



**HAL**  
open science

## Un Problème d’Affectation avec des Contraintes de Diversité : Complexité et Prix de la Diversité

Nawal Benabbou, Mithun Chakraborty, Xuan-Vinh Ho, Jakub Sliwinski, Yair  
Zick

► **To cite this version:**

Nawal Benabbou, Mithun Chakraborty, Xuan-Vinh Ho, Jakub Sliwinski, Yair Zick. Un Problème d’Affectation avec des Contraintes de Diversité : Complexité et Prix de la Diversité. 18<sup>ème</sup> conférence ROADEF société Française de Recherche Opérationnelle et d’Aide à la Décision, Feb 2019, Le Havre, France. hal-02076647

**HAL Id: hal-02076647**

**<https://hal.science/hal-02076647>**

Submitted on 22 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un Problème d’Affectation avec des Contraintes de Diversité : Complexité et Prix de la Diversité

Nawal Benabbou<sup>1</sup>, Mithun Chakraborty<sup>2</sup>, Xuan-Vinh Ho<sup>2</sup>, Jakub Sliwinski<sup>3</sup>, Yair Zick<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Université, CNRS,  
Laboratoire d’Informatique de Paris 6, LIP6 F-75005 Paris, France  
nawal.benabbou@lip6.fr

<sup>2</sup> National University of Singapore  
School of Computing, 13 Computing Dr, 117417, Singapore  
dcsmc@nus.edu.sg, hxvinh@comp.nus.edu.sg, dcsyaz@nus.edu.sg

<sup>3</sup> ETH Zürich  
Rämistrasse 101, 8092, Zurich, Switzerland  
jsliwinski@ethz.ch

**Mots-clés** : *problème d’affectation, contraintes de diversité, complexité, prix de la diversité*

## Introduction

La motivation première de ce travail est l’étude du système d’attribution des logements sociaux de Singapour. Ce système a pour objectif de fournir des appartements à bas prix aux citoyens et aux résidents permanents de Singapour tout en assurant une certaine diversité ethnique dans tous les blocs de logements sociaux. Plus précisément, des quotas ethniques sont imposés pour garantir que, dans chaque bloc de logements, le pourcentage de logements attribués à un groupe ethnique donné (chinois, malais, indiens/autres) ne dépasse pas une certaine valeur (plus ou moins proportionnelle au pourcentage de personnes de ce groupe dans la population). Par exemple, depuis le 5 mars 2010, chaque bloc de logements sociaux ne doit pas contenir plus de 87% de chinois, plus de 25% de malais et plus de 15 % d’indiens/autres [1]. Actuellement, ces logements sociaux sont attribués aux personnes qui candidatent en utilisant le système de loterie suivant : dans un ordre (presque) aléatoire, les candidats choisissent à tour de rôle un logement parmi ceux qui sont encore disponibles et uniquement dans un bloc de logements où leur quota ethnique n’a pas encore été atteint. Bien que ce système de loterie soit relativement simple à mettre en œuvre, celui-ci n’attribue pas forcément les logements de manière optimale. Dans ces travaux, il s’agit pour nous d’étudier formellement ce problème d’affectation comportant des contraintes de diversité (ethnique) par bloc de logements.

Nous considérons ici une extension du problème classique de recherche opérationnelle appelé Problème d’Affectation (PA) permettant de tenir compte des contraintes de diversité imposées par le gouvernement de Singapour. Cette extension, que nous appelons Problème d’Affectation avec Contraintes de Diversité (PACD), est caractérisée par les informations suivantes :

- un ensemble  $N$  d’agents partitionné en  $K$  ensembles, notés  $N_k, k \in \{1, \dots, K\}$ ,
- un ensemble  $M$  d’objets partitionné en  $L$  ensembles, notés  $M_l, l \in \{1, \dots, L\}$ ,
- une utilité  $u_{ij} \in \mathbb{R}_+$  pour chaque agent  $i \in N$  et chaque objet  $j \in M$ ,
- une capacité  $\lambda_{kl} \in \mathbb{R}_+$  pour chaque entier  $k \in \{1, \dots, K\}$  et chaque entier  $l \in \{1, \dots, L\}$ .

Une attribution est dite réalisable si chaque objet est donné à au plus un agent et que chaque agent reçoit au plus un objet. Il s’agit alors d’identifier une attribution réalisable qui maximise la somme des utilités des agents (critère utilitariste) parmi toutes les attributions réalisables vérifiant les contraintes de diversité suivantes : pour toute paire  $(k, l) \in \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, L\}$ , le nombre d’agents de l’ensemble  $N_k$  recevant un objet de l’ensemble  $M_l$  ne doit pas dépasser

la capacité  $\lambda_{kl}$ . En notant  $x_{ij}$  la variable de décision permettant de représenter le fait que l'agent  $i \in N$  reçoive l'objet  $j \in M$ , nous pouvons formuler ce problème d'optimisation par le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} u_{ij} x_{ij} \\
s.c. \quad & \sum_{j \in M} x_{ij} \leq 1 && \forall i \in N \\
& \sum_{i \in N} x_{ij} \leq 1 && \forall j \in M \\
& \sum_{i \in N_k} \sum_{j \in M_l} x_{ij} \leq \lambda_{kl} && \forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall l \in \{1, \dots, L\} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i \in N, \forall j \in M
\end{aligned}$$

Pour le problème d'attribution des logements sociaux de Singapour, l'ensemble  $N$  des candidats est partitionné en trois ensembles  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  représentant respectivement les individus chinois, malais et indiens/autres. L'ensemble  $M$  est quant à lui partitionné en  $L$  blocs (ou immeubles) de logements sociaux répartis à différents endroits de la ville. Enfin, pour tenir compte des quotas ethniques imposés par le gouvernement, il convient de définir les capacités du problème de la manière suivante :  $\lambda_{1l} = 0.87 \times |M_l|$ ,  $\lambda_{2l} = 0.25 \times |M_l|$  et  $\lambda_{3l} = 0.15 \times |M_l|$  pour tout  $l \in \{1, \dots, L\}$ . À notre connaissance, nous sommes les premiers à introduire et étudier formellement ce problème d'optimisation.

## Contributions

Dans ces travaux, nous avons commencé par étudier le problème PACD sous l'angle de la complexité algorithmique. Bien que le problème PA puisse être résolu en temps polynomial en utilisant par exemple la "méthode hongroise" [2], nous sommes parvenus à montrer que le problème PACD est NP-difficile dans le cas général à l'aide d'une réduction à partir du Problème d'Affectation de Couleurs Borné (PACB). De plus, nous avons réussi à déterminer des cas polynomiaux correspondant à des hypothèses relativement raisonnables sur les utilités des agents. Enfin, nous avons identifié un algorithme 1/2-approché pour résoudre le problème PACD dans le cas général en utilisant ses similitudes avec le problème PACB.

Dans un second temps, nous avons introduit le concept de *prix de la diversité* pour mesurer la diminution de l'utilité globale engendrée par l'ajout des contraintes de diversité dans le problème d'affectation classique (PA); plus précisément, le prix de la diversité correspond au résultat de la division de la valeur optimale du problème PA par la valeur optimale du problème PACD. Ensuite, nous sommes parvenus à déterminer deux bornes supérieures sur le prix de la diversité exprimées en fonction de paramètres du problème relativement naturels. Enfin, nous avons collecté des données récentes sur la démographie et le marché immobilier de Singapour pour réaliser des tests numériques réalistes qui permettent d'estimer la valeur du prix de la diversité dans des scénarios à grande échelle. Dans ces tests, nous avons aussi évalué les performances du système de loterie du gouvernement de Singapour en tant qu'algorithme heuristique pour le problème PACD.

## Références

- [1] Housing and Development Board, Singapore. *Policy changes to support an inclusive and cohesive home*. [Press release] 2010. <http://www.nas.gov.sg/archivesonline/speeches/record-details/809e76bf-115d-11e3-83d5-0050568939ad>
- [2] Harold W. Kuhn. The Hungarian Method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, volume 2, pages 83-97, 1955.