



Un Algorithme EM pour l'analyse de durée de vie des marquages routiers rétro-réfléchissants

Maxime Redondin, Nadège Faul, Laurent Bouillaut, Allou Samé, Dimitri Daucher

► To cite this version:

Maxime Redondin, Nadège Faul, Laurent Bouillaut, Allou Samé, Dimitri Daucher. Un Algorithme EM pour l'analyse de durée de vie des marquages routiers rétro-réfléchissants. Congrès Lambda Mu 21 “ Maîtrise des risques et transformation numérique : opportunités et menaces ”, Oct 2018, Reims, France. hal-02075028

HAL Id: hal-02075028

<https://hal.science/hal-02075028>

Submitted on 21 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un Algorithme EM pour l'analyse de durée de vie des marquages routiers rétro-réfléchissants

An EM Algorithm for a retroreflective road markings time life analysis

Maxime Redondin, Nadège Faul
Institut VEDECOM
77, rue des chantiers,
78000 Versailles
maxime.redondin@vedecom.fr
nadege.faul@vedecom.fr

Laurent Bouillaut, Allou Samè
Grettia (IFSTTAR)
Université Paris-Est,
77455 Marne-la-Vallée,
laurent.bouillaut@ifsttar.fr
allou.same@ifsttar.fr

Dimitri Daucher
Lepsis (IFSTTAR),
Université Paris-Est,
77455 Marne-la-Vallée,
dimitri.daucher@ifsttar.fr

Résumé

Les marquages routiers ont un rôle crucial dans la sécurité routière. C'est pour cela que les véhicules autonomes se dotent de capteurs capables de les lire. Pour une détection optimale des marquages, un plan de maintenance adapté est souhaitable. Une première analyse de Weibull, basée sur la méthode du maximum de vraisemblance, met en avant le problème de durées de vie censurées des marquages dû aux plans d'inspections actuels. Afin d'estimer les instants de défaillances, plusieurs alternatives basées sur un algorithme EM sont disponibles. Cet article propose d'adapter l'algorithme de Pradhan & Kundu dans le cadre des marquages routiers. Afin de contrôler l'impact des défaillances estimées sur les lois de Weibull produites, plusieurs tests d'adéquations classiques sont présentés. Une inspection semestrielle est finalement recommandée.

Summary

Road markings play a major role in road safety. This is the reason why autonomous car traffic are equipped with a camera reading road markings. Such option requires maintenance strategies guaranteeing markings' perceptibility. A first Weibull analysis was proposed to estimate the markings reliable distributions using the Maximum Likelihood. This approach shows an important censored data due to the current inspection plan. Several alternatives based on an EM Algorithm are currently done. This paper proposed to extend the Pradhan & Kundu EM algorithm in the road marking study. To fit Weibull distribution produced, six classic goodness-of-fit tests are presented. Finally, doing inspections twice a year is recommended

1. Introduction

La signalisation horizontale a un rôle crucial dans la sécurité routière. Par exemple, les lignes de marquages séparent la chaussée en voies de circulation. C'est pour cette raison que les véhicules autonomes se dotent de capteurs capables de lire la signalisation horizontale. Un consensus méthodologique consiste à équiper les V.A. de caméras à partir desquelles des algorithmes permettent de segmenter la chaussée en niveaux de gris : les éléments blancs sont des marquages, le reste est la chaussée. Afin de garantir une détection optimale des marquages, il est souhaitable que les gestionnaires d'infrastructure se dotent de plans de maintenance adaptés.

Les lignes de marquages hors agglomérations sont constituées de marquages rétro-réfléchissants. Ce type de marquage renvoie la lumière émise par les phares d'un véhicule vers son conducteur. Ce phénomène physique est mesurable en millicandela par mètre carré et par lux ($\text{mcd}/\text{m}^2/\text{lx}$).

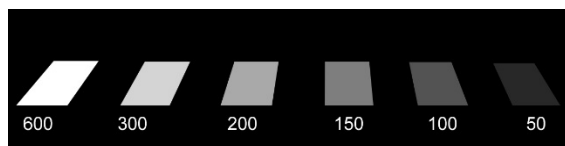


Figure 1. Visibilité de nuit en fonction du niveau de rétro-réflexion des marquages routiers

La figure 1 schématise la visibilité de nuit des marquages en fonction du niveau de rétro-réflexion. Un haut niveau indique un marquage blanc parfaitement visible. Ce niveau décroît dans le temps. Dans le meilleur des cas, le marquage devient gris (perte de peinture, salissure...) difficile à percevoir. La norme AFNOR 1436 demande un minimum de $150 \text{ mcd}/\text{m}^2/\text{lx}$ pour un marquage neuf

(AFNOR, 2009). En guise d'illustration dans cette étude, ce seuil est retenu pour la dégradation maximale.

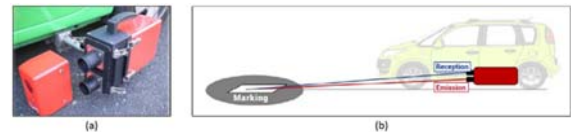


Figure 2. Présentation d'un Ecodyn : (a) Ecodyn-3, (b) acquisition de données (Vectra, 2018)

Les campagnes d'inspections des lignes de marquages sont réalisées par un véhicule traceur doté d'un rétro-réfléctomètre comme l'Ecodyn de Vectra (Fig. 2.a). Son fonctionnement est illustré sur la figure 2.b : l'appareil est embarqué sur le flanc du véhicule, il émet une lumière blanche sur le marquage, réceptionne la quantité rétro-réfléchie et établit la mesure en $\text{mcd}/\text{m}^2/\text{lx}$. Le pas d'inspection d'un Ecodyn est de 40 cm. Cependant, l'appareil retourne une mesure moyenne sur 100 m afin de filtrer la rétro-réflexion de la chaussée (très faible). D'après les règles de dimensionnement d'une ligne axiale, une mesure correspond à la rétro-réflexion moyenne de 7 à 23 marquages (Instruction interministérielle sur la signalisation routière, 2011). Pour simplifier, une mesure est généralement interprétée comme un unique marquage localisé par un point de repère (la borne kilométrique par exemple). Actuellement, les inspections sont au mieux planifiées mensuellement.

La littérature propose essentiellement des modèles de dégradation de la rétro-réflexion basés sur des régressions linéaires ou exponentielles en fonction de l'âge. Par exemple, (Lu, 1995) propose une relation exponentielle optimisée pour les régions froides comme l'Alaska. (Abboud & Bowman, 2002) proposent une relation exponentielle fonction de l'âge et du trafic, (Sitzabee et al, 2012) une relation multilinéaire incluant l'âge, la rétro-réflexion minimale, le trafic et est optimisée par couleur et ligne de marquages. Le modèle de maintenance sous-

jaçant est une maintenance préventive systématique planifiée à horizon d'un seuil de rétro-réflexion minimal.

(Sathyanarayanan et al, 2008) sont les premiers à notre connaissance à considérer les marquages routiers dans un contexte fiabiliste. Une analyse de Weibull paramétrée par la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) est proposée. Un marquage est dit défaillant dès l'instant où son niveau de rétro-réflexion est insuffisant.

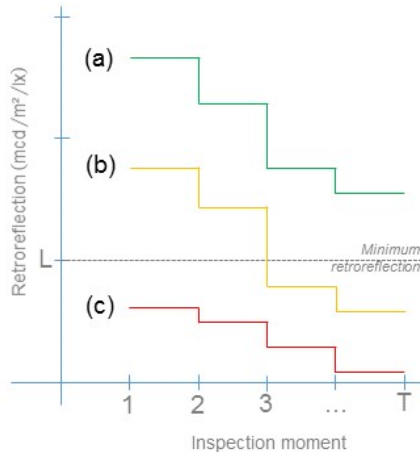


Figure 3. Présentation des censures observées : (a) Droite, (b) Intervalle, (c) Gauche

Cette approche fait apparaître la problématique des durées de vie censurées directement liées à la planification des inspections. Trois censures sont retenues et illustrées par la figure 3 : une censure à droite est un marquage fiable sur l'ensemble des inspections réalisées dans son cycle de vie (Fig 3.a), une censure par intervalle est un marquage défaillant entre deux inspections (Fig 3.b) et une censure à gauche correspond à un marquage défaillant dès la première inspection (Fig 3.c).

La méthode du MV appliquée à une loi de Weibull est connue pour sa difficulté de mise en œuvre et est optimisée en général par l'algorithme de Newton-Raphson (Bain & Englehardt, 1975). Retenue par (Sathyanarayanan et al, 2008), cette approche est adaptable à un contexte de fortes censures au prix d'une complexité calculatoire. Cependant, (Pradhan & Kundu, 2014) ont montré qu'elle n'est pas garantie : Newton-Raphson peut diverger.

Ces dernières années, plusieurs alternatives basées sur un algorithme EM sont apparues. Cette approche n'est pas nouvelle : (Chaveau, 1995) proposa un premier algorithme EM pour réaliser des mélanges gaussiens, (Bordes & Chaveau, 2016) ont récemment proposé un algorithme stochastique paramétrique et semi-paramétrique pour la modélisation de modèles mixtes dans un contexte fiabiliste et de censures à droite et (Elmahdy, 2014) en propose un pour des mélanges de Weibull non-censurés.

Dans le contexte de durée de vie censurée, un consensus est l'utilisation d'un algorithme EM en tant qu'estimateur des censures. La loi de Weibull est toujours paramétrée par la méthode du MV adaptée à ce contexte. (Balakrishnan & Mitra, 2012) se concentrent ainsi sur la Weibull à valeurs extrêmes censurée à gauche ou à droite, (Bagheri et al, 2016) proposent différents algorithmes adaptés à des lois de Weibull généralisées ou (Kundu & Kumar Drey, 2009) pour la loi Marshall-Olkin. (Pradhan & Kundu, 2014) ont proposé un algorithme EM adapté à une loi de Weibull censurée par intervalles. Au prix d'une extension aux censures à gauche et à droite, ce dernier algorithme est retenu pour le cas des marquages routiers.

Un aspect peu abordé dans les algorithmes cités est la justification de l'approche de Weibull. Elmahdy contrôle le mélange de Weibull produit par son algorithme EM par le

test d'Akaike (Elmahdy, 2014). D'autre part, (Krit et al, 2014) ont réalisé un état de l'art des tests d'adéquation courants. Un seul test adapté à des durées de vie censurées à gauche et à droite est proposé mais il rejette l'hypothèse classique d'une distribution indépendante et identiquement distribuée des dates de défaillances. L'algorithme EM en tant qu'estimateur de censures permet de contourner ce problème mais il reste à comprendre le comportement des tests classiques dans ce contexte.

Cette communication propose dans un premier temps d'adapter l'algorithme EM de (Pradhan & Kundu, 2014) aux marquages routiers rétro-réfléchissants. Dans un second temps, six tests d'adéquations classiques sont présentés. Au travers de l'étude de la ligne axiale de la Route Nationale 4 (RN4) posée en mars 2008 et remplacée en mars 2012, l'algorithme EM proposé est illustré et le comportement des différents tests est discuté.

2. Algorithme EM et maximum de vraisemblance

2.1 Formalisme des durées de vie censurées

L'algorithme EM proposé par (Pradhan & Kundu, 2014) est optimisé pour une variable aléatoire W suivant une loi de Weibull $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ définie par la fonction de densité suivante :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad \{1\}$$

Sous ce formalisme, la fonction de fiabilité $R(t)$ est définie par $\{2\}$ et la fonction de répartition par $F(t) = 1 - R(t)$.

$$\forall t \geq 0, R(t) = e^{-\alpha t^\beta} \quad \{2\}$$

Classiquement, soit $n > 1$ durées de vie non-censurées $W = (t_1, \dots, t_n)$ supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) par une loi de Weibull $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ à paramétrer. La méthode du maximum de vraisemblance propose de sélectionner le maximum de la fonction de vraisemblance définie par :

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} \quad \{3\}$$

Soit une ligne de marquage composée de $n > 1$ points de mesure dans un cycle de maintenance défini. Au cours de ce cycle, un plan d'inspection (idéalement périodique) est appliqué. Pour chaque marquage i , t_i représente son âge au moment de la première inspection qui observe sa défaillance. La rétro-réflexion étant décroissante dans le temps, cette défaillance est définitive. Par conséquent, la durée de vie exacte du marquage est censurée et t_i peut-être interprété comme une première estimation. Si la censure est à droite, alors t_i correspond à l'âge du marquage lors de la dernière inspection réalisée sur le cycle. Pour distinguer les censures, chaque instant est associé à son indicateur de censure δ_i défini par :

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } t_i \text{ est une défaillance exacte} \\ 1 & \text{si } t_i \text{ est censuré à gauche} \\ 2 & \text{si } t_i \text{ est censuré par intervalle} \\ 3 & \text{si } t_i \text{ est censuré à droite} \end{cases} \quad \{4\}$$

Le vecteur des défaillances observées $((t_1, \delta_1), \dots, (t_n, \delta_n))$ est fractionné en fonction de l'indicateur $\{5-8\}$: $\mathcal{T}$ regroupe les durées de vie non-censurées et $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ regroupent respectivement les censures à gauche, par intervalle et à droite. La distinction des censures présente plusieurs intérêts dans le contexte des marquages routiers : une forte censure à gauche peut indiquer un défaut de pose, l'intervalle de censure peut servir d'indicateur pour rechercher des causes secondaires à la dégradation (accidents, passage d'un chasse-neige)... Si t_i est censuré par intervalle, alors son intervalle de censure est noté $[t_i, r_i]$

où $r_i = t_i$ et l_i bien définis par la stratégie d'inspection. De plus, les instants de défaillances sont supposés i.i.d. En effet, un marquage défaillant n'engendre pas de marquages défaillants. Au plus, une source commune de stress peut exister.

$$\mathcal{T} = \{t \in ((t_1, \delta_1), \dots, (t_n, \delta_n)) / \delta_i = 0\} \quad \{5\}$$

$$\mathcal{X} = \{x \in ((t_1, \delta_1), \dots, (t_n, \delta_n)) / \delta_i = 1\} \quad \{6\}$$

$$\mathcal{Y} = \{y \in ((t_1, \delta_1), \dots, (t_n, \delta_n)) / \delta_i = 2\} \quad \{7\}$$

$$\mathcal{Z} = \{z \in ((t_1, \delta_1), \dots, (t_n, \delta_n)) / \delta_i = 3\} \quad \{8\}$$

A ce stade, comme le propose (Sathyanarayanan et al, 2008), la fonction de vraisemblance peut être complexifiée {9} : les censures à gauche sont modélisées par la fonction de répartition, les censures à droite par la fonction de fiabilité et les censures par intervalle par une différence entre fonctions de fiabilité.

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{t \in \mathcal{T}} f(t) \prod_{x \in \mathcal{X}} F(x) \prod_{y \in \mathcal{Y}} R(l) - R(r) \prod_{z \in \mathcal{Z}} R(z) \quad \{9\}$$

L'approche proposée ici dispense de cette complexité. Un algorithme EM comporte deux étapes. L'étape d'Espérance, dite E, consiste à traiter les données censurées comme des données manquantes à estimer et l'étape de Maximisation, dite M, correspond à un MV d'une loi de Weibull conditionnée par les données non-censurées et complétées. L'algorithme est itérativement répété jusqu'à la convergence d'une loi de Weibull.

La totalité de l'algorithme est implémentée sous Matlab.

2.2 Présentation de l'algorithme

La loi de Weibull initiale $\mathcal{W}(\alpha_0, \beta_0)$ que nous avons choisie est celle proposée par le MV ignorant les censures (celles à droites sont exclues). Supposons que l'algorithme EM se situe à l'itération $k \geq 1$ et propose à ce stade une loi $\mathcal{W}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$. Cette communication va présenter l'itération suivante.

$$L_C(\alpha_k, \beta_k) = E[L(\alpha_k, \beta_k) | \mathcal{T}] \quad \{10\}$$

L'étape E consiste à compléter les données censurées via la fonction de vraisemblance complétée correspondant à l'espérance de la fonction de vraisemblance conditionnée par les données non-censurées {10}. Trois estimateurs sont proposés, optimisés pour chaque cas de censure : {11} estime les censures à gauche, {13} estime les censures à droite et {12} est l'estimateur proposé par (Pradhan & Kundu, 2014) pour les censures par intervalle.

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \hat{x} = E[W / W < x] = \frac{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}}{1 - e^{-\alpha_{k-1} x^{\beta_{k-1}}}} \int_0^x t^{\beta_{k-1}-1} e^{-\alpha_{k-1} t^{\beta_{k-1}}} dt \quad \{11\}$$

$$\forall y \in \mathcal{Y}, \quad \hat{y} = E[W / l < W < r] = \frac{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}}{e^{-\alpha_{k-1} l^{\beta_{k-1}}} - e^{-\alpha_{k-1} r^{\beta_{k-1}}}} \int_l^r t^{\beta_{k-1}-1} e^{-\alpha_{k-1} t^{\beta_{k-1}}} dt \quad \{12\}$$

$$\forall z \in \mathcal{Z}, \quad \hat{z} = E[W / W > z] = \alpha_{k-1} \beta_{k-1} e^{-\alpha_{k-1} z^{\beta_{k-1}}} \int_z^{+\infty} t^{\beta_{k-1}-1} e^{-\alpha_{k-1} t^{\beta_{k-1}}} dt \quad \{13\}$$

Les estimations réalisées, la fonction de vraisemblance complétée est pleinement définie par {14}. Elle peut être vue comme la fonction de vraisemblance classique {3} prise aux points $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}$ et a donc l'avantage d'être bien plus facile à étudier que {9}.

$$L_C(\alpha_k, \beta_k) = \prod_{t \in \mathcal{T}} f(t) \prod_{x \in \mathcal{X}} f(\hat{x}) \prod_{y \in \mathcal{Y}} f(\hat{y}) \prod_{z \in \mathcal{Z}} f(\hat{z}) \quad \{14\}$$

L'étape M calcule le point maximal de $L_C(\alpha_k, \beta_k)$. Sous le formalisme du MV, le couple (α_k, β_k) correspond aux zéros des dérivées partielles du logarithme de $L_C(\alpha_k, \beta_k)$ {15-16}.

$$\frac{d \ln L_C}{d \alpha_k} = \frac{n}{\alpha_k} - \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta_k} + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta_k} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta_k} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta_k} \right] \quad \{15\}$$

$$\frac{d \ln L_C}{d \beta_k} = \frac{n}{\beta_k} + \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ln t + \sum_{x \in \mathcal{X}} \ln \hat{x} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \ln \hat{y} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \ln \hat{z} \right] - \alpha_k \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta_k} \ln t + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta_k} \ln \hat{x} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta_k} \ln \hat{y} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta_k} \ln \hat{z} \right] \quad \{16\}$$

(Pradhan & Kundu, 2014) ont observé que l'équation $\frac{d \ln L_C}{d \alpha_k} = 0$ propose une solution de α_k dépendante de β_k et facile à implémenter. La version étendue de cet estimateur est donnée par {17}.

$$\alpha_k = \frac{n}{\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta_k} + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta_k} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta_k} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta_k}} \quad \{17\}$$

Le paramètre β_k est quant à lui donné par l'équation $\frac{d \ln L_C}{d \beta_k} = 0$. La racine est estimée par la méthode du point fixe.

Dans un premier temps, la solution α_k appliquée à $\frac{d \ln L_C}{d \beta_k}$ donne une fonction g vérifiant $\frac{d \ln L_C}{d \beta_k} = g(\beta_k) - \beta_k$ {18}.

$$g(\beta_k) = \frac{\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta_k} \ln t + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta_k} \ln \hat{x} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta_k} \ln \hat{y} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta_k} \ln \hat{z}}{\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta_k} + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta_k} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta_k} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta_k}} - \frac{\sum_{t \in \mathcal{T}} \ln t + \sum_{x \in \mathcal{X}} \ln \hat{x} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \ln \hat{y} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \ln \hat{z}}{n} \quad \{18\}$$

Le point fixe de g est défini comme le point β_k tel que $g(\beta_k) = \beta_k$. Il est calculé comme le point de convergence de la suite {19} initiée par la précédente estimation β_{k-1} .

$$(b_n)_{n \geq 0} = \begin{cases} b_0 = \beta_{k-1} \\ b_n = g(b_{n-1}) \end{cases} \quad \{19\}$$

Dans la pratique, le critère $|b_n - b_{n-1}| < 10^{-4}$ stoppe la suite. β_k estimé, α_k est directement fourni par {17}. Finalement à l'itération k , l'algorithme EM propose la loi $\mathcal{W}(\alpha_k, \beta_k)$. Reste à définir la convergence de l'algorithme.

$$(\beta_k)_{k \geq 0} = \begin{cases} \beta_0 > 0 \\ \beta_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} b_0 = \beta_{k-1} \\ b_n = g(b_{n-1}) \end{cases} \end{cases} \quad \{20\}$$

Sous le formalisme de l'algorithme à une itération k donné, la suite {20} itérative $(\beta_k)_{k \geq 0}$ est bien définie. La convergence de l'algorithme EM peut finalement être vue comme la convergence de $(\beta_k)_{k \geq 0}$ complétée par la solution α_k {21}.

$$\begin{cases} \beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k \\ \alpha = \frac{n}{\sum_{t \in \mathcal{T}} t^{\beta} + \sum_{x \in \mathcal{X}} \hat{x}^{\beta} + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \hat{y}^{\beta} + \sum_{z \in \mathcal{Z}} \hat{z}^{\beta}} \end{cases} \quad \{21\}$$

Dans la pratique, l'algorithme EM est stoppé par le critère $|\beta_k - \beta_{k-1}| < 10^{-4}$. La loi estimée, le changement de variable $\alpha \leftarrow \sqrt[{\beta}]{1/\alpha}$ donne la fonction de densité classique d'une loi de Weibull {22}.

{29}

$$\forall t \geq 0, f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad \{22\}$$

Finalement, l'algorithme produit une loi de Weibull paramétrée par la méthode du maximum de vraisemblance et estime les données censurées. L'algorithme EM est entièrement implémenté sur Matlab. Cependant, pour un jeu de durées de vie donné, le choix d'une distribution de Weibull n'est pas justifié à ce stade. Le principal biais est l'influence de l'estimation des censures, en particulier lorsque le nombre d'inspections est limité. Son impact est analysé ici au travers de tests d'adéquations classiques.

3. Tests d'adéquations classiques retenus

L'algorithme EM estime chaque instant censuré. De ce fait, les instants de défaillances exacts et estimés sont regroupés en une seule base ordonnée δ directement exploitable par les tests d'adéquations classiques retenus :

$$\delta = \mathcal{T} \cup \{x/x \in \mathcal{X}\} \cup \{y/y \in \mathcal{Y}\} \cup \{z/z \in \mathcal{Z}\} = \{s_1 \leq \dots \leq s_n\} \quad \{23\}$$

La totalité des tests sont implémentés sous Matlab.

3.1 Tests graphiques

Le test graphique classique, appelé également « papier Weibull », correspond au critère R^2 de la régression linéaire du jeu de données {24}. R^2 doit être proche de 1.

$$\left\{ \left(\ln s_i, \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \right) / i = 1:n \right\} \quad \{24\}$$

Le test d'Evans, Johnson & Green (Evans et al, 1980) est une variante plus sévère du R^2 {25} avec $\overline{\ln s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln s_i$, $M_i = \frac{1}{\beta} \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{i-0.3175}{n+0.365} \right) \right]$ et $\overline{M}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i$. R_{EJG}^2 doit être proche de 1.

$$R_{EJG}^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (\ln s_i - \overline{\ln s}) M_i \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^n (\ln s_i - \overline{\ln s})^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (M_i - \overline{M}_n)^2 \right]} \quad \{25\}$$

3.2 Tests sur la fonction de répartition

Les tests de Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darling sont tous deux basés sur les différences entre la fonction de répartition empirique G_n {26} et la fonction de répartition théorique G {27} proposée par l'algorithme EM du jeu de données $\ln \delta$. L'hypothèse nulle, distribution par la loi $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$, est rejetée si cette différence est trop grande.

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1_{\{\ln s_i \leq x\}} \right] \quad \{26\}$$

$$G(x) = 1 - e^{-\beta(x+\alpha)} \quad \{27\}$$

La statistique de Kolmogorov-Smirnov (D'Agostino & Stephens, 1986) est définie comme la différence absolue maximale entre les fonctions de répartition {26-27} :

$$KS = \sqrt{n} \sup_{y \in \mathcal{R}} |G_n(y) - G(y)| \quad \{28\}$$

$$= \sqrt{n} \max \left[\max \left\{ \frac{i}{n} - G(\ln s_i) / i = 1:n \right\}; \max \left\{ G(\ln s_i) - \frac{i-1}{n} / i = 1:n \right\} \right]$$

La statistique de Anderson-Darling (D'Agostino & Stephens, 1986) est une combinaison entre la différence et le ratio des deux fonctions de répartition {26-27} et est définie par :

$$AD = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[G_n(y) - G(y)]^2}{G(y)(1-G(y))} dG(y)$$

$$= -n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1-2n) \ln(1-G(\ln s_i)) - (2i-1) \ln(G(\ln s_i))$$

3.3 Tests sur l'espace normalisé

Cette famille de tests est basée sur l'espace normalisé défini par :

$$\forall i = 1:n-1, E_i = \frac{\ln s_{i+1} - \ln s_i}{\beta(\ln s_{i+1} - \ln s_i)} \quad \{30\}$$

Adapté à la loi $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$, le test de Mann, Scheuer & Fertig (Mann et al., 1973) vérifie si le jeu $(\beta E_i)_{i=1:n-1}$ est i.i.d par la loi exponentielle de paramètre α . La statistique est définie par {31}, où $[x]$ est la partie entière de x , et doit être ni trop petite, ni trop grande.

$$MSF = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{[x+1]} E_i}{\sum_{i=1}^{n-1} E_i} \quad \{31\}$$

Le test de (Tiku & Singh, 1981) rejette l'hypothèse que δ est distribué par la loi $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ s'il est trop petit ou trop grand.

$$TS = \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-1-i) E_i}{(n-2) \sum_{i=1}^{n-1} E_i} \quad \{32\}$$

4. Etude de cas : la ligne axiale de la RN4

4.1 Présentation de la RN4

La Route Nationale 4 (RN4) relie Paris (Porte de Bercy) et Strasbourg (Pont de l'Europe). Cet article se concentre sur la ligne axiale reliant Courgivaux et Vauclerc dans le département de la Marne (environ 101 km). Depuis 2007, cette zone est entretenue par la DIR Est et les lignes de marquages sont inspectées une fois par an en septembre en collaboration avec le CEREMA Est. La stratégie de maintenance actuelle n'est pas formalisée.

Une précédente étude (Redondin et al, 2017) montre que la Classification Ascendante Hiérarchique (CAH) du suivi de la rétro-réflexion (de cette section de route) est en mesure de regrouper les marquages qui ont tendance à suivre un mode de dégradation descriptible dans le temps. Le cycle de vie étudié ici correspond aux marquages posés en mars 2008 et remplacés en mars 2012 dans les alentours des villes de Courgivaux, Sommesous et Vitry-le-François. Ce cycle se distingue par sa longueur (4 ans contre habituellement 2 ou 3) et l'apparition des trois censures.

Le rétro-réflexomètre choisi est un Ecodyn de Vectra. Sur le cycle 2008-2012, l'Ecodyn identifie 73 points de mesures localisés par un point de repère et sont interprétés comme des marquages (pour simplifier). Le même produit de marquage est supposé posé depuis 2007.

Entre mars 2008 et 2012, quatre campagnes d'inspections ont été réalisées à horizon 6, 18, 30 et 42 mois. Soit $RL_t(i) \in \mathbb{N}^*$ le niveau de rétro-réflexion du marquage i observé à l'inspection t et τ le premier instant observé de défaillance de chaque marquage {34} où t_i correspond au premier instant de défaillance observé du marquage i .

$$\tau = \min\{t_i \in \{6, 18, 30, 42\} / RL_t(i) \leq 150, i = 1:73\} \quad \{34\}$$

Si $t_i = \emptyset$, alors le marquage est censuré à droite et provisoirement $t_i = 42+$. Finalement, l'indicateur de censure adapté est donné par {35}.

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i = 6 \\ 2 & \text{si } t_i \in \{18, 30, 42\} \\ 3 & \text{si } t_i = 42+ \end{cases} \quad (35)$$

Certain auteurs comme (Sathyanarayanan et al, 2008) supposent que si $RL_i(t) = 150$, alors le marquage i est défaillant depuis l'inspection t . Cette hypothèse est ici réfutée car les rétro-réflexomètres comme Ecodyn ne sont pas en mesure de garantir une telle précision. Finalement, cinq durées de vie censurées sont observables : (6,1), ([6,18], 2), ([18,30], 2), ([30,42], 2) et (42,3). Un suivi de la rétro-réflexion est proposé dans un premier temps avant l'étude de l'algorithme EM.

4.2 Analyse de Weibull du cycle de vie 2008-2012

La figure 4 présente le suivi de la rétro-réflexion le la ligne axiale posée en mars 2008 et remplacée en mars 2012 en fonction des quatre campagnes d'inspections. Le suivi donne plusieurs observations : l'inspection à 6 mois présente deux marquages défaillants, un groupe de marquage reste suffisamment rétro-réfléchissant à 42 mois et la plus importante observation de défaillance a lieu entre 18 et 30 mois et, plus généralement, la majorité des défaillances sont censurées par intervalle.

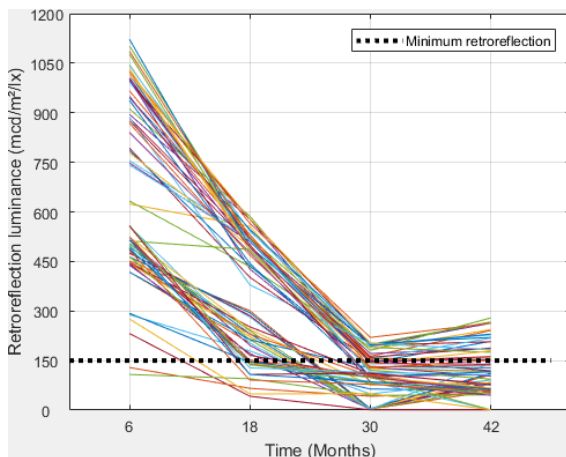


Figure 4 : Rétro-réflexion de la ligne axiale posée en mars 2008 et remplacée en mars 2012

Après 12 itérations, l'algorithme EM converge vers la loi $\mathcal{W}(31.65, 2.20)$. La table 1 synthétise l'analyse de durée de vie des marquages de la ligne axiale. Les deux premières colonnes présentent les effectifs de chaque censure observée et les deux dernières indiquent les estimations proposées par l'algorithme EM.

Défaillances observées	Effectif (Fréquence)	Défaillances estimées $\mathcal{W}(31.65, 2.20)$	
(6,1)	2 (3%)	4.12	Juillet 2008
([6,18], 2)	13 (18%)	12.94	Fin Mars 2009
([18,30], 2)	39 (53%)	24.01	Mars 2010
([30,42], 2)	2 (3%)	35.44	Février 2011
(42,3)	17 (23%)	50.41	Mai 2012

Table 1 : Analyse de Weibull du cycle de maintenance 2008-2012

Les observations réalisées sur la figure 4 sont confirmées. L'analyse de Weibull estime les deux censures à gauche à 4.12 mois (juillet 2008), les deux principales censures par intervalles sont estimées à horizon 12 et 24 mois (mars 2009 et 2010) et la censure à droite est prédite à 50.41 mois (mai 2012). Finalement, le remplacement complet réalisé en mars 2012 est justifié.

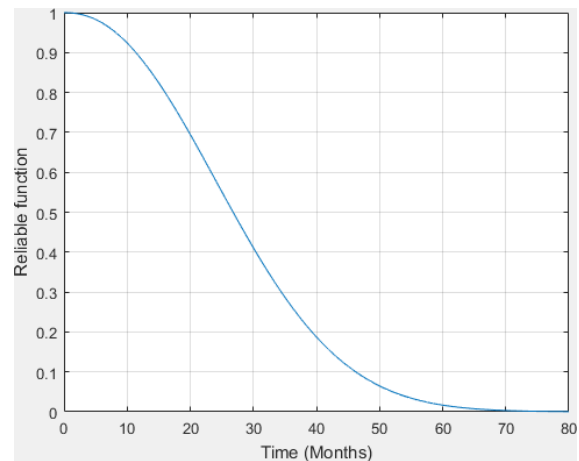


Figure 5 : Fonction de fiabilité de la loi $\mathcal{W}(31.65, 2.20)$.

La fonction de fiabilité associée à la loi $\mathcal{W}(31.65, 2.20)$ est présentée par la figure 5. La fiabilité est de 1 les quatre premiers mois, égale à 50% à horizon 27 mois et au-delà de 45 mois, la fiabilité des marquages est inférieure à 10%. Finalement, la fonction est cohérente par rapport aux données de survie disponibles. Reste l'analyse des tests d'adéquation.

4.3 Analyse des tests d'adéquations

Test	Graphique		Fonction de répartition		Espace normalisé	
	R ²	R ² _{EJG}	KS	AD	MSF	TS
Valeur	0.97	0.77	16.5	10.6	0.30	1.35

Table 2: Synthèse des tests d'adéquations

La table 2 présente les valeurs statistiques des six tests d'adéquations présentés dans la section 3. Au vu des valeurs tests, les tests graphiques sont les plus favorables à l'hypothèse d'une distribution de Weibull. Cependant, chaque test présente des difficultés de mise en œuvre.

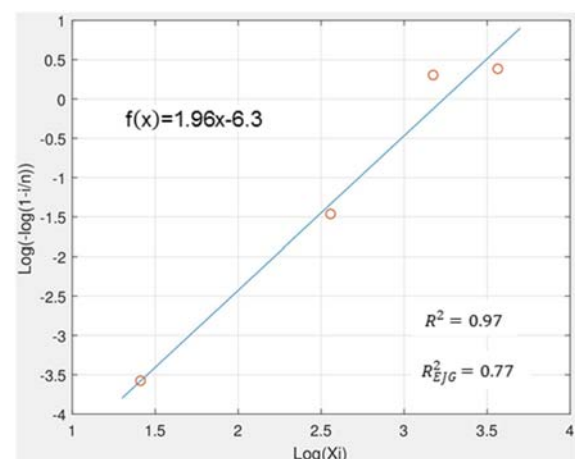


Figure 6: Papier Weibull

La figure 6 présente la régression linéaire de l'ensemble {24}. Elle est réalisée par la fonction $f(x) = 1.96x - 6.3$. Les tests $R^2 = 0.97$ et $R^2_{EJG} = 0.77$ ne réfutent pas l'hypothèse d'une distribution par la loi de Weibull. La régression linéaire relie bien les points. Cependant, la stratégie d'inspection annuelle réduit mécaniquement la proportion de points pour modéliser la régression. Cette observation explique le très haut niveau du test R^2 .

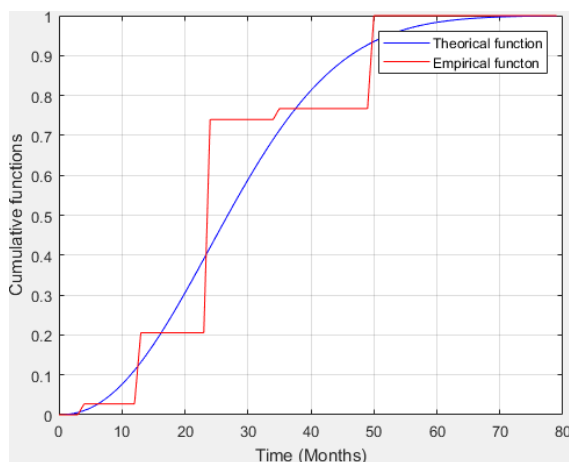


Figure 7. Comparaison des fonctions de répartition

Le test de Kolmogorov Smirnov ($KS=16.5$) et Anderson-Darling ($AD=10.6$) rejettent l'hypothèse d'une distribution de Weibull. La figure 7 présente les fonctions de répartition théorique et empirique. La fonction empirique réalise un important saut à 24 mois (0.21 à 0.74) que la fonction théorique ne parvient pas à prendre complètement en compte. Cet instant correspond au plus important cas de censures par intervalles estimés à 24 mois mais détectées à l'inspection à 30 mois (septembre 2010). Malgré la transformation logarithmique, ce saut biaise mécaniquement les tests expliquant ainsi le rejet de l'hypothèse nulle. Une inspection à 24 mois aurait pu réduire d'une part l'écart entre les fonctions et la quantité de nouvelles défaillances à 30 mois d'autre part.

Le test de Mann-Sheuer-Frietig rejette également l'hypothèse nulle ($MSF=0.30$) mais le test de Tiku & Singh ne la rejette pas bien qu'un peu faible ($TS=1.35$). Cette différence s'explique par la construction des tests.

Le test MSF peut être vu comme un ratio entre la différence temporelle moyenne des dernières défaillances sur la différence temporelle moyenne de l'ensemble des défaillances. Cette construction pose deux problèmes en dans le cas de données particulièrement censurées. Premièrement, même si l'algorithme EM attribue la date de défaillance la plus cohérente de chaque censure (vis-à-vis de la méthode MV), une seule estimation peut être attribuée à un grand nombre de censure (53% des censures sont estimées à 24 mois par exemple). Par conséquent l'écart temporel moyen entre les défaillances tend vers 0. La table 1 montre que 74% des défaillances ont lieu avant 24 mois (dont 53% à cette date) qui sont très largement ignorées par le test MSF. Le test est finalement construit principalement autour des défaillances observées 42 mois et les censures à droites.

Le test TS étant également basé sur les différences temporelles entre les défaillances, il partage le premier défaut du test MSF (expliquant ainsi la faible valeur du test). Cependant, le test prend en compte l'ensemble des défaillances valorisant ainsi chaque inspection.

Finalement, les tests graphiques sont les plus adaptés à l'entretien des marquages routiers inspectés annuellement. La comparaison entre les fonctions de répartition montre qu'une inspection semestrielle serait statistiquement plus pertinente. Les tests basés sur l'espace normalisé sont par contre très instables en présence de durées de vie censurées couplées à un nombre limité d'inspection.

5. Conclusion

La littérature présente une première analyse de Weibull des marquages routiers basée sur la méthode du MV adaptée à une stratégie d'inspection mensuelle proposée par (Sathyanarayanan et al, 2008). Dans le cas d'une loi de Weibull, la méthode du MV est optimisée par une méthode numérique : Newton-Raphson en général. Restreint à des durées de vie censurées par intervalle, (Pradhan & Kundu, 2014) ont montré que cette approche n'est pas garantie et ont proposé un algorithme EM en guise d'alternative.

Appliquée dans le cas des marquages routiers, l'algorithme EM de Pradhan & Kundu étendu aux censures à gauche et à droite est une alternative crédible à la méthode MV. Contrairement à cette dernière, chaque censure est estimée à l'étape E. L'étape M coïncidant avec la méthode du MV est ici optimisée par la méthode du point fixe en guise d'alternative à Newton-Raphson.

L'approche proposée ici n'est pas limitée aux marquages routiers. Par exemple, Pradhan & Kundu ont présenté une étude de survie face au cancer du sein. L'algorithme EM présenté est entièrement implémenté sous Matlab et compile dès l'instant où les notions de défaillances et de censures sont claires. Pour les marquages, la défaillance correspond à l'instant où ils sont insuffisamment rétro-réfléchissants et les censures sont entièrement définies par la stratégie d'inspections.

Une question ouverte est la validation de l'algorithme EM notamment pour vérifier la présence d'un biais dans l'estimation des censures. Cette communication se base sur des données réelles avec une impossibilité d'augmenter les échantillons par une simulation. La méthode du MV a l'avantage de proposer une paramétrisation asymptotiquement sans biais. La censure des durées de vie complique la modélisation, notamment pour évaluer un premier plan de maintenance. Des estimateurs conditionnés par les plus fiables informations disponibles orientent mécaniquement l'estimation de censures. Cependant, la cohérence des estimations et de la fonction de fiabilité produites par rapport au suivi de la rétro-réflexion sont démontrées et confortent le choix d'un algorithme EM. Une solution à l'étude consiste à comparer l'actuelle algorithme EM avec la classique méthode MV et des méthodes numériques alternatives (Newton-Raphson, gradient...) pour résoudre l'étape M.

La ligne axiale de la RN4 posée en mars 2008 et remplacée en mars 2012 illustre l'algorithme proposé. En seulement 12 itérations, une loi de Weibull crédible (par rapport aux données disponible) est proposée. A partir de cette loi, il est envisagé de concevoir un plan de maintenance adapté. Cependant, l'algorithme EM ne justifie pas le choix d'une analyse de Weibull. Pour répondre à cette problématique, ce papier présente six tests d'adéquations classiques de nature différentes : deux graphiques, deux comparant les fonctions de répartition théorique et empirique et deux basés sur l'espace normalisé.

Les premiers sont finalement les plus adaptés dans le contexte des marquages inspectés annuellement. Les tests sur les fonctions de répartition rejettent ici l'hypothèse d'une distribution de Weibull. Cependant, l'augmentation brutale de marquages défaillants estimés à 24 mois (mais observés à 30) provoque mécaniquement une importante différence entre les fonctions de répartition. Ce constat tend à montrer qu'une inspection semestrielle serait plus adaptée. Les derniers tests sont les moins adaptées car la construction de l'espace normalisé est principalement basée sur la différence temporelle entre les défaillances qui tend vers 0 en raison de la redondance des cas de

censures couplée à une inspection annuelle. Idéalement, un test basé directement sur des durées de vie censuré est souhaitable mais l'état de l'art récent de Krit et al (Krit et al, 2014) est pessimiste sur ce point.

L'élaboration d'un plan de maintenance adapté aux marquages routiers constitue la dernière grande discussion des travaux de thèse de l'auteur. Outre une optimisation des coûts de remplacements, ce modèle inclura une optimisation des coûts d'inspection. Une étude économique est prévue afin d'appuyer le choix d'un plan d'inspection semestrielle et non annuelle serait plus adapté afin de réduire les effets de censures. La littérature étant largement basée sur des inspections mensuelles, cette alternative sera également étudiée.

Finalement, l'algorithme EM contrôlé par les tests d'adéquations graphique est une alternative crédible à la méthode du MV pour l'analyse de durées des marquages routiers. La question d'un modèle de Weibull mixte reste ouverte car une extension de l'algorithme EM de Elmahdy (Elmahdy, 2014) est actuellement à l'étude.

6. Remerciements

VEDECOM et IFSTTAR remercient le CEREMA Est et la DIR Est pour l'ensemble des données d'inspections de la RN4 réalisées entre 2007 et 2016.

7. Références

Abboud N., Bowman B. (2002), Cost and longevity-based scheduling of paint and thermoplastic striping, 81st Annual Meeting of Transportation Research Board (Washington D.C.).

AFNOR (2009), NF EN 1436 + A1: Road Marking materials – road marking performance for road users, AFNOR Editions

Bain, L. & M. Englehardt (1975). Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Balakrishnan N., Mitra D. (2012), Left truncated and right censored Weibull data and likelihood inference with an illustration, p 4011-4025, Communications in Statistics and data analysis 56.

Bagheri S.F., Bahrami Samani E., Ganjali M. (2016), The generalized modified Weibull power series distribution: theory and applications, p 136-160, Communications in Statistics and data analysis 94.

Bordes L., Chaveau D. (2016), Stochastic EM algorithms for parametric and semi-parametric mixture models for right-censored lifetime data, p 1513–1538, Comput Stat 31.

Chaveau D. (1995), A stochastic EM algorithm for mixtures with censored data, p 1-25, journal of statistical planning and inference.

D'Agostino R.B. and Stephens M.A. (1986), Goodness-of-fit techniques, Marcel Dekker.

Elmahdy E.E. (2015), A new approach for Weibull modeling for reliability life data analysis, p 708-720, Applied Mathematics and computation 250.

Instruction interministérielle sur la signalisation routière – 7^{ème} partie : Marques sur chaussée (2011), Ministère de la Transition écologique et solidaire, Journal Officiel du 11 décembre 2011.

Krit M., Remy E., Gaudoin O., (2014), Goodness-of-fit tests for the Weibull distribution: complete and censored data, 19^e Congrès de Maîtrise des Risques et Sûreté de Fonctionnement (Dijon, France)

Evans, J.W., Johnson R.A. & Green D.W. (1989), Two and three parameter Weibull goodness-of-fit tests, Research paper FPL-RP-493, U.S. Forest Products Laboratory, Madison, WI.

Kundu D., Kumar Drey A. (2009), Estimating the parameters of the Marshall-Olkin bivariate Weibull distribution by EM Algorithm, p 956-065, Computational Statistics and Data Analysis 53.

Lu J. (1995), Performance of traffic markings in cold regions, Report No. INE/TRC 95.03, Transportation Research Center, (University of Alaska Fairbanks).

Mann N.R., Scheuer E.M. and Fertig K.W. (1973), A new goodness-of-fit test for the two parameter Weibull or extreme-value distribution, p 383-400, Communications in Statistics 2.

Pradhan B., Kundu D. (2014), Analysis of interval-censored data with Weibull lifetime distribution, p 120–139, Sankhya B: The Indian Journal of Statistics 76 (1)

Redondin M., Bouillaut L., Daucher D., Faul N. (2017), Temporal clustering of retroreflective marking, European Safety and Reliability Conference 2017 (Portoroz, Slovenia).

Sitzabee W., Hummer J., Rasdorf W. (2009), Pavement marking degradation modeling and analysis, p 190–199, Journal of infrastructure systems 15(3).

Sathyanarayanan S., Shankar V., Donnell E.T. (2008), Pavement marking retroreflectivity inspection data : A Weibull analysis, p 63–70, Journal of the Transportation Research Board.

Tiku M.L., Singh M. (1981), Testing the two-parameter Weibull distribution, p 907-918, Communications in Statistics 10.

Vectra (2018), Signing visibility: VECTRA France, <http://vectrafrance.com/materials-and-solutions/road-surface-testing/ecodyn-mlpcR-signing-visibility?L=6>