

# Caractéristiques «palindromiques» et «quasi-cristallines» de la suite et des mots de Fibonacci.

Frédéric MANSUY.

Chercheur indépendant. ( Site web : <http://supersymetrie.fr> ).

Contact : [frederic.mansuy.fr@gmail.com](mailto:frederic.mansuy.fr@gmail.com)

Tel : 336 58 02 98 47

## Résumé :

Cet article décrit des règles de substitutions (ou des morphismes), qui à partir d'un alphabet binaire  $A = \{L,S\}$  engendrent une série de palindromes dont la somme totale est le mot infini de Fibonacci. Il montre également une construction géométrique, en accord avec ces mêmes règles de développement, produisant un quasi-cristal à deux dimensions de symétries pentagonales et décagonales.

# Caractéristiques «palindromiques» et «quasi-cristallines» de la suite et des mots de Fibonacci.

Frédéric MANSUY. ( Site web : <http://supersymetrie.fr> ).

## Introduction :

En mathématiques combinatoires, le mot infini de Fibonacci se construit selon des règles de substitutions (ou morphisme) [1][2][3]. Les caractéristiques arithmétiques des mots de Fibonacci vont générer la suite des nombres de Fibonacci qui en sont une conséquence directe. Ces deux développements (les mots, les nombres) obéissent aux mêmes règles, à savoir que chacun des termes est égal à la somme des deux précédents, d'où :  $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$  (pour les mots, la concaténation équivaut à l'addition). Quand on donne aux deux lettres composant l'alphabet des mots de Fibonacci les valeurs respectives :  $S = \Phi = (1+\sqrt{5})/2$  (soit le nombre d'or ; où  $\Phi$  se dit phi [4]) et  $L = \Phi^2 = \Phi + 1$ , le rapport de la longueur des mots  $|m_n|$  successifs est précisément dans une proportion  $\Phi : |m_n| / |m_{n-1}| = \Phi$ . La suite des nombres de Fibonacci n'en donne qu'une approximation [5] ; le rapport de deux nombres de Fibonacci successifs, soit  $F_{n+1}/F_n$ , tend vers  $\Phi$  quand (n) grandit jusqu'à l'atteindre enfin à sa limite infinie. Pourquoi cette apparente dichotomie ?...

Cet article propose une nouvelle interprétation de ces suites et s'appuie sur un modèle géométrique [6] visant à rétablir l'harmonie entre trois systèmes obéissant aux mêmes règles de développement, à savoir :  $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$  ; un système fractal de cercles couvert par une « cinq-grille » [7] ; les mots de Fibonacci ; la suite des nombres de Fibonacci. Elle y parvient grâce à des règles de substitutions qui à partir de quanta originels, produisent exclusivement des palindromes [8]. La somme infinie de ces palindromes est le mot infini de Fibonacci. Le système fractal des cercles nous indique un point origine (O.), à l'infini mais parfaitement localisable, autour duquel tout semble s'organiser harmonieusement. Après que les trois systèmes (cercles, mots et suite de Fibonacci) aient accompli dix rotations de  $36^\circ$  centrées sur l'origine (O.), on obtient un quasi-cristal [9] parfait en deux dimensions.

## Rappel de quelques règles :

Si l'on fixe un alphabet à deux lettres L et S, la suite ( $m_n$ ) des mots de Fibonacci est définie par :  $m_1 = S$  ;  $m_2 = L$  et pour  $n > 2$  par  $m_n = m_{n-1} m_{n-2}$  (la somme est la concaténation des deux termes précédents).

Le mot infini de Fibonacci, noté  $m_\infty$  est la limite de cette suite, c'est-à-dire l'unique mot infini dont tous les mots  $m_n$  sont des préfixes. Les mots de Fibonacci sont appelés ainsi par analogie avec les nombres de Fibonacci, puisque le procédé de construction est analogue, en remplaçant l'addition par la concaténation.

Les premiers mots et nombres de Fibonacci sont :

Mots de Fibonacci :	Nombres de Fibonacci :
$m_1 = S$	1
$m_2 = L$	1
$m_3 = LS$	2
$m_4 = LSL$	3
$m_5 = LSLLS$	5
$m_6 = LSLLSLSL$	8
$m_7 = LSLLSLSLLSLLS$	13
$m_8 = LSLLSLSLLSLLSLSLLSLSL$	21
Etc...	Etc...

La colonne de droite qui représente le nombre de lettres dans chacun des mots  $m_n$  forme la suite de Fibonacci.

Les mots de Fibonacci peuvent également être engendrés par un « morphisme », autrement dit par des règles de substitutions appliquées itérativement.





## Interprétation du tableau A et conséquences pour la suite de Fibonacci :

Bien entendu, en théorie, les lettres composant l'alphabet des mots de Fibonacci sont indivisibles et la suite des mots  $p_n$  suffit à composer l'intégralité du mot infini de Fibonacci avec des lettres entières. Les suites  $\Phi p_n$  et  $\Phi^2 p_n$  visibles dans la tableau A se superposent à  $p_n$  avec un décalage d'ordre  $\Phi$  et  $\Phi^2$  respectivement ; elles exhibent à l'extrémité de leurs palindromes des moitiés de lettres. Il n'est peut-être pas nécessaire de les décrire, mais elles sont malgré tout en parfait accord avec les 2/3 des nombres de Fibonacci et participent à la logique de construction d'un modèle fractal sous-jacent (figure 1).

Ces deux séries de mots, composées des  $\Phi p_n$  et  $\Phi^2 p_n$ , correspondent aux nombres de Fibonacci délaissés par la suite des  $p_n$ , elles obéissent aux mêmes règles de substitutions que pour les  $p_n$ . La suite  $\Phi p_n$  produira des palindromes ayant **LL** pour lettres centrales et  $\frac{1}{2}L$ ,  $L\frac{1}{2}$ , à leurs extrémités. A la prochaine itération,  $\frac{1}{2}L$  donnera  $\frac{1}{2}LSL$  qui est la moitié droite de la substitution LSLSL et  $L\frac{1}{2}$  donnera  $LSL\frac{1}{2}$  qui est la moitié gauche de LSLSL. La suite  $\Phi^2 p_n$  correspond à la suite des nombres pairs de Fibonacci (1 sur 3) et produira des palindromes ayant **L** pour lettre centrale,  $\frac{1}{2}S$  et  $S\frac{1}{2}$  à leurs extrémités. A la prochaine itération,  $\frac{1}{2}S$  donnera  $\frac{1}{2}SL$  qui est la moitié droite de la substitution LSL et  $S\frac{1}{2}$  donnera  $LS\frac{1}{2}$  qui est la moitié gauche de LSL.

En observant le tableau A, on remarque que le contenu de chacune des lignes est multiplié par un facteur  $\Phi$  à la ligne suivante, exception faite de la colonne 2 ; en effet, celle-ci contient des entiers naturels qui dénombre les S et L dans chacun des mots  $p_n$  sans distinction qualitative entre ces deux lettres. On comprend alors que le deuxième nombre 1 de la suite de Fibonacci ne peut pas avoir la même valeur que le premier et désigne une entité  $\Phi$  fois plus grande. Toute la littérature mathématique consacrée à la suite de Fibonacci, explique que le rapport de chaque terme de la suite avec son précédent se rapproche de  $\Phi$  sans jamais atteindre cette valeur (sinon à sa limite infinie) ; c'est vrai si l'on considère cette suite d'un point de vue strictement arithmétique, mais cela revient, d'un point de vue physique et selon l'expression appropriée, à « mélanger les choux et les carottes » ; ou du point de vue de Fibonacci, « les lapereaux et les lapins adultes ». Plus philosophiquement et métaphysiquement encore, les premiers lapereaux ne peuvent arriver de zéro ou sortir du néant ; par conséquent, débiter la suite de Fibonacci par 0,1,1... est un non-sens. La suite de Fibonacci telle qu'on l'écrit habituellement : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... n'est pas une suite géométrique de raison constante  $q = \Phi$  tout simplement parce qu'elle débute de zéro et que pour les calculs inhérents à cette suite, on attribue au deuxième 1 la même valeur qu'au premier. Les rapports de deux termes successifs dans cette suite ne sont donc pas constants.

Par souci de rigueur, il faudrait combiner deux ensembles d'entiers naturels ; par exemple :

Soit  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels dénombrant des unités 1.

Soit  $\mathbb{N}^\Phi$  l'ensemble des entiers naturels dénombrant des unités  $\Phi$ .

Nous représenterons les éléments de  $\mathbb{N}$  par la couleur noire et les éléments de  $\mathbb{N}^\Phi$  par la couleur rouge.

La suite de Fibonacci aurait cette forme :

1, 1, 1+1, 1+2, 2+3, 3+5, 5+8, 8+13, 13+21, 21+34, 34+55, 55+89, 89+144, etc+etc...  $\infty$

Une autre interprétation plus proche encore de la réalité physique aurait cette forme :

$-\infty \dots 1/(13L+8S), 1/(8L+5S), 1/(5L+3S), 1/(3L+2S), 1/(2L+S), 1/(L+S), 1/L, 1/S, S/S, S, L, L+S, 2L+S, 3L+2S, 5L+3S, 8L+5S, 13L+8S, 21L+13S, 34L+21S, 55L+34S, 89L+55S \dots +\infty$ .

On peut déduire de la suite ainsi représentée qu'il existe une raison  $q$  telle que :

$q.S/S = S$  donc  $q = S$  et que  $q.S = L$  donc  $L = S^2$ , aussi,  $q.L = L+S$ .

On a donc une suite géométrique de raison  $q = S = \Phi = (1+\sqrt{5})/2$ .

*Cette dernière suite est fractale, elle n'a ni commencement ni fin, sa structure géométrique sous-jacente est rigoureusement identique pour chacune de ses itérations ; les mots de Fibonacci apparaissent et se superposent harmonieusement à cette structure, dès l'instant que l'on fixe un repère (ou référentiel) en considérant que l'une de ses itérations représente l'unité ou le quantum d'un système.*

*Quand on admet le caractère fractal d'une suite, il faut également accepter que son représentant unitaire ou quantique soit lui même divisible à l'infini. Le choix ou la détermination d'un quantum est donc fatalement arbitraire (toute chose ayant acquis une consistance est potentiellement divisible) ; plutôt que faire la démonstration qu'il existe des limites physiques, cet acte trahit éventuellement l'incapacité de nos moyens techniques, spéculatifs et intellectuels, à sonder, ou même envisager le « encore plus petit » (ou plus grand).*

*Depuis la nuit des temps et systématiquement, quand l'Homme perfectionne ses moyens d'observations, il accède à des univers insoupçonnés au delà de ce qu'il pensait être les limites ; il est donc pratiquement certain que les constituants connus de notre univers observable, qui s'est en outre considérablement éployé ces derniers siècles, ne représentent, en définitive, que quelques étagements d'un système fractal infini.*

### Représentation graphique et géométrique :

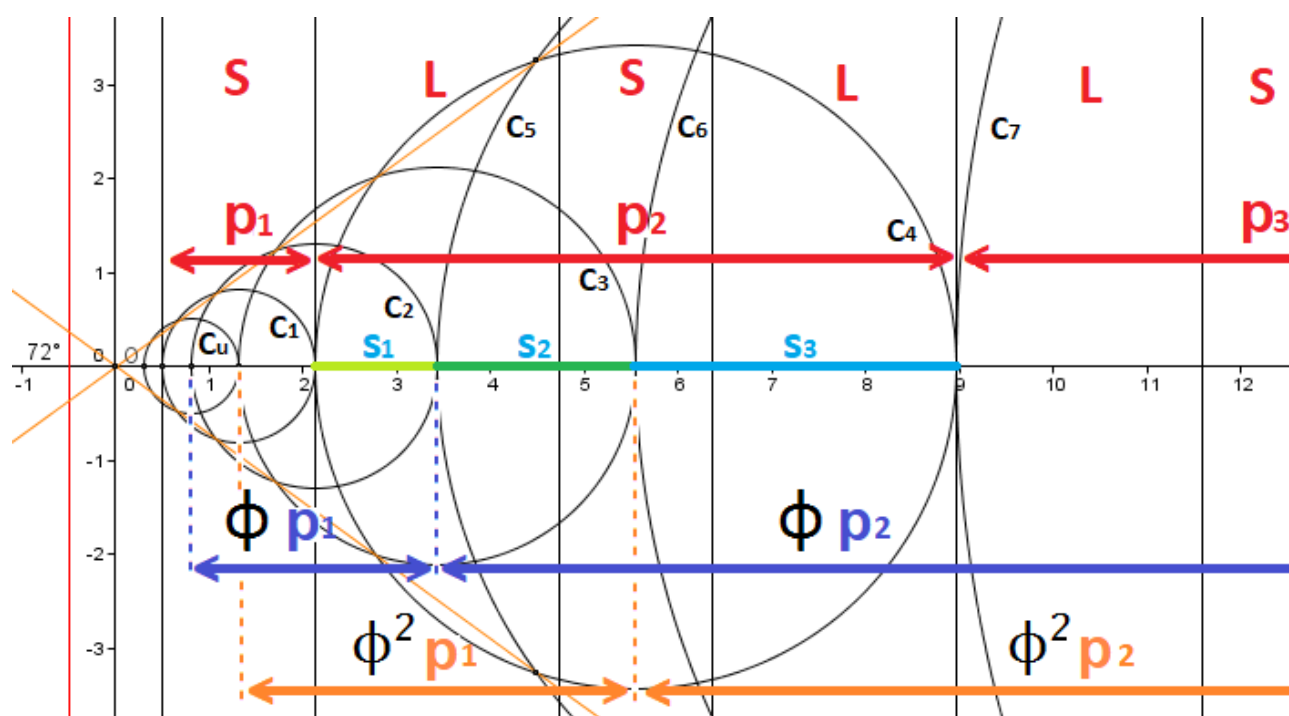


Figure 1.

La figure 1 montre une progression géométrique des cercles ( $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, \dots, C_n$ ) ; cette progression est une suite géométrique telle que :  $C_n = q.C_{n-1}$  avec  $q = \Phi$ . Le premier cercle  $C_u$  est le cercle unité de diamètre 1. Cette suite tend vers  $-\infty$  et décroît en direction de l'origine (O.), elle tend vers  $+\infty$  en croissant dans la direction opposée. Cette représentation graphique est donc en parfait accord avec les postulats précédents. Le diamètre de chacun des cercles  $C_n$  est divisé en trois segments  $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}$ , par les cercles tangents  $C_{n-2} C_{n+1}$  et  $C_{n-1} C_{n+2}$ . La progression sur l'axe des (x) des segments  $S_n$  obéit également à la suite géométrique de raison  $q = \Phi$ .

Le diamètre des cercles ( $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ ) correspond à la colonne 4 du tableau A. Après le démarrage avec  $p_1 = \Phi = C_1$  ;  $\Phi p_1 = \Phi^2 = C_2$  ;  $\Phi^2 p_1 = \Phi^3 = C_3$  ; ensuite chacun des cercles  $C_n$

contiendra dans son diamètre une portion « palindrome » du mot infini de Fibonacci.  
 Les cercles sont tangents entre eux dans un rapport  $\Phi^3$ . On a par conséquent 3 séries de cercles se chevauchant et correspondant aux trois séries de mots  $p_n$ ,  $\Phi p_n$ ,  $\Phi^2 p_n$ , qui obéissent aux mêmes règles de substitution : S donne LSL et L donne LSLSL ( soit un facteur d'amplification  $\Phi^3$  quand  $S = \Phi$  et  $L = \Phi^2$  ). La distance de chacun des cercles  $C_n$  à l'origine est proportionnelle à leurs diamètres, elle se calcule par la formule :  $d_{(0)} = C_{n-1}/2 = (C_n/\Phi)/2 = C_n/(1+\sqrt{5})$ .  
 La proportion entre le diamètre d'un cercle et sa distance à l'origine est donc :  $1+\sqrt{5} \approx 3,236067977...$

La figure 1 représente par des espacements de droites parallèles les deux composantes  $S = \Phi$  et  $L = \Phi^2$  du mot infini de Fibonacci et la façon dont celui-ci apparaît sur le plan muni d'un repère orthonormé. On peut alors facilement se persuader au vu de l'accord parfait entre les systèmes, des cercles, de la suite, de la somme des mots palindromes qui composent le mot infini de Fibonacci, que les premiers termes ( $C_1$  pour les cercles ; 1 pour la suite de Fibonacci ; S pour les mots de Fibonacci), ne jaillissent pas de zéro mais de l'infinité des termes précédents. C'est par l'action très arbitraire qui consiste à fixer une valeur unité à l'un de ces termes, que l'on fait naître le développement de la suite et du mot infini de Fibonacci. Il est également important de constater que le quantum premier ( $m_1 = \Phi$ . indivisible ?...) apparaît à une distance  $1/2$  de l'origine (O.) ; ce qui n'est pas sans rappeler la droite critique de la fonction zêta de Riemann.  
 Une autre remarque importante est que les points d'intersections des cercles successifs matérialisent deux axes formant un angle de  $72^\circ$  ou  $2\pi/5$ . Ces systèmes pourront donc couvrir harmonieusement la totalité du plan en une symétrie centrale d'ordre cinq et dix.

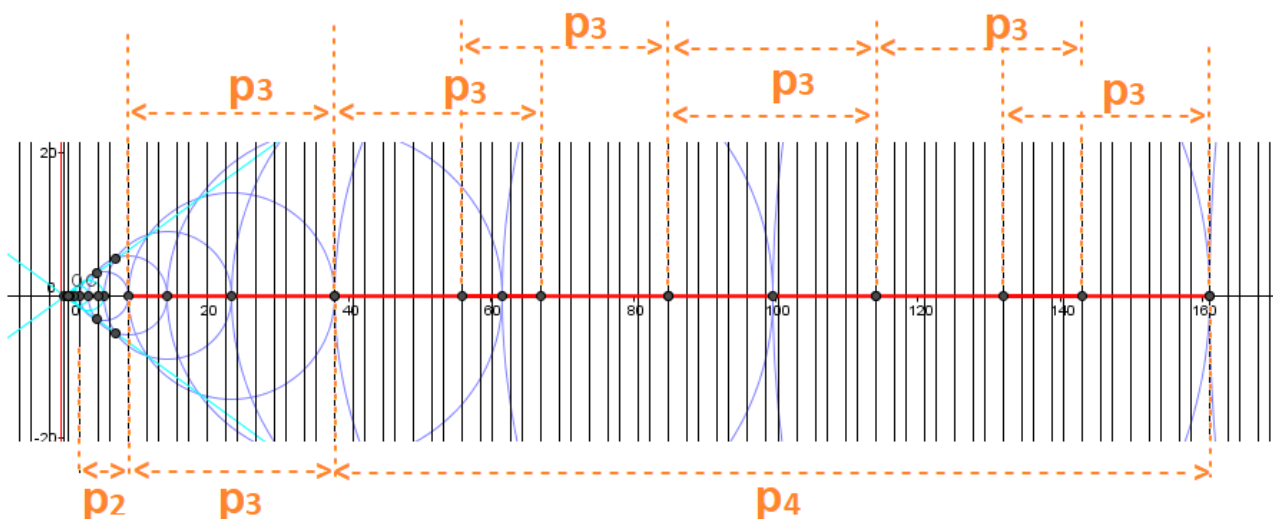


Figure 2.

La figure 2 montre comment on peut retrouver  $p_3$  dans  $p_4$  symétriquement par rapport au centre du palindrome. Il en sera de même pour tous les  $p_{n-1}$  dans  $p_n$ .

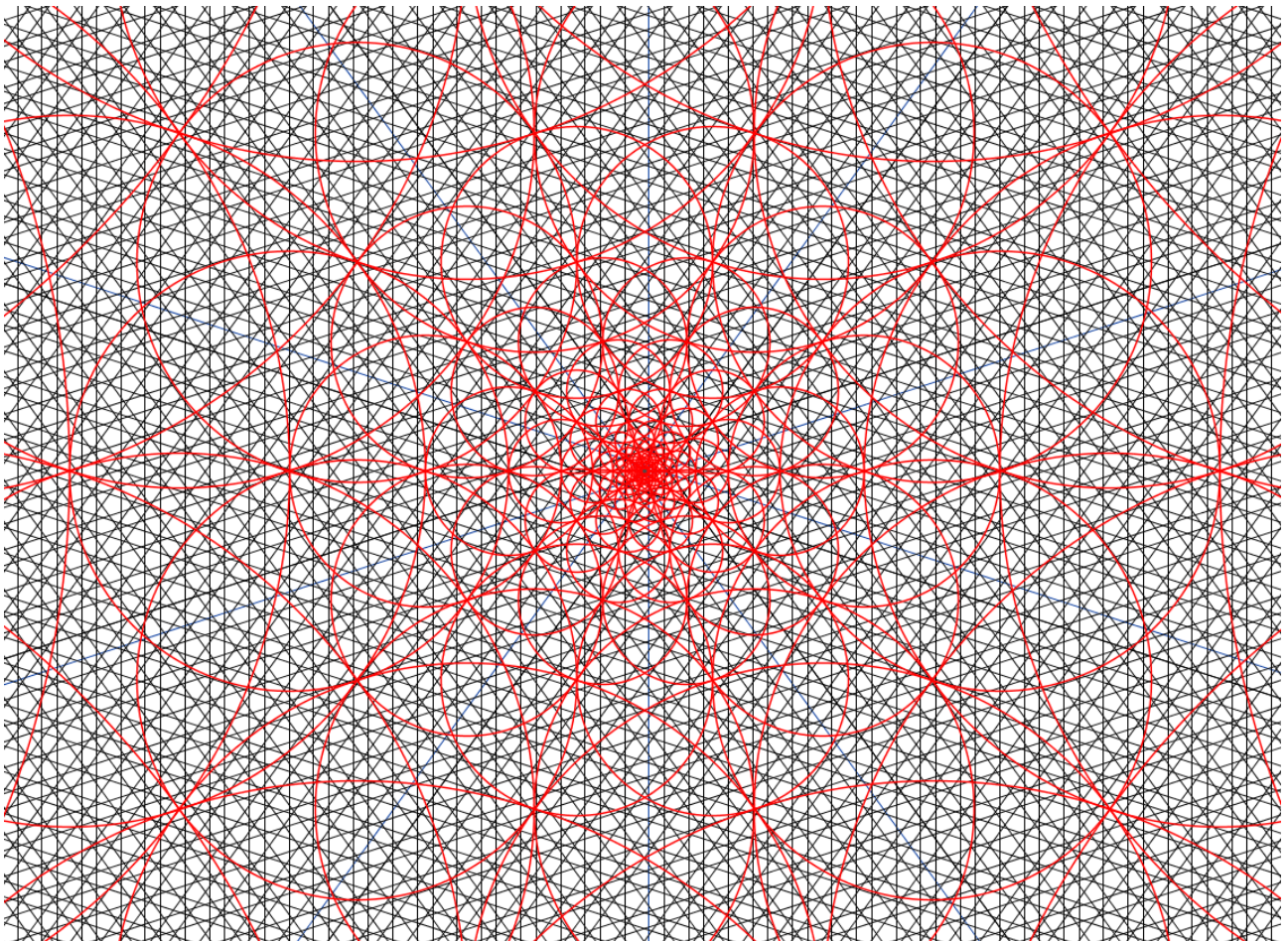


Figure 3.

La figure 3 montre le résultat après dix rotations de  $36^\circ$  autour de l'origine (O.) du système des cercles et des espacements de droites obéissant aux règles de substitutions des mots de Fibonacci. Cette « cinq-grille » est un quasi-cristal parfait à deux dimensions ; elle peut recouvrir l'infinité du plan, elle ne possède que deux différents types d'intersections et ne compte que quatre différentes longueurs de segments sans intersection. Dans ma recherche, j'ai appelé cette cinq-grille « Réseau Alpha ». Le centrage sur l'origine (O.) est indispensable pour l'obtention d'une telle régularité.

Quand  $S = \Phi$  et  $L = \Phi^2$  ces quatre longueurs sont les suivantes (avec  $\lambda = \sqrt{\Phi^2 + 1}$ ) :

- $i = (1/\lambda)/\Phi \approx 0,324919696\dots = \text{tang}.18^\circ$
- $h = 1/\lambda \approx 0,5257311121\dots = i.\Phi$
- $f = \Phi/\lambda \approx 0,8506508079\dots = h.\Phi$
- $d = \Phi^2/\lambda \approx 1,37638192\dots = f.\Phi = \text{tang}.54^\circ$

On constate que ces longueurs sont également dans un rapport  $\Phi$  entre elles et que l'on retrouve un facteur d'amplification  $\Phi^3$  entre (i) et (d) ou :  $\text{tang}.54^\circ = \Phi^3 \cdot (\text{tang}.18^\circ)$ .

Cette grille pourra également être pavée ou reconstituée par l'accolement de trois différentes briques dont une, (un pentagone régulier), possède trois différents états, suivant s'il est traversé ou non par un ou deux segments de droites. Ces briques (P0, P1, P2, Coupe et Calice) constituent un set que j'ai nommé « Briques de la création ». Elles sont décrites par la figure 4.



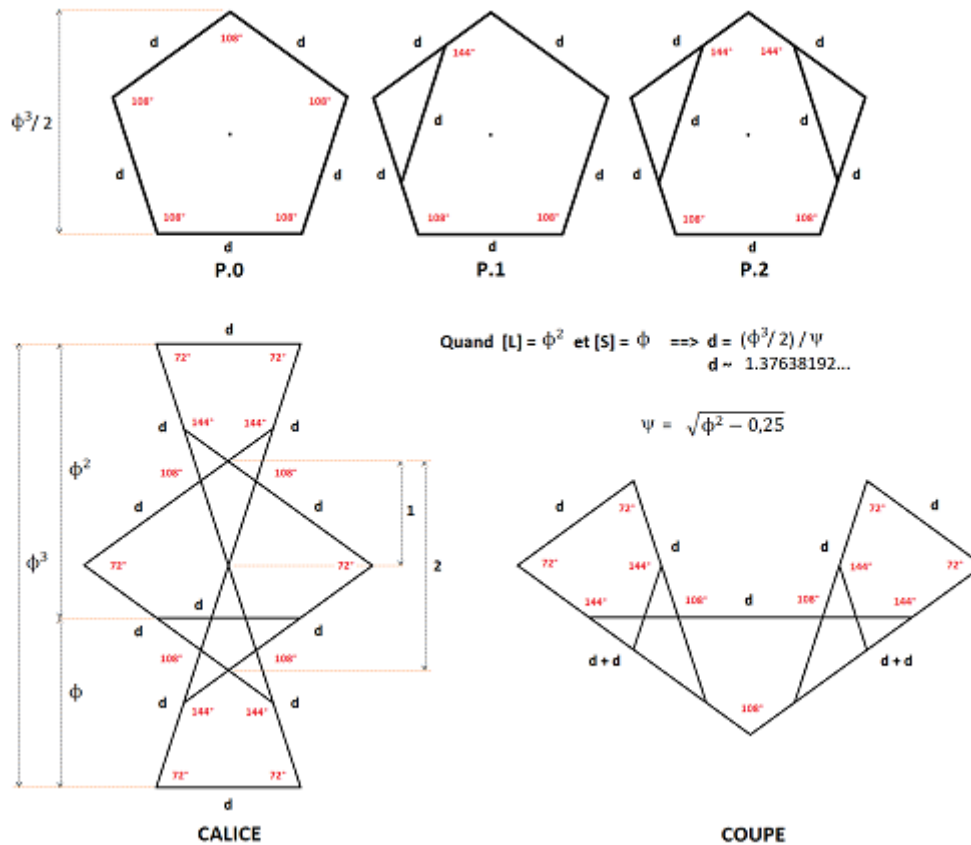


Figure 4.

### Conclusion :

Cet article montre qu'il existe des règles de substitutions (ou morphisme), en adéquation avec le mot infini de Fibonacci, produisant exclusivement des palindromes à partir d'un alphabet binaire :  $\bar{A} = \{L,S\}$  ; la concaténation de l'infinité de ces palindromes est le mot infini de Fibonacci. Chacun des palindromes engendré par ce morphisme se superpose exactement au diamètre de cercles qui forment une suite géométrique de raison  $q = \Phi$  et donc un système fractal de cercles. Nous pouvons ainsi localiser l'origine de cette suite en un point (O.) situé à  $-\infty$  ; ce point étant, par définition, physiquement inatteignable. Le système fractal des cercles forme des angles de  $36^\circ$  et  $72^\circ$ , cela implique dix systèmes identiques sur les  $360^\circ$  de l'espace plan. Le point origine devient par conséquent le centre d'une parfaite symétrie pentagonale et décagonale sur l'infinité du plan donc un quasi-cristal à deux dimensions. La « cinq-grille » formée par les droites parallèles, dont la répartition des espacements obéit au développement des mots de Fibonacci et centrée sur cette origine, s'équilibre très précisément malgré la nature irrationnelle des quatre différentes longueurs de segments qui la composent et leurs répétitions sur l'infinité du plan.

Cet article aborde la suite et le mot infini de Fibonacci sous un regard nouveau ; il met en lumière une logique graphique et un développement géométrique qui répondent à certains questionnements de la physique des matériaux, comme ceux concernant la croissance et l'organisation atomique dans les quasi-cristaux.

## Références :

- [1] OEIS A000045, A003849, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
- [2] J-P. Allouche, J. Shallit « Automatic sequences : theory, applications, generalizations » Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [3] Alexis Monnerot-Dumaine. «The Fibonacci Word fractal.» 24 pages, 25 figures. 2009. <hal-00367972>.
- [4] Md. Akhtaruzzaman, Amir A. Shafie, « Geometrical Substantiation of Phi, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering ». International Journal of Arts 2011.
- [5] Giuseppe Pirillo, « Fibonacci numbers and words », Discrete Math. 173 (1997).
- [6] Frédéric Mansuy, «Fibonacci words and the construction of a quasicrystalline fivefold structure.» The Fibonacci Quarterly. Volume 55. Number 5. 2017.
- [7] Laura Effinger-Dean, «The Empire Problem in Penrose Tilings.» Williams College. Williamstown, Massachusetts May 8, 2006.
- [8] Ambrož, P., Frougny, C., Masáková, Z. and Pelantová, E., « Palindromic complexity of infinite words associated with simple Parry numbers. » *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56 (2006) 2131–2160.
- [9] Simon Jazbec, « The Properties and Applications of Quasicrystals » University of Ljubljana, December 2009.