Espace et graphe, le p-graphe t-modal 1-planaire

Philippe Mathis

Centre d'Etudes Supérieures d'Aménagement

Parc Grandmont - 37200 TOURS

Tél. 47 36 70 58 - Fax 47 36 70 64

Séminaire 90

ESPACE ET GRAPHE

Le p-graphe t-modal 1-planaire

Philippe MATHIS
Laboratoire Aménagement et Développement

Table Ronde "Distance et analyse spatiale"
Damarin 5 et 6 janvier 1990

Philippe Mathis
Centre d'Etudes Supérieures d'Aménagement
Laboratoire Aménagement et Développement

ESPACE ET GRAPHE

Le p-graphe t-modal 1-planaire

document provisoire

Brouillon

Résumé

En 1980, nous avions proposé une premiére synthèse entre la description de l'espace en terme d'aire dotée d'une métrique et celle en terme de réseau. Elle consistait en l'utilisation d'un graphe planaire et de son dual, ce qui permettait de prendre en compte simultanément les deux aspects précités, avec les contraintes et les limites de l'outil.

Ce papier se propose de généraliser cette tentative dont les limites résidaient dans la nécessaire planarité du graphe, ce qui interdisait de prendre en compte des transports en site propre par exemple.

La théorie des graphes traite, entre autres, de p-graphe, mais aussi de p-graphes planaires, et de graphes chromatiques.

Nous nous proposons de définir une catégorie intermédiaire le p-graphe t-modal(chromatique) 1-planaire pour décrire les réseaux de transports en prenant simultanément en compte les divers modes, ainsi que l'espace grace au planaire qui permet d'établir un pavage, avec une mosaïque polygonale réguliére ou non, généralisant ainsi le problème du carroyage.

Un tel outil posséde de multiples applications : description de l'espace, variation des différents degrés des sommets, détermination des chemins à valeur minimale -distance, coût, temps- transformation topologique des représentations pour aboutir à des cartes à référentiel autre que l'espace, par exemple le temps ou le coût, réanalyse des réseaux urbains, hiérarchies et zones d'influences en fonction des divers modes de transport et de leurs substitutions, applications aux réseaux théoriques, arbitrage entre coût et temps dans l'utilisation des réseaux et en conséquence temporalités urbaines diverses,

C'est d'une évidente banalité de considérer que l'espace s'est profondément modifié depuis la Révolution Industrielle.

1 constatation

C'est une évidence plus significative d'affirmer que l'espace a été profondément modifié depuis le Révolution Industrielle dans sa nature et ses dimensions par l'invention de divers modes de transport et notamment en site propre.

En effet, au début de cette période tout transport s'effectuait sur la surface, et celle-ci pouvait être considérée, ainsi que le fît von Thunen, comme continue, isomorphe, isotrope, c'est à dire comme une surface de transport, exception faite de la riviére...

Mais l'apparition et le développement du chemin de fer, puis... de l'avion compliquérent considérablement le problème, bien que...

2 constatation

Bien qu'à priori significative, l'évidence est souvent non signifiante : l'espace, faute d'outils et de concepts adéquats est très généralement considéré comme une simple surface, composée d'une ou de plusieurs aires dotées de métriques spécifiques – exit réseaux et modes de transports –, ou plus rarement comme un réseau – et adieu aires petites ou grandes –.

1 insatisfaction

En 1980, nous avions proposé d'utiliser les graphes planaires qui, s'ils prétendaient, grace à leur propriété de dualité, pouvoir permettre le passage d'une des conceptions à l'autre, n'en reflétaient pas moins une conception archéo-économique car bidimentionelle de l'espace : la surface, toute la surface, mais rien que la surface!

Or, à l'évidence – encore une fois! – nous possédons les outils nous permettant de dépasser cette limitation.

En effet, les p-graphes permettent de prendre en compte l'existence de plusieurs réseaux entre deux sommets, les p-graphes planaires de plusieurs modes dans le même réseau banal, et enfin les p-graphes chromatiques permettent d'individualiser les différents arcs dans un p-graphe!

OBJECTIF

Nous nous proposons donc de définir une catégorie spécifique de graphes, combinaisons des catégories précédentes, que nous appelerons p-graphe t-modal 1-planaire, c'est à dire un p-graphe dans lequel un des p (au sens des graphes chromatiques), par définition le premier, serait planaire, et dont les t modes pourraient être individualisés comme le sont les arcs d'un graphe p-chromatique.

Ceci suppose une définition précise du graphe 1-planaire.

Le p-graphe 1-planaire strict est un graphe dont tous les sommets Xi appartiennent à une surface S, et dont les arcs XiXj constituant le 1-graphe planaire appartiennent à la surface S.

Au sens large, le 1-graphe planaire sera constitué des sommets et des arcs appartenant à la surface S.

Dans l'acceptation large, des sommets peuvent ne pas appartenir à la surface et donc au 1-planaire.

Le p-graphe est défini comme un graphe p-coloré (Kaufmann 1968)

$$G = (E, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots\ldots, \Gamma_n)$$

avec par définition :

$$G = (E, \Gamma_1) \text{ appartient à la surface } S$$

Mais, en fait, ceci ne définit qu'un graphe plan, la planarité nécessite que soit satisfaites d'autres conditions.
Si l'on considére un réseau R quelconque, il "est dit traçable sur une surface S si l'on peut le réaliser en prenant pour articulation des points de S, pour connexions des arcs de S, deux connexions ne se coupant pas, (en dehors, bien entendu des articulations qu'elles peuvent avoir en commun)"

par. ultérieur

Deux réalisations d'un même réseau sont dites équivalentes lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par déformation continue de la surface dans l'espace à trois dimensions, et du réseau sur la surface.
pour que le réseau R sur la surface soit planaire, si l'on considére comme application F la projection plane de R appartenant à la surface sur G appartenant au plan P, R et G étant totalement ordonnés, il faut que les projections F et F' soient bijectives, monotones non décroissantes et non croissantes (Kaufmann et Pichat, 1977)

Cela implique que la surface S soit une surface et qu'elle le reste topologiquement simple sans point de retournement, telle qu'à tout point de P corresponde un point de S et un seul, et réciproquement.

Le graphe G considéré peut-être un n-graphe planaire avec n≤p. Il peut dans tous les cas être ramené à un 1-graphe par extension du graphe : rajout des sommets nécessaires sur les différents arcs xk de Xi-xk-Xj, ainsi que les sommets correspondants au réseau R.

De même, on peut transformer tout graphe plan en un graphe planaire par adjonction de sommets aux points d'intersection de deux arcs, ce qui correspond à l'individualisation des croisements du réseau R.

Le graphe plan sera un graphe planaire lorsqu'il satifera à la formule d'Euler :

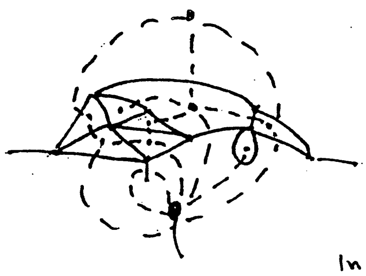
$$n - m + f = 2$$

avec n nombre de sommets
m nombre d'arêtes
f nombre de faces du graphe

Sur un graphe important, cette vérification est longue, elle peut être programmée en utilisant la matrice associée au 1-graphe appartenant à S, n et m sont déterminés immédiatement, et sachant que $f = \gamma - 1$, cela revient à déterminer le nombre cyclomatique γ, c'est à dire le nombre de cycles élémentaires minimaux du 1-graphe plan.

Une des propriétés trés intéressante, fondamentale pour notre propos, du graphe planaire est sa dualité.

En effet, " considérons un graphe planaire G, connexe et sans sommets isolés; on lui fera correspondre un graphe planaire G' de la façon suivante : à l'intérieure de toute face s de G, on place un sommet x' de G'; à toute arête e de G on fera correspondre une arête e' de G' qui reliera les sommets x' et y' correspondants aux faces s et t qui se trouvent de part et d'autre de l'arête e. Le graphe G' ainsi défini est planaire, connexe, et n'a pas de sommet isolé : on l'appelle le graphe dual de G.



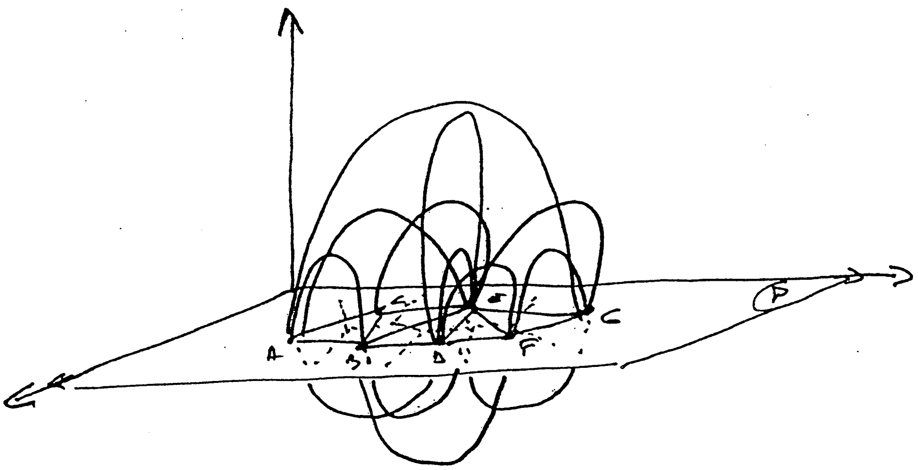
In BERGE

On remarque que
1) le graphe dual de G' est G ; c'est à dire (G')' = G
2) à toute boucle de G correspond une arête pendante de G' et vice versa
3) si G admet plusieurs arêtes reliant les mêmes sommets, G' admet des sommets de degré 2." (Berge 1983)

Il est donc possible d'associer à tout réseau existant sur une surface S une partition de l'espace par le biais du graphe dual. De plus le tracé du dual est relativement souple : la localisation du sommet x'i dans la face est libre, il suffit qu'il soit mathématiquement distinct de xi.

on peut donc caractériser l'espace, de facon discréte, par une ou plusieurs valeurs, un vecteur, attribué à chaque face du dual et localisé aux sommets du primal eventuellement, et/ou étendre à chaque face du dual les valeurs des sommets du primal correspondant que l'on considérera alors comme moyenne pour la zone.

Dans la définition stricte, les sommets du graphe planaire sont aussi les sommets du p-graphe dont les arcs n'appartiennent pas à la surface S.



On est alors en présence d'un p-graphe 1-planaire, un p-graphe dont 1 des sous graphes est planaire. Ce sousgraphe est un sous graphe de G engendré par $S \subset X$. C'est le graphe GS dont les sommets sont des points de S, et dont les arcs sont des arcs de S. Si G = (X , Γ) est un p-graphe, c'est donc le 1-graphe GS = (S ,ΓS)avec

?

$$\Gamma S\ (x) = \Gamma\ (x) \cap S \qquad (x \in S)$$

que l'on nommera le 1 planaire d'où la notation : p-graphe 1-planaire

Si l'on adopte la définition large, c'est à dire que l'on généralise la définition en intégrant des sommets n'appartenant pas à S, cela ne change pas le 1-graphe : le 1-planaire sera toujours défini par son appartenance à la surface S et sa nature "planaire". Par contre la nature et les degrés des sommets n'appartenant pas à S devront être précisés.

Pallie l'insuffisance des planaires

Ce type de graphe peut pallier l'insuffisance constatée dés la premiére utilisation des graphes planaires (Mathis 1980, 1981) : l'impossibilité d'utiliser d'autres modes de transport que le réseau en site banal et à l'intérieur de ce réseau les transports individuels.

en [illegible] l'identification des modes [illegible]

Le p-graphe 1-planaire permet au contraire d'utiliser simultanément les transports individuels en site banal, le transport collectif en site banal, le transport collectif en site propre comme le métro, le chemin de fer, l'avion dont par définition les sommets appartiennent à la surface.

dans le cas d'une définition large, un sommet non plan correspondrait par exemple à une gare souterraine station de métro correspondance métro ou métro-RER...

Cet élargissement aux différents modes de transport n'en réduit pas l'applicabilité car les principaux algorithmes de recherche de chemins, de chemins caractéristiques, notamment le plus court ou de plus petite valeur etc sont généralisables aisément aux p-graphes (Kaufmann et Pichat t 2, 1977).

permet en + d'identifier les modes

Si cette définition permet de considérer simultanément les différents modes de transport, elle doit cependant être précisée pour gagner en efficacité, en s'inspirant des graphes chromatiques et en généralisant cette notion : le p-graphe t-modal 1-planaire. On individualise chaque mode comme un sous-graphe partiel de même couleur

description

Par convention, chaque mode de transport pris en compte par le p-graphe t-modal 1-planaire, sera décrit par une matrice associée spécifique. Il y aura donc t matrices correspondant aux t modes de transports avec $q \geq t \geq 1$ et $G_T = (E_T, \Gamma_T)$.

En effet plusieurs modes peuvent utiliser le même réseau par exemple transport automobile individuel et transport collectif autobus, même si les sommets ne coïncident éventuellement pas.

Sur chacune des matrices figurera la totalité des sommets considérés.

On aura donc :

$$G = (G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots, G_t)$$

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots\ldots, \Gamma_t)$$

$$E = (E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_t)$$

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_t) = (E_1, E_2, \ldots, E_t; \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t)$$

Chaque mode sera donc une extension de l'arc coloré et considéré comme un sous graphe coloré ou modal composé des arcs et des sommets considérés : un sous-graphe partiel de G.

passage d'un sous graphe à l'autre

Le p-graphe t-modal 1-planaire sera donc le graphe composé des t sous-graphes y compris le 1-planaire. Le passage de l'un à l'autre des sous graphes s'effectuant par le biais des sommets communs à deux ou plus sous-graphes modaux, ceux-ci étant complémentaires les uns des autres.

?

L'ensemble est composé d'arcs orientés et doté d'une relation de ressemblance - réflexive et symétrique - et de ce fait fortement connexe maximal (Kaufmann 1968)

le degré des sommets propriétés intéressantes

Compte tenue de l'extension faite, il est nécessaire d'étendre la notion de degré du graphe pour la préciser.

On conservera la notation générale :

on appelera demi degré extérieur d'un sommet x le nombre d'arcs ayant x pour extrémité initiale

$$d^+_G(x) = \sum_{y \in A} m^+_G(x, y)$$

on appelera demi degré intérieur d'un sommet x le nombre d'arcs ayant x pour extrémité finale

$$d_G^-(x) = \sum_{y \in x} m_G^-(x,y)$$

le degré d'un sommet sera l'entier

$$d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$$

En étendant cette définition, on appellera : pour le mode t_i

demi degré extérieur intra modal d'un sommet x le nombre d'arcs ayant x pour extrémité initiale dans le sous-graphe ti :

$$d_{G_t}^+(x) = \sum_{y \in x} m_{G_t}^+(x,y)$$

demi degré intérieur intra modal d'un sommet x, le nombre d'arcs ayant x pour extrémité finale dans le sous-graphe ti :

$$d_{G_t}^-(x) = \sum_{y \in x} m_{G_t}^-(x,y)$$

et pour degré intra modal :

$$d_{G_t}(x) = d_{G_t}^+(x) + d_{G_t}^-(x)$$

demi degré extérieur inter modal d'un sommet x, le nombre de modes ayant x comme extrémité initiale d'au moins un arc

$$d_{G_T}^+(x) = \sum_{y \in x} m_{G_T}^+(x,y)$$

demi degré intérieur inter modal le degré i d'un sommet x, le nombre de mode ayant x comme extrémité finale d'au moins un arc

$$d_{G_T}^-(x) = \sum_{y \in x} m_{G_T}^-(x,y)$$

et pour degré inter modal

$$d_{G_T} = d_{G_T}^+(x) + d_{G_T}^-(x)$$

et bien sur le degré d'un sommet est égal à la somme des degrés intra modal du même sommet.

Un p-graphe t-modal 1-planaire sera dit "régulier" si tous les sommets ont même degré. On pourra donc avoir des graphes réguliers intra modes, régulier inter modes ou régulier en général. Dans les situations concrètes, la régularité semble être l'exception.

Il est à noter que le degré inter-modal est pour chaque mode de nature booléenne : le sommet possède ou non la propriété d'appartenir au sous-graphe GT considéré.

Le degré intra-modal indique la richesse ponctuelle, quantitative de chaque mode, le degré inter-modal la richesse ponctuelle qualitative en mode, la variété des modes...

les degrés peuvent être considérés comme indicateurs de développement ou de potentialité de développement, c'est aussi un indicateur de l'accroissement des dimensions d'un espace.

⟹ Semis de villes

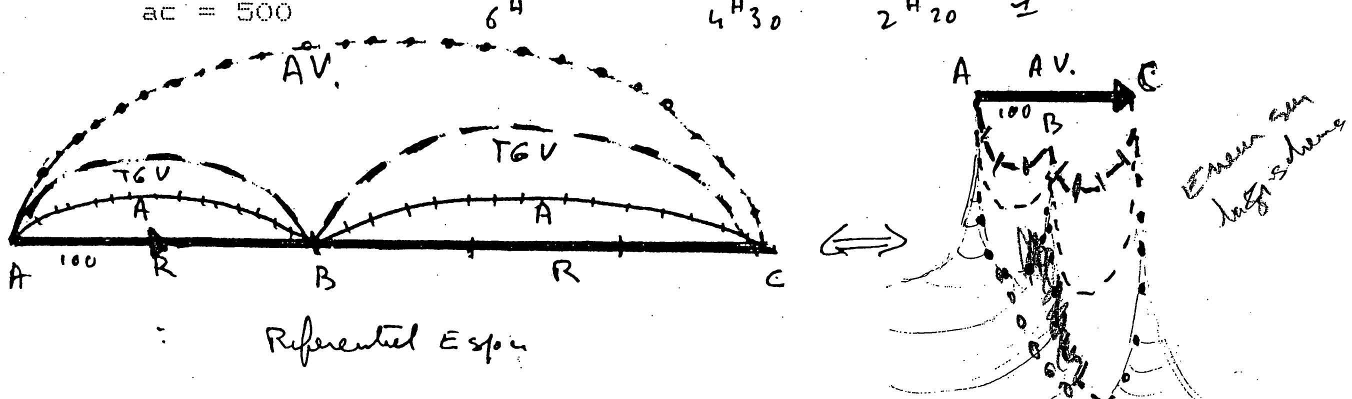
Les applications concrètes des p-graphes t-modals 1-planaires sont multiples : calcul des chemins les plus courts multimodes, transformations topologiques et cartes chroniques ou économiques dont le référentiel n'est plus la distance mais le temps ou le coût, étude des réseaux urbains, hiérarchies et zones d'influences en fonction des divers modes et des substitutions modales, application aux réseaux théoriques et réels, études des comportements des populations face aux multiples modes, à un espace de ce fait discontinu, troué, temporalités différentes en fonction de la contrainte de coût et de la substitution temps/coût....

le calcul des Valeurs chemins les plus courts entre origines et destinations est un problème classique dont les algorithmes de résolution sont connus l'utilisation du p-graphe t-modal 1-planaire facilite et implique la généralisation du problème en permettant la prise en compte simultanée des t modes de transport et la détermination du chemin le moins couteux ou le plus rapide ou une combinaison de ces deux éléments, ce qui est plus important que la notion de distance pure en économie spatiale.

Une extension prévue de cette première application consiste en la prise en compte des temps et des coûts de rupture de charge entre modes pour effectuer une comparaison multimodale complète, considérant d'une part dans un point de vue micro économique, le coût direct pour l'utilisateur, et d'autre part, dans une optique plus macro économique, globale, de planification/aménagement, le coût social.

Les transformations topologiques du graphe permettent d'établir des cartes en trois dimensions et leurs projections sur un plan en changeant de référentiel, substituant le temps ou le coût à la distance comme le montre l'exemple simple suivant

DISTANCE	TEMPS VOITURE	AUTOROUTE	TGV	AVION
AB = 200	2H30	1H40	1H	
BC = 300	3H45	2H50	1H20	
ac = 500	6H	4H30	2H20	1H



Referentiel Espace

Referentiel Temps

Cette transformation topologique du graphe permet d'élaborer des cartes qui ne soient plus basées sur les sempiternels isochrones isocoûts relatifs à une origine et qui ne permettent d'évaluer que des paires ou des triades.

Cela permet de nuancer le caractère de proximité qui est relatif au moyen de transport utilisé et non pas absolu : Nice est plus prés de Paris par avion que Tours par l'autoroute. Il apparait ainsi des classes de villes en fonction des proximités relatives.

Les conséquences de ce phénoméne sont trés importantes et se manifestent dans l'étude des réseaux urbains et des comportements vis à vis des différents niveaux hiérarchiques, l'existence d'attraction en cascade, de zones discontinues, d'espaces troués sont liés aux différents modes.

Cette variété potentielle de comportements liés à la coexistence des différents modes et de leurs caractéristiques permet de poser l'hypothèse de sensibilités différentes vis à vis du temps et du coût en fonction des revenus, du temps discrétionnaire et de l'information, donc de comportements et de temporalités différents qui coexistent sans guère s'interpénétrer.

Problème de définition de l'espace est dual des ilots de l'IMSSE → [illegible]

Pour faciliter certaines analyses, on peut définir des sous-graphes fortement connexes -par exemple des villes lorsqu'on étudie les réseaux de villes - et les considérer comme des sommets...

D'autres généralisations sont possibles : des p-graphes t-modals n planaires , c'est à dire comportant plusieurs sous-graphes appartenant à la même surface (ce qui est déja pratiquement le cas avec le dual du primal) soit à d'autres surfaces, éventuellement orthogonales les unes aux autres...L'utilisation d'hypergraphes...

→ sur l'information

Bibliographie

BERGE Claude 1983 : GRAPHES, 3° édition Gauthiers-Villars, Paris
DEMOUCRON G., MALGRANGE Y., PERTUISET R.,1964 : GRAPHES PLANAIRES, Revue Française de Recherche Opérationnelle n° 30 p33-47
DUPUY Gabriel, 1985 : SYSTEMES, RESEAUX ET TERRITOIRES, principe de réseautique territoriale, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
FLAMENT Claude, 1968 : TH2ORIE DES GRAPHES ET STRUCTURES SOCIALES, Gauthiers-Villars Paris, Mouton Paris La Haye.
GHOUILA_HOURI Alain 1964 : FLOTS ET TENSIONS DANS UN GRAPHE,thèse, Annales Scientifiques Ecole Normale Supérieure 3° série t 81 pp 267-339.
KAUFMANN A., 1968 : DES POINTS ET DES FLECHES...la théorie des graphes, Dunod, Paris.
KAUFMANN~~O~~ A., PICHAT E., 1977 : METHODES MATHEMATIQUES NON NUMERIQUES ET LEURS ALGORITHMES, t 1 Algorithmes de recherche des éléments maximaux, t 2 Algorithmes de recherche des chemins et problèmes associées, Masson, Paris.
MATHIS Philippe, 1980 : Developpement du modèle GAST par utilisation des points neutres et des graphes planaires, Ebauches du GAST Université de Tours.
MATHIS Philippe, 1981 : Morphologie urbaine et conséquences économiques, le modéle Gasturba, L'Economie du Centre Est 23° année N°1 pp241-271 Dijon.