nulle, l'information mutuelle l'est aussi. Cette mesure serait donc pertinente près d'une éventuelle transition de comportement : l'apparition de motifs corrélés à grande distance se traduira par des pics d'information mutuelle.

### 2.3.3 Paramètres de contrôle dans l'espace des règles

Pour établir un parallèle entre les ACD et les systèmes thermodynamiques, il faudrait observer la transition des comportements réguliers vers des comportements chaotiques comme une variation brutale des mesures statistiques précédemment définies, vis-à-vis d'un certain paramètre  $x$ . Ce paramètre joue donc un rôle analogue au paramètre de contrôle des systèmes thermodynamiques : il permet de parcourir l'espace à décrire, ici, l'espace des règles d'automates. Sa définition est donc une tâche complexe, car  $x$  doit être construit de manière à saisir ce qui, dans la règle, va amener un comportement régulier ou non dans la dynamique. Nous présentons dans cette partie deux équivalents des paramètres de contrôle de l'espace des règles proposés dans la littérature. La pertinence de la classification devrait alors apparaître au travers de la mesure de l'entropie de Shannon et de l'information mutuelle lorsque l'on fait varier ces paramètres.

**Le  $\lambda$  de Langton.** Une des contributions majeures sur cette question est due à Langton et ses collaborateurs autour de l'année 1990, on peut citer notamment : Langton (1990); Li et al. (1990); Li et Packard (1990); Wootters et Langton (1990); Gutowitz et Langton (1995). En effet, ceux-ci ont proposé une paramétrisation de l'espace des états permettant de retrouver des comportements qualitativement analogues à ceux observés au cours de transitions de phase. Ils proposent un coefficient, noté  $\lambda$ , qui jouerait le rôle de paramètre de contrôle dans le cas de la "transition vers le chaos" observée par Wolfram sur les ACD. Ces travaux s'inscrivent d'ailleurs dans la lignée directe de ceux de Wolfram, en particulier par l'intention explicite de circonscrire à une région de l'espace les règles d'automate "intéressantes".

Les auteurs énoncent l'hypothèse du *bord du chaos*, qui correspondrait à l'existence de la classe IV de Wolfram. Résumons celle-ci brièvement (énoncée en détails dans Gutowitz et Langton (1995)), on suppose qu'il existe des phases bien déterminées dans l'espace des règles, i.e. il existe des paramètres dont l'évaluation suffit à prévoir le comportement dynamique de l'automate. L'une de ces phases, le bord du chaos, est située entre les phases d'ordre et de désordre. Elle correspond à une région clairement délimitée de l'espace des règles et de manière informelle, on pourrait dire qu'on peut en tracer ses frontières sans lever le crayon de la feuille. Enfin, les règles appartenant au bord du chaos peuvent être identifiées à leur seule lecture.

La procédure de Langton et al. suit une logique analogue à celle de Wolfram : il s'agit de résultats d'expériences numériques.  $\lambda$  est défini de la manière suivante : on choisit arbitrairement un état de référence parmi les états de l'automate, si  $f$  est la fraction des configurations de la règle produisant cet état de référence, alors  $\lambda = 1 - f$ . De cette manière, si une forte proportion des configurations produisent l'état de référence, alors  $\lambda$  est petit et on s'attend à ce que les configurations produites deviennent rapidement homogènes.

Plusieurs protocoles expérimentaux sont décrits dans cette série d'articles. Nous en décrivons ici un seul pour résumer l'esprit de ces études. Initialement, la règle est telle que  $\lambda = 0$ , autrement dit, toutes les configurations produisent l'état de référence. On laisse l'ACD évoluer sur un nombre de pas fixé depuis une configuration initiale aléatoire, puis on mesure l'entropie et l'information mutuelle d'un groupe de cellules. Dans le cas particulier où  $\lambda = 0$ , l'ensemble des cellules évolue vers l'état de référence dès le second pas de temps puis y reste. Par conséquent l'entropie et l'information mutuelle sont nulles à partir du second pas de temps. On change ensuite légèrement la règle de l'ACD de la manière suivante : on choisit alors une configuration aléatoire de la règle produisant l'état de référence, puis on modifie l'état produit en le remplaçant par un état aléatoire quelconque. Cette modification augmente donc nécessairement la valeur de  $\lambda$ . On laisse évoluer ce nouvel ACD, puis on mesure l'entropie et l'information mutuelle du

groupe de cellules sélectionné. On itère cette procédure sur la nouvelle règle, et ainsi de suite jusqu'à atteindre  $\lambda = 1$ . Avec cette méthode, on parcourt à l'aide du paramètre  $\lambda$  l'espace des règles, et on mesure de quelle manière évolue l'entropie et l'information mutuelle pendant ce parcours.

Les figures 7 et 12 de la référence Langton (1990) sont des exemples typiques des mesures obtenues à l'aide de telles protocoles. Leurs allures montrent une rupture nette du comportement qualitatif ce qui permet de distinguer deux régimes disjoints. Au-delà d'une certaine valeur de  $\lambda$ , l'entropie et l'information mutuelle augmentent subitement : il n'existe plus de dynamiques régulières. Après cette phase de croissance brutale, l'information mutuelle décroît. Cette décroissance correspond au fait évoqué précédemment que dans les dynamiques chaotiques, l'état d'une cellule est peu informatif sur l'état des cellules voisines, donc l'information mutuelle est faible. De plus, il y a divergence des temps de transition pour la valeur de  $\lambda$  associée au saut d'entropie et d'information mutuelle. Pour chacune des valeurs de  $\lambda$  on peut placer un point dans le plan *entropie normalisée*<sup>4</sup> vs. information mutuelle (figure 14 de Langton (1990)). Les points se regroupent en deux nuages principaux qui correspondraient aux comportements majoritairement réguliers ou chaotiques des dynamiques à  $\lambda$  fixé.

Les études de Langton et al. sont un argument en faveur de l'analogie de Wolfram car les comportements mis en évidence sont qualitativement semblables à ceux de transition de phases physiques. Nous pouvons par exemple trouver une ressemblance entre l'allure de ces courbes expérimentales et celles de mesures physiques réalisées au cours d'une transition ferromagnétique-paramagnétique, c.f. figure 2.

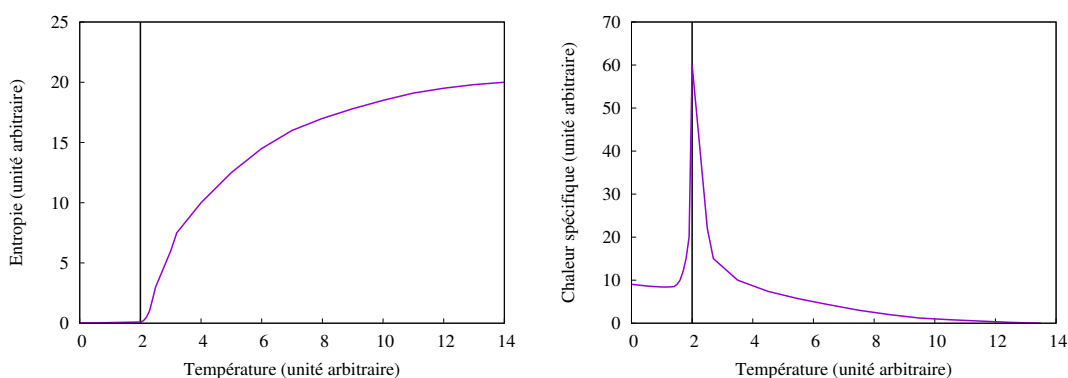


FIGURE 2 : Allure typique de l'entropie (gauche) et de la chaleur spécifique (droite) en fonction de la température au cours de la transition ferro-paramagnétique.

Néanmoins, le parallèle n'est pas totalement satisfaisant. D'abord il n'est pas possible de localiser une valeur précise de  $\lambda$  pour laquelle il y a transition. De plus, la discontinuité de l'entropie et de l'information mutuelle rappelle le comportement typique des transitions du premier ordre (au sens de la classification actuelle), en revanche, la divergence des temps de transition est un phénomène caractéristique des transitions du second ordre<sup>5</sup>. Ces observations ne sont donc pas compatibles si l'on se réfère à la théorie des transitions de phase, et nous ne pouvons pas espérer une transposition simple de celle-ci au contexte des ACD. D'autres aspects du protocole peuvent être également discutés : le choix des conditions initiales, la procédure de construction des règles, ou encore le choix du voisinage et du nombre d'états des automates.

Plusieurs études ont cherché à démontrer la pertinence du choix de  $\lambda$  comme paramètre de contrôle de l'espace des règles. Notons d'abord la tentative originale de Packard (1988), qui cherche à montrer qu'un automate "intéressant", dans le sens où il est capable de réaliser une tâche de classification, doit correspondre à une valeur de  $\lambda$  située près de la frontière entre ordre et chaos. Ces travaux ont ensuite

<sup>4</sup>Cette grandeur est une forme normalisée de l'entropie de Shannon, de manière à évoluer entre 0 et 1.

<sup>5</sup>On trouvera des figures rendant compte de ce phénomène dans Langton (1990).



été contestés, notamment par Mitchell et Crutchfield dans plusieurs articles : Mitchell et al. (1993); Crutchfield et Mitchell (1995), qui mettent en évidence les biais intrinsèques de cette démarche.

Un autre article important dans cet esprit est Li et al. (1990) où Li, Packard et Langton s'avancent plus explicitement que ne le faisait Wolfram sur le parallèle possible avec les changements d'état. Ils y proposent une structure de l'espace des règles, résumée par la figure 3, qui serait cohérente avec leurs observations. En effet, selon la manière selon laquelle l'expérimentateur parcourt l'espace des règles, la discontinuité selon la valeur de  $\lambda$  est plus ou moins nette, au point d'être quasi-inexistante dans certains cas. Une explication possible est que cette transition ne puisse être décrite correctement qu'avec au moins deux paramètres de contrôle : le  $\lambda$  et le ? de la figure 3. On pourrait alors décrire cette transition par analogie avec le changement d'état liquide-vapeur en thermodynamique, étudié avec les paramètres pression et température : ce changement de phase est en général du premier ordre, avec une discontinuité des variables thermodynamiques du système à la transition ; sauf pour un certain couple (pression, température) : le point critique, auquel la transition est du second ordre. L'analogue du point critique dans la représentation de la figure 3 serait le point associé à la valeur  $\lambda_{min}$ .

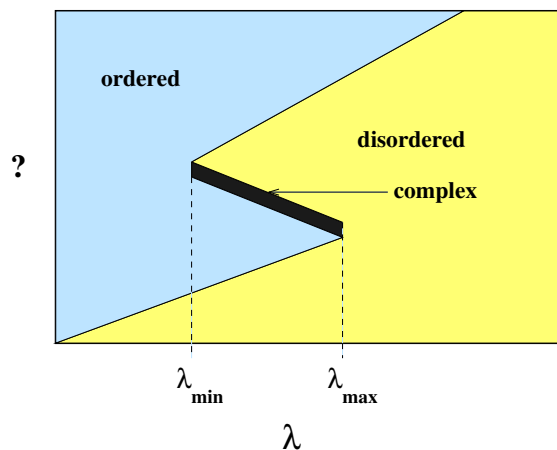


FIGURE 3 : Représentation hypothétique de l'espace des automates cellulaires, adaptée de Li et al. (1990).

La figure 3 illustre la conception des auteurs de l'espace des règles : la classe IV (complexe) existe et est clairement délimitée ; c'est l'hypothèse du bord du chaos dans son sens le plus strict. En-dehors du problème de l'existence de la classe IV, discuté précédemment, le seul fait que l'on puisse décrire l'espace cellulaire avec des phases clairement identifiées d'ordre et de chaos n'est qu'une hypothèse ; à notre connaissance, il n'y a pas eu depuis d'étude justifiant cette conception.

**Le Z de Wuensche.** Nous discutons ici une approche comparable à celle de Langton *et al.*, mais dans laquelle l'analogie avec les changements d'état joue un rôle plus secondaire. Andrew Wuensche (1998) recherche également un paramètre de l'espace des règles susceptibles de discriminer les règles ordonnées des chaotiques ou des "complexes", mais sans a priori sur la structure de l'espace des règles. La procédure suivie par l'auteur vise à reconstruire la totalité du portrait de phase de l'automate. Dans le cadre des ACD, un portrait de phase est défini comme un graphe orienté dont chaque sommet est une configuration de l'espace cellulaire et un lien dirigé traduit la transition d'une configuration à une autre par application de la règle de l'ACD. Comme le nombre de configurations de l'espace cellulaire croît exponentiellement avec le nombre de cellules et le nombre d'états, déterminer tout le portrait n'est possible que dans des cas très simples, ainsi dans Wuensche (1998), l'auteur considère un ACD à 16 cellules et 2 états.

Nous ne détaillons pas ici la définition précise et la procédure technique d'évaluation de  $Z$ , qui peuvent être trouvées dans Wuensche (1998). On peut comprendre schématiquement  $Z$  comme la probabilité pour qu'une cellule de l'automate soit déterminée sans incertitude lorsque l'on connaît une partie significative de l'espace cellulaire au même instant. Cette probabilité peut être écrite sous la forme d'une expression analytique, et  $Z$  (comme  $\lambda$ ) peut être déterminé sans ambiguïté à l'aide de la table de transition d'une règle. Un  $Z$  proche de 0 signifie que beaucoup de configurations peuvent mener à la configuration observée, la convergence est rapide et le comportement serait régulier. À l'inverse, un  $Z$  proche de 1 traduit des transitions plus longues et plus complexes. Ici encore, notons que dans tous les cas, la dynamique converge vers un attracteur périodique à long terme puisque l'espace cellulaire est fini.

La définition et le calcul de  $Z$  sont plus compliqués que ceux de  $\lambda$ , en revanche, certaines mesures semblent indiquer de meilleures performances pour localiser la transition. Nous prenons l'exemple du "Jardin d'Eden" d'un ACD. Ce terme désigne l'ensemble des configurations de l'espace cellulaire n'ayant pas d'antécédent pour la règle considérée ; Wuensche en mesure la densité, i.e., la fraction parmi toutes les configurations possibles. Une densité élevée traduit donc une convergence rapide et donc un automate cellulaire régulier, à l'inverse une densité faible est associée aux automates chaotiques. L'allure de la figure 9 de l'article Wuensche (1998) semble indiquer que le paramètre  $Z$  localise plus clairement la transition dans l'espace des règles que ne le ferait  $\lambda$ , car les points semblent disposés sur une courbe plus régulière. Il faut néanmoins être prudent quant à l'interprétation de cette mesure, car  $Z$  est construit pour être fortement corrélé à la taille du jardin d'Eden.

Notons enfin que si le point de vue de Wuensche est distinct de celui de Langton et al, l'intention de classer les automates est aussi un des buts explicites de Wuensche (1998). La méthode suivie est la même : il utilise des mesures statistiques (en l'occurrence entropie et dispersion de l'entropie) pour localiser les règles ordonnées, chaotiques ou complexes (c.f. figures 18 et 19 de Wuensche (1998)). Cependant, il n'apparaît pas de frontière nette permettant de discriminer les unes des autres à l'aide de cette mesure.

### 2.3.4 Conclusion sur l'analogie thermodynamique

Des notions fondamentales en thermodynamique, telles que l'équation d'état ou le paramètre de contrôle, n'ont pas d'équivalent simple dans le contexte des automates cellulaires déterministes. Par conséquent, l'analogie entre une transition de phase et le comportement des ACD est très partielle. Par exemple, elle ne permet pas jusqu'à présent, de réaliser des prévisions quantitatives. Elle présente toutefois un certain nombre de ressemblances d'apparence prometteuse. Ce constat amène donc à s'interroger sur la notion même d'analogie et de l'évaluation de son potentiel.

## 3 Discussion sur la notion d'analogie par l'exemple des transitions de phase et des automates cellulaires

S'il était possible de prévoir le potentiel d'une analogie en fonction de ses caractéristiques, on disposerait d'un outil puissant pour orienter le raisonnement. Cependant, nous avons vu sur le cas de l'analogie de Wolfram qu'un travail important, dont seulement une fraction a été discutée ici, avait été nécessaire pour en montrer les limites. Avant même de discuter l'existence de règles qui permettraient d'évaluer le potentiel d'une analogie, soulignons que le sens de cette expression, *potentiel d'une analogie*, est large et même ambigu. En effet, par *potentiel*, nous supposons que l'analogie guide vers une connaissance encore inconnue, mais quel type de connaissances cherchons-nous à identifier ? Par ailleurs, l'association d'idées par ressemblance entre deux objets distincts est une faculté essentielle du raisonnement, est-ce que toute ressemblance entre des observations peut être qualifiée d'*analogie* au même titre que celle de Wolfram ?

Nous ne prétendons pas répondre à ces questions ici, mais pour amorcer une réflexion sur ce problème,

nous l'abordons au travers de plusieurs analogies dont nous comparons les caractéristiques. Nous les avons choisies pour leur proximité avec celle de Wolfram, mais dans un domaine plus restreint, afin de discuter plus précisément de leurs propriétés. En effet, nous étudions la représentation d'un modèle simple et classique des milieux magnétiques à l'aide d'automates : le modèle d'Ising. Contrairement au cas que nous avons étudié jusqu'à présent, des auteurs ont pu construire des analogies élaborées de la transition de phase dans le modèle d'Ising avec certains types d'automates. Il est donc intéressant d'examiner ce qui distingue ces cas du précédent pour débiter notre réflexion. Nous décrivons quelles difficultés émergent d'un tel parallèle, en particulier sur la façon dont est construit l'analogie du paramètre de contrôle. La description que nous faisons ici n'entre pas aussi précisément dans le détail technique que nous l'avons fait pour l'analogie de Wolfram. En particulier, nous n'explicitons pas les équations du modèle, mais décrivons le rôle de chaque élément dans les articles cités. Ensuite, nous entreprenons de décrire ce qui distingue ces analogies de celle de Wolfram. Suivant une approche inspirée du travail de John D. Norton (2011), nous cherchons à expliciter sur ces exemples particuliers les éléments qui permettent de reconnaître une analogie potentiellement forte.

### **3.1 Analogies entre automates cellulaires et modèle d'Ising**

Nous avons décrit des similitudes qualitatives frappantes entre le comportement d'ACD et la transition de phase ferro-paramagnétique que l'on observe dans certains matériaux. Deux études construisent des analogies profondes entre le modèle d'Ising des milieux magnétiques et des familles d'automates cellulaires différentes de celle considérée jusqu'à présent.

Le modèle d'Ising est utilisé pour décrire la transition de phase ferro-paramagnétique, et malgré sa simplicité, il permet de retrouver un certain nombre de propriétés remarquables. Il est décrit dans l'article original d'Ising (1925), ainsi que dans de nombreux travaux postérieurs (e.g., Brush (1967)). Dans cette partie, nous décrivons des travaux contemporains de ceux de Wolfram cherchant à établir une correspondance entre les caractéristiques de ce modèle et celles d'un système d'automates Domany et Kinzel (1984); Creutz (1983, 1986). Mais les automates considérés n'appartiennent pas à la famille des automates déterministes à mise à jour synchrone, étudiée jusqu'à présent.

#### **3.1.1 Caractéristiques du modèle d'Ising**

Certains milieux magnétiques sont représentés par un réseau rigide dont chaque nœud porte un moment magnétique (son spin) dont les orientations possibles sont en nombre fini. Les nœuds du réseau peuvent être vus comme des analogues aux cellules de l'automate et les orientations des spins sont l'analogie des états de ces cellules. Les propriétés magnétiques observées à l'échelle macroscopique sont le résultat d'un comportement collectif des spins : par exemple, si ceux-ci sont en grande majorité orientés dans le même sens, l'échantillon génère un moment magnétique global dans cette direction. L'aimantation macroscopique est alors non-nulle et cette grandeur physique est un paramètre d'ordre de la transition.

Le modèle d'Ising représente ce type de situations lorsque deux états seulement sont accessibles. On considère qu'un spin n'interagit qu'avec ses proches voisins dans le réseau, de la même manière que l'état d'une cellule est influencé par l'état des cellules de son voisinage immédiat. Le modèle permet de simuler une transition de la phase ferromagnétique, où les spins sont en majorité orientés dans la même direction, vers la phase paramagnétique où il n'y a pas d'orientation privilégiée et l'aimantation globale du matériau est nulle en l'absence de champ extérieur.

Le modèle permet de décrire le comportement qualitatif des deux phases, en utilisant la température comme paramètre de contrôle. On obtient une température de transition d'une phase à l'autre, nommée température critique. En s'approchant de la transition par valeurs supérieures de température (c'est-à-dire dans la phase paramagnétique), on voit apparaître des domaines magnétiques dont la taille diverge lorsqu'on s'approche du point de transition (c.f. figure 4). Ces observations sont cohérentes avec les

transitions observées sur des matériaux réels. Notons également que l'allure de ces domaines évoque la forme des structures complexes associées à la classe IV de Wolfram.

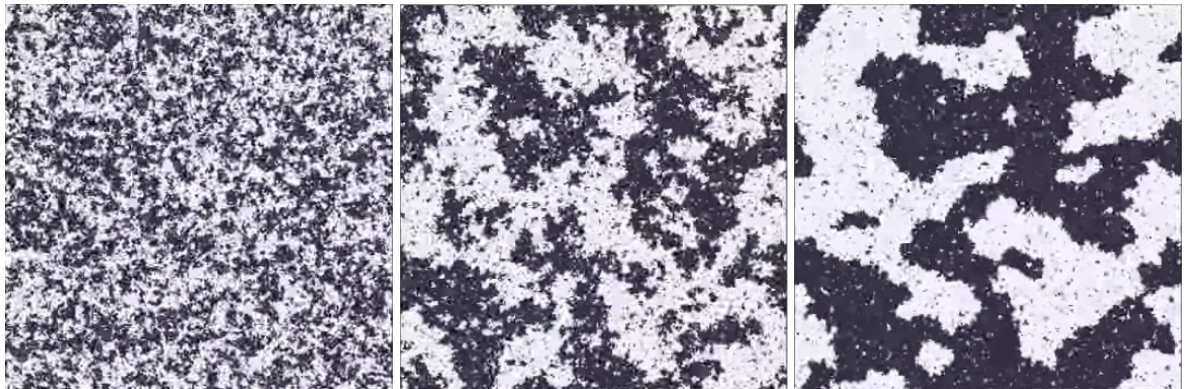


FIGURE 4 : Allures des domaines magnétiques selon le modèle d'Ising ; de gauche à droite : on s'approche du point de transition par valeurs supérieures.

### 3.1.2 Analogie de Domany et Kinzel

Les analogies que nous discutons ici sortent du cadre des ACD examinés jusqu'à présent. D'ailleurs, il a été montré par Vichniac (1984) que des règles déterministes et synchrones ne permettent pas de simuler exactement le modèle d'Ising. Dans Domany et Kinzel (1984), les auteurs utilisent des automates cellulaires probabilistes à deux états, où la règle fournit une probabilité de passer dans un certain état, étant donné le voisinage au pas de temps antérieur. Ils considèrent des automates dont l'espace cellulaire est de dimension 1 et font correspondre son évolution temporelle au modèle d'Ising dans un espace de dimension 2. Pour ce faire, la dimension correspondant à l'évolution temporelle de l'automate est associée à une dimension spatiale du modèle d'Ising. De cette manière, les représentations des domaines magnétiques telles que celles de la figure 4 sont comparables aux représentations de la dynamique des automates à une dimension (comme les représentations proposées par Wolfram et représentées sur la figure 1). Une fois cette idée admise, la construction de l'automate suit point par point le "plan" fourni par le modèle d'Ising. L'automate évolue vers un état stationnaire qui présente des régions cellulaires analogues aux domaines magnétiques du modèle d'Ising.

Un élément important de cette approche est que l'analogie du paramètre de contrôle thermodynamique (la température) est intégré à la règle de transition de l'automate. En thermodynamique, la température mesure l'agitation microscopique du système, c'est la source du désordre. En effet, un spin peut changer d'orientation en raison du caractère probabiliste de la compétition entre l'agitation thermique et l'énergie d'interaction entre spins voisins. Pour l'automate, c'est la règle-même qui porte ce caractère probabiliste et qui va introduire les fluctuations d'états des cellules et ainsi faire en sorte qu'on assiste à une transition de phase dans un espace d'automates cellulaires. Autrement dit, la possibilité de construire l'analogie tient au fait que les automates sont probabilistes. Il s'agissait donc pour les auteurs de construire la règle d'automate de manière à imiter le comportement de la compétition entre agitation thermique et interaction spin-spin. Une telle approche ne pourra donc pas être extrapolée pour construire une analogie avec des automates déterministes.

Notons que la construction de Kinzel et Domany, aussi pertinente soit elle, ne nous apprend en théorie rien que nous ne sachions déjà sur le modèle d'Ising lui-même, puisque l'automate est entièrement construit depuis le modèle. À ce titre, on peut décrire ce travail comme une implémentation, une mise en œuvre numérique du modèle d'Ising.

### 3.1.3 Analogie de Creutz

Dans l'approche de Creutz (1983, 1986), les automates considérés sont déterministes, mais asynchrones : la mise à jour des cellules ne se fait pas de manière simultanée dans tout l'espace. Le point central de ces études est l'utilisation de "démons" : des variables qui peuvent stocker ou céder de l'énergie au reste du système magnétique. Bien que l'auteur n'explique pas dans Creutz (1983, 1986) l'automate associé, nous essayons d'en imaginer un exemple. Supposons que le démon ait deux états d'énergie : haute et basse, chaque nœud du réseau d'Ising aurait alors deux orientations possibles pour son spin, et deux états d'énergie possibles. Pour l'automate analogue, cela signifie qu'il n'y a plus deux mais quatre états cellulaires possibles : (spin up, démon haut), (spin up, démon bas), (spin down, démon haut), (spin down, démon bas). L'information correspondant à la température serait donnée par la configuration de l'espace cellulaire, et non plus par la règle seule, comme c'est le cas dans l'analogie de Domany et Kinzel. La mise à jour asynchrone des cellules permet de faire circuler l'énergie dans l'espace cellulaire, c'est-à-dire, comme écrit dans Creutz (1986) : "[the demons] play a role analogous to the kinetic energy in molecular dynamics" et ainsi de définir un équivalent à la température du système. Dans ce cas, la construction de l'analogie du paramètre de contrôle, la température, ne peut être réalisée avec des automates déterministes et synchrones. En effet, une mise à jour synchrone ne permettrait pas de faire circuler l'énergie de proche en proche, et donc d'atteindre un état d'équilibre dans l'espace cellulaire.

Il y a certainement plus de distance entre l'automate décrit par Creutz et le modèle d'Ising que dans les travaux de Kinzel et Domany. Cela suggère que cette analogie est d'une nature différente et peut-être plus forte pour ce qu'elle permettrait d'apprendre du modèle d'Ising ou des automates asynchrones. En effet, Creutz ne réalise pas seulement une implémentation du modèle dans un automate déterministe et asynchrone, il identifie également des éléments essentiels pour construire un analogue au modèle d'Ising, en l'occurrence une forme d'énergie qui peut circuler dans l'espace cellulaire.

## 3.2 Discussion sur les automates cellulaires en tant qu'analogie

Une question essentielle est présente en toile de fond de l'étude menée jusqu'à présent : en quoi une analogie peut-elle être source de connaissances ? Nous avons décrit trois cas d'analogies qui fournissent des réponses différentes à cette question. L'analogie de Domany et Kinzel peut être considérée comme une mise en œuvre numérique du modèle d'Ising. Par conséquent, elle peut nous apporter le même type d'information qu'une simulation numérique ne le fait : observer l'évolution du système avec des conditions initiales données, prévoir son comportement dans un certain régime sans mener de calculs analytiques etc. L'analogie de Creutz est d'une nature différente, puisqu'elle utilise un nouvel objet pour représenter un élément de la théorie essentiel pour reproduire le comportement du modèle d'Ising. Elle met ainsi en évidence que le système doit disposer d'une quantité (l'énergie ou l'état des démons) susceptible de circuler pour atteindre l'état d'équilibre. Le fait que cette connaissance soit connue par ailleurs n'affecte en rien le potentiel de l'analogie de Creutz. Le cas de l'analogie de Wolfram est plus complexe, d'abord parce qu'elle fait un parallèle entre les transitions de phase en général et les ACD, et porte donc sur un domaine moins clairement délimité et plus étendu. Aussi parce qu'il n'y a pas de conclusion définitive quant à la portée de cette analogie : il n'est pas exclu qu'elle puisse donner lieu à des approfondissements finalement fructueux, et la nature-même des connaissances qu'elle pourrait apporter n'est pas déterminée.

Ces observations amènent donc à nous interroger sur les critères qui permettent d'affirmer qu'une analogie peut être féconde. Dans ce qui suit, nous replaçons nos observations dans le cadre d'une réflexion plus générale sur la question de l'analogie, telle qu'elle est présentée dans Norton (2011). Sa réflexion est fondée sur une approche empirique de l'analogie et non sur une approche formelle, comme cela peut être le cas de travaux antérieurs, e.g. Hesse (1964); Bartha (2010). Ce point de vue convient à l'analyse que nous menons, car elle part d'illustrations pratiques dans le but d'identifier ce qui pourrait

être des caractéristiques plus générales de la notion d'analogie. Nous nous limitons ici à la comparaison au modèle d'Ising. En effet, identifier les propriétés que nous souhaitons inférer est un problème délicat dans le cas général de l'analogie de Wolfram, mais pour le cas spécifique du modèle d'Ising, nous considérons qu'il faut construire une famille d'automates dans lesquels les états cellulaires reproduisent exactement les états magnétiques des spins pour une valeur déterminée des paramètres physiques. De cette manière nous pouvons comparer plus rigoureusement les analogies de Wolfram, de Creutz et de Domany et Kinzel, que nous abrègerons respectivement W, C et DK.

### 3.2.1 Comparaison des caractéristiques des trois analogies au modèle d'Ising

**Définitions de la littérature.** À notre connaissance, les tentatives passées pour énoncer une règle générale qui permettrait d'affirmer qu'une analogie est potentiellement source de connaissances n'ont pas abouti. Dans l'article de Bartha (2013) : *Analogy and analogical Reasoning* paru dans la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, l'analogie est décrite comme mettant en rapport deux domaines : une source et une cible, et son objectif est d'extrapoler une propriété connue du domaine source au domaine cible. Or, on ne dispose que de critères qualitatifs pour évaluer la capacité d'une analogie à soutenir une telle extrapolation. Ceux-ci sont d'ailleurs essentiellement des critères de bon sens, par exemple, plus les deux domaines qu'associe l'analogie partagent de propriétés et plus ces propriétés communes sont fortes, plus il est possible que la propriété que l'on cherche à extrapoler au domaine cible soit vraie.

Nous reprenons la terminologie d'analogies *positives* ou *negatives* utilisée dans Bartha (2013) pour discuter les arguments rapprochant, ou au contraire opposant, les domaines source et cible. Un fait contribue positivement à l'analogie s'il est vérifié dans le domaine source et le domaine cible, par exemple une observation similaire, ou une inférence logique que l'on peut faire dans l'un et l'autre domaine. À l'inverse, un fait contribue négativement à l'analogie s'il est vérifié dans un domaine mais pas dans l'autre. Les faits retenus sont supposés être liés à la propriété que l'on cherche à extrapoler du domaine source au domaine cible.

Norton (2011) définit l'idée de *fait analogique* (*fact of analogy*) : il s'agit de mettre en évidence les propriétés partagées par le domaine source de l'analogie (ici, le modèle d'Ising ou, plus généralement, la physique statistique) et le domaine cible, auquel on veut extrapoler les propriétés observées (les différents espaces d'automates). La difficulté est de savoir à quel point le fait analogique a en lui le potentiel pour pouvoir inférer le comportement dans le domaine cible. La formulation de Norton pousse avant toute chose à préciser l'analogie que nous étudions : les propriétés que nous prenons pour prémisses, celles que nous cherchons à inférer, etc. Même si cela ne nous permettra pas de trancher de manière certaine sur le potentiel des diverses analogies que nous décrivons, nous pourrions décrire les faits analogiques dans les cas que nous avons examinés en établissant ce qui les distingue ou les rapproche.

**Éléments contribuant de manière positive.** Parmi les éléments contribuant à l'analogie de manière positive, nous avons déjà évoqué la représentation-même du système, c'est-à-dire la structure de l'espace physique dans le modèle d'Ising : un réseau régulier, où chaque nœud est un spin qui peut prendre un état dans un ensemble discret. La situation est exactement identique pour l'espace cellulaire : un réseau régulier de cellules, chacune pouvant prendre un état dans un ensemble discret. Dans le cas de l'analogie DK, cette correspondance est plus étroite encore : les automates cellulaires sont à deux états, tout comme les spins dans le modèle d'Ising. La grande majorité des exemples traités dans l'analogie W sont également des automates cellulaires à deux états, c'est en particulier le cas des AC élémentaires, même si Wolfram ne restreint pas son travail à ces automates. En revanche, ce n'est *a priori* pas le cas de l'analogie C. Autrement dit, il existe une correspondance étroite de l'espace des états dans le modèle d'Ising à l'espace des états des automates (déterministes ou non, synchrones ou non). L'évolution dynamique par pas de temps discrets est également un point de ressemblance, tout comme le fait que la

règle d'évolution dynamique est locale : l'évolution de chaque élément est fixée par un nombre fini de voisins.

En termes d'observations expérimentales, les domaines magnétiques visibles sur la figure 4 ressemblent qualitativement aux structures à grandes échelles qui apparaissent dans la classe IV de Wolfram. De tels motifs ne sont pas seulement typiques des transitions de phase ferro-paramagnétiques décrites par le modèle d'Ising, on peut aussi les voir au cours d'autres transitions (du second ordre). Par exemple, le phénomène d'opalescence critique est la manifestation du même comportement dans le contexte de la transition de phase liquide-gaz près du point critique. Il n'y a pas de doute sur le fait que cette observation a joué un rôle important dans l'intuition de Wolfram d'une analogie entre les transitions de phase et les ACD. Dans le même ordre d'idées, l'entropie et la chaleur spécifique en fonction de la température dans le modèle d'Ising évoluent de manière très similaire aux courbes de la figure 2, et l'allure de celles-ci rappellent, comme nous l'avons dit, les simulations numériques réalisées par Langton *et al.*, mentionnées au paragraphe 2.3.3. Cependant, il ne s'agit-là que de ressemblances et nous ne disposons pas de contributions positives qui soient des éléments de la théorie.

**Éléments contribuant de manière négative.** En revanche, la dynamique du système d'automates du cas W présente une différence : elle est déterministe et non pas probabiliste, au contraire du modèle d'Ising. *A posteriori*, cette différence semble être un élément contribuant de manière fortement négative à l'analogie.

Comme nous l'avons vu précédemment, la nature déterministe et synchrone des automates de Wolfram fait que les notions d'énergie et de température n'ont pas d'équivalent. Dans les cas DK et C, il existe un moyen de définir et modifier un équivalent à l'agitation thermique du système magnétique. La température est intégrée soit par une probabilité dans la règle de l'automate (DK), soit par des états cellulaires spécifiques (C). Pourrait-on utiliser dans le cas W le même genre de construction que celles réalisées dans DK ou C ? Probablement pas pour DK, le caractère probabiliste de l'automate joue un rôle fondamental, et on ne peut donc pas simplement extrapoler l'analogie au contexte des automates déterministes et synchrones. Pour suivre un raisonnement du même type que le cas C, on pourrait introduire de nouveaux états cellulaires correspondant à des énergies hautes ou basses. En revanche, la mise à jour synchrone ne permet pas de faire circuler l'énergie dans l'espace cellulaire et donc de définir un équivalent de la température d'équilibre. Y aurait-il alors un autre moyen de définir la température dans ce contexte, par exemple en faisant usage d'états cellulaires qui rendraient compte de la circulation de l'énergie ? Nous ne pouvons pas l'exclure, mais cela paraît difficile à réaliser.

En somme, par contraste avec les analogies DK et C, l'absence de paramètre de contrôle clairement identifié apparaît comme une limite au potentiel de l'analogie entre les automates de Wolfram et le modèle d'Ising.

### 3.2.2 Potentiel de l'analogie de Wolfram

L'étude du cas de l'analogie au modèle d'Ising a permis de mettre en évidence ce qui distingue, à nos yeux, deux analogies fonctionnelles (DK et C), d'une qui ne l'est pas, ou pas encore (W) : les éléments essentiels de la théorie du domaine source ont un équivalent dans le domaine cible dans un cas, mais pas dans l'autre.

Dans cette partie, nous formulons notre hypothèse de travail quant au potentiel de l'analogie de Wolfram dans sa généralité. Nous l'utiliserons pour proposer une explication au fait que les travaux dans la ligne de l'analogie de Wolfram se soient raréfiés depuis les années 1990.

**Une analogie faible et vague.** Si nous admettons que l'analogie des automates déterministes est effectivement fondée, par exemple au sens de Langton (c.f. figure 3), cela signifie qu'il serait possible de localiser efficacement des automates aux propriétés remarquables par quelques mesures simples. Si la

Turing-universalité fait partie de ces propriétés, nous arrivons à un résultat fortement contre-intuitif : une propriété complexe pourrait être déterminée à l'aide de mesures simples. Or, les résultats évoqués précédemment convergent vers l'idée qu'il n'est pas possible de trouver des propriétés intéressantes sur les ACD sans être confronté à une difficulté technique majeure. Il semblerait qu'il existe une forme d'*incompressibilité* de la complexité des propriétés de calculabilité. Nous entendons par cette expression qu'il ne serait pas possible de définir une procédure simple pour trancher cette question de manière systématique. Soulignons que nous faisons ici le même raccourci de langage que nous signalions au début de ce travail : la "simplicité", la "complexité", les propriétés "intéressantes" ou non, sont des concepts très flous sur lesquels nous ne pouvons pas raisonner de manière claire.

Enfin, notre conclusion quant au potentiel de l'analogie pourrait être résumé en deux points. Le premier, d'ailleurs déjà largement reproché à Wolfram par ses critiques, est que l'analogie devrait être reformulée de manière plus explicite pour pouvoir être discutée précisément. Pour le second point, nous choisissons une formulation cohérente de la propriété que l'analogie de Wolfram cherche à montrer : *il est possible de construire une thermodynamique dans l'espace des automates cellulaires déterministes synchrones et celle-ci permettrait de localiser précisément les automates ayant des propriétés puissantes de calculabilité*. Cette propriété est non démontrée et vraisemblablement fausse.

**Un abandon par perte d'objectif.** On ne peut pourtant pas conclure définitivement à l'absence de potentiel de l'analogie de Wolfram dans sa généralité. Il n'est pas démontré que cette analogie restera stérile, et il paraît peu probable qu'on puisse démontrer un résultat de ce type. C'est l'accumulation d'indices en défaveur de cette analogie, et l'absence de contributions décisives en faveur de celle-ci qui semble être à l'origine de l'abandon progressif des recherches sur ce sujet au cours des années 1990.

Un mécanisme similaire est discuté dans Bartha (2013) : pour évaluer si l'analogie mérite d'être explorée ou non, on compare des arguments en faveur et en défaveur de celle-ci. Ici, ce mécanisme semble à l'œuvre à l'échelle d'une communauté scientifique : après plusieurs essais infructueux, le sujet est abandonné. Mais il est intéressant d'étudier les modalités de cet abandon. Au cours des années 1980 et 1990, des groupes de chercheurs ont considéré qu'il existait des arguments suffisamment forts pour explorer ces analogies et voir si elles mènent à l'énoncé de nouvelles propriétés sur les systèmes d'automates cellulaires déterministes. Des personnages comme Wolfram ou Langton ont certainement joué un rôle important dans ce mouvement. L'abandon du sujet semble progressive et collective, les travaux de Mitchell ou Baldwin mettant en question certains aspects des affirmations associées aux travaux de Wolfram.

Les travaux de Wolfram suggèrent qu'on peut construire une thermodynamique des automates cellulaires. Celle-ci permettrait de localiser des automates cellulaires intéressants grâce à leur règle, en particulier des automates de la classe IV qui auraient des propriétés computationnelles utiles. Nous pensons qu'en constatant les difficultés à construire cette thermodynamique, il est devenu irréaliste de pouvoir déterminer simplement les propriétés des automates ainsi. Il existait un objectif concret et identifié à l'approfondissement de cette analogie, mais celui-ci n'a pas pu être atteint. Ce serait parce que l'objectif de l'analogie de Wolfram n'est plus clairement identifié que la communauté scientifique s'en serait détournée.

### 3.3 Vers une typologie des analogies

#### 3.3.1 Nature des domaines source et cible

En comparant le modèle d'Ising à des espaces d'automates cellulaires, nous examinons un cas particulier d'analogie. En effet, le modèle d'Ising est lui-même une représentation simplifiée d'une famille de systèmes physiques, c'est-à-dire une construction artificielle dont les différentes caractéristiques sont établies par l'utilisateur. On cherche à comprendre la nature d'analogies avec des automates cellulaires



(déterministes ou probabilistes), qui sont également des objets artificiels, dont on connaît les règles de fonctionnement. L'idée qu'on ne connaisse pas *a priori* la nature de l'analogie entre ces deux systèmes peut sembler paradoxale puisque les domaines source et cible sont l'un et l'autre des constructions artificielles. Mais cela tient à la complexité de ces deux systèmes : la règle qui permet de les construire est clairement énoncée, en revanche il est difficile de prévoir l'étendue de leurs comportements. L'un et l'autre domaines sont le siège de comportements dits émergents, c'est-à-dire selon la définition de l'émergence faible proposée par Bedau (1997) : "*Macrostate P of S with microdynamic D is weakly emergent iff P can be derived from D and S's external conditions but only by simulation*". Autrement dit, connaissant les règles microdynamiques du système, on ne peut prévoir l'état macroscopique du système que par le biais de simulations numériques. Cette famille d'analogies entre modèles présente des particularités qui peuvent en faire un objet d'étude intéressant pour la notion-même d'analogie. En effet, elle permet un certain contrôle des hypothèses théoriques sous-jacentes : on sait exactement quels sont les éléments présents dans la représentation choisie. De cette manière, nous avons pu discuter l'analogie avec le modèle d'Ising pour trois familles d'automates aux caractéristiques distinctes.

Dans d'autres types d'analogies, il peut exister un élément supplémentaire venant du fait qu'un des domaines au moins n'est pas un modèle de la réalité, mais la réalité elle-même. Pour illustrer cette idée, prenons l'exemple de l'analogie entre le comportement des électrons autour du noyau atomique et celui de planètes autour d'un astre. Cette analogie célèbre a donné notamment naissance au modèle de Rutherford-Bohr (2016), qui permettait d'expliquer la quantification des niveaux d'énergie électroniques dans l'atome d'hydrogène. L'analogie dont nous parlons ici n'est pas celle entre la représentation d'un système planétaire selon le modèle gravitationnel classique et la représentation de l'atome du modèle de Rutherford-Bohr, mais bien le rapprochement intellectuel entre l'attraction gravitationnelle dans un système planétaire et l'attraction exercée par le noyau de l'atome sur les électrons. Nous pensons qu'il s'agit de deux raisonnements par analogie de natures distinctes, car ils portent sur des sources et des cibles de natures distinctes : dans le cas Ising/automates il s'agit de systèmes théoriques formalisés, dans le cas gravitation/atome, il s'agit de systèmes physiques.

### 3.3.2 Potentiel supposé des analogies

Nous avons observé dans la partie 3.1 que les analogies entre modèle d'Ising et automates cellulaires n'avaient pas la même fonction. En particulier, l'analogie DK est essentiellement une implémentation numérique du modèle d'Ising. Il est difficile de juger de ce que cette analogie peut apporter en terme de compréhension des domaines source et cible, mais certaines limites sont apparentes. Ainsi, il semble improbable de découvrir des comportements encore inconnus du modèle d'Ising lui-même, déjà largement étudié. Les auteurs sont très certainement conscients de ces limites, et l'apport de leur analogie serait donc d'un autre ordre. Par exemple, l'analogie met en évidence qu'un automate cellulaire probabiliste peut se comporter identiquement selon une dimension spatiale et selon sa dimension temporelle, si la règle est construite de manière adéquate. Mais quel que soit précisément cet apport, celui-ci est attaché au potentiel de l'analogie, ou plus précisément au potentiel supposé par celui qui la conçoit.

Dans le cas général de l'analogie de Wolfram, l'apport n'est pas clairement spécifié, mais il se veut large et ambitieux : il prétend notamment contenir une thermodynamique des automates cellulaires, avec toutes les conséquences que cela implique. Le fait que l'analogie soit formulée de manière relativement vague semble consubstantiel du potentiel supposé très fort de cette analogie. Nous faisons ici l'hypothèse que c'est parce que celle-ci apparaît sans contour précis qu'on peut lui attribuer une portée très générale. Mais comme nous l'avons discuté précédemment, c'en est aussi une limite majeure. Ce point nous paraît important car il permet de décrire les analogies (bonnes ou mauvaises) comme un compromis entre la précision de leur énoncé et leur portée supposée. Une autre hypothèse, proche mais pas identique, est qu'une analogie soit un compromis entre la possibilité d'extrapoler une propriété à un domaine cible lointain et le degré de fiabilité de cette extrapolation.

### 3.3.3 Ce que pourrait être une typologie des analogies

Dans cette partie, nous avons mis en évidence à l'aide de la triple analogie entre automates cellulaires et modèles de transition de phase physique, que le terme d'analogie recouvrait des types de raisonnements variés par nature. Nous avons employé le terme analogie dans un sens très général, où on l'associe à une faculté intellectuelle qui peut être convoquée sur divers objets. Pour comprendre la notion d'analogie dans toutes ses dimensions, en construire une typologie permettrait de distinguer des cas, dont les mécanismes et les implications diffèrent. Nous identifions au moins deux axes selon lesquels catégoriser les analogies, deux axes qui ne sont d'ailleurs pas orthogonaux. Le premier est la nature des domaines sources et cibles, en particulier, s'agit-il de lois formalisées dans le cadre d'une théorie, d'un ensemble de mesures, d'un faisceau d'observations, ou même seulement d'impressions ? Le second axe est le potentiel supposé de l'analogie : l'ensemble de ce que l'on cherche à établir est-il clairement délimité ou est-il au contraire indéfini, voire même partiellement inconnu ?

## 4 Conclusion

Face à la diversité et au caractère difficilement prédictible des comportements d'automates, une démarche qu'on pourrait qualifier de naturaliste consiste à les classer, et à en établir une typologie. C'est la démarche suivie par Wolfram, qui s'inspire de la physique statistique et des systèmes dynamiques pour proposer une classification des automates cellulaires déterministes synchrones au cours des décennies 80 et 90. Pour ce faire, il utilise une analogie qualitative entre les classes de comportements de ces automates et les transitions de phase observées dans des systèmes physiques. Au long de ce travail, nous avons étudié cette analogie et en particulier discuté certaines de ses limites, en nous appuyant sur des travaux contemporains de Wolfram. Selon notre étude, sa principale faiblesse est l'absence de définition formelle des concepts employés, en particulier concernant les classes de comportements, ce qui ne permet pas d'explicitier ce qui est juste ou non. De ce fait, il nous a semblé pertinent de ne pas discuter les nombreuses pistes de réflexion proposées par Wolfram, mais plutôt de focaliser notre réflexion sur des propositions postérieures plus concrètes, comme celles de Langton. Cependant, qu'elles se basent sur des définitions précises de comportements dynamiques, ou sur des simulations numériques mesurant des caractéristiques du système, les tentatives étudiées n'ont pas permis de définir clairement des concepts propres aux changements d'état dans les ACD. La ressemblance entre ces systèmes reste limitée à des termes flous et ambigus, tels que l'ordre, le chaos, ou la complexité. De même, il n'a pas été possible de définir les comportements intéressants en terme de propriétés de calcul. Les tentatives de classifications dynamiques relatives à cet aspect suggèrent même qu'il est impossible d'obtenir une définition qui soit à la fois simple et utile.

Dans un second temps, nous avons étudié des travaux cherchant à construire un parallèle entre deux autres familles d'automates cellulaires et la transition de phase ferro-paramagnétique telle qu'on en rend compte par le modèle d'Ising. Cette partie de l'étude a mis en évidence qu'il manque aux automates déterministes et synchrones des éléments essentiels pour représenter le modèle d'Ising. En effet, il n'a pas été possible de définir les notions de température, d'énergie et plus généralement d'état d'équilibre dans ces systèmes. Par ailleurs, en comparant deux autres analogies entre le modèle d'Ising et des automates cellulaires, il nous est apparu qu'elles différaient aussi à l'égard de la connaissance qu'elles cherchent à apporter, ce que nous avons appelé leur potentiel supposé. En effet, dans sa version la plus générale, l'analogie de Wolfram promettait beaucoup, mais elle s'est avérée relativement stérile jusqu'à présent. Cette réflexion nous a amené à nous interroger sur la propriété qui permet de définir la valeur d'une analogie et plus généralement sur les critères qui distinguent les analogies les unes des autres.

Le concept d'analogie était ici compris comme la faculté du raisonnement qui construit un rapprochement entre deux domaines : une source dont on connaît les propriétés et une cible dont on cherche à inférer les propriétés. Cette définition très large contient une énorme variété d'objets, pour laquelle

il serait judicieux de chercher à construire une typologie. Le potentiel supposé, la nature des domaines source et cible semblent être des pistes pertinentes, mais non suffisantes, pour tracer les lignes directrices d'une telle classification. Une méthode pour en chercher d'autres consiste à procéder comme nous avons essayé de le faire ici sur d'autres analogies célèbres de la littérature scientifique, et définir ce qui les rapproche ou les distingue.

## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Anouk Barberousse pour ses conseils et son soutien lors de la construction de ce travail. Merci également à Christian Borghesi et Robin Lamarche-Perrin pour leurs relectures et commentaires.

## Références

- BALDWIN, JOHN T. AND SHELAH, SAHARON. 2000. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical computer science*, 230(1-2) :117–129.
- BARTHA, PAUL. 2010. *By parallel reasoning*. Oxford University Press.
- BARTHA, PAUL. 2013. Analogy and analogical reasoning. <http://plato.stanford.edu/entries/reasoning-analogy/>. Accessed : March 2015.
- BEDAU, MARK A. 1997. Weak emergence. *Noûs*, 31(s11) :375–399.
- BERLEKAMP, ELWYN R. AND CONWAY, JOHN HORTON AND GUY, RICHARD K. 2001. Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. 4. A.K. Peters, M.A. Wellesley.
- BOHR, NIELS. 2016. On the constitution of atoms and molecules. In *Niels Bohr, 1913-2013*, Pp. 13–33. Springer.
- BRAGA, G. AND CATTANEO, GIANPIERO AND FLOCCHINI, PAOLA AND QUARANTA VOGLIOTTI, C. 1995. Pattern growth in elementary cellular automata. *Theoretical computer science*, 145(1-2) :1–26.
- BRUSH, STEPHEN G. 1967. History of the lenz-ising model. *Rev. Mod. Phys.*, 39(4) :883–893.
- CALLEN, HERBERT B. 1998. Thermodynamics and an introduction to thermostatics.
- COOK, MATTHEW. 2004. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15(1) :1–40.
- CREUTZ, MICHAEL. 1983. Microcanonical monte-carlo simulation. *Physical Review Letters*, 50(19) :1411–1414.
- CREUTZ, MICHAEL. 1986. Deterministic Ising dynamics. *Ann. Phys*, 167(1) :62–72.
- CRUTCHFIELD, JAMES P. AND MITCHELL, MELANIE. 1995. The evolution of emergent computation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(23) :10742–10746.
- CULIK II, KAREL AND YU, SHENG. 1988. Undecidability of ca classification schemes. *Complex Systems*, 2(2) :177–190.
- DHAR, AVINASH AND LAKDAWALA, PORUS AND MANDAL, GAUTAM AND WADIA, SPENTA R. 1995. Role of initial conditions in the classification of the rule space of cellular automata dynamics. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 51(4) :3032.

- DOMANY, EYTAN AND KINZEL, WOLFGANG. 1984. Equivalence of cellular automata to ising models and directed percolation. *Physical review letters*, 53(4) :311–314.
- GILMAN, ROBERT H. 1988. Classes of linear automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7(01) :105–118.
- GRAY, LAWRENCE. 2003. A mathematician looks at wolfram’s new kind of science. *Notices-American Mathematical Society*, 50(2) :200–211.
- GUTOWITZ, HOWARD AND LANGTON, CHRISTOPHER G. 1995. Mean field theory of the edge of chaos. *Advances in Artificial Life*, Pp. 52–64.
- HESSE, MARY. 1964. Analogy and confirmation theory. *Philosophy of Science*, Pp. 319–327.
- HURLEY, MIKE. 1988. Attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(01) :131–140.
- ISHII, SHIN’ICHIROU. 1992. Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete applied mathematics*, 39(2) :125–136.
- ISING, ERNST. 1925. A contribution to the theory of ferromagnetism. *Z. Phys*, 31 :253.
- LANDAU, LEV DAVIDOVICH. 1937. On the theory of phase transitions. *Ukr. J. Phys.*, 11 :19–32.
- LANGTON, CHRISTOPHER G. 1990. Computation at the edge of chaos : phase transitions and emergent computation. *Physica D*, 42(1-3) :12–37.
- LI, WENTIAN AND PACKARD, NORMAN H. 1990. The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, 4(3) :281–297.
- LI, WENTIAN AND PACKARD, NORMAN H. AND LANGTON, CHRISTOPHER G. 1990. Transition phenomena in cellular automata rule space. *Physica D*, 45(1-3) :77–94.
- MARTIN, BRUNO. 2001. *Automates cellulaires, information et chaos*. Thèse de doctorat, Laboratoire de l’Informatique du Parallelisme, ENS Lyon.
- MILNOR, JOHN W. 2006. Attractor. <http://www.scholarpedia.org/article/Attractor>.
- MITCHELL, MELANIE. 1998. Computation in cellular automata : A selected review. *Nonstandard Computation, Weinheim*.
- MITCHELL, MELANIE AND CRUTCHFIELD, JAMES P. AND HRABER, PETER T. 1993. Dynamics, computation, and the “edge of chaos” : A re-examination. *Arxiv preprint adap-org/9306003*.
- NORTON, JOHN D. 2011. Analogy. *Pittsburg University preprint*.
- PACKARD, NORMAN H. 1988. *Adaptation Toward the Edge of Chaos*. University of Illinois at Urbana-Champaign, Center for Complex Systems Research.
- SARKAR, PALASH. 2000. A brief history of cellular automata. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 32(1) :80–107.
- SIPSER, MICHAEL. 2006. *Introduction to the Theory of Computation*, volume 2. Thomson Course Technology Boston.

- STANLEY, EUGENE H. 1987. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press.
- TURING, ALAN MATHISON AND GIRARD, JEAN-YVES. 1995. *La machine de Turing*. Editions du Seuil.
- VAN ALBADA, TJEERD SICCO. 1968. Numerical integrations of the n-body problem. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 19 :479.
- VICHNIAC, GÉRARD Y. 1984. Simulating physics with cellular automata. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 10 :96–116.
- WOLFRAM, STEPHEN. 1983. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of modern physics*, 55(3) :601.
- WOLFRAM, STEPHEN. 1984. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10(1) :1–35.
- WOLFRAM, STEPHEN. 1985. Twenty problems in the theory of cellular automata. *Physica Scripta*, 1985 :170.
- WOLFRAM, STEPHEN. 1986. Random sequence generation by cellular automata. *Advances in applied mathematics*, 7(2) :123–169.
- WOOTTERS, WILLIAM K. AND LANGTON, CHRISTOPHER G. 1990. Is there a sharp phase transition for deterministic cellular automata. In *NATO conference on cellular automata*, volume 6.
- WUENSCHÉ, ANDREW. 1998. Classifying cellular automata automatically. *Complexity*, 4(3) :47–66.
- ZWIRN, HERVÉ P. 2006. Chapitre 1. In *Les systèmes complexes : mathématiques et biologie*. O. Jacob.