



**HAL**  
open science

# UNE NOUVELLE APPROCHE DE RESEAU BAYESIEN HYBRIDE POUR LA MODELISATION DE LA FIABILITE

Florence Petiet, Olivier François, Laurent Bouillaut

► **To cite this version:**

Florence Petiet, Olivier François, Laurent Bouillaut. UNE NOUVELLE APPROCHE DE RESEAU BAYESIEN HYBRIDE POUR LA MODELISATION DE LA FIABILITE. Congrès Lambda Mu 21 “ Maîtrise des risques et transformation numérique : opportunités et menaces ”, Oct 2018, Reims, France. pp.7. hal-02074610

**HAL Id: hal-02074610**

**<https://hal.science/hal-02074610>**

Submitted on 20 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNE NOUVELLE APPROCHE DE RESEAU BAYESIEN HYBRIDE POUR LA MODELISATION DE LA FIABILITE

## A NEW HYBRID BAYESIAN NETWORK APPROACH TO MODELING RELIABILITY

Florence PETIET, Olivier FRANCOIS et Laurent BOUILLAUT

Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux  
14-20 Boulevard Newton, 77420 Champs-sur-Marne

### Résumé

Le Modèle Graphique de Durée Hybride-Weibull est un modèle graphique probabiliste constitué d'une variable état du système discrète et d'une variable temps de séjour dans l'état courant qui suit une loi de Weibull à chaque changement d'état. Cette modélisation permet de s'affranchir de problèmes de capacité de stockage et de temps de calcul.

### Summary

The Hybrid-Weibull Duration Model is a probabilistic graphical model consisting of a discrete system state variable and a residence time variable in the current state that follows a Weibull law at each state change. This modeling makes it possible to overcome problems of storage capacity and computing time.

## 1. Introduction

### 1.1. Objectifs et motivations

L'analyse de fiabilité fait partie intégrante de la conception et du fonctionnement du système, en particulier pour les systèmes exécutant des applications critiques. Un large éventail de travaux sur l'analyse de fiabilité est disponible dans la littérature. La plupart du temps, la défaillance du système est provoquée par la défaillance d'un ou de plusieurs composants. Dans ce cas, il est possible d'utiliser des distributions statistiques comme les distributions exponentielles pour modéliser la durée de vie. La distribution de Weibull (Weibull, 1951) permet de décrire chaque phase de la courbe de la baignoire. Dans (Bertholon, 2001), une nouvelle modélisation du vieillissement est proposée.

Ces distributions ne permettent toutefois pas de se concentrer sur la dynamique de dégradation. Elles ne peuvent pas être appliquées à un système réparable. Elles ne peuvent pas être utilisées pour évaluer le nombre de défaillances attendues pendant la période de garantie, pour maintenir un niveau minimum de fiabilité, ou pour déterminer quand remplacer ou remettre en état un système. Ces méthodes sont souvent appelées "classiques".

Les modèles dynamiques prennent explicitement en compte l'aspect temporel, modélisant ainsi l'évolution de la dégradation du système au cours du temps par des méthodes stochastiques (Cocozza-Thivent, 1997).

Plutôt que de considérer les différents composants du système, il est également possible de considérer l'ensemble du système. Plusieurs méthodes sont couramment utilisées pour modéliser les différents états d'un système dynamique, afin d'analyser sa fiabilité, telles que les chaînes de Markov, les réseaux de Pétri, ou les réseaux Bayésiens (Demri, 2009).

Des travaux récents ont montré l'intérêt d'utiliser les réseaux bayésiens (RB) (Jensen, 1996) dans le domaine de la fiabilité. Par exemple (Boudali & Dugan, 2005) montre comment modéliser la fiabilité d'un système complexe en utilisant des réseaux bayésiens.

(Weber & Jouffe, 2003) explique comment utiliser les réseaux bayésiens dynamiques (RBD) (Murphy, 2002) pour étudier la fiabilité d'un système multi-états qui dépend d'un certain contexte.

Les RBD supposent toutefois que le temps de séjour dans chaque état soit exponentiellement distribué, alors que la plupart des applications industrielles présentent des comportements non markoviens. Dans ces situations, une

modélisation markovienne du processus de dégradation peut introduire des biais non négligeables.

Ainsi, une structure originale de réseau bayésien a été proposée, appelée modèle graphique de durée (MGD), afin de s'adapter aux systèmes dont le temps de séjour dans chaque état n'est pas nécessairement distribué exponentiellement (Donat et al., 2010). Un MGD est caractérisé par une variable de durée, permettant l'utilisation de n'importe quel type de distribution pour modéliser le temps de séjour dans chaque état du système considéré.

La complexité est cependant directement liée à la taille de l'espace discret de la variable temps de séjour. Cela peut induire des problèmes techniques en termes de capacité de stockage et de temps de calcul. Une solution pourrait consister à considérer une variable de durée continue.

### 1.2. Positionnement

Dans la théorie des réseaux bayésiens, il existe plusieurs approches qui contiennent à la fois des variables continues et discrètes.

Dans les réseaux bayésiens hybrides, dans lesquels les variables discrètes et continues apparaissent simultanément, il est possible d'appliquer des schémas d'inférence similaires à ceux des variables discrètes. Le premier modèle qui a permis l'inférence exacte dans les réseaux hybrides est basé sur la distribution conditionnelle gaussienne (CG) (Lauritzen, 1992).

La restriction provoquée par le fait que les variables discrètes ne puissent pas avoir de parents continus peut être partiellement levée en utilisant la fonction logit ou probit, généralisée dans le cas multinomial par la fonction softmax (Murphy, 1999)

Une autre façon de lever cette restriction est l'utilisation d'un mélange d'exponentielles (Koller et al., 1999), mais l'inférence n'est qu'approchée, et pas exacte.

Le modèle de mélange d'exponentielles tronquées a été introduit dans (Moral et al., 2001). Les nœuds discrets avec des parents continus sont autorisés et l'inférence peut être exacte (Cobb & Shenoy, 2006).

Étant donné que des approches hybrides existent ainsi dans le cadre des réseaux bayésiens, une telle perspective pourrait être envisagée dans un modèle graphique de durée.

Dans un premier temps, nous avons choisi de nous intéresser à la loi de Weibull. En effet, selon les avis d'experts, les variables de temps de séjour suivent une distribution de Weibull dans de nombreux systèmes (Weibull, 1951).

Notre objectif est donc d'intégrer des variables de temps de séjour suivant une distribution de Weibull dans un

modèle graphique de durée en proposant une nouvelle approche.

Tout d'abord, cet article décrira brièvement le formalisme des réseaux bayésiens et celui des modèles graphiques de durée. Nous introduisons ensuite le formalisme proposé, appelé modèle graphique de durée hybride-Weibull (MGDH-W) et l'algorithme d'inférence associé.

Ensuite seront faites des comparaisons de résultats d'apprentissage et de l'analyse de fiabilité, obtenus à partir d'un modèle graphique de durée et d'un modèle graphique de durée hybride-Weibull.

## 2. Introduction du formalisme

### 2.1. Réseaux bayésiens

Les réseaux bayésiens (Jensen, 1996) sont des outils mathématiques reposant sur la théorie des probabilités et la théorie des graphes. Ils permettent de représenter qualitativement et quantitativement des connaissances incertaines.

Les réseaux bayésiens sont des modèles graphiques probabilistes qui permettent de représenter intuitivement la distribution d'un ensemble de variables aléatoires  $\mathbf{X}$  =

$$(X_1, \dots, X_N)$$

Un RB est défini par un couple  $M = (\mathcal{G}, (p_n)_{1 \leq n \leq N})$ .  $\mathcal{G} = (X, \mathcal{E})$  est un graphe acyclique dirigé dans lequel chaque nœud  $i$  est associé à une variable aléatoire  $X_i$ , qui prend ses valeurs dans un espace fini et dénombrable  $\mathcal{X}_i$  et dans lequel chaque arc orienté  $(i, j) \in \mathcal{E}$  représente les dépendances entre les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$

$(p_n)_{1 \leq n \leq N}$  est un ensemble de lois de probabilités conditionnelles (LPC) telles que  $p_n$  désigne la distribution de probabilité conditionnelle associée à la variable aléatoire  $X_n$  étant donné ses parents  $X_{pa_n}$ ,  $pa_n$  se référant à la séquence des indices parents de la variable aléatoire  $X_n$  dans  $\mathcal{G}$ .

Les relations d'indépendance conditionnelle introduites par les arcs du graphe permettent de factoriser la distribution de probabilité conjointe de l'ensemble des variables aléatoires  $\mathbf{X}$  comme suit :

$$P(\mathbf{X}) = P(X_1, \dots, X_N) = \prod_{n=1}^N P(X_n | pa_n) \quad \{1\}$$

En outre, des outils ont été développés pour apprendre automatiquement la structure et les paramètres du graphe et ceux des LPC à partir de données complètes ou incomplètes ou si une connaissance a priori est disponible (comme les avis d'expert) (Neapolitan, 2003).

L'utilisation des RB est particulièrement intéressante en raison de la possibilité de propager des connaissances à travers le réseau. En effet, divers algorithmes d'inférence peuvent être utilisés pour calculer les probabilités marginales, a priori, a posteriori, etc. des variables du système. L'une des procédures d'inférence les plus classiques repose sur l'utilisation d'un arbre de jonction (Lauritzen & Spiegelhalter, 1988). Néanmoins, dans nos expériences, nous utilisons l'algorithme d'élimination (Dechter, 1999). Ce choix est motivé par la simplicité et l'efficacité de la méthode.

### 2.2. Réseaux bayésiens dynamiques

Inspirés du formalisme des RB classiques, les réseaux bayésiens dynamiques (RBD) (Murphy, 2002) ont permis d'unifier de nombreuses approches à partir de la modélisation de séries temporelles, telles que les modèles de Markov cachés. Un RBD vise à modéliser la distribution de probabilité d'un ensemble de variables aléatoires

$$(X_t)_{1 \leq t \leq T} = (X_{1,t}, \dots, X_{N,t})_{1 \leq t \leq T}$$

Il se compose d'une paire de réseaux bayésiens  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\rightarrow)$ .  $\mathcal{M}_1$  définit la distribution a priori  $P(X_{1,1}, \dots, X_{N,1})$  comme dans (1).

$\mathcal{M}_\rightarrow$  définit le modèle de transition qui décrit les dépendances entre les variables dans la tranche  $t-1$  et

les variables dans la tranche  $t$ , i. e. la distribution de  $X_t | X_{t-1}$  qui vérifie :

$$P(X_t | X_{t-1}) = P(X_{1,t}, \dots, X_{N,t} | X_{1,t-1}, \dots, X_{N,t-1}) \\ = \prod_{n=1}^N P(X_{n,t} | pa_{n,t})$$

où  $pa_{n,t}$  fait référence à la séquence des indices parents de la variable aléatoire  $X_{n,t}$  dans le graphe de  $\mathcal{M}_\rightarrow$ .

Un réseau bayésien dynamique est en réalité un réseau bayésien statique, répété plusieurs fois. RBD hérite donc des propriétés pratiques du RB statique, notamment en ce qui concerne l'apprentissage et l'inférence.

L'état du système à l'instant  $t+1$ ,  $X_{t+1}$ , est déterminé par l'état du système à l'instant  $t$ ,  $X_t$ , et ne dépend pas de l'état à des instants plus tôt  $1, \dots, t-1$  ; et les distributions de probabilités conditionnelles de  $\mathcal{M}_\rightarrow$  ne dépendent pas de la tranche  $t$  ; la répartition du temps passé dans chaque état est donc géométrique, alors que la plupart des applications industrielles n'ont pas ce comportement. Une telle modélisation peut introduire des biais non négligeables dans les estimations.

### 2.3. Modèle graphique de durée

Le modèle graphique de durée (Donat et al., 2010) repose sur les deux variables suivantes : l'état du système  $X_t$  et la variable de durée  $S_t$  décrivant le temps passé dans n'importe quel état du système (temps restant) (Fig. 1).

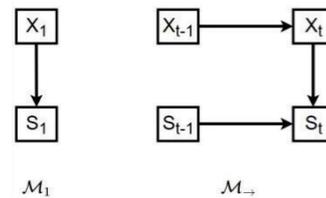


Figure 1. Modèle graphique de durée discret

Premièrement, la distribution de probabilité conditionnelle associée à la distribution de l'état initial du système est définie sur le domaine discret et fini  $\Omega_X = \{1, \dots, N_X\}$  par :

$$P(X_1 = i) = P_{X_1}(i) \quad \{2\}$$

La LPC initiale du temps de séjour donne les distributions pour chaque état initial. Cette LPC est définie sur le domaine discret et fini  $\Omega_S = \{1, \dots, N_S\}$  par :

$$P(S_1 = k | X_1 = i) = P_{S_1}(i, k) \quad \{3\}$$

Ensuite, il est nécessaire de définir les LPC naturelles des états du système et les LPC des temps de séjour.

Une transition se produit si et seulement si  $S_{t-1} = 1$ .

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, S_{t-1} = 1) = Q_{i,j}^{sys} \quad \{4\}$$

où  $Q_{i,j}^{sys}$  est une matrice  $N_X N_X$ , appelée matrice de transition naturelle du système.

Un nouveau temps de séjour est considéré selon la LPC suivante :

$$P(S_t = k | X_t = i, S_{t-1} = 1) = F_{i,k}^{sys} \quad \{5\}$$

où  $F^{sys}$  est une matrice  $N_X N_S$ .

Lorsqu'il n'y a pas de transition, le système reste déterministe dans l'état précédent  $i$  :

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, S_{t-1} \geq 2) \quad \{6\}$$

et le temps de séjour dans l'état actuel est diminué de manière déterministe d'une unité :

$$P(S_t = k | X_t = i, S_{t-1} = k' \geq 2) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \{7\}$$

### 2.4. Calcul de fiabilité

Partitionnons l'ensemble  $\Omega_X$  des états du système en deux ensembles  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{D}$  respectivement pour les états "up" et les états "down" (c'est-à-dire les états de fonctionnement et de panne).

La fiabilité du système en temps discret est définie comme la fonction  $\mathcal{R} : \mathbb{N}^* \rightarrow [0,1]$  où  $\mathcal{R}(t)$  représente la probabilité que le système soit toujours dans un état de fonctionnement jusqu'à l'instant  $t$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}(t) = P(X_1 \in \mathcal{U}; \dots; X_t \in \mathcal{U})$$

Il est possible de tirer de cette définition de la fiabilité d'autres métriques intéressantes, telles que le taux de défaillance ou le MTTF (Pham, 2006).

Par conséquent, ce problème de calcul de fiabilité se résume au calcul de  $P(X_1 \in \mathcal{U}; \dots; X_t \in \mathcal{U})$ . Les calculs de probabilités dans un réseau bayésien sont appelés inférence. On dispose d'un certain nombre d'algorithmes pour l'inférence, comme on l'a vu en introduction. Cependant, ce calcul peut-être plus ou moins long.

Or dans notre cas, le système ne peut pas se réparer lui-même. L'état de défaillance est absorbant. La fiabilité est alors égale à la disponibilité :

$$\mathcal{R}(t) = P(X_t \in \mathcal{U})$$

Le calcul de fiabilité est alors réduit au calcul de la distribution marginale de  $X_t$ .

### 2.5. Limitation des modèles graphiques de durée

Plus  $N_s$  est grand (plus le pas de temps est petit par rapport à la durée de vie maximale par exemple), plus la représentation de la distribution du temps de séjour sera précise. D'un autre côté, le choix d'une valeur  $N_s$  trop importante aura des conséquences immédiates à la fois sur  $N_x N_s$  donc sur l'espace nécessaire pour stocker les distributions de probabilités conditionnelles, et sur la complexité temporelle de l'inférence.

Cela peut induire des problèmes techniques en termes de capacité de stockage et de temps de calcul. Une solution pourrait consister à considérer une variable de temps de séjour continue. Avec  $c$  le nombre de paramètres requis par la distribution choisie, la LPC sera constitué de  $N_x c$  valeurs, donc l'espace nécessaire pour stocker la LPC continue est plus petit que si le temps de séjour est discret.

Puisque l'intérêt de la densité de Weibull a été démontré pour l'analyse de fiabilité (Weibull, 1951), cet article se concentre sur l'utilisation des densités de Weibull pour modéliser les temps de séjour dans chaque état du système.

## 3. Modèle Graphique de Durée Hybride-Weibull

Dans les paragraphes suivants, nous proposons un nouveau formalisme pour représenter l'évolution d'un système dynamique dans le temps, afin d'estimer sa fiabilité. Ce modèle particulier est appelé Modèle Graphique de Durée Hybride-Weibull (MGDH-W). Dans ce qui suit, nous allons décrire ses distributions de probabilités conditionnelles, et un algorithme d'inférence afin de calculer la fiabilité d'un système à espace d'états discrets et fini.

### 3.1. Généralités

$(X_t)_{1 \leq t \leq T}$  représente l'état du système sur une période de longueur  $T$ .

$(S_t)_{1 \leq t \leq T}$  représente le temps restant avant une modification de l'état du système. Plus clairement, nous nous référons à la variable aléatoire  $S_t$  comme temps de séjour restant dans l'état actuel du système. Ces variables sont appelées variables de durée ou variables de temps de séjour. Un modèle graphique de durée de Weibull-Hybride est illustré dans la figure 2.

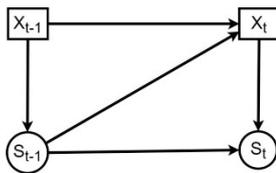


Figure 2. Modèle graphique de durée Hybride-Weibull

Les expressions (2), (3), (4), (5), (6), (7) deviennent les expressions (8), (9), (10), (11), (12) et (13).

La distribution de probabilité conditionnelle associée à la distribution de l'état initial du système doit être définie comme suit, sur le domaine discret et fini  $\Omega_x = \{1, \dots, N_x\}$

$$P(X_1 = i) = p_i^{ini} \quad \{8\}$$

La LPC initiale du temps de séjour donne la distribution pour chaque état initial, elle est définie sur le domaine continu  $\Omega_s = [0, +\infty[$  :

$$f_{s_1 | X_1 = i} = f_{w_{\alpha, \beta, i}} \quad \{9\}$$

$$\text{Avec } f_{w_{\alpha, \beta}}(s) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^\beta}$$

où  $\alpha$  est le paramètre d'échelle et  $\beta$  le paramètre de forme.

Il faut ensuite définir les LPC de transition de l'état du système et du temps de séjour :

Une transition a lieu si et seulement si  $S_{t-1} < 1$ .

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, S_{t-1} < 1) = Q^{sys}(i, j) \quad \{10\}$$

où  $Q^{sys}$  est une matrice  $N_x N_x$ , appelée matrice de transition naturelle du système.

Un nouveau temps de séjour est calculé selon la LPC suivante :

$$f(S_t = s | S_{t-1} < 1, X_t = i) = f_{w_{\alpha, \beta, i}}(s) \quad \{11\}$$

Lorsqu'il n'y a pas de transition, le système reste de façon déterministe dans l'état précédent  $i$  :

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, S_{t-1} > 1) = I(i, j) \quad \{12\}$$

et le temps de séjour dans l'état actuel est décrémenté de manière déterministe d'une unité :

$$f(S_t = s | S_{t-1} = s' > 1, X_t = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s' - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \{13\}$$

### 3.2. Inférence

Comme indiqué en section 2.4, la fiabilité d'un système non réparable est égale à la disponibilité du système :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= P(X_t \in \mathcal{U}) \\ &= 1 - P(X_t \in \mathcal{D}) \\ &= 1 - \int_{S_1, \dots, S_t} P(X_t \in \mathcal{D}, X_{t-1}, \dots, X_1, S_{t-1}, \dots, S_1) \end{aligned}$$

Posons  $\phi$  et  $\Lambda$  les distributions suivantes :

- $\phi_{t,u} = P(X_t | X_u, S_{u-1})$  pour  $u \in \llbracket 2; t-1 \rrbracket$  et  $\phi_{t,1} = P(X_t | X_1)$
- $\Lambda_{t,u} = P(X_t | X_{u-1}, S_{u-1})$  pour  $u \in \llbracket 2; t \rrbracket$  et  $\Lambda_{t,1} = P(X_t)$

Nous cherchons à calculer  $\Lambda_{t,1}$ . Les  $\phi_{t,u}$  et  $\Lambda_{t,u}$  s'expriment les uns en fonction des autres de la façon suivante :

$$\Lambda_{t,1} = \sum_{x \in \Omega_x} P(X_t | X_1 = x) P(X_1 = x) = \sum_{x \in \Omega_x} \phi_{t,1} P(X_1 = x) \quad \{14\}$$

$$\begin{aligned} \phi_{t,1} &= \int_0^\infty P(X_t | X_1, S_1 = s) f(S_1 = s | X_1) ds \\ &= \int_0^\infty \Lambda_{t,2} f(S_1 = s | X_1) ds \end{aligned} \quad \{15\}$$

Et pour  $u \in \llbracket 2; t-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \Lambda_{t,u} &= \sum_{x \in \Omega_x} P(X_t | X_u = x, S_{u-1}) P(X_u = x | X_{u-1}, S_{u-1}) \\ &= \sum_{x \in \Omega_x} \phi_{t,u} P(X_u = x | X_{u-1}, S_{u-1}) \end{aligned} \quad \{16\}$$

$$\begin{aligned} \phi_{t,u} &= \int_0^\infty P(X_t | X_u, S_u = s) f(S_u = s | S_{u-1}, X_u) ds \\ &= \int_0^\infty \Lambda_{t,u+1} f(S_u = s | S_{u-1}, X_u) ds \end{aligned} \quad \{17\}$$

$\Lambda_{t,t}$  et les  $P(X_u = x | X_{u-1}, S_{u-1})$  intervenant dans (16) sont donnés par (10 et 12). Les  $f(S_u = s | S_{u-1}, X_u)$  intervenant dans (17) sont donnés par (11 et 13)

Les équations (14), (15), (16), (17) définissent un algorithme itératif, qui donne à la fin :  $\Lambda_{t,1} = P(X_t)$ , ce qui permet d'avoir la valeur de la fiabilité :

$$\mathcal{R}(t) = P(X_t \in \mathcal{U}) = \sum_{x \in \mathcal{U}} P(X_t = x)$$

Le calcul dans (16) et (17) peut être développé comme suit : Dans (17) :

$$P(X_t | X_{t-q}, S_{t-q-1}) = \begin{cases} Q^{(q)} & \text{si } s < 1 \\ Q^{sys} * Q^{(q-1)} & \text{si } 1 < s < 2 \\ \dots & \dots \\ Q^{sys} * Q^{(q-j)} & \text{si } j < s < j+1 \\ \dots & \dots \\ Q^{sys} & \text{si } q < s < q+1 \\ I & \text{si } q+1 < s \end{cases}$$

Avec

$$Q^{(q)}(x, y) = \sum_{k=1}^q \int_{t-k}^t f_{W_{\alpha_x, \beta_x}}(s) ds * [Q^{sys} * Q^{(q-k)}](x, y) + \int_q^\infty f_{W_{\alpha_x, \beta_x}}(s) ds * I(x, y).$$

Dans (16) :

$$P(X_t | X_{t-q-1}, S_{t-q-1}) = \begin{cases} Q^{sys} * Q^{(q)} & \text{si } s < 1 \\ Q^{sys} * Q^{(q-1)} & \text{si } 1 < s < 2 \\ \dots \\ Q^{sys} * Q^{(q-j)} & \text{si } j < s < j+1 \\ \dots \\ Q^{sys} & \text{si } q < s < q+1 \\ I & \text{si } q+1 < s \end{cases}$$

$Q^{sys} * Q^{(q)}$  est en fait la transition naturelle du système pendant  $q$  tranches de temps.

## 4. Illustrations

### 4.1. Modèle

Pour illustrer notre approche, nous utilisons un MGDH-W pour modéliser le comportement d'une machine de production à trois états de fonctionnement. Cette machine peut être soumise à un contexte, comme la vitesse de production. Un capteur peut être associé à cette machine pour détecter l'état de fonctionnement.

Le MGDH-W est constitué d'une variable  $X_t$  modélisant l'état du système, d'une variable de durée continue  $S_t$ , d'une variable discrète  $Z_t$  représentant le contexte, et d'une variable discrète  $O_t$  modélisant l'observation de l'état du système via un capteur.  $X_t$  peut être « ok », « dégradé » pour les états de fonctionnement et « en panne ».  $Z_t$  peut être « rapide » ou « normale ».  $O_t$  peut être « ok », « dégradé », « en panne ». Les variables  $Z_t$  et  $O_t$  sont optionnelles, et il est tout à fait envisageable d'en ajouter d'autres.

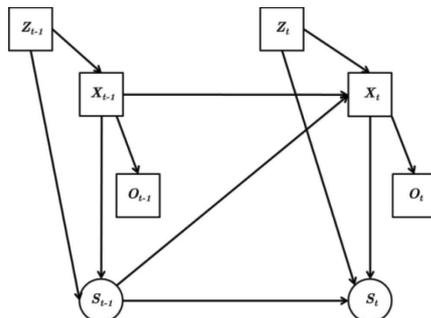


Figure 3. MGDH

L'objectif est ici de valider l'algorithme d'inférence, et de valider la pertinence de l'approche. On se ramène à un cas où la fiabilité théorique est facilement calculable, par exemple en éliminant le contexte, ou en fixant sa valeur, et en faisant de même pour l'observation via le capteur.

Le taux de transition entre les états du système est donné dans la Table 1

Le paramètre de la distribution de Weibull qui caractérise la variable de temps de séjour lorsqu'une transition se produit est donné dans la table 2. Le MGDH-W utilisé a été implémenté dans l'environnement MATLAB®, en utilisant la Bayes Net Toolbox (BNT) open source.

L'algorithme présenté dans la section 3.2 a été utilisé pour effectuer les calculs.

	Etat ok	Etat dégradé	Etat panne
Etat ok	0	0.9	0.1
Etat dégradé	0	0	1
Etat panne	0	0	1

Table 1. Table de probabilité conditionnelle de transition naturelle de l'état du système

	$\alpha$	$\beta$
Etat ok	200	20
Etat dégradé	100	20

Table 2. Paramètres des distributions des temps de séjour dans chacun des états du système

Pour comparer les deux approches, il peut être intéressant de comparer les complexités et qualités de l'apprentissage et de l'inférence.

### 4.2. Apprentissage

Un MGD standard est ensuite construit. La variable état du système de ce modèle MGD standard a la même matrice de transition de système statique que le MGDH-W (Table 1). La distribution de la variable temps de séjour de ce modèle MGD standard est construite en discrétisant la distribution continue de Weibull, avec les mêmes paramètres que le MGDH-W (table 2).

Une comparaison va être effectuée entre le MGDH-W et le MGD. Une base de données de trajectoires naturelles est donc constituée, pour apprendre d'une part les paramètres des LPC du MGDH-W et d'autre part ceux de celles du MGD.

$K=20000$  trajectoires ont donc été simulées, pour différentes valeurs de  $\alpha_{ok}$ , choisis supérieurs à  $\alpha_{deg}$ , de manière à ce que la durée de séjour maximale dans un état, c'est-à-dire  $\hat{N}_S$ , dépende directement du choix de  $\alpha_{ok}$ .

Chacun des deux modèles ayant un nombre différent de paramètres, le nombre  $K$  de trajectoires considérées dans l'apprentissage peut avoir un impact sur la qualité et la vitesse de ce dernier. C'est une première comparaison entre les deux modélisations.

Pour mesurer la qualité de l'apprentissage, en discret, on choisit d'utiliser la distance de Hellinger entre les tables de probabilités conditionnelles théorique et apprises, et en continu, ce sont les divergences entre la distribution de Weibull théorique et la distribution de Weibull apprise qui sont considérées.

La valeur de  $\hat{N}_S$  dépendant de  $\alpha_{ok}$ , on peut considérer la valeur théorique  $\alpha_{ok}$  des trajectoires simulées des bases de données qui ont servi aux apprentissages pour comparer ces dits apprentissages.

Kullback-Leibler Divergence between the estimated Weibull Distribution and the real one

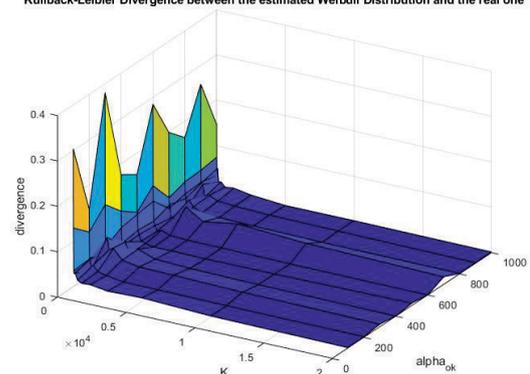
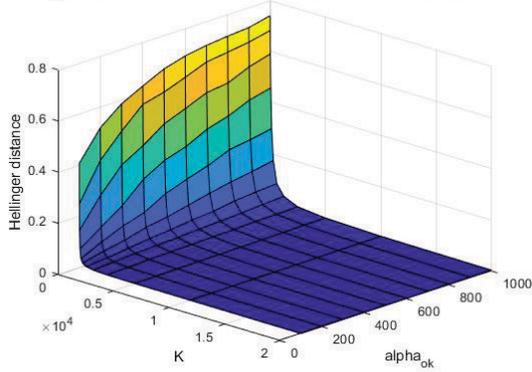


Figure 4. Evolution de la divergence entre la distribution de Weibull apprise et la Weibull théorique, en fonction du nombre de trajectoires apprises et du paramètre  $\alpha_{ok}$

Hellinger distance between real discrete distribution and the estimated one



**Figure 5.** Évolution de la distance de Hellinger entre les tables de probabilité conditionnelle de la durée de séjour apprise et théorique en fonction du nombre de trajectoires apprises et du paramètre  $\alpha_{ok}$

On remarque sur la Figure 5 que le choix de  $\alpha_{ok}$  a un impact sur la qualité de l'apprentissage fonction du nombre de trajectoires apprises dans le cas d'un MGD. Pour un grand  $\alpha_{ok}$ , un grand nombre de trajectoires est ainsi nécessaire pour minimiser la distance de Hellinger des tables de probabilités conditionnelles. Sur la Figure 4, on remarque que le choix d'  $\alpha_{ok}$  n'a pas d'impact sur la divergence de Kullback-Leibler fonction du nombre de trajectoires apprises dans le cas d'un W-HMGD. Un grand  $\alpha_{ok}$  ne nécessite pas plus de trajectoires qu'un petit  $\alpha_{ok}$ .

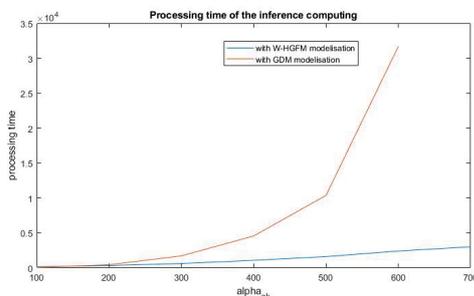
Pour un grand  $\alpha_{ok}$ , un petit nombre de trajectoires considérées dans l'apprentissage des paramètres du MGDH-W suffit alors pour une bonne qualité, alors que le MGD en nécessite un plus grand nombre. Or plus il faut de trajectoires d'apprentissage, plus il faut de temps pour les générer (que ce soit la réalité ou des simulations), d'espace de stockage, et de temps de calcul d'apprentissage.

### 4.3. Inférence

Les fiabilités calculées par les deux approches peuvent maintenant être comparées.

La méthode présentée dans la section 3.2 a été utilisée pour calculer l'estimation de fiabilité dans le modèle du MGDH-W.

L'estimation de la fiabilité en utilisant la modélisation par un MGD a été réalisée en utilisant l'algorithme d'inférence classique d'élimination de variable en discret.



**Figure 6.** Temps de traitement de l'estimation de la fiabilité

La comparaison des temps de traitement des estimations de la fiabilité avec d'une part une modélisation par un MGD et d'autre part par une modélisation par un W-HMGD (Figure 6) met en valeur que la modélisation par un MGD n'est pas adaptée pour de grandes valeurs de  $\alpha_{ok}$ , valeurs

qui ont peu d'impact dans le cas de la modélisation par un W-HMGD.

Pour  $\alpha_{ok} = 700$ , Matlab n'a pas assez de mémoire pour estimer la fiabilité avec une modélisation par un MGD.

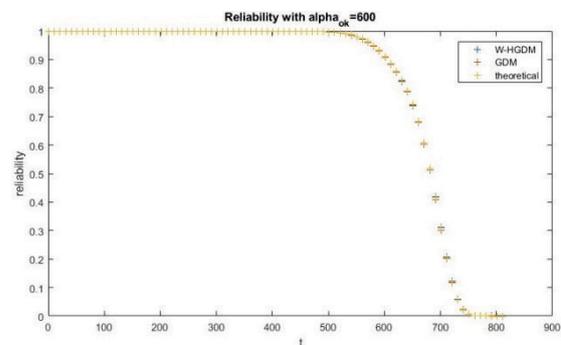
Nous choisissons de nous placer dans le cas  $\alpha_{ok} = 600$  pour effectuer une comparaison des estimations de la fiabilité, que nous pouvons également comparer à la fiabilité théorique.

La fiabilité théorique s'exprime effectivement de manière simple :

$$\mathcal{R}(t) = P(X_t = ok) + P(X_t = dégradé)$$

$$\begin{aligned} P(X_t = ok) &= P(S_1 \geq t, X_1 = ok) \\ &= P(S_1 \geq t | X_1 = ok) P(X_1 = ok) \\ &= (1 - F_{W_{\alpha_{ok}, \beta_{ok}}}(t)) P(X_1 = ok) \\ &= e^{-\left(\frac{t}{\alpha_{ok}}\right)^{\beta_{ok}}} P(X_1 = ok) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_t = dégradé) &= \sum_{j=1}^{t-1} P(\text{transition à } j \text{ de } ok \text{ à } deg \cap X_t \\ &= deg) + P(X_t = dég, X_1 = deg) \\ &= \sum_{j=1}^{t-1} P(j-1 \leq S_1 \leq j \cap S_{j+1} \\ &\geq t-1-j, X_{j+1} = deg | X_1 = ok, X_j \\ &= ok, S_j < 1) \\ &= \sum_{j=1}^{t-1} P(j-1 \leq S_1 \leq j \cap S_{j+1} \\ &\geq t-1-j | X_1 = ok, X_{j+1} = deg, S_j \\ &< 1) P(X_{j+1} = dég | X_j = ok, S_j < 1) \\ &+ P(X_t = dég, X_1 = deg) \\ &= \sum_{j=1}^{t-1} P(j-1 \leq S_1 \leq j | X_1 = ok) P(X_{j+1} \\ &= dég | X_j = ok, S_j \\ &< 1) P(S_{j+1} \geq t-1-j | X_{j+1} = deg, S_j \\ &< 1) + P(X_t = dég, X_1 = deg) \\ &= Q^{sys}(ok, deg) \sum_{u=1}^{t-1} \left( F_{W_{\alpha_{ok}, \beta_{ok}}}(u) \right. \\ &- F_{W_{\alpha_{ok}, \beta_{ok}}}(u-1) \left. \right) \left( 1 \right. \\ &- F_{W_{\alpha_{deg}, \beta_{deg}}}(t-1-u) \left. \right) \\ &+ P(X_t = dég, X_1 = deg) \end{aligned}$$



**Figure 7.** Fiabilité par rapport aux modélisations

La Figure 7 représente la courbe de fiabilité estimée avec le MGDH-W, celle estimée avec le MGD, et la fiabilité théorique. On remarque que l'estimation de la fiabilité qui

se rapproche le plus de la fiabilité théorique est celle effectuée à l'aide du MGDH-W. Celle estimée avec une modélisation par un MGD est aussi satisfaisante, mais avait nécessité un temps de traitement plus de dix fois plus important.

### 5. Conclusion

Dans cet article, une nouvelle approche hybride pour le modèle de durée dans lequel le temps de séjour suit une distribution de Weibull, appelée Modèle Graphique de Durée Hybride-Weibull, a été proposée. Un algorithme d'inférence associé a donc été développé et introduit permettant d'estimer la fiabilité du système dans de tels modèles.

Enfin, les premiers résultats présentés dans cet article soulignent la faisabilité de l'approche proposée en termes de précision d'inférence. Cela valide l'intérêt que nous avons eu en proposant une telle approche hybride pour la modélisation de la dynamique de dégradation. En effet, l'avantage attendu du MGDH-W conduit principalement à la non discrétisation de la variable de séjour dans le MGD qui peut devenir un frein au calcul de fiabilité pour des raisons de complexité.

L'objectif à long terme de cette étude est d'améliorer VirMaLab (Virtual Maintenance Laboratory), un outil d'aide à la décision générique développé par le GRETTIA (Bouillaut et al., 2011) afin d'évaluer, optimiser et comparer stratégies de maintenance pour le système d'espace discret, en permettant aux variables de temps de séjour de suivre une distribution de Weibull.

D'autre part, les travaux présentés pourront être étendus à n'importe quelle loi de la famille exponentielle.

### 6. Références

- Bertholon, H., 2001. *Une modélisation du vieillissement*.
- Bondeux, R.D.a.L.B.a.P.A.a.P.L.a.S., 2008. Specific graphical models for analyzing the reliability. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2008.
- Boudali, H. & Dugan, J.B., 2005. A discrete-time Bayesian network reliability modeling and analysis framework. *Reliability Engineering and System Safety*, 87, pp.337--349.
- Bouillaut, L., Aknin, P., Donat, R. & Bondeux, S., 2011. VirMaLab - A generic approach for optimizing maintenance policies of complex systems. In *WCRR 2011 - 9th World Congress on Railway Research*. Lille, France, 2011. WCRR.
- Cobb, B.R. & Shenoy, P.P., 2006. Inference in hybrid Bayesian networks with mixtures of truncated exponentials. *International Journal of Approximate Reasoning*, 41(3), pp.257 - 286.
- Cocozza-Thivent, C., 1997. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Springer Berlin Heidelberg.
- Dechter, R., 1999. Bucket elimination: A unifying framework for reasoning. *Artificial Intelligence*, 113(1), pp.41 - 85.
- Demri, A., 2009. *Reliability estimation of mechatronic systems using functional and dysfunctional analysis*. Université d'Angers.
- Donat, R., Leray, P., Bouillaut, L. & Aknin, P., 2010. A Dynamic Bayesian Network to Represent Discrete Duration Models. *Neurocomputing*, 73(4-6), pp.570--577.
- Jensen, F.V., 1996. *Introduction to Bayesian Networks*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Koller, D., Lerner, U. & Angelov, D., 1999. A General Algorithm for Approximate Inference and Its Application to Hybrid Bayes Nets. In Inc., M.K.P., ed. *Proceedings of the Fifteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Stockholm, Sweden, 1999.

Lauritzen, S.L., 1992. Propagation of Probabilities, Means and Variances in Mixed Graphical Association Models. *Journal of the American Statistical Association*, 87, pp.1098--1108.

Lauritzen, S.L. & Spiegelhalter, D.J., 1988. Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 50, pp.157-224.

Moral, S., Rumi, R. & Salmeron, A., 2001. Mixtures of Truncated Exponentials in Hybrid Bayesian Networks. In *Proceedings of the 6th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*. London, UK, 2001. Springer-Verlag.

Murphy, K.P., 1999. A Variational Approximation for Bayesian Networks with Discrete and Continuous Latent Variables. In *Proceedings of the Fifteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Stockholm, Sweden, 1999. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Murphy, K.P., 2002. *Dynamic Bayesian Networks: Representation, Inference and Learning*. University of California, Berkeley.

Neapolitan, R.E., 2003. *Learning Bayesian Networks*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc.

Pham, H., 2006. System Reliability Concepts. In *System Software Reliability*. London: Springer London. pp.9--75.

Weber, P. & Jouffe, L., 2003. Reliability modelling with dynamic bayesian networks., 2003. IFAC.

Weibull, W., 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 18(3), pp.293--297.