



HAL
open science

Détermination et calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale -Un bref état de l'art -

Y. Dutuit, J.P. Signoret, C. Folleau, P. Thomas

► To cite this version:

Y. Dutuit, J.P. Signoret, C. Folleau, P. Thomas. Détermination et calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale -Un bref état de l'art -. Congrès Lambda Mu 21 " Maîtrise des risques et transformation numérique : opportunités et menaces ", Oct 2018, Reims, France. <hal-02075134>

HAL Id: hal-02075134

<https://hal.science/hal-02075134v1>

Submitted on 21 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Détermination et calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale – Un bref état de l'art –

Determination and calculation of the occurrence frequency of a minimal cut set – A brief state of the art –

Dutuit Y.

Professeur retraité
Université de Bordeaux
38 rue du Prieuré
33170 Gradignan, France
yves.dutuit@sfr.fr

Signoret J.-P.

TPA (TOTAL Professeurs
Associés)
2 route de Garlin
64160 Sedzère, France
j-p.signoret@orange.fr

Folleau C. et Thomas P.

SATODEV
25 rue Marcel Issartier
33700 Mérignac, France
philippe.thomas@satodev.fr

Résumé

Un petit échantillon de cinq méthodes représentatives de l'état de l'art concernant la détermination et le calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale a été constitué. Leur finalité étant de proposer une formule donnant l'expression littérale de cette fréquence, et permettant ainsi d'en calculer aisément la valeur, il a été décidé de tester chacune de ces méthodes en appliquant la formule qu'elle propose aux coupes minimales d'un système choisi pour sa simplicité. Les résultats ainsi obtenus ont d'abord été comparés à ceux donnés par une méthode Markovienne de référence et appliquée au même système, puis ont été catégorisés en fonction de leur pertinence. Il a été enfin montré que les formules ayant passé positivement le test ne sont que des formulations différentes d'une même expression littérale, à la fois explicite et concise, de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale. L'implémentation de cette formule au sein d'un algorithme, basé sur les diagrammes binaires de décision, permet d'en calculer rapidement la valeur en fonction du temps et fait l'objet de la dernière section.

Summary

Following a bibliography survey, the authors of this paper have gathered a small sample of five approaches representative of the state of the art related to the determination of the occurrence frequency of a given minimal cut set. Each of these different approaches aims to provide a literal expression to easily calculate this frequency. Then it has been decided to test each of them on a system chosen for its simplicity. In order to analyse the relevance of the formulae the results have been compared first to those given by the Markovian approach taken as reference. It has been shown that the formulae which have proven to be relevant are different formulations of a same explicit and concise expression giving the occurrence frequency of a given minimal cut set. This generic expression has been implemented by using a dedicated algorithm based on binary decision diagrams. This allows to quickly calculate the time dependant results and this is described in the last section of the paper.

Introduction et contexte

Le contexte particulier du travail présenté s'insère dans un contexte plus général qui est celui de l'analyse qualitative et quantitative des systèmes cohérents, à composants binaires indépendants et réparables et dont la logique de bon fonctionnement (resp. de panne) est généralement modélisée par un bloc-diagramme de fiabilité ou BDF (resp. arbre de défaillance (AdD)). Partie intégrante de cette analyse, l'obtention de la fréquence de panne de ce type de systèmes a été considérée, par plusieurs auteurs connus (Schneeweiss, 1986) (Chang et al., 2004), comme plus importante que celle de sa fiabilité ou de sa disponibilité. De plus, vu le rôle fondamental joué par les coupes minimales au sein de l'analyse qualitative et quantitative des systèmes cohérents et des arbres de défaillance, les auteurs cités en (Barlow et al., 1975) ont estimé que la détermination de l'importance relative de chaque coupe minimale¹ d'une structure cohérente était primordiale. Il est à noter qu'à l'instar de l'une des hypothèses fortes mentionnées dans trois ouvrages de référence (Misra, 1992) (Barlow et al., 1975) (Pagès et al., 1980) qui traitent de ce type d'évaluation, *les coupes minimales et les chemins minimaux* du système-test utilisé dans cet article sont supposés connus. De plus, *qu'il s'agisse d'un système ou de ses coupes minimales, la détermination de leurs fréquences de panne ou d'occurrence requiert de recourir*

¹ Une coupe d'un système donné est un ensemble de composants de ce système dont la panne entraîne la panne de ce dernier. Une coupe minimale est une coupe ne contenant aucune autre coupe. Une coupe minimale se produit à un instant t si et seulement si tous ses éléments constitutifs sont en panne à cet instant (voir référence [Pagès et al., 1980, page 56], par exemple).

aux états de marche critique qui leur sont propres, que ces derniers soient explicités ou non. Or, si les notions de fréquence de défaillance et d'état de marche critique sont adéquates quand il s'agit d'un système, elles ne le sont plus quand elles concernent ses coupes minimales. La dénomination "fréquence d'occurrence", déjà employée à propos de coupes minimales, peut se substituer au premier intitulé (fréquence de défaillance), alors qu'un suppléant (état d'occurrence potentielle critique) du second intitulé (état de marche critique) est proposé pour les coupes minimales à la Section 3.

Cet article est organisé de la manière suivante: Le système simple S , choisi pour tester la pertinence des diverses formules émanant des méthodes sélectionnées, est présenté à la section 1 sous la forme classique d'un bloc-diagramme de fiabilité. Il en est de même pour le graphe de Markov représentant l'ensemble des états de marche et de panne critique et non critique du système S , et de l'exploitation qu'on peut en faire pour déterminer la fréquence d'occurrence de chacune de ses coupes minimales. Ces derniers résultats serviront de référence lors de l'application des autres méthodes. Les sections 2 à 6 sont consacrées à l'application des formules exprimant la fréquence des coupes minimales de S , et complètent ainsi le volet méthodologique de cette étude. Le second volet est consacré (section 7) à la présentation et à l'application d'un algorithme, à base de codage *BDD* (pour la dénomination anglaise: *Binary Decision Diagrams* ou *Diagramme Binaire de Décision*), dédié au calcul de la fréquence d'occurrence des coupes minimales, et déjà implémenté avec succès. Cette dernière section précède une brève conclusion.

1. Exemple de référence

1.1. Système illustratif

Comme annoncé ce système (**S**) est très simple, puisque constitué de quatre composants indépendants:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4) \quad \{1\}$$

S est représenté sous la forme classique de son diagramme de fiabilité (Figure 1).

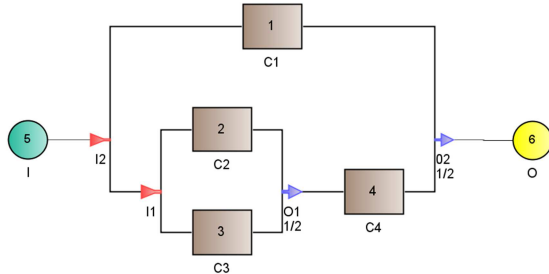


Figure 1 : Diagramme de fiabilité représentant **S**

Les états de disponibilité (resp. d'indisponibilité) du système **S** et du composant C_i sont notés \bar{C}_i (resp. C_i). Les probabilités, à un instant t donné (non intégré aux formules) que **S** et C_i soient disponibles ou indisponibles sont rappelées ci-après:

$$A_S = p(\bar{S}) = 1 - U_S = 1 - p(S) \quad \{2\}$$

$$A_i = p(\bar{C}_i) = 1 - U_i = 1 - p(C_i) \quad \{3\}$$

La simple lecture de la Figure 1 permet d'exprimer l'état de **S** en fonction de celui de chacun de ses composants constitutifs via ses chemins de succès (P_i) ou ses coupes minimales (K_i):

$$\bar{S} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cdot \bar{C}_4 + \bar{C}_3 \cdot \bar{C}_4 = P_1 + P_2 + P_3 \quad \{4\}$$

$$S = C_1 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 = K_1 + K_2 \quad \{5\}$$

Par la suite K_i désignera l'entité "coupe minimale i ", tandis que \bar{C}_i (resp. C_i) indiquera que K_i s'est déjà produite (resp. ne s'est pas encore produite). La même convention s'applique aux chemins de succès.

1.2. Graphe de Markov associé à **S**.

La détermination de l'expression littérale de la fréquence d'occurrence de chacune des coupes minimales de **S** se fait par exploitation directe du graphe de Markov modélisant le comportement de ce système. Ce graphe est représenté à la Figure 2. Les Equations {4} et {5} permettent d'identifier tous les états de marche et de panne de **S**, dont les états critiques. Chaque état du graphe est représenté par un *minterme* qui est la conjonction des états de ses quatre composants constitutifs. Ce qui permet de vérifier que tous ces états sont mutuellement disjoints.

Rappelons qu'un état de marche critique d'un système, représenté par un graphe d'états tel que celui de la Figure 2, est un état de marche qui possède au moins une transition vers un état de panne de ce système. On appelle élément critique, pour un état de marche critique donné, un élément dont la défaillance provoque la défaillance du système (chapitre 6 de la référence (Pagès et al., 1980)). On définit de manière similaire les états de panne critique. Pour des raisons de lisibilité de la figure, seules les transitions allant d'un état de marche critique vers un état de panne (représentés en rouge sur la Figure 2) ont été accentuées. Ainsi, les états de marche critique conduisant, du fait de la défaillance du composant critique C_1 , à l'occurrence de la coupe minimale K_1 , et donc à la panne de **S** sont les états (représentés en vert) $E_5, E_{10}, E_{11}, E_{15}$ dont l'union constitue l'ensemble **E**. De même, les états de marche critique conduisant, du fait de la défaillance du composant critique C_4 à l'occurrence de la coupe minimale

K_1 , et donc à la panne de **S** sont les états (représentés en violet) E_2, E_6, E_7 dont l'union constitue l'ensemble **F**.

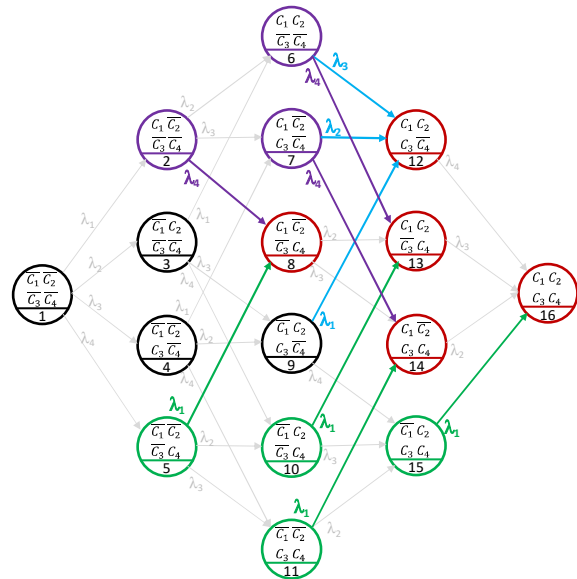


Figure 2 : Graphe de Markov représentant **S**

Enfin, les états de marche critique conduisant à l'occurrence de la coupe minimale K_2 et à la panne de **S**, du fait de la défaillance d'un seul des trois composants C_1, C_2 et C_3 , sont les états E_6, E_7, E_9, E_{15} dont l'union constitue l'ensemble **G**. On peut noter que ces ensembles **E, F, G** ne sont pas nécessairement disjoints.

Dans le cadre de ce travail l'hypothèse de l'occurrence simultanée de plus d'une coupe minimale n'est pas retenue. La seule exception admise est le cas où un ou plusieurs éléments sont communs à plusieurs coupes.

1.3. Fréquences d'occurrence de référence

1.3.1. Fréquence d'occurrence de K_1

A chaque instant la contribution de l'ensemble **E** (resp. **F**) à la fréquence d'occurrence de la coupe $K_1=C_1.C_4$ est égale au produit de la probabilité que le système **S** séjourne à cet instant dans l'un de ces états par le taux de défaillance de l'élément C_1 (resp. C_4). La fréquence d'occurrence de K_1 s'obtient alors en sommant toutes ces contributions.

$$w_{K_1} = \lambda_1 \cdot p(E_5 + E_{10} + E_{11} + E_{15}) + \lambda_4 \cdot p(E_2 + E_6 + E_7) \quad \{6\}$$

$$w_{K_1} = \lambda_1 \cdot p \left(\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot \bar{C}_3 \cdot C_4 + \bar{C}_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3 \cdot C_4 \right) + \lambda_4 \cdot p(C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot \bar{C}_3 \cdot \bar{C}_4 + C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3 \cdot \bar{C}_4 + C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot C_3 \cdot \bar{C}_4) \quad \{7\}$$

Après quelques opérations algébriques, il vient :

$$w_{K_1} = \lambda_1 \cdot p(\bar{C}_1) \cdot p(C_4) + \lambda_4 \cdot p(C_1) \cdot p(\bar{C}_4) \cdot p(\bar{C}_2 + C_2 \cdot \bar{C}_3) \quad \{8\}$$

Soit en termes de disponibilité-indisponibilité :

$$w_{K_1} = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_4 + \lambda_4 \cdot A_4 \cdot U_1 \cdot (A_2 + U_2 \cdot A_3) \quad \{9\}$$

1.3.2. Fréquence d'occurrence de K_2

En procédant d'une manière similaire avec les états de l'ensemble **G**, on obtient l'expression littérale finale de la fréquence d'occurrence de K_2 (Equation {11}).

$$w_{K_2} = \lambda_1 \cdot p(E_9 + E_{15}) + \lambda_2 \cdot p(E_7) + \lambda_3 \cdot p(E_6) \quad \{10\}$$

D'où, après quelques manipulations :

$$w_{K_2} = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_2 \cdot U_3 + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot U_1 \cdot U_3 \cdot A_4 + \lambda_3 \cdot A_3 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot A_4 \quad \{11\}$$

2. Méthode basée sur les coupes minimales considérées isolément des autres

Cette méthode simple est exposée à la Section 9.3.1 du chapitre 9 de l'ouvrage cité en référence (Schüller et al., 1997). Elle débouche sur la formule donnant l'expression littérale de ce que les auteurs de l'ouvrage dénomment "failure occurrence rate of a minimal cutset", reprenant ainsi la désignation choisie (*minimal cut set occurrence rate*) dans le document normatif NUREG-0492 (Vesely et al., 1981), et par Misra (Misra, 1992), alors que cette même entité est appelée "*minimal cut set failure frequency*" dans l'annexe G d'un autre document normatif (ARP4761A, 1997) et dans un ouvrage à destination des ingénieurs des industries chimiques (AIChE, 2010). Quelle que soit de la nature de cette entité, notée w_{K_i} , son expression littérale figure à l'identique dans toutes les références citées dans ce paragraphe. Elle est reprise ci-dessous :

$$w_{K_i} = \sum_{i=1}^{m_i} \left[w_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m_i} U_k \right] \quad \{12\}$$

où m_i , w_i et U_k représentent respectivement l'ordre de la coupe concernée K_i , la fréquence de défaillance du $i^{\text{ème}}$ élément de cette coupe minimale, et l'indisponibilité de son $k^{\text{ème}}$ élément.

L'application au système **S** de la formule proposée en {12} donne les résultats suivants :

$$w_{K_1} = w_1 \cdot U_4 + w_4 \cdot U_1 = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_4 + \lambda_4 \cdot A_4 \cdot U_1 \quad \{13\}$$

$$w_{K_2} = w_1 \cdot U_2 \cdot U_3 + w_2 \cdot U_1 \cdot U_3 + w_3 \cdot U_1 \cdot U_2 = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_2 \cdot U_3 + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot U_1 \cdot U_3 + \lambda_3 \cdot A_3 \cdot U_1 \cdot U_2 \quad \{14\}$$

En comparant les Equations {13} et {14} respectivement aux Equations {9} et {11}, on vérifie que cette première méthode, souvent utilisée, ne donne que des résultats approchés, mais heureusement conservatifs et généralement acceptables sur le plan numérique.

Son principal avantage est son extrême simplicité. Son inconvénient majeur est que le résultat qu'elle fournit n'est pas une fréquence d'occurrence, mais un taux d'occurrence, c'est-à-dire une entité propre, intrinsèque à la coupe minimale considérée, exempte donc de toute influence extérieure à cette coupe. Or si l'on souhaite déterminer la fréquence d'occurrence d'une telle coupe, c'est pour évaluer son importance par rapport à celles des autres coupes minimales qui sont des scénarios concurrents conduisant, comme elle, à l'occurrence d'un événement redouté identifié, ici la panne du système. Mais cette évaluation ne peut pas se faire sans prise en compte de la concurrence mentionnée. Pour résumer, la détermination de la fréquence d'une coupe minimale, via sa contribution à la défaillance du système, ne peut pas se faire sans prendre en compte l'influence des coupes concurrentes sur sa propre occurrence. En conclusion, cette méthode peut être utilisée, mais en toute connaissance de cause.

3. Proposition d'une méthode corrigeant le défaut majeur de la précédente

Il s'agit d'évaluer la contribution **effective** d'une coupe minimale K_i à la défaillance d'un système dans tout intervalle $[t, t + dt]$ donné. Cette contribution peut s'évaluer par la probabilité que ce système défaille entre t et $t + dt$ à cause de K_i . Or cette défaillance n'est à porter au crédit de K_i que si **cette dernière est la seule à pouvoir se produire dans ce même intervalle**. Ce qui se traduit par l'Equation {15} ci-dessous :

$$p(\text{système défaille entre } t \text{ et } t + dt \text{ à cause de } K_i) = p(K_i \text{ seule à se produire dans l'intervalle } [t, t + dt]) \quad \{15\}$$

A titre d'exemple, évaluons la probabilité de ce dernier événement dans le cas $K_i = K_1$, et montrons qu'elle conduit bien à l'expression littérale explicite de la fréquence d'occurrence effective de cette coupe. Cet événement est la conjonction de trois événements notés A , B et C , définis après l'Equation {16}

$$p(K_1 \text{ seule à se produire dans l'intervalle } [t, t + dt]) = p(A \cdot B \cdot C) \quad \{16\}$$

avec :

- A est l'événement " K_1 est dans un état d'occurrence potentielle critique² dû à C_1 ou C_4 , à l'instant t' , qui se décompose en deux événements incompatibles A_1 et A_2 , définis comme suit :
 - o A_1 est l'événement " K_1 est dans un état d'occurrence potentielle critique dû à C_1 , à l'instant t' ;
 - o A_2 est l'événement " K_1 est dans un état d'occurrence potentielle critique dû à C_4 , à l'instant t' ;
- B est l'événement " K_2 ne s'est pas encore produite à l'instant t' ;
- C est l'événement "Le composant critique concerné tombe en panne dans l'intervalle $[t, t + dt]$, sachant qu'il était disponible à l'instant t' . Sa probabilité est simplement $\lambda_i \cdot dt$, avec $i = 1$ ou 4 qui renvoie respectivement aux composants C_1 ou C_4 .

En fonction des définitions données aux différents événements A_1 , A_2 , B et C l'Equation {16} s'écrit alors :

$$p(K_1 \text{ seule à se produire dans l'intervalle } [t, t + dt]) = p(A_1 \cdot B) \cdot \lambda_1 \cdot dt + p(A_2 \cdot B) \cdot \lambda_4 \cdot dt = p(\overline{C_1} \cdot C_4) \cdot \lambda_1 \cdot dt + p(C_1 \cdot \overline{C_4}) \cdot \lambda_4 \cdot dt \quad \{17\}$$

$$p(K_1 \text{ seule à se produire dans l'intervalle } [t, t + dt]) = p(\overline{C_1} \cdot C_4) \cdot \lambda_1 \cdot dt + p(C_1 \cdot \overline{C_4}) \cdot \lambda_4 \cdot dt = p(\overline{C_1}) \cdot p(C_4) \cdot \lambda_1 \cdot dt + p(C_1) \cdot p(\overline{C_4}) \cdot [p(\overline{C_2}) + p(C_2) \cdot p(\overline{C_3})] \cdot \lambda_4 \cdot dt \quad \{18\}$$

Soit, en termes de disponibilité et d'indisponibilité instantanées des composants C_i :

$$p(K_1 \text{ seule à se produire dans l'intervalle } [t, t + dt]) = w_{K_1} \cdot dt = [\lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_4 + \lambda_4 \cdot A_4 \cdot U_1 \cdot (A_2 + U_2 \cdot A_3)] \cdot dt \quad \{19\}$$

Si l'on divise par dt les deux termes de cette dernière équation, il vient :

$$w_{K_1} = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_4 + \lambda_4 \cdot A_4 \cdot U_1 \cdot (A_2 + U_2 \cdot A_3) = w_1 \cdot U_4 + w_4 \cdot U_1 \cdot (A_2 + U_2 \cdot A_3) \quad \{20\}$$

On constate que ce résultat est identique au résultat de référence pour la coupe K_1 donné par l'Equation {9}.

L'expression générique de la fréquence d'occurrence d'une coupe K_i peut être maintenant donnée ci-après.

$$w_{K_i} = \sum_{C_j \in K_i} p \left[\left(\overline{C_j} \cdot \prod_{\substack{C_k \in K_i \\ k \neq j}} C_k \right) \cdot \prod_{K_1 \neq K_i} \overline{K_1} \right] \cdot \lambda_j \quad \{21\}$$

Appliquons-la au cas de la coupe minimale K_2 :

$$w_{K_2} = p(\overline{C_1} \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot \overline{K_1}) \lambda_1 + p(\overline{C_2} \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot \overline{K_1}) \lambda_2 + p(\overline{C_3} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \overline{K_1}) \lambda_3 \quad \{22\}$$

$$\text{Avec } \overline{K_1} = \overline{(C_1 \cdot C_4)} = \overline{C_1} + \overline{C_4} = \overline{C_1} + C_1 \cdot \overline{C_4} \quad \{23\}$$

$$w_{K_2} = \lambda_1 \cdot p(\overline{C_1} \cdot C_2 \cdot C_3) + \lambda_2 \cdot p(\overline{C_2} \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot \overline{C_4}) + \lambda_3 \cdot p(\overline{C_3} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \overline{C_4}) \quad \{24\}$$

Cela permet de retrouver l'Equation {11} qui sert de référence pour la fréquence d'occurrence de la coupe K_2 . Ce qui indique que la présente méthode, proposée par les auteurs de cet article, peut être mise en œuvre sans appréhension.

² L'état d'occurrence potentielle critique occupé par une coupe minimale K_i correspond à l'état de marche critique d'un système S_i d'architecture 1ooN, où N est l'ordre de la coupe K_i .

4. Méthode de Misra

La référence (Misra, 1992) renvoie à un ouvrage de cet auteur. On y trouve l'expression du taux d'occurrence, à un instant donné, d'un système, ou plutôt de l'événement-sommet d'un AdD le représentant. Une première ambiguïté vient du symbole choisi ($w_s(t)$) par Misra pour désigner ce taux, alors que ce symbole est traditionnellement attribué à une fréquence de défaillance. La seconde ambiguïté réside dans l'usage qu'il en fait en l'exprimant en fonction de ce qu'il dénomme taux d'occurrence des coupes minimales de l'AdD. Pour être plus précis, Misra présente $w_s(t)$ comme la somme de termes, dont il ne précise pas la nature, mais que nous désignerons, en reprenant sa présentation, par w_{K_i} , dont l'expression est donnée par l'Equation {25}:

$$w_{K_i}^* = \sum_{j=1}^{m_i} \left[w_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m_i} U_k \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l' \neq i}}^{n_c} (1 - U'_{K_{l'}}) \right] \quad \{25\}$$

Avec

$w_j = \lambda_j \cdot A_j$: fréquence d'occurrence du $j^{\text{ième}}$ élément de K_i
 U_k : indisponibilité du $k^{\text{ième}}$ élément de K_i différent du $j^{\text{ième}}$.
 m_i : ordre de la coupe minimale K_i .
 n_c : nombre total de coupes minimales de l'AdD concerné

$U'_{K_{l'}} = \prod_{j=1}^{m_{l'}} U_j$, où i' est l'index d'une coupe minimale différentes de K_i et $m_{i'}$ le nombre de telles coupes.

$U'_{K_{i'}}$ est donc le produit des indisponibilités des éléments appartenant à $K_{i'}$ et pas à K_i

L'expression littérale de la fréquence $w_{K_i}^*$ sera validée si elle permet d'obtenir, pour toute coupe minimale, les mêmes résultats que ceux issus de l'application de l'Equation (21), qui ont déjà été eux-mêmes validés (voir la conclusion de la Section 3). A contrario, il suffit de trouver un seul contre-exemple pour arriver à la conclusion opposée. Un tel contre-exemple est celui de l'application de ces deux modèles à la coupe minimale K_1 .

Le modèle de l'Equation {25} conduit au résultat suivant:

$$\begin{aligned} w_{K_1}^* &= w_1 \cdot U_4 \cdot (1 - U_2 \cdot U_3) + w_4 \cdot U_1 \cdot (1 - U_2 \cdot U_3) \\ &= w_1 \cdot U_4 \cdot (1 - U_2 \cdot U_3) + w_4 \cdot U_1 \cdot (1 - U_2 \cdot (1 - A_3)) \quad \{26\} \\ &= w_1 \cdot U_4 - w_1 \cdot U_4 \cdot U_2 \cdot U_3 + w_4 \cdot U_1 \cdot (A_2 + U_2 \cdot A_3) \end{aligned}$$

En comparant cette équation à l'Equation {20}, on peut constater que $w_{K_1}^*$ diffère de la fréquence d'occurrence de référence w_{K_1} . Un simple examen visuel de l'Equation {26} montre que cette différence ($w_{K_1} - w_{K_1}^*$) est minime, puisqu'égalée à $w_1 \cdot U_2 \cdot U_4 \cdot U_3$ ou $\lambda_1 \cdot A_1 \cdot U_2 \cdot U_4 \cdot U_3$. Sous cette dernière forme on voit mieux qu'elle correspond à la contribution de l'état 15 du graphe de la Figure 2 à la défaillance du système **S**, c'est-à-dire à la contribution du seul état de marche de **S** qui soit critique simultanément pour les coupes minimales K_1 et K_2 qui ont en commun le composant critique C_1 .

Pour ces raisons, et pour la relative complexité de l'Equation {25}, l'approche de Misra peut être mise en œuvre si l'on se satisfait d'un résultat approché conservatif, d'ailleurs meilleur que celui présenté à la Section 2); mais ceci, une fois encore, en tout connaissance de cause.

5. Méthode issue de la détermination de l'importance d'une coupe minimale

Dans un article connu (Barlow et al., 1975), Barlow et Proschan définissent l'importance d'une coupe minimale **K**, comme étant "la probabilité que la défaillance de **K** coïncide avec la défaillance du système, c'est-à-dire que **K** "cause" la défaillance du système".

Ces deux auteurs énoncent ensuite un théorème qui donne l'expression explicite de cette importance sur une période d'observation $[0, t]$ (t pouvant tendre vers l'infini). Elle est rappelée ci-après, telle que présentée dans (Barlow et al.,

1975).

$$I_h(K) = \sum_{i \in K} \int_0^{\infty} h(1_i, 0^{K-i}, \bar{F}(t)) \cdot \prod_{j \in K-i} F_j(t) \cdot dF_i(t) \quad \{27\}$$

On peut en déduire l'expression de l'importance instantanée, c'est-à-dire à un instant donné t , de cette même coupe, qui soit valable pour les systèmes à composants réparables. Il suffit pour cela d'omettre l'intégration, de considérer que la fonction fiabilité $h(p)$ devient la fonction disponibilité du système, et de remplacer respectivement $\bar{F}(t)$ par $A(t)$, $F_j(t)$ par $U_j(t)$, et $dF_i(t) = f_i(t) \cdot dt$ par $dW_i(t) = w_i(t) \cdot dt = \lambda_i \cdot A_i(t) \cdot dt$, où $W_i(t)$ est le nombre moyen de défaillance(s) du composant i sur l'intervalle $[t, t + dt]$. On obtient ainsi, selon la définition de Barlow et Proschan, la probabilité que la coupe minimale **K** cause la défaillance du système **S** dans l'intervalle $[t, t + dt]$. Cette probabilité est donc égale à $w_{K_i}(t) \cdot dt$, par définition de la fréquence d'occurrence de la coupe **K**. L'Equation {28} rend compte de cette égalité:

$$w_k(t) \cdot dt = \sum_{i \in K} \left[h(1_i, 0^{K-i}, A(t)) \cdot A_i(t) \cdot \prod_{j \in K-i} U_j(t) \cdot \lambda_i \cdot dt \right] \quad \{28\}$$

D'où l'expression de la fréquence d'occurrence de la coupe minimale **K**:

$$w_k(t) = \sum_{i \in K} \left[h(1_i, 0^{K-i}, A(t)) \cdot A_i(t) \cdot \prod_{j \in K-i} U_j(t) \cdot \lambda_i \right] \quad \{29\}$$

Le terme $h(1_i, 0^{K-i}, A(t))$ représente la probabilité conditionnelle que **S** est disponible ($A(t)$) sachant que le composant i est disponible (1_i) et tous les autres composants formant avec lui la coupe minimale **K** sont indisponibles (0^{K-i}).

En omettant de mentionner désormais le temps t dans toutes les expressions littérales des probabilités, le terme $h(1_i, 0^{K-i}, A(t))$ peut s'écrire $p[\bar{S} / (\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j)]$, avec $j \neq i$ signifiant $C_j \in K - \{i\}$.

Cela permet de simplifier l'écriture de l'Equation {29} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_k(t) &= \sum_{C_i \in K} p \left[\bar{S} / \left(\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j \right) \right] \cdot \left(A_i(t) \cdot \prod_{j \neq i} U_j(t) \right) \cdot \lambda_i \\ &= \sum_{C_i \in K} \frac{p[\bar{S} / (\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j)]}{p(\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j)} \cdot p(\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j) \cdot \lambda_i \end{aligned}$$

$$D'où \quad w_k(t) = \sum_{C_i \in K} p \left[\bar{S} / \left(\bar{C}_i \cdot \prod_{j \neq i} C_j \right) \right] \cdot \lambda_i \quad \{30\}$$

Si l'on compare les expressions littérales de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale données par les Equations {21} et {30}, on constate plus qu'une grande similitude de composition entre elles, puisque cette dernière va rapidement se révéler être une équivalence. Vérifions-le en appliquant ces deux formules à la coupe K_2 . Ce qui revient à vérifier l'identité des sommes des expressions entre crochets des deux équations précitées. En partant de l'Equation {30} :

$$\begin{aligned} &\bar{S} \cdot (\bar{C}_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3) \\ &= \bar{K}_1 \cdot \bar{K}_2 \cdot (\bar{C}_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3) \\ &= \bar{K}_1 \cdot (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3) \cdot (\bar{C}_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3) \\ &= \bar{K}_1 \cdot (\bar{C}_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C}_3) \end{aligned} \quad \{31\}$$

Le résultat final correspond bien au développement de l'expression entre crochets de l'Equation {21} pour la coupe K_2 .

L'équivalence des Equations {21} et {30} est ainsi démontrée dans le cas de la coupe minimale K_2 . Elle le serait également pour la coupe K_1 , et pour tout autre cas.

On peut donc conclure que la méthode déduite du facteur

d'importance de Barlow-Proschan, et la méthode proposée par les auteurs de cet article sont deux formulations initiales différentes d'une même idée, et dont la mise en œuvre aboutit aux mêmes résultats, conformes à ceux obtenus via l'application de la méthode Markovienne prise comme référence.

6. Méthode de Pagès-Gondran

Comme toutes les autres méthodes déjà examinées, celle-ci suppose que l'ensemble des chemins minimaux et l'ensemble des coupes minimales sont connus. Mais elle s'en distingue par le fait qu'elle est présentée, ni dans un article, ni dans un chapitre à proprement dit d'un ouvrage, mais dans un recueil d'exercices adossé à un chapitre particulier d'un livre (ici le chapitre 6 de l'ouvrage cité en référence (Pagès et al., 1980)). Cet exercice est intitulé "Algorithme de recherche des états de marche critique". Comme le titre de l'exercice l'indique, si l'algorithme annoncé permet de déterminer tous les états de marche critique d'un système donné, il est aussi capable de déterminer les fréquences d'occurrence des coupes minimales associées à ce système, à l'image de ce qui se fait classiquement via un graphe Markovien (voir Section 1). Mais le plus intéressant c'est que cet algorithme n'a pas à identifier **explicitement** ces états pour déterminer les fréquences d'occurrence de toutes les coupes. Le plus simple pour en comprendre le principe est d'illustrer son application au cas d'étude présenté à la Section 1 (système **S**), sous la forme choisie par ses concepteurs, qui est un simple tableau présentant les combinaisons d'états de composants de **S** données par cet algorithme.

En reprenant la présentation de Pagès et Gondran, on va considérer tous les couples constitués d'un chemin minimal **P_i** et d'une coupe minimale **K_j** ayant en commun un élément et un seul, et s'intéresser aux ensembles d'états constitués de la manière suivante:

- les éléments appartenant à **P_i** ne sont pas défailants,
- les éléments appartenant à **K_j**, sauf l'élément qu'elle a en commun avec **P_i**, sont défailants,
- les autres éléments sont dans un état indifférent.

Un tel ensemble est appelé *sous-ensemble de marche critique*. L'élément commun à **P_i** et **K_j** s'appelle *élément critique*.

La mise en œuvre des trois règles de constitution d'ensembles d'états précédentes conduit au tableau suivant dont l'intitulé de la colonne 7 signifie « Nombre d'Etats de Marche Critique » :

Chemins P_i	Coupes K_j	Eléments critiques et (états)	Eléments "KO" et (états)	Eléments "OK" et (états)	Eléments Indifférents et (états)	Nbr d'EMC
C₁	C₁.C₄	C₁ (\bar{C}_1)	C₄ (C_4)	-	C₂, C₃ ($\bar{C}_2 + C_2$). ($\bar{C}_3 + C_3$)	4
	C₁.C₂.C₃	C₁ (\bar{C}_1)	C₂ et C₃ ($C_2.C_3$)	-	C₄ ($\bar{C}_4 + C_4$)	2
C₂. C₄	C₁.C₄	C₄ (\bar{C}_4)	C₁ (C_1)	C₂ (\bar{C}_2)	C₃ ($\bar{C}_3 + C_3$)	2
	C₁.C₂.C₃	C₂ (\bar{C}_2)	C₁ et C₃ ($C_1.C_3$)	C₄ (\bar{C}_4)	-	1
C₃. C₄	C₁.C₄	C₄ (\bar{C}_4)	C₁ (C_1)	C₃ (\bar{C}_3)	C₂ ($\bar{C}_2 + C_2$)	2
	C₁.C₂.C₃	C₃ (\bar{C}_3)	C₁ et C₂ ($C_1.C_2$)	C₄ (\bar{C}_4)	-	1

Tableau 1 : Combinaisons données par l'algorithme

Ce tableau comprend 7 colonnes dont il convient de préciser le contenu:

- La colonne 1 liste les chemins de succès relatifs au système **S**;
- La colonne 2 affecte à chacun des chemins précédents la liste des coupes minimales relatives à **S**.

Ces deux colonnes détiennent les informations nécessaires au "remplissage" des colonnes 3 à 5, en conformité avec

les deux premières règles énoncées précédemment, comme expliqué ci-après:

- Pour chaque couple (**P_i**, **K_j**) on identifie leur seul élément commun et on le place, ainsi que sa variable d'état, dans la colonne 3, en regard de la coupe **K_j**,
- Dans la colonne 4, et sur la même ligne, on dispose le ou les éléments qui appartiennent à la coupe **K_j** et qui sont différents de l'élément critique, ainsi que sa variable d'état si le composant est seul, ou la combinaison adéquate de leurs variables d'état, s'il y a plusieurs composants.
- Enfin, et toujours sur la même ligne, on place dans la colonne 5, le ou les éléments qui appartiennent au chemin **P_i**, et qui sont différents de l'élément critique, avec les mêmes modalités pour leurs variables d'état qu'à la colonne 4.
- Le ou les éléments non encore répartis dans l'une des deux colonnes précédentes, sont disposés dans la colonne 6, toujours sur la même ligne. Y figurent également toutes les combinaisons possibles de leurs états respectifs, dont aucune n'affecte l'état du système. D'où l'adjectif "indifférent".

L'exploitation de ce tableau est simple:

- Si l'on souhaite obtenir l'expression littérale des états de marche critique relatifs à une coupe donnée, sous la forme de mintermes, il suffit d'identifier chaque ligne en regard de l'intitulé de cette coupe, de faire le produit des éléments se trouvant à l'intersection de cette ligne et des colonnes 3 à 6, et de faire la somme des mintermes ainsi constitués.

Par exemple, pour la première ligne du tableau, on obtient l'ensemble des états de marche critique cerclés de vert de la Figure 2, dénommé précédemment ensemble **E**, soit: $\bar{C}_1.C_4.(C_2 + C_2).(C_3 + C_3)$

- Si l'on souhaite obtenir directement l'expression littérale de la fréquence d'occurrence d'une coupe donnée, on procède comme précédemment, mais en se limitant aux colonnes 3 à 5 et en multipliant par le taux de défaillance de l'élément critique concerné le résultat obtenu pour chaque ligne en regard de l'intitulé de cette coupe.

Le résultat pour la coupe **K₂** est donné ci-après, à titre d'exemple:

$$w_{K_2} = \lambda_1.p(\bar{C}_1.C_2.C_3) + \lambda_2.p(\bar{C}_2.C_1.C_3.\bar{C}_4) + \lambda_3.p(\bar{C}_3.C_1.C_2.\bar{C}_4) \quad \{32\}$$

Soit, en termes de disponibilité/indisponibilité des éléments de la coupe :

$$w_{K_2} = \lambda_1.A_1.U_2.U_3 + \lambda_2.A_2.U_1.U_3.A_4 + \lambda_3.A_3.U_1.U_2.A_4 \quad \{33\}$$

Ce résultat est identique à ceux fournis par les méthodes de référence et de Barlow-Proschan, ainsi que par celle proposée par les auteurs de cet article. Ce qui indique que la méthode de Pagès-Gondran est pertinente selon le critère de satisfaction retenu.

Ainsi, parmi les cinq méthodes présentées et analysées, seules les trois qui viennent d'être citées fournissent un résultat conforme à l'attente exprimée.

7. Implémentation via les BDD (Binary Decision Diagrams)

7.1 Introduction aux BDD

Les diagrammes binaires de décision introduits par Bryant (Bryant, 1986) constituent une structure de données efficace pour coder et manipuler des fonctions booléennes. De nombreux articles et ouvrages leurs ont été consacrés (voir par exemple (Rauzy, 1996), (Xing et al., 2015)).

Le BDD associé à une formule booléenne est un codage compact de sa table de vérité fondé sur la décomposition de Shannon. Soit **F** une formule booléenne dépendant d'une variable **x**. L'égalité suivante est vérifiée :

$$F = (x \wedge F_{x=1}) \vee (\bar{x} \wedge F_{x=0}) = x.F_1 + \bar{x}.F_0 \quad \{34\}$$

En choisissant un ordre total sur les variables et en appliquant récursivement la décomposition de Shannon, la table de vérité d'une formule peut être représentée par un arbre binaire. Chaque nœud de cet arbre code une formule F et peut se lire comme un opérateur *si-alors-sinon*. Il est étiqueté par une variable x et a 2 arêtes (une arête pointant sur le nœud codant le cofacteur positif $F_{x=1}$ de F par rapport à x , l'autre pointant sur le nœud codant le cofacteur négatif). Les feuilles de l'arbre sont étiquetées par 0 ou par 1.

Deux règles de réduction de l'arbre de Shannon permettent d'en réduire considérablement la taille : Le partage des sous-arbres isomorphes et la suppression des nœuds inutiles.

Par exemple le passage de l'arbre de Shannon au BDD de la formule $(a.b) + (\bar{a}.c)$ pour un ordre alphabétique est représenté Figure 3 (les arêtes en pointillés étant les arêtes *sinon*).

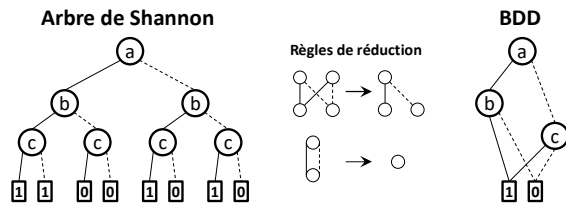


Figure 3 : Transformation d'un Arbre de Shannon en BDD

Les opérations logiques (conjonction, disjonction, négation, ...) peuvent être effectuées directement sur les BDD. Par exemple, les équations récursives qui suivent permettent de construire le BDD codant la conjonction de $F = x.F_1 + \bar{x}.F_0$ et de $G = y.G_1 + \bar{y}.G_0$

$$\begin{aligned} \text{And}(F, G) &= \text{And}(x.F_1 + \bar{x}.F_0, y.G_1 + \bar{y}.G_0) \\ \text{And}(0, G) &= 0 \\ \text{And}(F, 0) &= 0 \\ \text{And}(1, G) &= G \\ \text{And}(F, 1) &= F \\ \text{And}(x.F_1 + \bar{x}.F_0, y.G_1 + \bar{y}.G_0) &= \begin{cases} x.\text{And}(F_1, G) + \bar{x}.\text{And}(F_0, G) & \text{si } x < y \\ x.\text{And}(F_1, G_1) + \bar{x}.\text{And}(F_0, G_0) & \text{si } x = y \\ y.\text{And}(F, G_1) + \bar{y}.\text{And}(F, G_0) & \text{si } x > y \end{cases} \end{aligned}$$

Pour que ces équations récursives soient efficaces, il faut mettre en place un mécanisme de cache : chaque fois qu'une opération est réalisée on met son résultat dans une table. Avant d'effectuer une opération, on va d'abord voir dans la table si son résultat n'est pas déjà connu. Ce mécanisme permet de rendre les opérations classiques sur les BDD polynomiales en la taille de leurs opérands. La négation peut même être effectuée en temps constant en ajoutant des drapeaux sur les arêtes.

La plupart des opérations sur les BDD sont généralement décrites par ce type d'équations récursives. Par exemple, l'algorithme calculant la probabilité d'une formule à partir de la probabilité des variables et du BDD codant la formule est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Pr}(F) &= \text{Pr}(x.F_1 + \bar{x}.F_0) \\ \text{Pr}(0) &= 0 \\ \text{Pr}(1) &= 1 \\ \text{Pr}(x.F_1 + \bar{x}.F_0) &= p(x) \times \text{Pr}(F_1) + (1 - p(x)) \times \text{Pr}(F_0) \end{aligned}$$

avec $p(x)$ la probabilité de la variable d'indice x .

7.2 Choix de la méthode implémentée

Pour le calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale, chacune des 3 méthodes finalement retenues utilisent des données d'entrée différentes. Ainsi :

- Pour la méthode de Pagès-Gondran, il est nécessaire de travailler sur l'ensemble des chemins de succès et l'ensemble des coupes minimales.
- Pour la méthode proposée au sein de cet article, toutes les coupes minimales sont nécessaires.

- Enfin, pour la méthode issue des travaux de Barlow-Proschan, seule la formule booléenne codant le fonctionnement du système, ainsi que la coupe minimale concernée sont nécessaires.

Dans le cadre de ces travaux, il apparaît que la méthode issue des travaux de Barlow-Proschan est la plus simple à mettre en œuvre lorsque l'on travaille avec des BDD. En effet, le BDD codant le dysfonctionnement du système a été nécessairement généré pour calculer la disponibilité et/ou la fréquence du système et pour déterminer l'ensemble des coupes minimales. Les données d'entrée sont donc directement accessibles.

Les autres méthodes peuvent éventuellement être implémentées avec efficacité, mais elles vont nécessiter de travailler sur l'ensemble des coupes minimales pour être efficace.

7.3 Implémentation

L'implémentation retenue se base donc sur l'Equation {30}.

Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un algorithme récursif efficace pour calculer la probabilité associée à la conjonction d'une formule booléenne quelconque et d'une liste de littéraux (correspondant à \bar{C}_i ou à C_i).

En plus d'un nœud BDD $x.F_1 + \bar{x}.F_0$, l'algorithme proposé se base sur 2 structures de données permettant de définir une liste de littéraux.

```
struct Literal {
    int e; // indice de la variable du literal
    bool v; // = vrai si literal positif
           // (= faux si négatif)
}
struct LList {
    Literal f; // 1er élément de la liste
    LList n; // Suite de la liste
}
```

Soit L (LList) une liste de littéraux l_i ordonnées en fonction de $l_i.e$ (où $l_i.e$ désigne l'indice de la variable de l_i ; l'opérateur '.' permettant l'accès à un élément d'une structure de données).

On note $L = \emptyset$ si la liste est vide

L'algorithme récursif se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{PrAnd}(F, L) &= \text{PrAnd}(x.F_1 + \bar{x}.F_0, L) \\ \text{PrAnd}(0, L) &= 0 \\ \text{PrAnd}(1, \emptyset) &= 1 \\ \text{PrAnd}(1, L) &= pL(L:f) \times \text{PrAnd}(1, L:n) \\ \text{PrAnd}(F, \emptyset) &= \text{Pr}(F) \\ \text{PrAnd}(x.F_1 + \bar{x}.F_0, L) &= \begin{cases} p(x) \times \text{PrAnd}(F_1, L) + (1 - p(x)) \times \text{PrAnd}(F_0, L) & \text{si } x < L:f:e \\ pL(L:f) \times \text{PrAnd}(F_1, L:n) & \text{si } x = L:f:e \ \& \ L:f:v \\ pL(L:f) \times \text{PrAnd}(F_0, L:n) & \text{si } x = L:f:e \ \& \ !L:f:v \\ pL(L:f) \times \text{PrAnd}(F, L:n) & \text{si } x > L:f:e \end{cases} \end{aligned}$$

Avec $pL(L)$ la probabilité du littéral l

$$pL(l) = \begin{cases} p(l:e) & \text{si } l:v \\ 1 - p(l:e) & \text{si } !l:v \end{cases}$$

A partir de cet algorithme, le calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe est relativement facile à obtenir.

$$w_k(t) = \sum_{C_i \in K} \text{PrAnd}(\text{bddOf}(\bar{S}), \text{list}(K, i)).\lambda_i \quad [35]$$

avec

$\text{bddOf}(X)$, une fonction qui renvoie le BDD de la variable booléenne X
 $\text{list}(K, i)$, une autre fonction qui génère la liste des événements $C_j \in K$ sous la forme de littéraux (positif si $j \neq i$, négatif si $j = i$).

L'algorithme a été implémenté au sein de la librairie de calcul Albizia de l'atelier GRIF WorkShop.

Conclusion

L'objectif du travail présenté était de dresser un bref état de l'art relatif aux méthodes de détermination et d'évaluation de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale donnée, d'analyser chacune d'elles afin d'identifier celles qui, d'une part, permettent d'évaluer l'importance de la contribution effective de chaque coupe minimale à la défaillance du système considéré et, d'autre part, qui se prêtent le mieux à une implémentation logicielle. Il en est ressorti que la méthode dite de Barlow-Proschan s'est avérée être la plus convaincante sur ces deux aspects. Le prochain objectif d'étude envisagé par les auteurs pourrait être d'étendre la notion et le calcul de la fréquence d'occurrence d'une coupe minimale aux implicants premiers d'un système modélisé par un AdD non-cohérent.

Références

AICHE, 2010, "Guidelines for Chemical Process Quantitative Risk Analysis", Appendix E, Second Edition, AICHE, CCPS.

ARP4761A, 1996, "Guidelines and Methods for Conducting the Safety Assessment Process on Civil Airborne Systems and Equipment", Appendix G.

Barlow et Proschan, 1975, "Importance of System Components and Fault Tree Events", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 3, pp.153-173.

Bryant, 1986, "Graph-Based Algorithms for Boolean Functions Manipulation", *IEEE Trans. Computers*, vol. 35, n°8, pp.667-691

Chang, Amari et Kuo, 2004, "Computing System Failure Frequencies and Reliability Importance Measures Using OBDD", *IEEE Trans. Computers*, vol. 53, n°1, Jan. 2004.

Misra, 1992, "Reliability Analysis and Prediction (A Methodology Oriented Treatment)", *Fundamental Studies in engineering* 15, 889 pages, Elsevier Science Publishers BV, Amsterdam.

Pagès et Gondran, 1980, "Fiabilité des systèmes", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France-39, Eyrolles Editeur, Paris.

Rauzy, 1996, "A brief Introduction to Binary Decision Diagrams", vol. 30, n°8, pp. 1033-1051.

Schneeweiss, 1986, "The Failure Frequency of Systems with Dependent Components", *IEEE Trans. Reliability*, vol. 35, pp. 512-517, Dec.1986.

Schüller et al., 1997, "Methods for Determining and Processing Probabilities", Report (Red Book) CPR 12E, KEMA Nederland B.V., Second edition, The Hague.

Vesely et al., 1981, "Fault Tree Handbook", U.S. Nuclear Regulatory Commission, NUREG-0492.

Xing et Amari, 2015, "Binary Decision Diagrams and Extensions for System Reliability Analysis", scrivener Publishing-Wiley, Hobokin, U.S.A., 211 pages.

Mots-clés

Arbre de défaillance, coupe minimale, fréquence d'occurrence d'une coupe minimale, état de marche critique.