HAL
open science

Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base C P 1

Jean-Yves Welschinger

To cite this version:

Jean-Yves Welschinger. Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base C P 1. Proceedings of the London Mathematical Society, 2002, 85 (2), pp.367-392. 10.1112/S0024611502013606 . hal-02081358

HAL Id: hal-02081358

https://hal.science/hal-02081358v1

Submitted on 14 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

Jean-Yves Welschinger

10 septembre 2001

Introduction

Soit X une surface réglée de base $\mathbb{C}P^1$, c'est-à-dire une surface projective complexe lisse et compacte munie d'une submersion holomorphe p sur $\mathbb{C}P^1$ dont les fibres sont de genre nul. Supposons cette surface munie d'une involution antiholomorphe c satisfaisant $p \circ c = conj \circ p$, où $conj$ est la conjugaison complexe standard de $\mathbb{C}P^1$. Une telle surface est appelée *surface réglée réelle*, et le lieu $\mathbb{R}X$ des points fixes de c est appelé la *partie réelle* de X. Une courbe algébrique réelle A de X est une courbe algébrique complexe invariante par c, et le lieu $\mathbb{R}A$ des points fixes de $c|_A$ est la *partie réelle* de A. Si A est une courbe algébrique réelle lisse de X, la classe d'isotopie dans $\mathbb{R}X$ de la partie réelle $\mathbb{R}A$ est un invariant par déformation de A dans X. Cet invariant est appelé le *schéma réel* de A, et un problème fondamental de géométrie algébrique réelle est de classifier les schémas réels réalisés par les courbes algébriques réelles lisses de X, lorsque la classe d'homologie dans $H_2(X;\mathbb{Z})$ de ces courbes est fixée. Ce problème a d'ailleurs été inclus par D. Hilbert [6] dans son 16eme problème dans le cas des courbes planes. La plupart des méthodes mises en oeuvre depuis pour obtenir des restrictions sur cet ensemble de schémas réels sont topologiques (v. les surveys [13], [12], et [3]), au point que O. Viro a introduit dans [12], dans le cas des courbes planes, une notion de "courbes flexibles réelles" qui ne peuvent être distinguées des courbes algébriques réelles par de telles méthodes. Une question naturelle, qui a motivé une partie de cet article, apparait donc :

Existe-t-il des schémas réels réalisés par des courbes flexibles réelles, mais pas par les courbes algébriques réelles ayant la même classe d'homologie ?

Mots-clés : Courbe algébrique réelle, discriminant, surface de Hirzebruch.
Classification AMS : 14H10, 14J26, 14P25.

Remarquons par ailleurs que le problème de classification des schémas réels constitue en fait un premier pas dans l'étude d'un second problème essentiel de géométrie algébrique réelle : déterminer l'ensemble des composantes connexes de l'espace des courbes algébriques réelles lisses de X dont la classe d'homologie dans $H_2(X;\mathbb{Z})$ est donnée. Ici, puisque la surface réglée X est simplement connexe, cet espace est en général isomorphe au complémentaire d'une hypersurface algébrique réelle dans un espace projectif réel, où l'espace projectif réel est un système linéaire complet de diviseurs réels de X, et l'hypersurface algébrique réelle est l'hypersurface *discriminant* des diviseurs singuliers de ce système linéaire (dans certains cas, cet espace peut toutefois être vide ou égal au système linéaire complet tout entier). Pour étudier cet espace, V. A. Rokhlin a introduit dans [9] un invariant plus fin que ceux considérés auparavant : la classe d'isotopie équivariante. Deux courbes algébriques réelles lisses C_0 et C_1 de X sont dans la même *classe d'isotopie équivariante* de X s'il existe un chemin continu de difféomorphismes de X reliant l'identité à un difféomorphisme qui envoie C_0 sur C_1, chaque difféomorphisme devant commuter avec la structure réelle de X. V. A. Rokhlin a alors soulevé la question suivante :

Cet invariant donné par la classe d'isotopie équivariante suffit-il pour décrire les composantes connexes de l'espace des courbes algébriques réelles lisses de X ?

Aucune réponse à cette question n'a été donnée à ce jour. De même, aucun exemple de schéma réel réalisé par des courbes flexibles réelles mais pas par des courbes algébriques réelles n'est connu dans des surfaces compactes. Toutefois, S. Fiedler et S. Orevkov (v. [4]) ont obtenu un exemple de schéma réel d'une courbe affine de degré 6 de $\mathbb{C}^2$, et S. Orevkov et E. Shustin (v. [8]) ont obtenu un autre exemple de schéma réel d'une courbe affine de degré 6 de $\mathbb{C}^2$, ainsi que quelques exemples de schémas réels de courbes affines de la surface réglée X_2 (v. §1.1 pour une définition).

L'obectif de cet article est de donner des réponses à ces deux questions dans le cas des surfaces réglées X_l de base $\mathbb{C}P^1$, $l \geq 2$ (v. §1.1 pour une définition), et ceci pour une large classe de systèmes linéaires de diviseurs numériquement effectifs de ces surfaces. La méthode utilisée consiste à introduire la déformation de Kodaira des surfaces réglées, pour laquelle toutes les fibres sont biholomorphes excepté une qui, bien que difféomorphe aux autres fibres, porte une structure complexe différente. Or satisfaire le théorème de Bezout avec le diviseur exceptionnel donne une condition topologique plus forte sur les courbes algébriques réelles dans la fibre spéciale que dans la fibre générique. En ramenant par une déformation lisse les courbes algébriques réelles de la fibre générique dans la fibre spéciale, on construit ainsi des courbes flexibles qui ne peuvent être algébriques, parce-qu'ayant trop

de points d'intersection avec le diviseur execptionnel. De même, on construit ainsi des couples de courbes algébriques réelles lisses dans la fibre spéciale qui ne peuvent être connectées algébriquement du fait du théorème de Bezout, mais qui peuvent l'être via la fibre générique. En utilisant la même déformation lisse, ce chemin de courbes algébriques réelles dans la fibre générique est ramené en un chemin de courbes flexibles réelles dans la fibre spéciale. Enfin, l'étude de la déformation des courbes algébriques réelles dans cette déformation de Kodaira permet également d'établir comme résultat intermédiaire le théorème de comparaison suivant : lorsque $m = l + 2k$, $k > 0$, les discriminants de la surface X_m se déduisent de ceux de la surface X_l par des homothéties à poids.

Cet article est divisé en deux paragraphes. Le but du premier paragraphe est d'obtenir le théorème de comparaison (v. théorème 1.3). On rappelle pour cela au préalable la notion d'homothétie à poids, et on introduit la déformation des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$ qui est utilisée de façon fondamentale dans toute la suite. Dans le second paragraphe sont construits dans une large classe de systèmes linéaires de diviseurs des surfaces réglées X_l, $l \geq 2$, des schémas réels réalisés par des courbes flexibles réelles mais pas par des courbes algébriques réelles lisses (v. corollaire 2.2), ainsi que des courbes algébriques réelles lisses qui sont dans une même classe d'isotopie équivariante, mais pas dans une même classe de déformation (v. corollaire 2.7). Ces résultats sont obtenus à l'aide du théorème 1.3, en comparant les espaces des courbes algébriques réelles lisses dans les différentes surfaces réglées.

Remerciements :

Ce travail a été effectué sous la direction de V. Kharlamov. Je lui en suis vivement reconnaissant.

1 Discriminants des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

1.1 Les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

Une *surface réglée de base* $\mathbb{C}P^1$ est une surface algébrique complexe compacte lisse connexe munie d'une submersion holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$ dont les fibres sont de genre nul. Soit $l \in \mathbb{N}$ et F_l le fibré vectoriel complexe de rang un et de degré l sur $\mathbb{C}P^1$. On note $X_l = P(F_0 \oplus F_l)$ où $P(F_0 \oplus F_l)$ désigne le fibré en droites projectives associé au fibré de rang deux $F_0 \oplus F_l$. Les surfaces X_l sont des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$, et ce sont les seules (v. [2]). Remarquons que $X_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ et que $X_1 = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$. Notons U,V

deux cartes isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$, et $(x_1, (y_1 : y_0))$ (resp. $(x_2, (z_1 : z_0))$) des coordonnées sur U (resp. sur V). La surface X_l est alors obtenue en recollant les cartes U et V par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \subset U & \to & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \subset V \\ (x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

où $x_1 x_2 = 1$ et $z_0 y_1 = x_2^l z_1 y_0$. La submersion holomorphe $\pi : X_l \to \mathbb{C}P^1$ est donnée dans les cartes U, V par la projection sur la première coordonnée. Lorsque $l \neq 0$, la suface X_l possède une unique courbe algébrique lisse d'indice d'autointersection strictement négatif, noté e. Lorsque $l = 0$, e désigne une section d'indice d'autointersection nul dans X_0. Notons de même v une fibre de X_l. Le couple $([v], [e])$, où $[v], [e]$ désignent les classes d'homologies de v, e, forme alors une base du réseau $H_2(X_l; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ que l'on fixe une fois pour toute dans cet article. Ainsi, une courbe de classe (a, b) désignera une courbe qui réalise la classe d'homologie $a[v] + b[e]$ dans $H_2(X_l; \mathbb{Z})$.

Soit c l'application définie dans la carte U par $c(x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (\overline{x}_1, (\overline{y}_1 : \overline{y}_0))$. Cette application c définit une structure réelle sur toutes les surfaces X_l, telle que $\mathbb{R}X_l$ est un tore si l est pair, et une bouteille de Klein si l est impair. Dans cet article, lorsqu'une surface X_l sera munie d'une structure réelle, ce sera toujours la structure c. Dans ce cas, le diviseur exceptionnel e de X_l est réel, ou lorsque l est nul, la section e peut être choisie réelle, et de même, la fibre v peut être choisie réelle. Le couple $([\mathbb{R}v], [\mathbb{R}e])$ forme alors une base qui fixe un isomorphisme entre l'espace $H_1(\mathbb{R}X_l; \mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ selon que l est pair ou impair.

1.2 Une déformation Y des surfaces réglées

Soient k, l, m trois entiers naturels tels que $m = l + 2k$, $k > 0$. On définit la déformation Y de X_m par le recollement de deux cartes $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$. Fixons $(t, x_1, (y_1 : y_0))$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0))$ des coordonnées sur $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, le recollement est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \\ (t, x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (t, x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

où $x_1 x_2 = 1$, et $z_0 y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2^k y_0 z_0$.

Cette variété est munie d'une projection sur la première coordonnée $p : Y \to \mathbb{C}$, et pour $t \in \mathbb{C}$, la fibre $p^{-1}(t)$ de cette submersion propre est notée Y_t. Ces surfaces Y_t sont des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$, la structure réglée étant donnée par la projection sur la seconde coordonnée. De plus, les applications

données dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par $(t, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (\overline{t}, \overline{x}_1, (\overline{y}_1 : \overline{y}_0))$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (\overline{t}, \overline{x}_2, (\overline{z}_1 : \overline{z}_0))$ définissent une structure réelle c_Y sur Y.

Lemme 1.1 *La déformation $Y \to \mathbb{C}$ est triviale au-dessus de $\mathbb{C}^*$, isomorphe à $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$, et Y_0 est isomorphe à X_m.*

Reproduisons la démonstration de [7], exemple 2.16.

Démonstration :

Notons $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0))$ et $(\tilde{x}_2, (\tilde{z}_1 : \tilde{z}_0))$ les coordonnées dans les cartes U et V de X_m (ces coordonnées sont notées avec des tildes pour ne pas être confondues avec celles de Y). L'isomorphisme $Y_0 \cong X_m$ est donné dans les cartes $\mathcal{U}$ de Y_0 et U de X_m par $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{y}_1 = y_1$ et $\tilde{y}_0 = y_0$.

Lorsque $t \neq 0$, considérons les applications

$$\begin{aligned} (t, x_1, (y_1 : y_0)) &\mapsto (t, x_1, (x_1^k y_1 - t y_0 : t y_1)) && (1) \\ (t, x_2, (z_1 : z_0)) &\mapsto (t, x_2, (z_1 : t x_2^{m-k} z_1 + t^2 z_0)) && (2) \end{aligned}$$

Ces applications se recollent en une application Ψ entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l$. En effet, si x_1, $x_2 \in \mathbb{C}^*$, alors $x_1 x_2 = 1$, et :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0 \tilde{y}_1 &= (t x_2^{m-k} z_1 + t^2 z_0)(x_1^k y_1 - t y_0) \\ &= t x_2^l y_1 z_1 - t^2 x_2^{m-k} y_0 z_1 + t^2 x_1^k z_0 y_1 - t^3 y_0 z_0 \\ &= t x_2^l y_1 z_1 - t^2 x_2^{m-k} y_0 z_1 - t^3 y_0 z_0 + t^2 x_1^k (x_2^m z_1 y_0 + t x_2^k y_0 z_0) \\ &= t x_2^l y_1 z_1 \\ &= \tilde{x}_2^l \tilde{z}_1 \tilde{y}_0 \end{aligned}$$

Cette application Ψ est un isomorphisme entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$. $\square$

Remarque : L'isomorphisme Ψ entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$ défini dans les lignes (1) et (2) sera utilisée dans la suite, il préserve les structures réglées de X_l et de Y_t lorsque $t \in \mathbb{R}$. En particulier, les surfaces X_l et Y_t seront dorénavent identifiées grâce à cet isomorphisme Ψ. De même, les surfaces X_m et Y_0 seront identifiées grâce à l'isomorphisme défini au début de la démonstration du lemme 1.1. Par ailleurs, remarquons que quel que soit $t \in \mathbb{C}^*$, les applications données dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par :

$$(1, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (t, x_1, (t y_1 : y_0)) \text{ et } (1, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (t, x_2, (t z_1 : z_0))$$

définissent un isomorphisme $\psi_t : Y_1 \to Y_t$ qui sera lui aussi utilisé dans la suite.

1.3 Homothéties à poids

Fixons une décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, où $b, n, n_0, \ldots, n_b$ sont des entiers naturels, et notons h le morphisme de groupes $\mathbb{C}^* \to GL(\mathbb{C}^n)$ défini pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ par $h(t)(x_0, \ldots, x_b) = (x_0, tx_1, t^2x_2, \ldots, t^bx_b)$. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ une hypersurface algébrique définie comme le lieu des zéros d'un polynôme P. Notons $\Delta_h = \{(t, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \,|\, h(t^{-1})(z) \in \Delta\}$. Si $P = \sum a_{i_0 \ldots i_b} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_b^{i_b}$, où pour $j \in \{0, \ldots, b\}$, $i_j \in \mathbb{N}^{n_j}$, le *degré homogène* de P est $d = \max\{|i_1| + 2|i_2| + \cdots + b|i_b|\}$, le maximum étant pris sur les monômes pour lesquels $a_{i_0 \ldots i_b} \neq 0$. L'hypersurface Δ_h est alors le lieu des zéros du polynôme $P_h(t, z) = t^d P(h(t^{-1})(z))$.

On appelle *homothétie à poids* de Δ associée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, l'hypersurface algébrique

$$\begin{aligned} H\Delta &= \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, (0, z) \in \overline{\Delta_h} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, P_h(0, z) = 0\} \end{aligned}$$

Cette hypersurface $H\Delta$ est invariante par l'action de h. Lorsque P est à coefficients réels, c'est-à-dire lorsque Δ est une hypersurface algébrique réelle de $\mathbb{C}^n$, il en est de même pour Δ_h et $H\Delta$.

Soit à présent V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{C}}$ une famille d'applications linéaires injectives $V \to \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $Im(\Phi_t) = h(t)(Im(\Phi_1))$. Soit $\Delta \subset V$ une hypersurface algébrique. On note $\Delta_h = \{(t, z) \in \mathbb{C}^* \times V \,|\, \Phi_1^{-1} \circ h(t^{-1}) \circ \Phi_t(z) \in \Delta\}$, et on appelle *homothétie à poids* de Δ associée à Φ, l'hypersurface $H_\Phi\Delta = \{z \in V \,|\, (0, z) \in \overline{\Delta_h} \subset \mathbb{C} \times V\}$. Lorsque $t \mapsto \Phi_t$ est algébrique, l'hypersurface $H_\Phi\Delta$ est algébrique. Si de plus Δ est algébrique réelle, pour la conjugaison complexe de V induite par Φ_1, et que quel que soit $t \in \mathbb{C}^*$ et $z \in V$, $\overline{\Phi_t(z)} = \Phi_{\overline{t}}(\overline{z})$, alors Δ_h et $H_\Phi\Delta$ sont également algébriques réelles. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, on notera plus simplement $H_\Phi\Delta = H\Delta$.

1.4 Le théorème de comparaison

Rappelons que $Pic(X_l) = H^2(X_l; \mathbb{Z}) = H_2(X_l; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ et qu'une base de ce réseau $([v], [e])$ a été fixée au §1.1. Fixons trois entiers naturels m, l, k tels que $k > 0$ et $m = l + 2k$, et notons ρ l'isomorphisme de réseaux

$$\begin{aligned} \rho \,:\, Pic(X_l) &\to Pic(X_m) \\ (a, b) &\mapsto (a + kb, b) \end{aligned}$$

Soit D un diviseur de X_l de classe (a, b), on note $h^0(D)$ la dimension de $H^0(D)$. Si $a < 0$ ou $b < 0$, alors $H^0(D)$ est réduit à $\{0\}$. Si $a \geq lb$, alors

$h^0(D) = (a+1)(b+1) - \frac{1}{2}lb(b+1)$. En effet, cet espace $H^0(D)$ est l'espace des sections du fibré en droites complexes associé à D, et ces sections sont données dans la carte U par les polynômes en $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ dont le polytope de Newton est l'enveloppe convexe des sommets $(0,0), (0,b), (a-lb, 0)$ et (a,b).

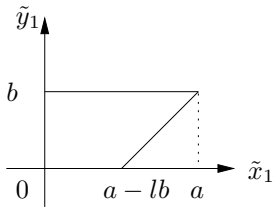


Figure 1.

Enfin, si $a < lb$, $a, b \geq 0$, alors $h^0(D) = (a+1)(b'+1) - \frac{1}{2}lb'(b'+1)$, où $b' = [\frac{a}{l}]$, partie entière de $\frac{a}{l}$, puisque chaque élément de $H^0(D)$ s'annule en e avec une multiplicité au moins égale à $b - b'$, et que la suppression de cette composante fixe établit un isomorphisme entre $H^0(D)$ et l'espace $H^0(av + b'e)$.

Par ailleurs, on note $\Delta_D \subset H^0(D)$ (resp. $\Delta_{\rho(D)} \subset H^0(\rho(D))$) l'hypersurface discriminant constituée des sections dont le lieu des zéros est singulier dans X_l (resp. dans X_m). Lorsque les surfaces X_l, X_m sont munies de leur structure réelle c (v. §1.1), cette structure induit sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(D)$ (resp. $H^0(\rho(D))$) une conjugaison complexe, et l'hypersurface Δ_D (resp. $\Delta_{\rho(D)}$) est algébrique réelle pour cette conjugaison complexe. Un calcul facile permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 1.2 *Pour tout diviseur D de X_l, $h^0(D) \leq h^0(\rho(D))$. Si $\rho(D)$ est numériquement effectif, c'est-à-dire si les indices d'intersection $\rho(D) \circ e$ et $\rho(D) \circ v$ sont positifs ou nuls, alors il y a égalité.* $\square$

(Le cas d'égalité de ce lemme peut être illustré par la figure 2.)

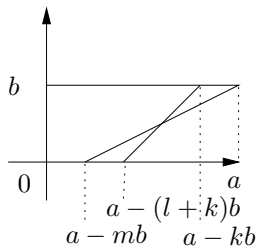


Figure 2.

Pour tout $\beta \in \{0, \ldots, b\}$, posons $n_\beta = a + k(b - \beta) + 1$, et notons $\mathbb{C}^{n_\beta}$ l'espace des polynômes en x_1, y_1, y_0, homogènes en y_1, y_0, de degré en x_1 inférieur ou égal à $n_\beta - 1$, et de degré $b - \beta$ en y_1. Le produit $\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$ désigne alors l'espace total des polynômes dont les monômes sont de la forme $x_1^i y_1^j y_0^{b-j}$ avec $i \leq a + kj$ et $j \leq b$.

Théorème 1.3 *Soit D un diviseur de X_l. Il existe des applications linéaires injectives $\phi_D : H^0(D) \to H^0(\rho(D))$, et pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\Phi_t : H^0(D) \to \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, telles que :*

- Les seuls diviseurs du système $|\rho(D)|$ de Y_0 qui se prolongent en des diviseurs de Y sont ceux associés aux éléments de l'image de ϕ_D.

- Soit $Im\phi_D \subset \Delta_{\rho(D)}$, soit les couples $(Im\phi_D, \Delta_{\rho(D)} \cap Im\phi_D)$ et $(H^0(D), H_\Phi \Delta_D)$ sont isomorphes par un isomorphisme linéaire, où $H_\Phi \Delta_D$ est l'homothétie à poids de Δ_D associée à Φ.

Lorsque les surfaces X_l, X_m sont munies de leur structure réelle c (v. §1.1), ϕ_D et l'homothétie à poids préservent ces structures réelles.

Remarque : Lorsque $\rho(D)$ est numériquement effectif, d'après le lemme 1.2, $h^0(D) = h^0(\rho(D))$. Dans ce cas, d'après le théorème 1.3, $Im(\phi_D) = H^0(\rho(D))$ tout entier, et tous les diviseur du système linéaire complet $|\rho(D)|$ de Y_0 se déforment dans Y. De plus dans ce cas, $(H^0(\rho(D)), \Delta_{\rho(D)}) \cong (H^0(D), H\Delta_D)$.

Pour tout diviseur D de X_l, on note E_D l'ensemble fini des composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_D$ dans $\mathbb{R}H^0(D)$. De même, $E_{\rho(D)}$ désigne l'ensemble fini des composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_{\rho(D)}$ dans $\mathbb{R}H^0(\rho(D))$. Lorsque $\rho(D)$ est numériquement effectif, le théorème 1.3 fournit une application $f_D : E_{\rho(D)} \to E_D$ qui est définie comme suit : soit C_0 un diviseur lisse réel réalisant un élément de $E_{\rho(D)}$. D'après la remarque précédente, ce diviseur se déforme dans Y en une famille $C_t \subset Y_t$ de diviseurs. Lorsque $t > 0$ est suffisament petit, C_t est lisse dans Y_t qui est isomorphe à X_l par $pr_2 \circ \Psi$ où Ψ est l'isomorphisme entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$ fixé au §1.2, et pr_2 la projection $\mathbb{C}^* \times X_l \to X_l$. Lorsque $t > 0$ est suffisament petit, C_t définit donc un élément de E_D. Comme cet élément ne dépend pas de choix de C_0 dans $E_{\rho(D)}$, ce procédé définit une application $E_{\rho(D)} \to E_D$ notée f_D. Cette application sera étudiée dans le §2.

Lemme 1.4 *Soit D un diviseur effectif de X_l. Il existe un fibré en droites $L \to Y$ tel que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, la restriction de L à Y_t est le fibré associé à D, et tel que sa restriction à Y_0 est le fibré associé à $\rho(D)$.*

Démonstration :

Notons (a, b) la classe de D, où a et b sont positifs, et $b' = [\frac{a}{l}]$ (resp. $b' = b$) si $a < lb$ (resp. si $a \geq lb$). Une base de l'espace vectoriel des sections

algébriques du fibré en droites associé à D est donnée dans la carte U de X_l par les sections $\tilde{x}_1^i \tilde{y}_1^{b-b'+j} \tilde{y}_0^{b'-j}$, et dans la carte V par $\tilde{x}_2^{a-lb'+lj-i} \tilde{z}_1^{b-b'+j} \tilde{z}_0^{b'-j}$, où $j \in \{0, \ldots, b'\}$ et $i \in \{0, \ldots, a - lb' + lj\}$. Par l'isomorphisme Ψ entre $\mathbb{C}^* \times X_l$ et $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donné dans le §1.2, ces sections s'écrivent dans la carte $\mathcal{U}$: $x_1^i (x_1^k y_1 - t y_0)^{b-b'+j} (t y_1)^{b'-j}$ où $j \in \{0, \ldots, b'\}$ et $i \in \{0, \ldots, a - lb' + lj\}$. Lues dans la carte $\mathcal{V}$, elles se transforment en les fractions rationelles :

$$\frac{1}{x_2^i} (x_2^{m-k} z_1)^{b-b'+j} (t x_2^m z_1 + t^2 x_2^k z_0)^{b'-j} = \frac{x_2^{a-lb'+lj-i}}{x_2^{a+kb-mb}} z_1^{b-b'+j} (t x_2^{m-k} z_1 + t^2 z_0)^{b'-j}$$

Ainsi, notons $L_{\mathcal{U}}$ (resp. $L_{\mathcal{V}}$) les fibrés en droites au-dessus de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) dont les sections sont les polynômes homogènes de degré b en $(y_1 : y_0)$ (resp. $(z_1 : z_0)$). Trivialisons ces fibrés au-dessus des ouverts $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, et recollons-les par le changement de trivialisation :

$$\begin{array}{rcl} L_{\mathcal{U}}|_{x_1 y_0 \neq 0} & \to & L_{\mathcal{V}}|_{x_2 z_0 \neq 0} \\ (t, x_1, \dfrac{y_1}{y_0}, \xi) & \mapsto & (t, x_2, \dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{1}{x_2^{a+kb-mb}} \xi) \end{array}$$

où $x_1 x_2 = 1$ et $z_0 y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2^k z_0 y_0$.

En restriction à $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$, ce fibré en droites L est le fibré associé à D, et au-dessus de Y_0, ce fibré en droite est le fibré associé à $\rho(D)$. En effet, un isomorphisme entre ce dernier fibré et le fibré associé au diviseur $(a + kb)v + be$ de X_m est donné dans les cartes $\mathcal{U} \to U$ par l'identité. $\square$

Remarque : Au début de la démonstration du lemme 1.4 ont été introduites les sections du fibré associé au diviseur D de Y_t pour $t \neq 0$. Notons $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ ces sections qui seront utiles dans la suite. Remarquons que par exemple lorsque $a \geq lb$, c'est-à-dire lorsque D est numériquement effectif, elles s'écrivent dans la carte $\mathcal{U}$ comme des éléments de l'espace $\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$ introduit avant l'énoncé du théorème 1.3, c'est-à-dire comme des polynômes en x_1, y_1 dont le polytope de Newton est l'enveloppe convexe des sommets $(0, 0)$, $(0, b)$, $(a + kb, b)$ et $(a, 0)$. Par ailleurs, les involutions des fibrés $L_{\mathcal{U}}$, $L_{\mathcal{V}}$ données par $(t, x_1, (y_1 : y_0), \xi) \mapsto (\overline{t}, \overline{x_1}, (\overline{y_1} : \overline{y_0}), \overline{\xi})$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0), \xi) \mapsto (\overline{t}, \overline{x_2}, (\overline{z_1} : \overline{z_0}), \overline{\xi})$ définissent une structure réelle sur L qui commute avec la structure réelle c_Y de Y.

Lemme 1.5 *Soit D un diviseur effectif de X_l, et L le fibré construit dans le lemme 1.4. Il existe une famille $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ de sections algébriques de L, telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$, les restrictions $s_i(t)$ de s_i au dessus de Y_t forment une famille libre de sections de $L \to Y_t$. Lorsque D est réel, ces sections commutent avec les structures réelles de L et Y.*

Démonstration :

Les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ sont obtenues par récurrence en appliquant la construction qui suit aux sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ introduites dans la démonstration du lemme 1.4 (v. la remarque précédente).

La construction initiale est la suivante : si la section $\tilde{s}_1(0)$ du fibré $L \to Y_0$ est non-nulle, on pose $s_1 = \tilde{s}_1$. Sinon, $\tilde{s}_1$ est divisible par une puissance de t, et on pose $s_1 = t^{-d}\tilde{s}_1$ où d est choisi maximal. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $s_1(t)$ est non nul, et lorsque $t \neq 0$, $s_1(t)$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\tilde{s}_1(t)$.

Supposons à présent construits $s_1, \ldots, s_k$ où $k < h^0(D)$, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ sont linéairement indépendants, et sont lorsque $t \neq 0$ dans l'espace vectoriel engendré par $\tilde{s}_1(t), \ldots, \tilde{s}_k(t)$.

Si $\tilde{s}_{k+1}(0)$ est linéairement indépendant de $s_1(0), \ldots, s_k(0)$, on pose $s_{k+1} = \tilde{s}_{k+1}$. Sinon, il existe des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i)(0) = 0$. Cette section $\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i$ est donc divisible par une puissance de t, et on réitère le procédé en substituant à $\tilde{s}_{k+1}$ la section $t^{-d'}(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i)$, où d' est choisi maximal. Comme les sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ sont définies dans la carte $\mathcal{U}$ par des polynômes en t de degrés inférieurs ou égaux à b, et que $\tilde{s}_{k+1}(t)$ n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ pour tout t non nul, ce procéde s'arrête nécéssairement. Il produit alors une section de la forme $t^{-d''}(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda'_i(t) s_i)$ où $d'' \leq b$ et les λ'_i sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à d''. Cette section est linéairement indépendante de $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ pour tout $t \in \mathbb{C}$, et est dans l'espace engendré par $\tilde{s}_1(t), \ldots, \tilde{s}_{k+1}(t)$ pour tout t non nul. On pose s_{k+1} égal à cette section. Comme les sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de X_l et du fibré associé à D, par construction, les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de Y et de L. $\square$

Démonstration du théorème 1.3 :

On peut supposer que le diviseur D est effectif. Considérons les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ données par le lemme 1.5. D'après ce lemme, $s_1(1), \ldots, s_{h^0(D)}(1)$ forme une base de $H^0(D)$ via l'identification entre Y_1 et X_l fixée au §1.2, et $s_1(0), \ldots, s_{h^0(D)}(0)$ une famille libre de $H^0(\rho(D))$. Posons $\phi_D(s_i(1)) = s_i(0)$ pour $i \in \{1, \ldots, h^0(D)\}$, et prolongeons cette application par linéarité en une application $H^0(D) \to H^0(\rho(D))$. Cette application est alors linéaire injective, et par construction, tous les diviseurs associés aux éléments de son image se prolongent en des diviseurs de Y. Par ailleurs, ce sont les seuls. En effet, si $s(0)$ était un élément de $H^0(\rho(D))$ associé à un diviseur de $|\rho(D)|$ qui se prolonge en un diviseur de Y, mais qui n'appartient pas à l'image de ϕ_D, alors pour des valeurs de t voisines de 0, $s(t)$ serait encore linéairement

indépendant de $s_1(t), \ldots, s_{h^0(D)}(t)$, ce qui ne se peut pas.

Notons $V = \mathbb{C}^{h^0(D)}$, et pour tout $t \in \mathbb{C}$, Φ_t l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} \\ (x_1, \ldots, x_{h^0(D)}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(t) \end{array}$$

ce qui a un sens lorsqu'on écrit chaque section s_i dans la carte $\mathcal{U}$, puisque son expression est alors polynomiale de la forme voulue. Notons $\Delta \subset \mathbb{C} \times V$ l'ensemble des éléments $(t, x_1, \ldots, x_{h^0(D)})$ tels que le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(t)$ est singulier dans Y_t. C'est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C} \times V$, puisque par construction, lues dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, les sections s_i sont algébriques en toutes les variables. Or pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, il existe un isomorphisme $\psi_t : Y_1 \to Y_t$ donné dans la carte $\mathcal{U}$ par $(1, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (t, x_1, (ty_1 : y_0))$ (v. le §1.2). En notant h_t l'homothétie

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} & \to & \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} \\ (y_0, y_1, \ldots, y_b) & \mapsto & (y_0, ty_1, \ldots, t^b y_b), \end{array}$$

on s'aperçoit donc que $Im(\Phi_t) = h_t(Im(\Phi_1))$. En effet, si une section s de $L|Y_1$ est donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par un polynôme $P \in Im(\Phi_1)$, alors la section $s \circ \psi_t^{-1}$ de $L|Y_t$ est donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par l'élément $P \circ \psi_t^{-1} \in Im(\Phi_t)$. Or $t^d P \circ \psi_t^{-1} = h_t(P)$ si d est le degré homogène de P, et donc $Im(\Phi_t) = h_t(Im(\Phi_1))$. De plus, le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(1)$ est singulier dans Y_1 si et seulement si le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(1) \circ \psi_t^{-1}$ est singulier dans Y_t, donc Δ est invariante par les homothéties h_t.

On en déduit l'alternative $\Delta \cap (\{0\} \times V) = \{0\} \times V$, ou bien $(\{0\} \times V, \Delta \cap (\{0\} \times V)) \cong (\{1\} \times V, H_\Phi(\Delta \cap (\{1\} \times V)))$ où $H_\Phi(\Delta \cap (\{1\} \times V))$ est l'homothétie à poids de $\Delta \cap (\{1\} \times V)$ associée à Φ. En effet, si Δ coïncide avec $\mathbb{C} \times V$ tout entier, c'est évident, et si Δ est une hypersurface algébrique, elle est partout localement définie comme le lieu des zéros d'un polynôme. Par conséquent, lorsque $\Delta \cap (\{0\} \times V) \neq \{0\} \times V$, on déduit dans ce cas que $\{0\} \times V$ n'est pas une composante de Δ, et par suite que Δ est l'adhérence de $\Delta \setminus (\{0\} \times V)$, d'où l'alternative. Lorsque les variétés X_l, X_m, Y et L sont munies de leurs structures réelles, d'après le lemme 1.5, les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de L et Y, et par suite Δ est une hypersurface algébrique réelle de $\mathbb{C} \times V$. Ainsi, l'application ϕ_D et l'homothétie à poids préservent la structure réelle, d'où le résultat. $\square$

Remarque :

Rappelons que si E, F, G sont des fibrés vectoriels complexes sur une variété algébrique complexe lisse projective X, satisfaisant la suite exacte courte $0 \to E \to G \to F \to 0$, alors il existe une déformation $p : Y \to \mathbb{C}$ triviale au-dessus de $\mathbb{C}^*$, telle que $p^{-1}(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^* \times G$ et $Y_0 \cong E \oplus F$ (v. [10], lemme 16, et [1], proposition 2). En projectivisant ces fibrés $E \oplus F$ et G, on en déduit une déformation entre variétés compactes du même type que celle présentée au §1.2 qui n'en est d'ailleurs qu'un exemple particulier. Pour toutes ces déformations, on peut établir un théorème analogue au théorème 1.3, en procédant exactement de la même manière. Le morphisme ρ est alors défini comme suit : à tout diviseur D du fibré projectif $P(G)$ obtenu à partir de G, on associe le diviseur $\mathcal{D} = (pr_2 \circ \psi)^* D$ de $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$, où ψ est une trivialisation fixée $p^{-1}(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}^* \times P(G)$, et pr_2 est la projection $\mathbb{C}^* \times P(G) \to P(G)$; le diviseur $\rho(D)$ de $P(E \oplus F)$ est alors défini comme la trace sur Y_0 de l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans Y.

2 Constructions de courbes flexibles et d'isotopies équivariantes de courbes algébriques réelles

Dans toute la suite de cet article, les surfaces réglées X_l, X_m et Y sont munies de leurs structures réelles c et c_Y. On suppose également à présent que le diviseur $\rho(D)$ est **numériquement effectif**, de sorte que d'après le lemme 1.2, $h^0(D) = h^0(\rho(D))$. L'objet de ce §2 est d'étudier l'application $f_D : E_{\rho(D)} \to E_D$ introduite à la suite du théorème 1.3. La surjectivité de f_D est étudiée dans le §2.1, et l'injectivité dans le §2.2. Il s'avère qu'en général, f_D n'est ni surjective, ni injective.

2.1 Surjectivité de f_D, courbes flexibles non-algébriques dans X_m

Proposition 2.1 *Lorsque $\rho(D) \circ v = 0$, ou bien lorsque m est impair et $\rho(D) \circ v = 1$, f_D est bijective. Par contre, dans tous les autres cas excepté lorsque m est impair, $b = 3$ et $k = 1$, il existe dans $|D|$ des courbes lisses dont le schéma réel n'est réalisé par aucun élément de l'image de f_D, et donc f_D n'est pas surjective.*

Remarque : Lorsque m est impair, $b = 3$ et $k = 1$, la surjectivité ou la non-surjectivité de f_D ne m'est pas connue.

Corollaire 2.2 *Soient m un entier supérieur ou égal à 2, et $[A]$ un élément de $H_2(X_m;\mathbb{Z})$ tel que $[A]\circ[e]\geq 0$, $[A]\circ[v]>0$ si m est pair, et $[A]\circ[v]>1$ si m est impair. Lorsque $[A]\circ[v]=3$ et que m est impair, supposons de plus que $m\geq 5$. Il existe alors dans X_m des courbes flexibles réelles de classe $[A]$ dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe algébrique réelle dans cette classe. En particulier, ces courbes ne sont isotopes à aucune courbe algébrique réelle.*

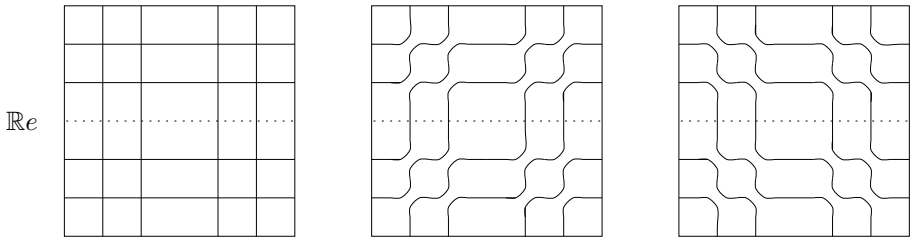
Une *courbe flexible réelle* de X_m est par définition une courbe J-holomorphe de X_m (pour une structure presque-complexe de cette surface), stable par la structure réelle, dont les espaces tangents en les points réels sont complexes pour la structure complexe de X_m, et qui réalise un revêtement ramifié de la base $\mathbb{C}P^1$ de X_m dont chaque point de ramification d'indice $k-1$ est conjugué par des difféomorphismes préservant l'orientation au modèle $x=y^k$ de $\mathbb{C}^2$.

Démonstration de la proposition 2.1 :

Notons (a,b) la classe de D. Si $b=0$, le lieu des zéros d'un élément de $\mathbb{R}H^0(D)$ ou $\mathbb{R}H^0(\rho(D))$ est constitué de a fibres dont l'ensemble est invariant par la structure réelle. L'application f_D est alors bijective, puisque dans la déformation introduite au §1.2, ces courbes se déforment aisément en préservant celles qui sont singulières, et les couples $(\mathbb{R}|D|,\mathbb{R}\Delta_D)$ et $(\mathbb{R}|\rho(D)|,\mathbb{R}\Delta_{\rho[D)})$ sont dans ce cas isomorphes. Si $b=1$ et que m est impair, les ensembles E_D et $E_{\rho(D)}$ sont des singletons, d'où à nouveau la bijectivité de f_D. En effet, une courbe de classe $(a,1)$ de X_m est donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1+Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0=0$, où P est de degré a et Q de degré $a-m$. Une telle courbe est singulière si et seulement si les homogénéisés de P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}P^1$. Or les degrés de P et de Q n'ont pas la même parité. Les racines réelles de P et de Q ne peuvent donc pas être alternées dans $\mathbb{R}P^1$. Mais chaque couple de racines réelles consécutives de P ou de Q peut être supprimé à l'aide d'un chemin de courbes algébriques réelles lisses au cours duquel ces racines se transforment en une racine double puis en deux racines complexes conjuguées. Ainsi, toute courbe algébrique réelle de classe $(a,1)$ de X_m est dans la même classe de déformation qu'une courbe donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1+Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0=0$, où les racines de P et de Q sont toutes complexes sauf une (puisqu'un des deux polynômes est de degré impair). Le résultat découle alors du fait que ces courbes ne forment qu'une seule classe de déformation.

Supposons à présent que m (et donc l) est pair et que $b\geq 1$. Perturbons le produit de b sections réelles de classe $(l,1)$ de X_l, choisies de sorte que les

seules singularités de ce produit sont imaginaires. De telles sections existent et peuvent êtres construites par récurence. En effet, supposons construites β telles sections ($1 \leq \beta \leq b$). Quitte à composer par le biholomorphisme de X_l défini dans la carte U par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0)) \mapsto (\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \epsilon\tilde{y}_0))$ où ϵ est petit, on peut supposer que ces sections sont voisines de la section infinie donnée par l'équation $\tilde{y}_0 = 0$. On définit alors une $(\beta+1)^{eme}$ section satisfaisant la propriété à l'aide d'une équation $R(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + \tilde{y}_0 = 0$ où R est de degré l et a toutes ses racines complexes conjuguées. En perturbant donc ce produit de b sections, on obtient une courbe lisse de X_l de classe (lb, b), dont le schéma réel est constitué de b composantes transverses aux fibres et disjointes de la section exceptionnelle $\mathbb{R}e$. Perturbons ensuite le produit de cette courbe avec $a - lb$ fibres réelles distinctes, chaque point double étant perturbé de la même manière (v. [5], [11]). Remarquons que par hypothèse $\rho(D)$ est numériquement effectif, c'est-à-dire $a + kb \geq mb$, de sorte que $a - lb > 0$. On obtient ainsi deux courbes lisses $C_D^{\pm}$ correspondant aux deux façons de perturber les points doubles, comme sur la figure 3.



$b = 4$, $a - lb = 4$ $\qquad$ C_D^+ $\qquad$ C_D^-

Figure 3.

La proposition 2.1 dans le cas où m est pair découle alors du lemme 2.3 suivant démontré plus loin.

Lemme 2.3 *Au moins un des éléments de E_D réalisé par C_D^+, C_D^- n'est pas dans l'image de f_D.*

Supposons à présent que m est impair et que $b > 1$. Si b est pair, il est facile de construire une courbe lisse de classe (a, b) dans X_l dont la partie réelle possède exactement $a - lb$ composantes homologues à des fibres, il suffit de perturber le produit de $a - lb$ fibres réelles distinctes et d'une courbe de classe (lb, b) sans point réel. L'élément de E_D réalisé par cette courbe n'est pas dans l'image de f_D. En effet, l'isomorphisme Ψ construit dans le §1.2 préserve les structures réglées de X_l et de Y_t, donc la partie réelle de l'image par Ψ^{-1} de cette courbe contient également $a - lb$ composantes homologues à

des fibres de $\mathbb{R}Y_t$. Mais le nombre maximal de composantes homologues à des fibres d'une courbe C de classe $(a+kb, b)$ de X_m est $e \circ C = a+kb-mb < a-lb$.

Si $b \geq 3$ est impair, perturbons le produit d'une courbe de classe $((b-3)l, b-3)$ de X_l sans point réel, d'une courbe de classe $(2l, 2)$ dont la partie réelle est constituée d'un ovale, et d'une section de classe $(a-lb+l, 1)$, et notons C_D la courbe algébrique réelle lisse de X_l obtenue. Choisissons le dernier facteur de ce produit de la façon suivante : la section de classe $(a-lb+l, 1)$ est donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où P est de degré $a-lb+l$ et Q de degré $a-lb$. Le polynôme Q est choisi de sorte que toutes ses racines soient réelles distinctes dans $\mathbb{R}P^1$. Fixons une orientation de $\mathbb{R}P^1$, ces racines sont notées dans l'ordre croissant $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a-lb}$. Le polynôme P est choisi de sorte qu'il ait $a-lb-1$ racines réelles distinctes, et $l+1$ racines imaginaires conjuguées (rappelons que puisque $\rho(D)$ est numériquement effectif, $a-lb \geq kb$). De plus, les racines $\beta_1, \ldots, \beta_{a-lb-1}$ de P sont choisies de sorte que pour tout $i \in \{1, \ldots, a-lb-1\}$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$. La partie réelle de cette courbe de classe $(a-lb+l, 1)$ est alors constituée d'une section qui intersecte le diviseur exceptionnel $\mathbb{R}e$ en les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a-lb}$, et la section $\tilde{y}_0 = 0$ en les points $\beta_1, \ldots, \beta_{a-lb-1}$. Entre les points α_{a-lb} et α_1, cette section forme une "boucle" qui revient sur le diviseur exceptionnel $\mathbb{R}e$ sans rencontrer la section $\tilde{y}_0 = 0$. La courbe de classe $(2l, 2)$ est choisie de sorte que sa partie réelle est constituée d'un ovale situé à l'intérieur de cette boucle, comme sur la figure 4.

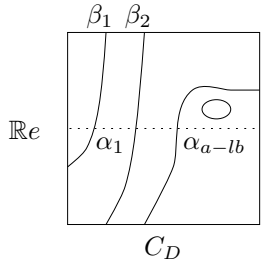


Figure 4.

La proposition 2.1 découle du lemme 2.4. □

Lemme 2.4 *L'élément de E_D réalisé par C_D n'est pas dans l'image de f_D.*

Démonstration des lemmes 2.3 et 2.4 :

Il existe une famille continue $(e_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de sous-variétés de Y, telle que e_0 est le diviseur exceptionnel de Y_0, et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e_t est une sous-variété de dimension deux de Y_t invariante par l'involution antiholomorphe. Orientons $\mathbb{R}e_t$ de sorte que lorsque $t > 0$, sa classe d'homologie dans

$H_1(\mathbb{R}X_l;\mathbb{Z})$ soit $-\tilde{k}[\mathbb{R}v]+[\mathbb{R}e]$, où $\mathbb{R}v$, $\mathbb{R}e$ et $\mathbb{R}X_l$ sont orientés de sorte que $[\mathbb{R}v]\circ[\mathbb{R}e]=+1$, et $|\tilde{k}|\leq k$. Cette dernière inégalité provient du fait que e_0 n'intersecte pas des courbes de classe $(m,1)$ de Y_0. Comme ces courbes se déforment dans Y, on en déduit que e_t n'intersecte pas des courbes de classe $(l+k,1)$ de Y_t. La classe d'homologie de la partie réelle de ces courbes est de la forme $\pm(\tilde{k}[\mathbb{R}v]-[\mathbb{R}e])$, où $|\tilde{k}|\leq k$, puisque le nombre de points d'intersection d'une telle partie réelle avec $\mathbb{R}v$ est 1, et avec $\mathbb{R}e$ est majoré par k qui est le nombre total d'intersection $(l+k,1)\circ e$. Par conséquent, $\mathbb{R}e_t$ peut être orienté de sorte que $[\mathbb{R}e_t]=-\tilde{k}[\mathbb{R}v]+[\mathbb{R}e]$ avec $|\tilde{k}|\leq k$. Considérons alors une famille continue $(C_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses telle que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $C_t\subset Y_t$, et telle que C_0 est de classe $(a+kb,b)$ dans Y_0. Lorsque $t>0$ est suffisament petit, puisque C_0 ne contient pas le diviseur exceptionnel de Y_0, le nombre de points d'intersection entre C_t et e_t est majoré par $C_0\circ e_0=a+kb-mb$. Or, la partie réelle d'une des deux courbes $C_D^{\pm}$, disons C_D^{+}, peut être orientée de sorte que sa classe d'homologie dans $H_1(\mathbb{R}X_l;\mathbb{Z})$ soit $(a-lb,b)$. Par suite, lorsque $t>0$ est suffisament petit, le nombre de points d'intersection entre e_t et toute courbe C de Y_t qui est dans la même composante de $|D|\setminus\Delta_D$ que $C_D^{\pm}$ est minoré par $[\mathbb{R}C]\circ[\mathbb{R}e_t]=[\mathbb{R}C_D^{\pm}]\circ[\mathbb{R}e_t]=\pm(a-(l\mp\tilde{k})b)$. Comme $a-(l-|\tilde{k}|)b>a+kb-mb$, pour une des deux courbes $C_D^{\pm}$ selon le signe de $\tilde{k}$, quelle que soit la famille $(C_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses choisie comme ci-dessus, lorsque $t>0$ est suffisament petit, C_t ne peut pas être dans la même composante de $|D|\setminus\Delta_D$ que $C_D^{\pm}$, et donc l'élément de E_D réalisé par $C_D^{\pm}$ n'est pas dans l'image de f_D.

Démontrons à présent le lemme 2.4. La partie réelle de C_D est constituée d'un ovale et d'une section donnée dans la carte U comme une déformation du lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1+Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0=0$. Par construction, l'ovale est situé à l'intérieur d'une boucle formée par cette section entre deux racines consécutives α_{a-lb} et α_1 de Q. Par suite, pour toute courbe C de X_l qui se déforme sur C_D, le triplet $(\mathbb{R}X_l,\mathbb{R}C,\mathbb{R}e)$ est isotope à $(\mathbb{R}X_l,\mathbb{R}C_D,\mathbb{R}e)$. En effet, le nombre de points d'intersection entre la section de $\mathbb{R}C_D$ et le diviseur exceptionnel est par construction $a-lb=e\circ C_D$. Au cours d'une déformation, l'ovale de $\mathbb{R}C_D$ ne peut donc pas traverser le diviseur exceptionnel puisque ce nombre d'intersection est déjà maximal. Par suite, les deux racines consécutives α_{a-lb} et α_1 ne peuvent se transformer en une racine double puis disparaitre en deux racines imaginaires conjuguées, ce qui force le résultat.

Soit v une fibre réelle intersectant l'ovale de $\mathbb{R}C_D$, et x le point d'intersection entre $\mathbb{R}C_D$ et v qui n'appartient pas à l'ovale de $\mathbb{R}C_D$. Soit C une courbe algébrique réelle lisse de X_l située dans la même classe de déformation que C_D. Au cours d'une déformation entre C_D et C, le point marqué x

de $\mathbb{R}C_D$ suit l'isotopie entre $\mathbb{R}C_D$ et $\mathbb{R}C$ dans $\mathbb{R}X_l$ et devient un point y de $\mathbb{R}C$. Le revêtement double d'orientation de $\mathbb{R}X_l$ est un tore T^2. La courbe $\mathbb{R}C$ se relève en une courbe $\mathbb{R}\widetilde{C}$ de T^2 possédant deux points marqués y_1, y_2. Notons $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2$ des fibres réelles orientées de T^2 situées de part et d'autre de y_1 et y_2, et s_1, s_2 des sections orientées dans ce tore reliant y_1 à y_2 et y_2 à y_1 sans couper la courbe $\tilde{e}$ qui relève le diviseur exceptionnel de $\mathbb{R}X_l$. Les fibres $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2$ peuvent être orientées de façon compatible sur le tore, et les sections s_1, s_2 de façon compatible avec une orientation fixée de la base, comme sur la figure 5, où la courbe en pointillé représente la courbe $\mathbb{R}\widetilde{C}$.

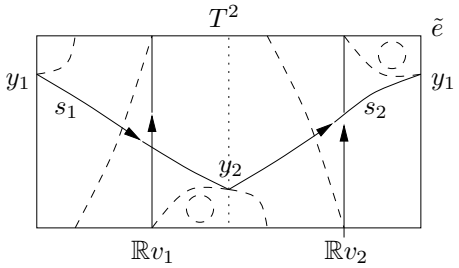


Figure 5.

La courbe $\mathbb{R}\widetilde{C} \setminus \{y_1, y_2\}$ est la réunion de deux courbes $\mathbb{R}\widetilde{C}_1$ et $\mathbb{R}\widetilde{C}_2$ qui sont échangées par l'involution du revêtement. Ces parties peuvent être orientées de sorte que :

$$[\mathbb{R}\widetilde{C}_1] = (a - lb)[v_1] + [s_1] \in H_1(T^2, \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

$$[\mathbb{R}\widetilde{C}_2] = -(a - lb)[v_2] + [s_2] \in H_1(T^2, \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}).$$

En effet, ces égalités sont clairement vérifiées lorsque la construction est appliquée à la courbe C_D, et ces calculs homologiques restent invariants par isotopie de la bouteille de Klein qui préserve le diviseur exceptionnel.

Or la courbe $\mathbb{R}e_t$ se relève en une courbe $\mathbb{R}\tilde{e}_t$ du tore T^2, dont on peut supposer, quitte à pertuber y dans $\mathbb{R}C$, qu'elle ne rencontre pas les points y_1, y_2. Cette courbe $\mathbb{R}\tilde{e}_t$ peut être orientée de sorte que :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = \tilde{k}([v_1] - [v_2]) + \tilde{e} \in H_1(T^2 \setminus \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

où $\tilde{e}$ relève le diviseur exceptionnel de $\mathbb{R}X_l$ et $-k - 2 \leq \tilde{k} \leq k + 2$. En effet, soit σ_0 une section de classe $(m, 1)$ dans X_m. Comme cette classe est numériquement effective, d'après le théorème 1.3, il existe une famille continue en $t \in \mathbb{R}$ de sections algébriques réelles lisses $\sigma_t \in Y_t$ qui prolonge σ_0. Lorsque $t \neq 0$, σ_t est de classe $(l + k, 1)$ dans X_l et s'écrit dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $\widetilde{P}(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + \widetilde{Q}(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où $\widetilde{P}$ est de degré $l + k$

et $\widetilde{Q}$ de degré k. Comme le diviseur exceptionnel de X_m n'intersecte pas σ_0, lorsque $t > 0$ est suffisament petit, e_t est également disjointe de σ_t. La courbe $\mathbb{R}\sigma_t$ se relève donc en une courbe $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$ qui est disjointe de $\mathbb{R}\tilde{e}_t$. Soient z_1, z_2 les points d'intersections entre $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$ et les fibres de T^2 passant par y_1, y_2. La courbe $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t \setminus \{z_1, z_2\}$ est constitée de deux parties $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1$ et $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2$, invariantes par l'involution du revêtement. Ces parties peuvent être orientées de sorte que :

$$[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1] = k'[v_1] + [s_1'] \in H_1(T^2, \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$
$$[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2] = -k'[v_2] + [s_2'] \in H_1(T^2, \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$

où s_1', s_2' sont des sections de T^2 reliant z_1 à z_2 et z_2 à z_1 sans couper $\tilde{e}$, et $-k \leq k' \leq k$, puisque $|k'|$ est majoré par le nombre de racines réelles de $\widetilde{Q}$. Comme $\mathbb{R}\tilde{e}_t$ est disjointe de $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$, les indices d'intersection $[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1] \circ [\mathbb{R}\tilde{e}_t]$ et $[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2] \circ [\mathbb{R}\tilde{e}_t]$ sont nuls, et ces deux conditions imposent :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = k'([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}] \in H_1(T^2 \setminus \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$

d'où il découle :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = \tilde{k}([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}] \in H_1(T^2 \setminus \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

où $-k - 2 \leq \tilde{k} \leq k + 2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}\tilde{e}_t] \circ [\mathbb{R}\widetilde{C}_1] &= \big(\tilde{k}([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}]\big)\big((a - lb)[v_1] + [s_1]\big) \\ &= -\tilde{k} + (a - lb) \\ &\geq a - lb - k - 2. \end{aligned}$$

On en déduit que le nombre de points d'intersection entre $\mathbb{R}e_t$ et $\mathbb{R}C$ est minoré par $a - lb - k - 2$. Mais si $C_t \subset Y_t$ est une famille continue en $t \in \mathbb{R}$ de courbes algébriques réelles lisses telle que C_0 est de classe $(a + kb, b)$ dans Y_0, alors lorsque $t > 0$ est suffisament petit, $|C_t \cap e_t| = |C_0 \cap e_0| = C_0 \circ e_0 = a + kb - mb$. Par hypothèse, puisque le cas $b = 3$, $k = 1$ a été écarté, $a + kb - mb < a - lb - 2 - k$, donc C_t ne peut pas être dans la même classe de déformation que C_D dans X_l. $\square$

Lemme 2.5 *Il existe une famille de difféomorphismes $\Theta_t : Y_0 \to Y_t$ qui préservent la structure réelle et la structure de fibré sur $\mathbb{C}P^1$, et dont la différentielle est J-holomorphe sur $\mathbb{R}Y_0$.*

Démonstration :

Nous allons construire explicitement un champ de vecteurs tangents ξ de classe C^1 sur la variété Y qui est holomorphe au voisinage de $\mathbb{R}Y$ et tel que

$dc \circ \xi = \xi \circ c$ où c est l'involution antiholomorphe de Y, $d\pi \circ \xi = 0$ où π est la projection $Y \to \mathbb{C}P^1$ qui à $(t, x_1, (y_1 : y_0))$ associe x_1, et $dp \circ \xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Le flot associé à ce champ de vecteurs fournit une famille de difféomorphismes qui convient.

Soit donc g une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui commute avec la conjugaison complexe, qui n'a pas de pôle réel et qui satisfait $g(x_1) = (\frac{1}{x_1})^k + (\frac{1}{x_1})^m + o(\frac{1}{x_1})$ lorsque $|x_1|$ est voisin de l'infini. Modifions cette fonction g au voisinage de ses pôles de façon à obtenir une fonction $\tilde{g}$ bien définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, de classe C^∞, qui commute avec la conjugaison complexe et qui est holomorphe au voisinage de $\mathbb{R}$ (les pôles de g ont été remplacés par des zéros d'indices négatifs). Soient alors $\xi_{\mathcal{U}}$ et $\xi_{\mathcal{V}}$ les champs de vecteurs tangents sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ définis sur les ouverts $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$ par $\xi_{\mathcal{U}}(t_1, x_1, (y_1 : 1)) = \frac{\partial}{\partial t_1} + \tilde{g}(x_1)\frac{\partial}{\partial y_1}$, et $\xi_{\mathcal{V}}(t_2, x_2, (z_1 : 1)) = \frac{\partial}{\partial t_2} + x_2^{-m}(\tilde{g}(\frac{1}{x_2}) - x_2^k))\frac{\partial}{\partial z_1}$. Par définition de $\tilde{g}$, $\xi_{\mathcal{V}}$ est bien défini même au point $x_2 = 0$, et est holomorphe en ce point. Ces champs $\xi_{\mathcal{U}}$ et $\xi_{\mathcal{V}}$ se recollent et définissent le champ ξ sur Y, puisqu'on vérifie facilement que $\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial y_1}$, et $\frac{\partial}{\partial z_1} = x_2^m \frac{\partial}{\partial y_1}$. $\square$

Démonstration du corollaire 2.2 :

Notons $[A] = (a + kb)[v] + b[e]$. Si C_t est une courbe algébrique réelle lisse de Y_t, $\Theta_t^{-1}(C_t)$ est une courbe flexible réelle de Y_0, où Θ_t est la famille de difféomorphismes donnée par le lemme 2.5. Choisissons comme courbe C_t une courbe de classe (a, b) de X_l dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe de l'image de f_D, ce qui existe d'après la proposition 2.1. La courbe $\Theta_t^{-1}(C_t)$ n'est alors isotope à aucune courbe algébrique réelle de classe $(a + kb, b)$ de X_m, puisque son schéma réel n'est réalisé par aucune de ces courbes, et le corollaire 2.2 est démontré. $\square$

Remarque :

Il découle du lemme 2.5 que les espaces de courbes flexibles réelles dans la classe $|D|$ de X_l et dans la classe $|\rho(D)|$ de X_m sont isomorphes, alors qu'il découle du corollaire 2.2 que les espaces de courbes algébriques réelles lisses dans ces systèmes linéaires de diviseurs ne le sont pas.

2.2 Injectivité de f_D, courbes isotopes de classes de déformation distinctes

Dans ce §2.2, on suppose toujours que $\rho(D)$ est **numériquement effectif**, et on fixe $k = 1$.

Proposition 2.6 *Lorsque m est pair, $\rho(D) \circ e = 0$ et $\rho(D) \circ v \geq 3$; ou bien lorsque m est pair, $\rho(D) \circ e \geq 2$ et $\rho(D) \circ v \geq 5$, l'application f_D*

n'est pas injective. Il en est de même lorsque m est impair, $\rho(D) \circ e \geq 1$ et $\rho(D) \circ v \geq 3$.

Corollaire 2.7 *Soit m un entier supérieur ou égal à 2, et $\rho(D)$ un diviseur de X_m satisfaisant les conditions de la proposition 2.6. Alors, il existe dans le système linéaire complet $\mathbb{R}|\rho(D)|$ des diviseurs réels lisses qui sont dans une même classe d'isotopie équivariante, mais qui pourtant ne sont pas dans une même classe de déformation de X_m.*

Rappelons qu'on dit que deux courbes algébriques réelles lisses C_0 et C_1 de X_m linéairement équivalentes à un diviseur $\rho(D)$ sont dans *la même classe de déformation* s'il existe un chemin continu de courbes algébriques réelles lisses dont les extrémités sont C_0 et C_1, c'est-à-dire si ces courbes sont dans la même composante de $\mathbb{R}|\rho(D)| \setminus \mathbb{R}\Delta_{\rho(D)}$, alors que deux courbes C_0 et C_1 sont dans une même *classe d'isotopie équivariante* dans X_m s'il existe un chemin continu ϕ_t de difféomorphismes de X_m reliant l'identité à un difféomorphisme qui envoie C_0 sur C_1, chaque difféomorphisme devant commuter avec la structure réelle. Ce chemin pourra en fait être choisi de sorte que $\phi_t(C_0)$ soit un chemin de courbes flexibles réelles de X_m.

Démonstration du corollaire 2.7 :
Notons $(a + kb, b)$ la classe de $\rho(D)$. D'après la proposition 2.6, il existe deux courbes C_0 et C_1 de classe $(a + kb, b)$ dans X_m qui réalisent deux éléments différents de $E_{\rho(D)}$ mais qui ont même image par f_D. Ces courbes ne se déforment donc pas l'une sur l'autre dans X_m. Par contre, ces courbes se prolongent en un chemin continu $(C_s)_{s\in[0,1]}$ de courbes algébriques réelles la restriction de Y au-dessus de $\mathbb{R}^+$, tel que $C_s \subset Y_{t(s)}$ où $t(s)$ est une fonction continue de $s \in [0, 1]$. Le chemin $\Theta_{t(s)}^{-1}(C_s)$, où Θ_t est la famille de difféomorphismes $Y_0 \to Y_t$ donnée par le lemme 2.5, est un chemin continu de courbes flexibles réelles de X_m d'extrémités C_0 et C_1. $\square$

Indiquons dès à présent la méthode utilisée pour démontrer la proposition 2.6. Pour chaque système linéaire $|\rho(D)|$, on construit explicitement deux courbes C_0 et C_1 de $Y_0 = X_m$ qui ne sont pas dans la même classe de déformation de X_m du fait de leur position mutuelle par rapport au diviseur exceptionnel. Pourtant, on construit une déformation $(C_s)_{s\in[0,1]}$ de ces courbes dans Y ; par définition de f_D, ceci entraine le résultat. Le chemin $(C_s)_{s\in[0,1]}$ est obtenu en perturbant un produit de courbes. L'élément essentiel de ce produit est construit dans le lemme 2.8 suivant, et généralisé dans le lemme 2.9.

Lemme 2.8 *Supposons que $m = 2$, $l = 0$, $k = 1$, et que Y est la déformation de X_2 sur X_0 associée. Soit $(P_t^s)_{s,t\in\mathbb{R}}$ la famille de polynômes homogènes de degré 2 en $(y_1 : y_0)$ donnée par $P_t^s(x_1, y_1, y_0) = (1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2)y_1^2 - 2(s + 4tx_1^3)y_1y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0^2$. Quels que soient $s, t \in \mathbb{R}$, l'adhérence dans Y_t de $\{(t, x_1, (y_1 : y_0)) \in Y_t \cap \mathcal{U} \mid P_t^s(x_1, y_1, y_0) = 0\}$ est une courbe algébrique réelle C_t^s de Y_t. La courbe C_t^s est singulière si et seulement si $s = t = 0$, de classe $(4, 2)$ dans Y_0 lorsque $t = 0$, et de classe $(2, 2)$ dans Y_t lorsque $t \neq 0$.*

Remarque : Si $t = 0$ et $s \neq 0$, la partie réelle de la courbe C_0^s est constitué d'un ovale n'intersectant pas les sections $y_0 = 0$ et $y_1 = 0$. Lorsque $s = 0$, c'est la réunion de deux couples de fibres imaginaires conjuguées et de deux fois la section exceptionnelle d'équation $y_1 = 0$. Le chemin $(C_0^s)_{s\in\mathbb{R}}$ est donc un chemin de courbes algébriques réelles de classe $(4, 2)$ de X_2, dont le schéma réel est constitué d'un ovale qui "traverse" la section exceptionnelle, comme représenté sur la figure 6.

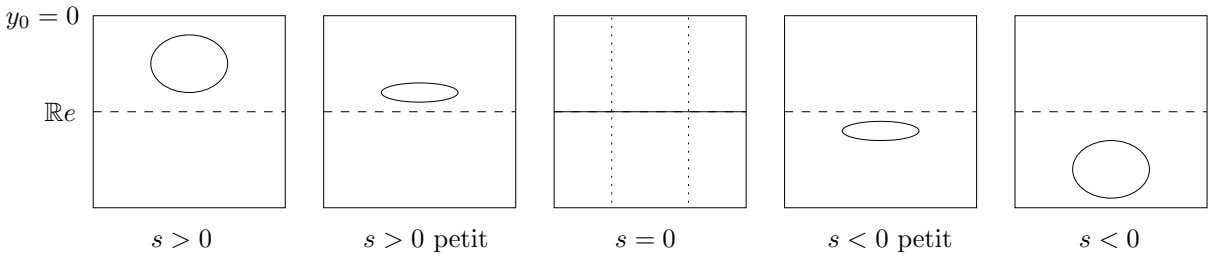


Figure 6.

Dès que $t \neq 0$, le chemin $(C_t^s)_{s\in\mathbb{R}}$ est un chemin de courbes algébriques réelles qui sont toutes lisses, comme l'illustre la figure 7.

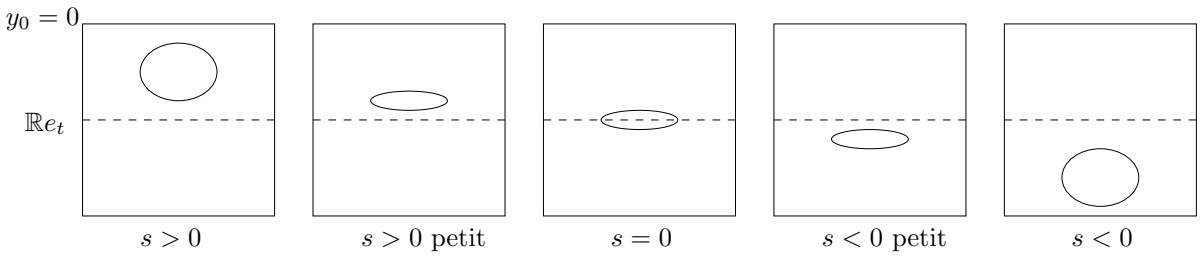


Figure 7.

Démonstration du lemme 2.8 :

Lorsque $t = 0$, le polytope de Newton du polynôme P_t^s est l'enveloppe convexe des sommets $(0,0)$, $(0,2)$ et $(4,2)$. La courbe C_0^s est donc bien de classe $(4,2)$ dans Y_0. Lorsque $t \neq 0$, l'inverse de l'isomorphisme $\Psi : Y_t \to X_0$ introduit dans le §1.2, est donné dans les cartes $U \to \mathcal{U}$ par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0)) \mapsto (\tilde{x}_1, (t\tilde{y}_0 : \tilde{x}_1\tilde{y}_0 - t\tilde{y}_1))$. Notons donc dans ce cas $\widetilde{P}_t^s(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_0) = P_t^s(\tilde{x}_1, t\tilde{y}_0, \tilde{x}_1\tilde{y}_0 - t\tilde{y}_1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_t^s &= (4\tilde{x}_1^4 - 2\tilde{x}_1^3 + 3\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1 + 1)t^2\tilde{y}_0^2 - 2(s + 4t\tilde{x}_1^3)(t\tilde{x}_1\tilde{y}_0^2 - t^2\tilde{y}_0\tilde{y}_1) \\
&\quad +(s^2 + 2t^2\tilde{x}_1 + 4t^2\tilde{x}_1^2)(\tilde{x}_1^2\tilde{y}_0^2 - 2t\tilde{x}_1\tilde{y}_0\tilde{y}_1 + t^2\tilde{y}_1^2) \\
&= \big((s^2 + 3t^2)\tilde{x}_1^2 + (t^2 - 2st)\tilde{x}_1 + t^2\big)\tilde{y}_0^2 + (-4t^3\tilde{x}_1^2 - 2ts^2\tilde{x}_1 + 2st^2)\tilde{y}_0\tilde{y}_1 \\
&\quad +(s^2t^2 + 2t^4\tilde{x}_1 + 4t^4\tilde{x}_1^2)\tilde{y}_1^2.
\end{aligned}$$

Le polytope de Newton de ce polynôme $\widetilde{P}_t^s$ est l'enveloppe convexe des sommets $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ et $(2,2)$. Par suite, la courbe C_t^s est de classe $(2,2)$ dans Y_t lorsque $t \neq 0$.

Il s'agit à présent de montrer que seule la courbe C_0^0 est singulière. Commençons par montrer que C_t^s n'a pas de singularité sur la fibre $x_2 = 0$ et sur la section $y_0 = 0$ si $(s,t) \neq (0,0)$. En effet, cette courbe a une singularité sur la section $y_0 = 0$ en dehors de la fibre $x_2 = 0$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que les trois polynômes suivant ont une racine commune en $(x, 0)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
P &=& (1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2) - 2(s + 4tx_1^3)y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0^2 \\
P_{y_0} &=& -2(s + 4tx_1^3) + 2(s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0 \\
P_{x_1} &=& ((1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2))' - 2(s + 4tx_1^3)'y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)'y_0^2,
\end{array}\right.$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $(1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2) = 0$, $-2(s + 4tx_1^3) = 0$ et $((1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2))' = 0$, ce qui n'est pas le cas. Le changement de carte $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est donné par l'application $(t, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (t, \frac{1}{x_2}, (x_2^2z_1 + tx_2z_0 : z_0))$. Notons $Q_t^s(x_2, z_1, z_0) = P_t^s(\frac{1}{x_2}, x_2^2z_1 + tx_2z_0, z_0)$. Ce polynôme est égal à :

$$\frac{1}{x_2^4}(4-2x_2+3x_2^2+x_2^3+x_2^4)(x_2^4z_1^2+2tx_2^3z_1z_0+t^2x_2^2z_0^2)-\frac{2}{x_2^3}(sx_2^3+4t)(x_2^2z_1z_0+tx_2z_0^2)$$

$$+\frac{1}{x_2^2}(s^2x_2^2 + 2t^2x_2 + 4t^2)z_0^2$$

$$= (4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1^2 + (-4t + 6tx_2 + 2(t-s)x_2^2 + 2tx_2^3)z_1z_0 + (3t^2 + s^2$$

$$+(t^2 - 2st)x_2 + t^2x_2^2)z_0^2$$

La courbe C_t^s a donc une singularité sur la fibre $x_2 = 0$ en dehors de la section $y_0 = 0$ si et seulement si il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que les trois polynômes suivant ont une racine commune en $(0, z)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q & = & (4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1^2 + (-4t + 6tx_2 + 2(t-s)x_2^2 + 2tx_2^3)z_1 \\ & & +(3t^2 + s^2 + (t^2 - 2st)x_2 + t^2x_2^2) \\ Q_{z_1} & = & 2(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1 + (-4t + 6tx_2 + 2(t-s)x_2^2 + 2tx_2^3) \\ Q_{x_2} & = & (-2 + 6x_2 + 3x_2^2 + 4x_2^3)z_1^2 + (6t + 4(t-s)x_2 + 6tx_2^2)z_1 + ((t^2 - 2st) \\ & & +2t^2x_2), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $4z^2 - 4tz + 3t^2 + s^2 = 0$, $8z - 4t = 0$ et $-2z^2 + 6tz + (t^2 - 2st) = 0$, ce qui n'est pas le cas sauf si $s = t = 0$. Enfin, le point de coordonnées $x_2 = z_0 = 0$ n'est jamais sur la courbe C_t^s, quels que soient s et t. Finalement, dès que s et t sont non nuls, la courbe C_t^s n'a pas de singularité sur la fibre $x_2 = 0$ et sur la section $y_0 = 0$.

Lorsque s et t sont non nuls, la courbe C_t^s est donc singulière si et seulement si le polynôme P_t^s a une singularité en $(x_1, y_1, 1) \in \mathbb{C}^3$. De plus, si $t \neq 0$, P_t^s est singulier en $(x_1, y_1, 1)$ si et seulement si $P_1^{\frac{s}{t}}$ est singulier en $(x_1, ty_1, 1)$. Pour démontrer le lemme 2.8, il suffit donc de voir que P_0^s est singulier si et seulement si $s = 0$, et que P_1^s n'est jamais singulier. Or P_0^s est singulier lorsque son discriminant $s^2 - s^2(1 + x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 4x_1^4) = -s^2x_1(1 + 3x_1 - 2x_1^2 + 4x_1^3)$ a une racine double, ce qui n'arrive que lorsque $s = 0$ puisque :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 + 3x_1 - 2x_1^2 + 4x_1^3 & = & 0 \\ 12x_1^2 - 4x_1 + 3 & = & 0, \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 12x_1^2 - 4x_1 + 3 & = & 0 \\ 32x_1 + 21 & = & 0, \end{array} \right.$$

et $12x_1^2 - 4x_1 + 3$ n'a pas de racine réelle, donc pas de racine commune avec $32x_1 + 21$.

De même, P_1^s est singulier lorsque son discriminant Δ_y suivant a une racine double :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_y & = & (s + 4x_1^3)^2 - (s^2 + 2x_1 + 4x_1^2)(4x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 + x_1 + 1) \\ & = & -x_1(4(s^2+2)x_1^3 + 2(-s^2 - 4s + 5)x_1^2 + 3(s^2+2)x_1 + (s^2+2)) \end{array}$$

Mais $x_1 = 0$ n'est jamais racine double de Δ_y, et :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4(s^2+2)x_1^3 + 2(-s^2 - 4s + 5)x_1^2 + 3(s^2+2)x_1 + (s^2+2) & = & 0 \\ 12(s^2+2)x_1^2 + 4(-s^2 - 4s + 5)x_1 + 3(s^2+2) & = & 0, \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 12(s^2+2)x_1^2+4(-s^2-4s+5)x_1+3(s^2+2) & = & 0 \\ x_1((14s^2+8s+14)x_1+(-10s^2-16s+8)) & = & 0. \end{array}\right.$$

Le discriminant du premier trinôme est $4(-s^2-4s+5)^2-36(s^2+2)^2 = (-8s^2-8s-2)(4s^2-8s+22)$. Or $(4s^2-8s+22)$ est toujours strictement positif, et $(-8s^2-8s-2)$ est toujours négatif et ne s'annule qu'en $s=-\frac{1}{2}$. Ainsi, si $s \neq -\frac{1}{2}$, les racines du premier trinôme sont complexes, et celles du second réelles, ils n'ont donc pas de racines communes, et si $s=-\frac{1}{2}$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (3+24)x_1^2+(-1+8+20)x_1+\frac{3}{4}+6 & = & 0 \\ x_1((\frac{7}{2}-4+14)x_1+(-\frac{5}{2}+8+8)) & = & 0, \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2x_1+1)^2 & = & 0 \\ x_1(x_1+1) & = & 0 \end{array}\right.$$

Ici encore, les trinômes n'ont pas de racine commune. □

Lemme 2.9 *Soient m, l deux entiers positifs tels que $m = l+2$, et Y^m la déformation de X_m sur X_l associée, munie de sa structure réelle c_Y. Il existe une famille continue $(C_\theta)_{\theta\in[0,\pi]}$ de courbes algébriques réelles lisses et une fonction continue $t : [0,\pi] \to \mathbb{R}_+$ telles que :*

- *Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $C(\theta) \subset Y_{t(\theta)}$, et $t(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta \in \{0,\pi\}$. Les courbes $C(0)$ et $C(\pi)$ sont de classe $(2m,2)$ dans Y_0^m, et lorsque $\theta \in]0,\pi[$, la courbe $C(\theta)$ est de classe $(2l+2,2)$ dans $Y_{t(\theta)}$.*
- *Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, la courbe $C(\theta)$ est transverse à la section $y_0 = 0$ de $Y_{t(\theta)}$.*
- *Les parties réelles de $C(0)$ et $C(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant ni les sections $y_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$ ni la fibre $x_2 = 0$, et situé respectivement au-dessus ($y_1 > 0$, $y_0 = 1$) et en-dessous ($y_1 < 0$, $y_0 = 1$) du diviseur exceptionnel.*

De plus, cette famille peut être choisie arbitrairement proche dans Y^m de la courbe de Y_0^m d'équation dans $\mathcal{V}$: $(x_2^2-x_2+1)(x_2^2+2x_2+4)x_2^{2m-4}z_1^2 = 0$, ce qui signifie que cette famille peut être définie dans Y^m par une équation de la forme $(x_2^2-x_2+1)(x_2^2+2x_2+4)x_2^{2m-4}z_1^2 + P^\theta(t,x_2,z_1,z_0) = 0$, où P^θ est un polynôme dont les coefficients peuvent être choisis de module arbitrairement petit.

Démonstration :
On démontre ce résultat par récurrence sur m.

Si $m = 2$, fixons $\epsilon > 0$ et pour $\theta \in [0, \pi]$, posons $C(\theta) = C^{\epsilon\cos(\theta)}_{\epsilon\sin(\theta)}$ où C^s_t est la famille de courbes introduite dans le lemme 2.8. La fonction t est alors donnée par $\theta \mapsto \epsilon\sin(\theta)$, et puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit, cette famille peut être choisie arbitrairement proche de la courbe C^0_0 d'équation dans $\mathcal{V}$: $(4-2x_2+3x_2^2+x_2^3+x_2^4)z_1^2 = 0$. Les parties réelles de $C(0)$ et $C(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant pas la fibre $x_2 = 0$ et les sections $y_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$ de Y_0, et situé respectivement au-dessus et en-dessous de $\mathbb{R}e$. Pour tout θ, la courbe $C(\theta)$ est transverse à la section $y_0 = 0$ de $Y_{t(\theta)}$, et par conséquent cette famille de courbes convient et le lemme est démontré pour $m = 2$.

Supposons à présent le lemme démontré au rang $m \geq 2$, c'est-à-dire supposons construite une telle famille $C(\theta)$ de courbes algébriques réelles lisses dans la déformation Y^m associée à m. Montrons ce lemme au rang $m + 1$.

La variété Y^m est définie comme le recollement de deux cartes $\mathcal{U}^m$, $\mathcal{V}^m$ isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$, par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \\ (t, x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (t, x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

où $x_1x_2 = 1$ et $z_0y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2 z_0 y_0$. Notons τ la transformation quadratique $Y^{m+1} \to Y^m$ définie dans les cartes $\mathcal{U}^{m+1} \to \mathcal{U}^m$ par l'identité, et dans les cartes $\mathcal{V}^{m+1} \to \mathcal{V}^m$ par $(\tilde{t}, \tilde{x}_2, (\tilde{z}_1 : \tilde{z}_0)) \mapsto (t, x_2, (z_1 : z_0))$ où $t = \tilde{t}$, $x_2 = \tilde{x}_2$, $z_1 = \tilde{x}_2\tilde{z}_1$ et $z_0 = \tilde{z}_0$. Cette transformation τ est le résultat d'un éclatement dans chaque surface Y^m_t du point de coordonnée $x_2 = z_1 = 0$, puis d'une contraction dans chacune de ces surfaces de la transformée stricte de la fibre $x_2 = 0$. La transformée stricte $\widetilde{C}(\theta)$ de la famille $C(\theta)$ de Y^m est une famille de courbes algébriques réelles de Y^{m+1}, telle que pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $\widetilde{C}(\theta) \subset Y^{m+1}_{t(\theta)}$, et qui peut être choisie arbitrairement proche de la courbe d'équation dans $\mathcal{V}^{m+1}$: $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-2}z_1^2 = 0$ qui est la transformée stricte de la courbe d'équation $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-4}z_1^2 = 0$ dans $\mathcal{V}^m$. De plus, chaque courbe $\widetilde{C}(\theta)$ a pour unique singularité un point double isolé au point $\tilde{x}_2 = \tilde{y}_0 = 0$. Perturbons ce point double de manière continue en θ pour le faire disparaitre, de sorte que la courbe $\widetilde{C}(\theta)$ n'aie plus de point double et n'intersecte plus la partie réelle de $Y^{m+1}_{t(\theta)}$ dans un voisinage de ce point, ce qui est possible d'après le lemme de Morse à paramètres. On obtient ainsi une famille $\widehat{C}(\theta)$ de courbes algébriques réelles lisses de Y^{m+1}, chaque courbe $\widehat{C}(\theta)$ étant transverse à la section d'équation $\tilde{y}_0 = \tilde{z}_0 = 0$. Les parties réelles de $\widehat{C}(0)$ et $\widehat{C}(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant pas la fibre $\tilde{x}_2 = 0$ et les sections $\tilde{y}_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$, et situé respectivement au-dessus et en-dessous du diviseur exceptionnel de Y^{m+1}_0. Comme cette fa-

mille $\widehat{C}(\theta)$ peut être choisie arbitrairement proche de la courbe d'équation $(4-2x_2+3x_2^2+x_2^3+x_2^4)x_2^{2m-2}z_1^2=0$ dans $\mathcal{V}^{m+1}$, le lemme est démontré. $\square$

Démonstration de la proposition 2.6 :

Notons $(a+kb,b)$ la classe de $\rho(D)$, et commençons par le cas où m **est pair**.

Dans ce cas, supposons pour commencer que $\rho(D)\circ e = a+kb-mb=0$ et $\rho(D)\circ v = b\geq 3$. Perturbons le produit de $b-2$ sections de classe $(m,1)$ voisines de la section $y_0=0$, de façon à obtenir une courbe algébrique réelle lisse de classe $(m(b-2),b-2)$ dans X_m, dont le schéma réel est constitué de $b-2$ composantes de classe $(m,1)$ voisines de la section $y_0=0$. D'après la remarque suivant le théorème 1.3, cette courbe A_0 se prolonge en une famille continue $(A_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $A_t\subset Y_t$. On considère alors le produit $A_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 2.9, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta\in[0,\pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta\in[0,\pi]$. Or, d'après le lemme 2.9, la famille $C(\theta)$ peut être choisie de sorte que les seules singularités des courbes $A_{t(\theta)}C(\theta)$ sont des points doubles voisins des points d'intersections des $b-2$ sections choisies initialement (voisines de $y_0=0$) avec $C(\theta)$. Perturbons donc chacun de ces points doubles, ceci de façon continue en θ, pour obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B(\theta)$ dans Y^m. Les courbes $B(0)$ et $B(\pi)$ sont de classe (mb,b) dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque l'ovale de ces courbes ne peut traverser le diviseur exceptionnel au cours d'une déformation, et qu'il ne se situe pas dans la même composante du tore $\mathbb{R}X_m$ privé de $\mathbb{R}e$ et des $b-2$ sections réelles.

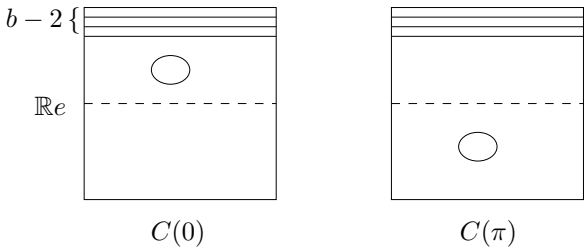


Figure 8.

Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B(0)$ et $B(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B(\theta)$ pour $\theta\in]0,\pi[$. Remarquons que la symétrie induite par l'application donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par $(\tilde{x}_1,(\tilde{y}_1:\tilde{y}_0))\mapsto(\tilde{x}_1,(-\tilde{y}_1:\tilde{y}_0))$ échange les composantes de $|\rho(D)|\setminus\Delta_{\rho(D)}$ réalisées par $B(0)$ et $B(\pi)$. Lorsque $b\geq 5$, on

peut construire de façon analogue des exemples où ce n'est plus le cas, en faisant intervenir un deuxième ovale, comme le suggère la figure 9.

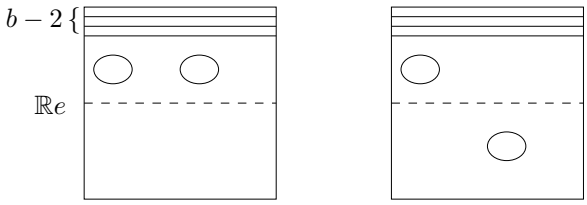


Figure 9.

Supposons à présent que $a + kb - mb \geq 2$ et $b \geq 5$, et distinguons les cas où b est pair et impair. Commençons par le cas où b est impair. Perturbons le produit de $b-4$ sections de classe $(m, 1)$ de X_m voisines de la section $y_0 = 0$, dont une est réelle et les $b-3$ autres imaginaires conjuguées, de $a + kb - mb$ fibres réelles distinctes voisines de la fibre $x_2 = 0$, et d'une courbe de classe $(2m, 2)$ dont le schéma réel est constitué d'un ovale. La courbe de classe $(2m, 2)$ est choisie voisine de deux fois la section $y_0 = 0$, et de sorte que l'ovale soit situé dans la même composante du complémentaire de ces fibres et de ces sections dans le tore $\mathbb{R}X_m$ que le point de coordonnées $x_1 = y_1 = 0$. Le produit de ces courbes est choisi de sorte que les seules singularités sont des points doubles, et tous les points doubles réels sont perturbés de la même manière (v. [5], [11]). On obtient ainsi une courbe algébrique réelle lisse de classe $(a + kb - 2m, b - 2)$ de X_m, dont le schéma réel est constitué d'une composante de classe $(a+kb-mb)[\mathbb{R}v]+[\mathbb{R}e]$ dans $H_1(\mathbb{R}X_m; \mathbb{Z})$, et d'un ovale. D'après la remarque suivant le théorème 1.3, cette courbe A'_0 se prolonge en une famille continue $(A'_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'_t \subset Y_t$. On considère alors le produit $A'_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 2.9, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0, \pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0, \pi]$ dont les seules singularités sont des points doubles. Perturbons chacun de ces points doubles de façon continue en θ, pour obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B'(\theta)$ dans Y. Les courbes $B'(0)$ et $B'(\pi)$ sont de classe $(a + kb, b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque les deux ovales de ces courbes ne sont pas situés dans les mêmes composantes du complémentaire de la section de la courbe et du diviseur exceptionnel dans $\mathbb{R}X_m$, et que cette position ne peut changer au cours d'une déformation, puisqu'aucun ovale ne peut traverser le diviseur exceptionnel sans que cela ne crée trop de points d'intersection entre la courbe et celui-ci.

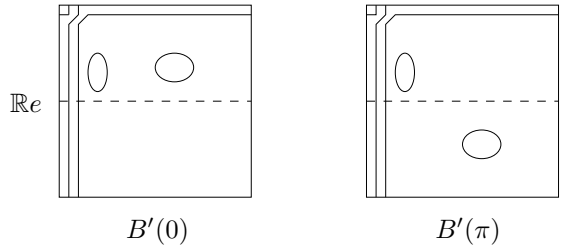


Figure 10.

Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B'(0)$ et $B'(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B'(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

Dans le cas où b est pair, et donc supérieur ou égal à six, on perturbe le produit de $b-6$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m, 1)$ de X_m voisines de la section $y_0 = 0$, de $a+kb-mb-2$ fibres réelles distinctes voisines de la fibre $x_2 = 0$, et d'une courbe de classe $(4m+2, 4)$ dont le schéma réel est constitué de deux ovales emboités. Cette dernière courbe est choisie voisine de la courbe d'équation $(\epsilon^2(x_1^2+1)^{\frac{1}{2}m+1}y_1^2 - 2\epsilon y_1 y_0 + (\epsilon x_1^2 - 1)y_0^2)(\epsilon^2(x_1^2+1)^{\frac{1}{2}m}y_1^2 - 2\epsilon y_1 y_0 + \frac{1}{2}y_0^2) = 0$ où ϵ est un réel positif proche de zéro, c'est-à-dire voisine de quatre fois la section $y_0 = 0$ plus deux fois la fibre $x_2 = 0$, et de sorte que l'ovale extérieur englobe presque la totalité de la carte affine $x_2 y_0 \neq 0$. En particulier, cet ovale extérieur a deux points d'intersection avec le diviseur exceptionnel. On obtient ainsi une courbe algébrique réelle lisse de classe $(a+kb-2m, b-2)$ de X_m, dont le schéma réel est constitué de $a+kb-mb-2$ fibres et de deux ovales emboités. D'après la remarque suivant le théorème 1.3, cette courbe A_0'' se prolonge en une famille continue $(A_t'')_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_t'' \subset Y_t$. On considère alors le produit $A_{t(\theta)}'' C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 2.9, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0, \pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0, \pi]$ dont les seules singularités sont des points doubles. Perturbons chacun de ces points doubles de manière continue en θ, de façon à obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B''(\theta)$ dans Y. Les courbes $B''(0)$ et $B''(\pi)$ sont de classe $(a+kb, b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque tous les points d'intersection du diviseur exceptionnel avec toute courbe située dans la même classe de déformation que $B''(\pi)$ sont réels, alors que ce n'est pas le cas avec toutes les courbes situées dans la

même classe de déformation que $B''(0)$.

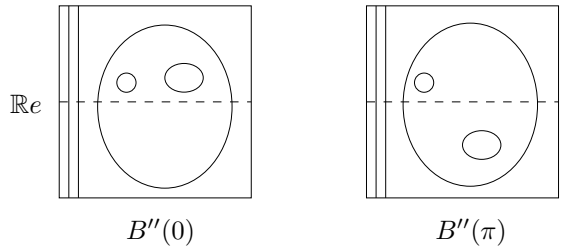
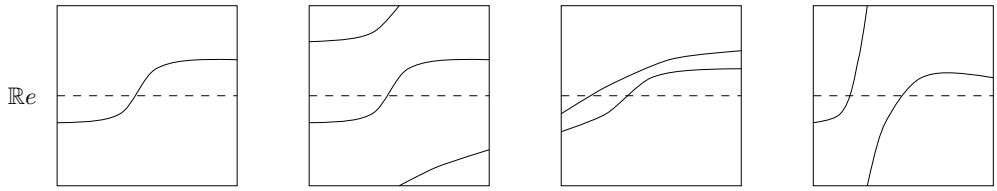


Figure 11.

Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B''(0)$ et $B''(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B''(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.6 dans le cas où m est pair.

Supposons à présent que m **est impair**. Dans ce cas, par hypothèse, $a+kb-mb \geq 1$ et $b \geq 3$. Distinguons quatre cas selon les parités de $a+kb-mb$ et b. Si $a+kb-mb$ est impair et b est impair, perturbons le produit de $b-3$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$ voisines de $y_0 = 0$ et d'une section réelle de classe $(a+kb-m(b-1),1)$ dont tous les points d'intersection avec le diviseur exceptionnel sont réels. Si $a+kb-mb$ est impair et b est pair, perturbons le produit de $b-4$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$, d'une section réelle de classe $(\frac{1}{2}(a+kb-m(b-2)-1),1)$ et d'une section réelle de classe $(\frac{1}{2}(a+kb-m(b-2)+1),1)$, toutes deux ayant tous leur points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Si $a+kb-mb$ est pair et b est pair, perturbons le produit de $b-4$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$, et de deux sections réelles de classe $(\frac{1}{2}(a+kb-m(b-2)),1)$ ayant tous leur points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Enfin, si $a+kb-mb$ est pair et b est impair, perturbons le produit de $b-3$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$, et d'une section réelle de classe $(a+kb-m(b-1),1)$ ayant tous ses points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Dans tous les cas, on obtient une courbe $\widetilde{A}_0$ de Y_0^m de classe $(a+kb-2m, b-2)$ qui peut être choisie arbitrairement proche du produit de $b-2$ fois la section $y_0 = 0$ et de $a+kb-mb$ fois la

fibre $x_2 = 0$. Le schéma réel de $\widetilde{A}_0$ est représenté par la figure 12.



$a - mb$ impair
b impair

$a - mb$ impair
b pair

$a - mb$ pair
b pair

$a - mb$ pair
b impair

Figure 12.

D'après la remarque suivant le théorème 1.3, cette courbe $\widetilde{A}_0$ se prolonge en une famille continue $(\widetilde{A}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{A}_t \subset Y_t^m$. On considère alors le produit $\widetilde{A}_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 2.9, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0, \pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0, \pi]$. Or, d'après le lemme 2.9, la famille $C(\theta)$ peut être choisie de sorte que les seules singularités des courbes $\widetilde{A}_{t(\theta)}C(\theta)$ sont des points doubles. Perturbons donc chacun de ces points doubles, ceci de façon continue en θ, pour obtenir un chemin continu de courbes algébriques lisses $\widetilde{B}(\theta)$ dans Y. Les courbes $\widetilde{B}(0)$ et $\widetilde{B}(\pi)$ sont de classe $(a+kb, b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque l'ovale de ces courbes ne peut traverser le diviseur exceptionnel au cours d'une déformation, et qu'il ne se situe pas dans la même composante de la bouteille de Klein $\mathbb{R}X_m$ privée de $\mathbb{R}e$ et des autres composantes de la courbe.

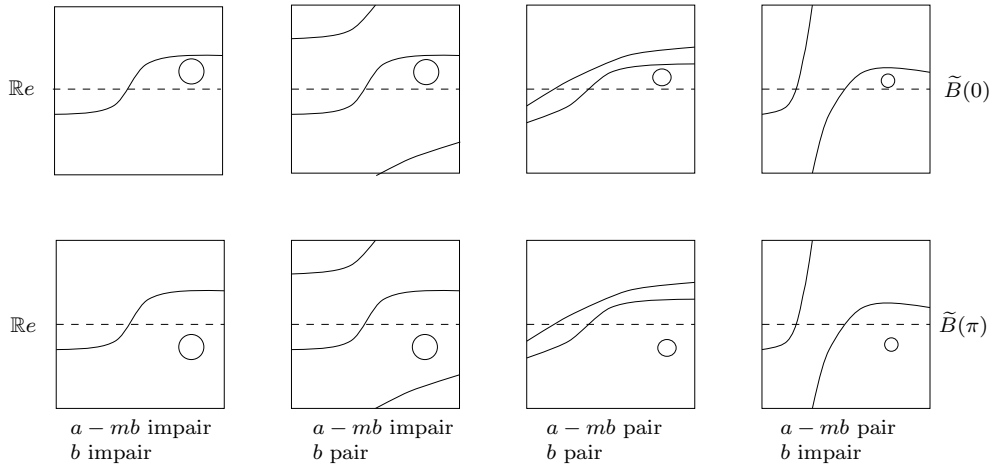


Figure 13.

Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $\widetilde{B}(0)$ et $\widetilde{B}(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $\widetilde{B}(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$. $\square$

Références

[1] M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:181–207, 1957.

[2] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.

[3] A. I. Degtyarev and V. Kharlamov. Topological properties of real algebraic varieties : du coté de chez Rokhlin. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(4):129–212, 2000.

[4] S. Fiedler and S. Orevkov. A flexible affine M-sextic which is algebraically unrealizable. *Prépublication*, 1999.

[5] D. A. Gudkov. A generalized Brusotti theorem for second-order curves on a surface. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1):20–24, 96, 1980.

[6] D. Hilbert. Mathematische probleme. *Arch. Math. Phys. (3)*, 1:213–237, 1901.

[7] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures.* Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the Japanese by Kazuo Akao, With an appendix by Daisuke Fujiwara.

[8] S. Orevkov and E. Shustin. Flexible algebraically unrealizable curves : rehabilitation of Hilbert-Rohn-Gudkov approach. *Prépublication*, 2000.

[9] V. A. Rokhlin. Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(5):77–89, 1978.

[10] C. S. Seshadri. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Société Mathématique de France, Paris, 1982. Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980.

[11] A. Tannenbaum. Families of algebraic curves with nodes. *Compositio Math.*, 41(1):107–126, 1980.

[12] O. Y. Viro. Achievements in the topology of real algebraic varieties in the last six years. *Russian Math. Surveys*, 41(3):55–82, 1986.

[13] G. Wilson. Hilbert's sixteenth problem. *Topology*, 17(1):53–73, 1978.

Welschinger Jean-Yves
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (FRANCE)
e-mail : `welsch@math.u-strasbg.fr`