



**HAL**  
open science

# Algorithmes d'élicitation incrémentale des préférences pour la résolution de problèmes de sac-à-dos multi-agents équitables

Nadjet Bourdache, Patrice Perny

► **To cite this version:**

Nadjet Bourdache, Patrice Perny. Algorithmes d'élicitation incrémentale des préférences pour la résolution de problèmes de sac-à-dos multi-agents équitables. ROADEF, Feb 2019, Le Havre, France. hal-02076622

**HAL Id: hal-02076622**

**<https://hal.science/hal-02076622>**

Submitted on 22 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Algorithmes d'élicitation incrémentale des préférences pour la résolution de problèmes de sac-à-dos multi-agents équitables

Nadjet Bourdache<sup>1</sup>, Patrice Perny<sup>1</sup>

Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire d'Informatique de Paris 6, LIP6 F-75005 Paris, France  
{nadjet.bourdache,patrice.perny}@lip6.fr

**Mots-clés :** *aide à la décision, élicitation incrémentale, sac-à-dos multi-agent, équité.*

## 1 Introduction

Nous étudions dans ce travail le problème de l'élicitation incrémentale des préférences d'un décideur supervisant un processus de décision collective dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire multi-agents. Les préférences individuelles des agents sont supposées connues et représentées par des fonctions d'utilité linéaires et l'utilité sociale est définie par une somme pondérée ordonnée (OWA pour Ordered Weighted Average). Cet opérateur permet de modéliser un large éventail d'attitudes allant de l'égalitarisme pur (maximisation du minimum des fonctions d'utilités individuelles) à des notions plus flexibles combinant l'objectif de réduction des inégalités à celui de préserver une bonne efficacité globale.

## 2 Problème du sac-à-dos-équitable

On considère un problème de sac à dos à  $p$  objets munis de poids  $w_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , une capacité  $W$  et  $n$  agents ayant des préférences individuelles sur les objets caractérisées par  $u^i = (u_1^i, \dots, u_p^i)$ , où  $u_k^i$  est l'utilité de l'agent  $i$  pour l'objet  $k$ . La satisfaction d'un agent  $i$  pour une solution donnée est alors définie par  $x_i = \sum_{k=1}^p u_k^i z_k$  où  $z_k$  vaut 1 si l'objet  $k$  est pris dans la solution et 0 sinon. On associe à toute solution réalisable un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  où chaque composante représente la satisfaction individuelle d'un agent. L'utilité globale des agents est ensuite définie par l'opérateur OWA, qui s'écrit  $f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{(i)}$  où  $x_{(\cdot)}$  est une permutation de  $x$  telle que  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  et  $\alpha$  est un vecteur poids à composantes positives et décroissantes, les plus grands poids sont attribués aux agents les moins satisfaits pour imposer l'équité. La recherche d'un sac-à-dos équitable revient alors à maximiser la valeur  $f_\alpha$ , plus formellement, on optimise  $\max_{x \in X} f_\alpha(x)$ , avec  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \sum_{k=1}^p u_k^i z_k \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^p w_k z_k \leq W, z_k \in \{0, 1\} \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ . Le problème défini par ce programme linéaire est NP-difficile. En effet, le sac-à-dos classique consistant à maximiser la satisfaction globale des agents et qui est connu pour être NP-difficile, est un cas particulier de notre problème (lorsque  $\alpha$  est à composantes uniformes et positives). De plus, les algorithmes pseudo-polynomiaux de résolution du sac-à-dos ne s'appliquent pas à notre cadre à cause de la non-linéarité de l'agrégateur.

Le coefficient de pondération  $\alpha$  de l'OWA permet de représenter un continuum d'attitudes vis-à-vis de l'équité. Ce qui peut mener à de nombreuses solutions  $f_\alpha$ -optimales différentes. On doit alors éliciter la valeur de  $\alpha$  de manière suffisamment précise pour pouvoir trouver une solution équitable qui convienne au décideur. On introduit dans ce travail deux algorithmes de décision interactifs alternant élicitation incrémentale et recherche de solutions  $f_\alpha$ -optimales. Cette élicitation vise alors à mieux discriminer entre les solutions possibles du problème et non à spécifier le paramètre de manière précise. De nombreuses études ont été effectuées sur l'élicitation incrémentale des préférences en aide à la décision. Différents algorithmes d'élicitation fondés sur des modèles de préférences ont été développés pour résoudre des problèmes

sur ensembles *explicités* comme par exemple [3] ou sur domaine combinatoire en utilisant principalement des modèles linéaires [1]. Le type de problèmes que nous abordons ici mêlent la difficulté des modèles non-linéaires à la résolution de problèmes combinatoires. Il existe dans la littérature peu de travaux mêlant ces deux difficultés à la fois [2].

### 3 Algorithmes d'élicitation incrémentales

On introduit d'abord un premier algorithme qui consiste en une procédure de Branch and Bound interactive où on mêle énumération des solutions et questions préférentielles. Pour cela, on définit la borne supérieure d'un noeud  $\eta$  en utilisant un résultat bien connu bornant la valeur  $f_\alpha$  ( $\alpha$  normalisé) d'un vecteur par sa moyenne, la borne supérieure est alors définie comme étant la valeur moyenne-optimale dans  $\eta$ . La borne inférieure est ensuite définie comme étant la valeur minimale de  $f_\alpha$  d'une "bonne" solution dans  $\eta$ . Une telle solution peut être définie comme la partie entière de la solution moyenne-optimale relaxée. Au cours de l'algorithme, toute solution entière énumérée est ajoutée à un ensemble PO si elle est potentiellement optimale ( $f_\alpha$ -optimale pour au moins un jeu de poids  $\alpha$ ). Au terme de l'algorithme ainsi défini, l'ensemble PO contient toutes les solutions potentiellement optimales de l'instance. Afin de trouver, dans cet ensemble, une solution qui soit optimale pour le décideur, on élicite, à chaque fois que PO atteint une taille donnée, les préférences du décideur pour préciser le poids et mieux discriminer entre les solutions énumérées. Le choix des questions à poser se fait à l'aide d'une méthode bien connue en décision multi-critère consistant à utiliser une notion de regret pour évaluer les solutions du problème, puis à demander au décideur de comparer deux bonnes solutions. Le regret maximum MR d'une solution  $x$  se définit par  $\max_y \max_\alpha f_\alpha(y) - f_\alpha(x)$  et représente une perte d'utilité lorsqu'on recommande  $x$ . Un choix de questions pertinent est alors de demander au décideur de comparer la solution ayant le plus petit MR avec la solution  $y$  définie par  $\arg \max_y \max_\alpha f_\alpha(y) - f_\alpha(x)$ .

Le second algorithme que l'on introduit se fonde sur une optimisation directe des regrets définis plus haut. On étend alors ce calcul au domaine combinatoire en proposant une méthode utilisant une exploration des points extrêmes du polyèdre des paramètres possibles. En effet, ce polyèdre est convexe car il est défini par des contraintes linéaires et la fonction objectif ( $f_\alpha(y) - f_\alpha(x)$ ) est linéaire ( $f_\alpha$  étant linéaire en son paramètre). De ce fait, le calcul de MR peut être simplifié en ne considérant que les points extrêmes du polyèdre. On écrit alors  $\text{MR}(x) = \max_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket} f_{\alpha_k}^* - f_{\alpha_k}(x)$ , où  $\alpha_k$  est un points extrême pour  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $f_{\alpha_k}^*$  est la valeur OWA optimale pour le poids  $\alpha_k$  et se calcul par programmation linéaire. On présente ensuite deux stratégies de choix des questions à poser : une basée sur la notion de regret comme définit plus haut. Et la seconde, qui consiste à diviser, à chaque question, l'intervalle d'une composante du poids  $\alpha$  de moitié. Cette seconde stratégie permet de borner le nombre de questions posées tout en ayant une garantie de performance sur la solution recommandée.

Les deux algorithmes introduits ont été implémentés et testés et montrent de bonnes performances pratiques sur des problèmes de sac-à-dos de tailles différentes, pour différents nombre d'agents considérés.

## Références

- [1] Nawal Benabbou and Patrice Perny. *Incremental Weight Elicitation for Multiobjective State Space Search*. Proceedings of AAAI-15.
- [2] Nadjat Bourdache and Patrice Perny. *Anytime Algorithms for Adaptive Robust Optimization with OWA and WOWA*. Proceedings of ADT-17.
- [3] Darius Braziunas and Craig Boutilier. *Minimax regret based elicitation of generalized additive utilities*. Proceedings of UAI, 2007.