



HAL
open science

**Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à
l'épistémographie. Didactique des mathématiques**

Maryse Maurel

► **To cite this version:**

Maryse Maurel (Dir.). Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques. 2019. hal-02070182

HAL Id: hal-02070182

<https://hal.science/hal-02070182>

Submitted on 16 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jean-Philippe Drouhard



De la linguistique à l'épistémographie

Didactique des mathématiques

Ouvrage collectif, coordonné par Maryse Maurel

Rencontre autour des travaux



de
**Jean-
Philippe
Drouhard**

ISBN 978-2-9567301

Édité par nos soins

Dépôt légal : janvier 2019

Présentation de l'ouvrage

Maryse Maurel

Le 14 décembre 2015, alors qu'il assurait un cours de didactique des mathématiques au Salvador, Jean-Philippe Drouhard, professeur à l'université de Buenos Aires est décédé subitement. Avant son départ pour Buenos Aires, il avait été maître de conférences à l'Université de Nice de 1993 à 2012.

Nous avons organisé une journée de rencontres à l'Université de Nice le 30 septembre 2015 afin de rendre compte de l'actualité de ses idées dans la recherche en didactique des mathématiques et du foisonnement de sa pensée ; il explorait sans cesse de nouvelles pistes et se nourrissait des rencontres dans diverses structures dont il fut parfois l'initiateur et souvent un élément moteur.

Nous avons décidé de réunir dans un livre électronique les actes des exposés faits à l'occasion de cette journée et de le laisser en téléchargement gratuit sur les sites *ad hoc*.

La première partie des textes réunis dans cet ouvrage présente des éléments biographiques du parcours professionnel de Jean-Philippe.

René Cori l'a connu étudiant, en binôme avec Yves Paquelier, puis thésard à Paris 7. Il l'a retrouvé plus tard dans le réseau des IREM quand Jean-Philippe a occupé le poste de directeur de l'IREM de Nice.

Yves Paquelier raconte ces années de thésard où il partagea le bureau de Jean-Philippe de 1984 à 1987 et, à travers un des travaux de recherche qu'ils ont mené ensemble à cette époque, pointe la genèse de quelques idées fondamentales qui ont guidé les recherches ultérieures de Jean-Philippe et tente d'évoquer une manière d'être ensemble intellectuellement qui a perduré pendant plus de trente ans.

Maryse Maurel parle de sa rencontre avec Jean-Philippe, de la coopération entre Jean-Philippe et le groupe GECO de Nice, puis de ce qui a été mis en place à Nice après sa nomination sur un poste de maître de conférences à l'IUFM. Elle évoque son implication dans le travail de recherche en didactique des mathématiques développé à Nice autour de l'IREM de Nice et de l'IUFM de Nice, dans le cadre du séminaire SFIDA et du groupe CESAME.

Dans une deuxième partie, nous regroupons les textes des intervenants qui ont utilisé les travaux de recherche de Jean-Philippe ou qui ont collaboré avec lui.

Giampaolo Chiappini présente la naissance de SFIDA, à l'initiative conjointe de ABC (Arzarello, Biazzi, Chiapponi) et de Jean-Philippe, en 1992 et compare

l'évolution de leurs travaux respectifs, en sémiotique et linguistique, autour de la dénotation et de la référence à Frege, puis à Pierce. Il souligne un départ en phase, puis relève les divergences.

À partir d'une relecture de l'ouvrage collectif *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*, qu'elle a coordonné avec Jean-Philippe, Lalina Coulange explore quelques perspectives ouvertes pour de nouvelles recherches en didactique de l'algèbre à partir des travaux de Jean-Philippe.

Selon plusieurs didacticiens et en particulier Drouhard et Panizza, l'entrée dans l'algèbre par les apprentissages sémio-linguistiques se fait bien avant l'apprentissage explicite de l'algèbre. Claire Margolinas montre, à partir d'une observation de classe ordinaire de cours préparatoire (6 ans), comment l'entrée dans l'écrit mathématique ne va pas de soi et comment on pourrait prendre en compte l'inventivité sémiotique dont les élèves observés font preuve en manifestant dans la retranscription d'une situation mathématique des *connaissances* en situation, alors qu'ils manquent clairement de *savoirs*.

Céline Constantin retrace la manière dont les travaux de Jean-Philippe Drouhard ont pu nourrir son travail de thèse et les recherches qui ont suivi. Elle explore, à travers des travaux d'élèves, la notion de transformation de mouvement et de substitution comme perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique.

Teresa Assude rappelle l'importance du débat scientifique dans l'activité d'enseignement et de recherche de Jean-Philippe. Elle décrit ce que fut le travail du groupe CESAME dont elle a fait partie et montre comment le travail inachevé sur l'épistémographie se situe dans le prolongement et la généralisation des premiers travaux, travail de thèse, adoption des résultats du GECO et élaboration des résultats de CESAME.

Alain Kuzniak nous présente les apports de l'épistémographie et le travail commun qu'il a engagé avec Jean-Philippe pour comprendre et préciser la notion d'outil et d'instrument dans le travail mathématique, et plus particulièrement ce qu'il a développé à ce sujet dans sa recherche sur les Espaces de Travail Mathématiques, ce qui lui permet d'avoir un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments.

Raymond Duval revient sur la thèse de Jean-Philippe pour préciser la distinction entre écriture et langage et retrouver le champ et la problématique présenté dans la thèse de 1992. Il regarde ensuite l'évolution des travaux de 1996 à 2012, et plus particulièrement ce qui concerne une théorie de l'apprentissage par les élèves du fonctionnement propre aux écritures symboliques. Il se pose enfin la question du point de vue à adopter pour découvrir les facteurs d'apprentissage des écritures symboliques

algébriques et conclut sur les limites et les perspectives.

Une troisième partie présente le rôle et l'implication du travail de chercheur de Jean-Philippe dans la politique de la didactique, en France et en Europe, à travers les exposés de Viviane Durand-Guerrier et de Paolo Boero.

Nous terminons avec des témoignages personnels et un diaporama caractéristique de l'humour de Jean-Philippe.

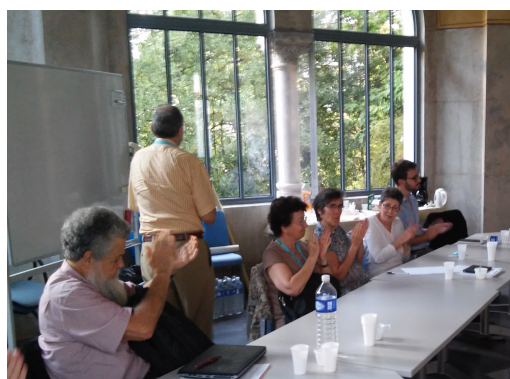
En refermant ce livre, nous refermons aussi l'aventure GECO dont les derniers fonds ont permis l'organisation de la journée de Nice. Une page se tourne.

Tous ceux et toutes celles qui ont travaillé avec Jean-Philippe ont remarqué la qualité de toutes les expériences de recherche vécues à ses côtés. Toujours sous le signe de la liberté d'action et du libre choix des thèmes de recherche, que ce soit dans le cadre associatif du GECO, dans les rencontres institutionnellement allégées de SFIDA, ou dans le débat permanent et intense de CESAME. Nous pourrions parler de recherche libre comme on parle des logiciels libres que Jean-Philippe a toujours soutenus en même temps que la libre circulation des connaissances à travers la toile.

Liberté, engagement, fidélité, création, humour.

Photos de la rencontre du 30 septembre 2016 à l'Université de Nice

v



Séminaire autour des travaux de recherche de

Jean-Philippe Drouhard,

Programme de la journée de rencontres du 30 septembre 2016

(SFIDA, SFIDE, GECO, CESAME, RDM, PME, ERME et autres),

Ouverture de la journée	9h15	9h20	
René Cori, Yves Paquelier, Maryse Maurel	9h20	10h05	Biographie professionnelle de Jean-Philippe Drouhard
Teresa Assude	10h10	10h40	En cheminant de CESAME à l'épistémographie
Pause	10h40	11h10	
Giampaolo Chippini	11h15	11h45	Dall'esperienza di SFIDA come laboratorio per il confronto di idee sulla didattica dell'algebra, una riflessione su: Potenzialità e limiti degli approcci linguistico e semiotico per analizzare il comportamento degli studenti in algebra e innovare la pratica di insegnamento
Alain Kuzniak	11H50	12h20	Epistémographie et Espaces de Travail Mathématique: une rencontre multidimensionnelle
	12h20	12h30	Questions sur les exposés de la matinée
Pause déjeuner	12h30	14h	
René Lozi	14h	14h15	Un article de maths
Claire Margolinas	14h20	15h10	Ce qu'apporte l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire
Céline Constantin	15h15	15h45	Substitutions et transformations de mouvements : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique.
Pause	15h45	16h15	
Paolo Boero, Lailna Coulanges, Nicole Biagioli Viviane Durand- Guerrier	16h50	17h 05	Politique de la didactique Comment fut inventée l'interdidactique Numéro spécial algèbre RDM Et autres ...
Discussion	17h05	17h30	Discussion sur les présentations de la journée

Table des matières

Présentation de l'ouvrage par Maryse Maurel	ix
Programme de la journée de rencontres du 30 septembre 2016	xv
Des études aux recherches	1
<i>Curieux, passionné, cultivé, toujours à l'écoute par René Cory.....</i>	<i>3</i>
<i>Nous avons dit souvent par Yves Paquelier</i>	<i>7</i>
<i>Mon chemin avec Jean-Philippe par Maryse Maurel</i>	<i>17</i>
À propos des recherches	27
<i>Dall'esperienza di SFIDA come laboratorio per il confronto di idee sulla didattica dell'algebra, una riflessione su : Potenzialità e limiti degli approcci linguistico e semiotico per analizzare il comportamento degli studenti in algebra e innovare la pratica di insegnamento per Giampaolo Chiappini.....</i>	<i>29</i>
<i>L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ? par Lalina Coulange.....</i>	<i>41</i>
<i>Substitutions et transformations de mouvement : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique par Céline Constantin.....</i>	<i>49</i>
<i>Espaces de questionnement et de débat scientifique : de CESAME à l'épistémographie par Teresa Assude.....</i>	<i>65</i>
<i>Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire par Claire Margolinas.....</i>	<i>79</i>
<i>Espaces de Travail Mathématique et Epistémographie : une rencontre multidimensionnelle par Alain Kuzniak.....</i>	<i>93</i>
<i>Écriture et pensée mathématique : le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire par Raymond Duval.....</i>	<i>105</i>
Politique de la recherche en didactique	141
<i>Souvenirs de Jean-Philippe par Viviane Durand Guerrier.....</i>	<i>143</i>
<i>SFIDA, et l'esprit de SFIDA en Europe : les contributions de Jean-Philippe Drouhard promoteur culturel par Paolo Boero</i>	<i>147</i>

Témoignages	153
<i>Nous étions si différents... par Robert Fillon</i>	<i>155</i>
<i>Jean Philippe ! par Linda Gattuso</i>	<i>159</i>
Paradoxe et humour : Comment faire échouer les élèves en mathématiques en 10 leçons	163
<i>Un peu d'histoire au sujet de ce diaporama</i>	<i>165</i>
<i>Comment faire pour dégoûter définitivement les élèves des mathématiques en 10 leçons</i>	<i>167</i>

Des études aux recherches

Curieux, passionné, cultivé, toujours à l'écoute...

René Cori

Jean-Philippe Drouhard nous a quittés beaucoup trop tôt. Il était important de pouvoir témoigner de tout ce qu'il nous a apporté, tant sur le plan professionnel que pour ses qualités humaines, et du grand vide qu'il laisse. Je remercie donc les organisateurs de cette journée de l'initiative qu'ils ont prise, et je les remercie aussi de m'avoir demandé d'y participer. Bien que nos chemins ne se soient croisés que de façon épisodique, j'ai toujours eu beaucoup d'estime et d'amitié pour Jean-Philippe, et je suis heureux de pouvoir évoquer son souvenir.

Je parlerai surtout des années 80, période de son DEA et de ses premiers pas de chercheur, où je l'ai principalement cotoyé.

Un étudiant hors norme, un binôme légendaire

Je me dois d'associer d'emblée à la mémoire de Jean-Philippe celle de notre maître commun, Daniel Lacombe, disparu le 2 février 2016, moins de deux mois après lui.

C'est en effet grâce à Lacombe que j'ai fait la connaissance de Jean-Philippe Drouhard, au début des années 1980. Lacombe venait de créer le DEA de Didactique des Disciplines de l'université Paris 7. Il avait instauré, pour l'option « *didactique des mathématiques* », un test de connaissances en logique élémentaire, et m'avait confié un cours destiné aux étudiants qui ne réussissaient pas ce test d'emblée. La logique était alors très peu enseignée dans les cursus universitaires de mathématiques (ça n'a pas énormément changé...), et la majorité des étudiants suivaient donc ce cours et passaient le test en fin d'année.

Il y avait en fait trois catégories d'étudiants dans ce DEA de didactique : ceux qui découvraient la logique et avaient vraiment besoin de travailler ce cours pour en assimiler les bases, ceux, beaucoup moins nombreux, qui, ayant une solide culture mathématique, jugeaient inutile de perdre leur temps à mon cours et se débrouillaient par eux-mêmes pour passer le test avec succès, et enfin, encore plus rares, ceux qui auraient également pu se dispenser de ce cours mais y venaient par curiosité et par goût.

Jean-Philippe Drouhard fut de ceux-là, mais le souvenir que je garde est celui d'un binôme absolument indécomposable, de deux étudiants indiscernables : *Drouhard et Paquelier*.

Et je dois dire que c'est avec beaucoup d'émotion que j'ai reçu cet appel d'Yves Paquelier me proposant de venir témoigner.

Yves ici sans son alter ego : il y a quelque chose qui ne va pas !

Pour moi, comme d'ailleurs pour Lacombe, Drouhard et Paquelier, c'était Castor et

Pollux, Oreste et Pylade, Montaigne et La Boétie, Lebossé et Hémerly ! Je ne crois pas avoir entendu Lacombe prononcer cette année là le nom de Jean-Philippe en dehors de l'expression « *Drouhard et Paquelier* ».

Il faut dire que les bougres s'étaient tout de suite révélés être des étudiants hors norme. Insatiable curiosité, aptitude à poser LA bonne question, grande facilité à saisir l'essentiel des notions en jeu, et surtout, ce qui est vraiment rare, parfaite conscience de ce qui est mathématique et de ce qui ne l'est pas. La logique est en effet le domaine où cette distinction est cruciale et éclaire le mieux notre perception de l'univers des mathématiques. Drouhard et Paquelier avaient une conscience aiguë de ce problème, et ont tout de suite compris à quel point le langage jouait un rôle essentiel dans notre façon de comprendre les mathématiques et, bien plus encore, de les enseigner. Leur présence au cours était un régal, pour l'enseignant comme pour les autres étudiants. J'ajoute que transparaissait déjà la passion pour l'enseignement, qui allait être celle de toute leur vie.

Un doctorant très actif

Après le DEA, Jean-Philippe et Yves empruntent certes des chemins distincts, mais, pour moi, le binôme demeure ! Comme d'ailleurs pour Lacombe, qui continue à me parler d'eux avec le même intérêt. D'ailleurs, ils cohabitent à Jussieu dans un bureau de l'UER de Didactique de Paris 7.

Jean-Philippe s'est engagé dans un travail de thèse sous la direction de Lacombe. Il étudie les "écritures symboliques de l'algèbre élémentaire". Mathématiques, logique, informatique, linguistique et didactique : à des degrés divers, tous les sujets qui passionnent Jean-Philippe sont au rendez-vous. Mais notre doctorant est aussi un passionné de l'enseignement, qui ne saurait demeurer loin du "terrain". Aussi la thèse sera-t-elle complétée par un travail sur la "Discussion Autour de Problèmes", variante du "débat scientifique" auquel Jean-Philippe portait un vif intérêt.

Parallèlement à son travail de thèse, Jean-Philippe Drouhard effectue en quelque sorte des travaux de commande pour Lacombe et l'équipe de recherche en didactique des mathématiques. L'idée de Lacombe est de mettre au point un outil d'évaluation, ou plutôt d'auto-évaluation, pour les mathématiques, permettant aux étudiants de s'orienter de façon efficace dans leur parcours. Il s'agit donc d'élaborer des batteries de tests, qui seront des QCM sophistiqués, avec corrigés, commentaires sur les erreurs. Lacombe veut évidemment utiliser au maximum les ressources offertes par l'informatique, à la fois pour la mise au point des tests et pour leur mise en pratique. Drouhard s'avère être l'homme de la situation. Son expertise mathématique, didactique et linguistique sera précieuse. Quant aux aspects informatiques, il n'hésitera pas à se lancer dans un travail d'apprentissage intensif pour les apprivoiser rapidement.

Il faut se rendre compte de ce qu'étaient les outils informatiques dans les années 80 !

Par exemple, mon laboratoire était en pointe en nous équipant d'ordinateurs de bureau disposant d'un disque dur de 10 méga-octets ! Le reste était à l'avenant. Et l'ambition de Lacombe de produire un didacticiel "d'un type assez raffiné" (comme il le disait dans son rapport) allait se heurter à la réalité. Mais Jean-Philippe se lance sans hésiter dans ce que je dois bien appeler un combat contre "Diane" et "Arlequin", un langage-auteur et son éditeur, conçus pour l'Enseignement Assisté par Ordinateur (EAO). Je suis très admiratif de l'énergie qu'il y consacre. Il sait bien que ces systèmes informatiques, toujours très contraignants, vont devenir obsolètes dans peu de temps et être remplacés par d'autres, tout aussi contraignants et tout aussi éphémères. Mais ce qui m'a toujours découragé et dissuadé de m'intéresser à ces outils n'arrête pas Jean-Philippe. À ce moment-là, il n'y a guère d'autre option : il va donc tout faire pour apprivoiser ces systèmes et essayer de les mettre malgré tout au service du projet. Le résultat est assez singulier : le rapport rédigé par Lacombe est accablant pour les systèmes informatiques adoptés, mais hommage est rendu aux formateurs qui ont consacré un grand nombre d'heures à y initier les chercheurs de l'équipe, et aux chercheurs eux-mêmes qui, à l'instar de Jean-Philippe, ont mis beaucoup d'énergie dans cet apprentissage. Au fond, les mathématiques, la didactique, la linguistique, parfaitement maîtrisées par Jean-Philippe, n'ont pas encore trouvé une technique informatique à la hauteur de leurs besoins.

Mais la conclusion du rapport de Lacombe laisse rêveur : "[...] un créneau intéressant [...] semble se dessiner : l'EAO télématique, c'est-à-dire des didacticiels implantés sur des serveurs et distribués par le réseau téléphonique [...] à des utilisateurs individuels disposant d'un Minitel" !

J'ignore si ce projet a été réellement mis en oeuvre. J'ignore surtout si Jean-Philippe s'y est engagé (je n'en ai pas trouvé de trace). J'en doute, car sa thèse allait tout de même l'occuper de plus en plus. Mais s'il l'avait fait, il est évident qu'il y aurait mis toute son énergie, qui était considérable. Il reste de ce travail, outre le rapport, à vocation administrative de Lacombe, un rapport rédigé par Jean-Philippe, qui décrit en détail un test de mathématiques effectivement proposé à des étudiants de premier cycle en 1985-1986. Si les résultats bruts ne fournissent pas une information très utile plus de vingt ans plus tard, l'analyse qu'en faisait Drouhard et les commentaires qui l'accompagnaient, mais aussi et surtout le contenu des questions, seraient sûrement très utiles aux enseignants d'aujourd'hui et à leurs étudiants. Il est dommage que ce document dorme dans des boîtes d'archives. Aussi nous en proposons une version numérisée.

La période IREM

Vers la fin des années 80, je perds de vue le binôme Drouhard-Paquelier. Chacun d'eux va suivre sa propre route, ponctuée de recherche, d'enseignement, de réflexions sur notre

métier, d'épopées internationales. De toute façon, je ne suis certainement pas compétent pour évoquer le travail de Jean-Philippe en didactique. Il suffit de consulter les autres témoignages de cette journée pour comprendre l'importance et la profondeur de ses contributions dans ce domaine.

Mais une dizaine d'années plus tard, je vois Jean-Philippe réapparaître, dans l'univers des IREM. Il est désormais Maître de Conférences à Nice et animateur, évidemment très actif, de l'IREM local, dont il ne tardera pas à prendre la direction (1997-2000). Nous nous croisons alors de temps en temps et c'est toujours un plaisir de discuter avec lui. Sa curiosité est intacte, son attachement à un enseignement de qualité aussi. Il ne sépare pas son activité professionnelle de ses réflexions personnelles sur le monde dans lequel nous vivons : c'est un des traits que j'ai appréciés en lui dès le début.

Lorsque je deviens moi-même directeur d'IREM à Paris, Jean-Philippe a terminé son mandat de directeur mais est directeur-adjoint de l'IREM de Nice, et c'est à ce titre que je le retrouve à de plusieurs réunions de l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'IREM), où il représente souvent sa directrice.

Il se tourne alors déjà, et de plus en plus, vers l'Amérique latine, qui ne le lâchera plus, et qui sera le lieu de sa disparition tragique, en plein exercice de ce métier qu'il aimait tant et à qui il a tant donné.

Il nous manque...

S'il avait été là aujourd'hui, je suis sûr qu'il m'aurait posé une question, à laquelle je n'aurais sans doute pas su répondre de façon pertinente. Je lui aurais répliqué par une autre question. Et nous serions partis dans une disussion à bâtons rompus, sur la logique, sur les maths, sur l'enseignement (l'enseignement, toujours l'enseignement !), sur nos institutions sclérosées... Sa curiosité, sa qualité d'écoute, sa grande culture, son enthousiasme, m'auraient une fois de plus impressionné.

Tel fut pour moi Jean-Philippe Drouhard. Il nous manque énormément.



Nous avons dit souvent...

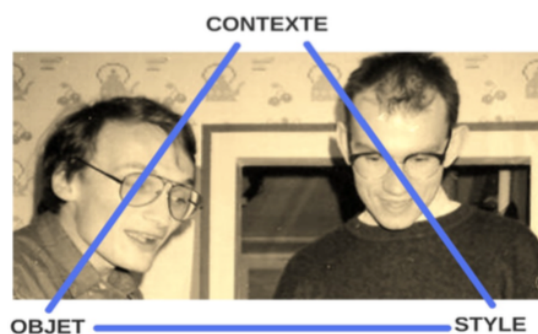
1984-1987

Trois ans de travail (mais pas que...) avec Jean-Philippe Drouhard

Yves Paquelier

De 1984 à 1987, j'ai partagé avec Jean-Philippe Drouhard (permettez-moi d'écrire par la suite simplement Jean-Philippe...) un statut (allocataire de recherche en didactique des mathématiques à Paris VII), un enseignement (TD d'éléments de mathématiques au CNAM) et des conversations. Le premier fut l'occasion d'une rencontre, le deuxième fut l'objet d'une recherche et nos conversations furent l'expression d'une complicité intellectuelle, d'une manière d'être ensemble, d'un style...

Je voudrais, dans ces quelques lignes, rendre compte des ces trois aspects de ce « triangle »¹ (contexte - objet - style) en me centrant essentiellement sur l'objet (recherche et expérimentation sur un dispositif d'enseignement) par nature moins anecdotique que le contexte et plus « objectif » que le style de notre relation mais sans rien négliger de ce qui pourrait aider à saisir ce que furent pour nous ces *années de formation* et à quel point² elles annoncent une part importante du chemin de chercheur qui fut celui de Jean-Philippe.



Le contexte

Pendant trois années, nous³ avons donc partagé le même bureau en tant qu'allocataires de recherche à l'UFR de didactique des disciplines de Paris VII. A vrai dire Jean-Philippe m'avait devancé d'une année dans ce parcours, obtenant son DEA un an avant moi, comme la marque

¹ Jean-Philippe affectionnait ces visualisations et me reprochait souvent d'être plus oral que visuel

² J'en ai été moi même surpris en me replongeant, trente ans après, dans nos écrits de l'époque

³ Plaisir d'écrire un « nous » qui ne soit pas la forme normalisée d'un « je » mais un vrai pluriel celui d'un duo !

de ce « grand frère » qu'il a toujours été pour moi dans ce dédale universitaire dont les rites m'ont vite dépassés (agacés ?) et duquel Jean-Philippe, quoique non moins critique, avait une bien meilleure connaissance.

C'était le Jussieu de 1984, encore tout plein d'amiante avec ses couloirs aveugles et interminables. C'était un minuscule bureau, presque oublié, avec deux tables, un tableau et bientôt envahi de livres et de papiers au-dessus desquels trônait un des premiers Macintosh.

C'était l'UFR de didactique des disciplines dirigée, en ces temps, par Josette Adda et Daniel Lacombe. L'une nous maternait, l'autre nous fascinait, naïfs ignorants que nous étions des guerres plus ou moins larvées qui agitaient le petit monde de la didactique d'alors et dont nous serions parfois les victimes collatérales.

Jean-Philippe venait de terminer des études de linguistique⁴ et, « venant d'ailleurs », avait déjà cette manière particulière de « regarder les problèmes autrement » loin des parcours obligés et des chapelles qui s'opposaient.

Ce sont sans doute cette « naïveté » (tout nous semblait possible et nous allions révolutionner l'enseignement des mathématiques) et cette étrangeté (« didacticiens buissonniers et velléitaires » comme il nous fût dit à l'époque) qui firent que nous avons fait plus que nous croiser dans ce petit bureau de ce Jussieu d'antan...

L'objet de recherche⁵

L'occasion d'incarner cette complicité naissante en travaillant ensemble nous fût offerte par Serge Hocquenghem⁶ qui nous proposa d'assurer les séances de travaux dirigés (TD) de son enseignement *Éléments de mathématiques* qu'il assurait au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM). Cet enseignement « préparatoire » s'adressait à des étudiants-travailleurs (cours le soir ou le samedi) souhaitant acquérir le niveau d'un baccalauréat scientifique afin de pouvoir entreprendre un cycle d'études au CNAM.

Là aussi, Jean-Philippe m'avait précédé et avait déjà assuré ces TD durant l'année

⁴ Je venais pour ma part d'achever une maîtrise de logique et une maîtrise de philosophie.

⁵ Cette recherche a fait l'objet de plusieurs publications indiquées à la fin de ce texte.

⁶ Hommage soit rendu ici à la douceur percutante et l'ironie bienveillante de ce « maître » qui n'en avait pas l'air... C'est d'ailleurs lors d'une conversation tous les trois, en 1989 ou 1990, que nous est venue l'idée d'un manuel (dans la lignée ironique de ceux Paul Watzlawick) expliquant comment faire échouer TOUS ses élèves en mathématiques. Le livre n'a jamais vu le jour. Serge m'avait envoyé un premier chapitre (que je dois avoir quelque part) sur l'ordre des exercices dans une évaluation et Jean-Philippe, qui pensait souvent à ce projet, en a conçu, des années plus tard, le diaporama qui termine comme il se doit ce livre !

scolaire 1983-1984. Peu satisfait (comme souvent) de son année et se posant une foule de questions (comme toujours !), Jean-Philippe me proposa « d'améliorer tout cela » durant l'année scolaire 1984-1985 qui sera dénommée par la suite « année 0 ».

Comme les articles écrits juste après, les lignes qui suivent vont tenter de décrire notre cheminement intellectuel de l'année 0 à l'année 1 (1985-1986) et suivantes en insistant sur ce qui me semble être l'apport spécifique de Jean-Philippe⁷ et qui constitue, à mon sens, tant sur le fond que sur la forme, un « socle fondamental » de ses recherches ultérieures.

Je le ferai en citant au maximum (phrases en italique, avec en gras les expressions, forgées au fur et à mesure, qui nous servaient alors de points de repère, de langage commun) les articles que nous avons écrits afin d'être au plus près de notre réalité du moment et d'éviter la reconstruction rétrospective d'une pensée plus de trente ans après. Je me contenterai juste de contextualiser, raconter certaines étapes de cette modeste aventure de l'esprit, ce que nous n'avons pas écrit dans les articles par respect des « normes » de la recherche.

L'année 0

En septembre 1984, jeunes chercheurs en didactique des mathématiques (*forts de nos études récentes en didactique des mathématiques*), naïfs et optimistes, nous avons donc conçu ensemble notre enseignement dans ces séances de TD pour tenter *d'améliorer tout cela* !

Nous avons explicitement deux objectifs :

- **l'heuristique éclairée** : *explicitement au maximum la démarche de résolution de problèmes en la saupoudrant de conseils logiques et méthodologiques*
- **le garage** : *faire en sorte que le TD fonctionne comme un « atelier de garagiste » où chaque étudiant apporte les problèmes lui ayant créé des difficultés afin que l'enseignant y réponde.*

Notre souci d'alors était **l'individualisation de notre action** : face à *l'impression de masse de ces TD hétérogènes aux effectifs importants (jusqu'à 150 étudiants en amphithéâtre) composés d'étudiants le plus souvent passifs, muets et anonymes et aux cursus individuels très différents, nous avons voulu créer une relation de travail plus individualisée avec chacun d'entre eux.* Fiche détaillée permettant un suivi individuel, exercices *post-devoirs* individualisés qui accompagnaient la restitution des copies en reprenant des difficultés

⁷ Même s'il est parfois difficile de *rendre à César* tant nous pensions ensemble...(cf dernière partie)

analogues à celles que l'étudiant avait rencontrées et qu'il était invité à nous rendre *de manière à engager un dialogue personnel centré sur ses difficultés propres* étaient deux des outils que nous avons alors imaginés et mis en œuvre.

Notre attitude était alors teintée de **pragmatisme** (*résoudre les problèmes d'enseignement au fur et à mesure que nous les rencontrions*) et de **bonne volonté** (*effort de l'enseignant pour « faire mieux »*) « bonne volonté » qui était également attendue, en retour, de la part des étudiants dans une *attitude participative posant des questions et détaillant leurs difficultés*. Nous parlions alors entre nous de démarche **pratique, ostensive et incantatoire**.

Si ce pragmatisme volontaire de notre tandem doit beaucoup à Jean-Philippe, ce besoin de continuellement analyser et qualifier notre pratique de chercheurs, ce goût (ou cet abus) du « méta point de vue » nous importait à parts égales et avec le même plaisir (chronophage), occupant souvent nos interminables conversations. C'est ce qui fit dire un jour à Serge Hocquenghem que « non contents de réfléchir pour enseigner, vous prenez soin d'enseigner pour réfléchir ». Cette posture intellectuelle de départ n'a jamais, il me semble, quitté mon compère d'alors.

Le bilan de l'année 0 fut cruel et sans appel :

Le silence des étudiants : les étudiants n'ont pratiquement pas posé de questions : le « garage » n'a pas fonctionné. Cet état de fait de plus en plus pesant au cours de l'année révélait une posture de travail assumée par les étudiants lors d'un questionnaire d'évaluation de fin d'année (« le TD n'était pas là pour ça ») et cohabitait avec des questions individuelles après la fin de la séance, presque sous le manteau.

Échec du suivi individuel : l'effectif trop important et la présence irrégulière (assiduité non obligatoire) n'ont pas permis une connaissance réelle des difficultés de chacun. Par ailleurs, aucun étudiant ne remit (ni même ne chercha, selon le questionnaire d'évaluation) les exercices post-devoirs.

Retour vers « la correction commentée » : face aux difficultés décrites ci-dessus, nous sommes revenus à la correction classique d'exercices, agrémentée d'un soupçon d'heuristique et d'un peu de réflexion didactique. Le tout finissait à ressembler à un « monologue à plusieurs voix » d'un enseignant de rendre vivant ce qui n'était qu'un discours sans interlocuteurs.

La belle semaine : remise en cause et construction de l'année 1

Face au contraste entre les intentions de départ et le déroulement effectif de l'année, nous avons décidé, en juin 1985, de « tout remettre à plat ».

Nous l'avons fait dans un cadre cher à mon cœur et qui l'est devenu pour Jean-Philippe (chacun devrait faire sa « géographie des lieux où il pense ») et dans un moment de notre vie, presque trentenaires bâtissant notre avenir, où tout semblait possible. De nos conversations interminables face au lac magnifique, de nos cents pas fébriles dans l'allée de gravier, de nos eurékas exaltés suivis de nos doutes confus (et réciproquement), nous avons toujours gardé (chacun à sa manière, lui plus clinique et moi plus poétique) le souvenir ému et fondateur. Certes, on peut toujours ironiser sur ces enthousiasmes excessifs, sur ces montagnes accouchant de souris... Mais c'est confondre la clairière avec le chemin et le chemin avec le cheminement !

En quelques mots, nous avons, cette belle semaine :

Préciser, comme un préalable, **deux points essentiels** : nous avions sous-estimé (sans les ignorer, saint Bourdieu priez pour nous) la résistance des contraintes institutionnelles mais nous refusions cependant le cynisme tentant d'un certain déterminisme (la recherche consistant, avec un plaisir ambigu, à étudier, souvent avec brio, pourquoi et comment « rien ne peut changer »). *C'était au contraire dans le manque de solidité de notre analyse didactique qu'il fallait chercher la raison de la pauvreté des modifications obtenues.*

Procéder à **de multiples remises en cause** dont en particulier : celle d'une certaine croyance diffuse en la vertu magique de l'individualisation de l'enseignement et celle de ce désir (maladroit) de vouloir que les étudiants parlent en mathématiques. Pour contourner les deux inconvénients du nombre et de l'hétérogénéité, nous avons voulu « enseigner à chacun » au lieu de *prendre en charge ce moment collectif*. Interprétant le silence comme la marque de l'ennui ou l'indifférence (pour des élèves pourtant motivés au point de venir le samedi sans obligation) alors qu'il s'agissait plutôt d'un réflexe de défense d'adultes se retrouvant étudiants, nous n'avons pas cherché *quelle règle du jeu instaurer pour que prendre la parole devienne le comportement naturel et nécessaire de chacun au cours des TD.*

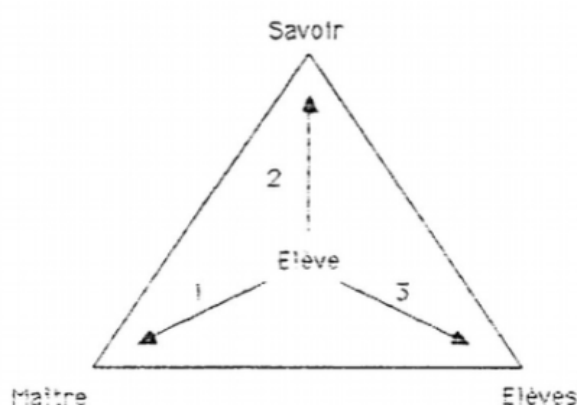
Et surtout dessiner (au sens propre, voir le tétraèdre ci-dessous et figuré) le **triple changement d'attitude des étudiants** qu'il nous fallait viser et qui nous a fourni le cadre théorique et la direction méthodologique pour penser et bâtir le projet de l'année 1. Nous

l'avons alors imaginé et exprimé sous forme de trois impératifs (au sens programmatique du terme et non plus incantatoire) :

1. *Faire passer la communication maître-élève du registre rhétorique du bon/mauvais au registre rationnel vrai/faux,*
2. *Faire en sorte que l'étudiant parle du problème plutôt qu'il n'ait le sentiment que « le problème parle de lui » à travers le verdict de l'enseignant,*
3. *Faire en sorte que les étudiants s'engagent à la première personne dans une discussion contradictoire portant sur la vérité de leurs affirmations.*

Il nous est alors vite apparu (jeunes chercheurs en didactique armés du fameux triangle : Élève – Maître – Savoir) que ces trois déplacements de perspective (évoqués schématiquement ci-dessus) concernaient respectivement : *le rapport de l'élève au Maître, le rapport de l'élève au (texte du) Savoir et le rapport de l'élève à ses condisciples.*

Nous nous sommes alors représenté (là aussi à la recherche d'un langage commun, visuel dans le cas présent et Jean-Philippe tenait sans doute le crayon...) la situation sous forme d'un tétraèdre, ce *tétraèdre didactique* qui fut comme une référence, presque un « totem », entre nous, qui fut au cœur de nombreuses de nos recherches ultérieures (argumentation, groupe Cesame...) et dont la première apparition publique (que je reproduis ci-dessus) date de mai 1987 (dans le *cahier de didactique des mathématiques n°44* cité en référence) :



Bien sûr avec cette sagesse toujours un peu blasée du regard rétrospectif et sous la forme un peu schématique à laquelle nous contrainst l'espace limité de la page et les canons de la littérature de recherche, ce moment de travail de nos esprits dialoguant que nous avons vécu

avec tant d'intensité (et dont ce tétraèdre est comme l'emblème) peut apparaître bien pauvre, relevant davantage de l'habillage de lieux communs et de l'invention de l'eau tiède que de la révélation intellectuelle et heureuse qui fut pourtant la nôtre.

Comme l'écrit Jerry Fodor en exergue de *la modularité de l'esprit* en 1983 : *la recherche est ce processus qui voit les papillons se métamorphoser en chenilles*, phrase que, par ironie et lucidité, nous aimions souvent nous répéter avec Jean-Philippe à l'époque⁸ ! Et pendant trente ans lors de nos rencontres (de travail ou simples conversations) disons que conscients des *chenilles* que nous produisions (surtout lui qui fut plus capable de « jouer le jeu ») nous n'avons jamais renoncé à ses *papillons* dans les yeux que donne la belle idée quand elle est partagée. Et ce ne fut pas le moindre apport de ce *séminaire initial*...

Il faudrait encore...

Il faudrait encore expliquer comment tout ceci s'est cristallisé dans la notion de **Discussion Autour de Problèmes (DAP)** au niveau à la fois **théorique** (*discussion, raisonnement et vérité* fut le titre d'un séminaire que nous avons co-animé en juillet 1986 à la quatrième école d'été de didactique des mathématiques), **didactique** (dispositif d'enseignement) et **d'observation** (étudier une forme d'interaction et ses multiples manifestations). Il faudrait, pour être historiquement correct, rappeler ce que nous empruntons, dans cette élaboration, aux riches travaux de l'équipe de Marc Legrand sur *le débat scientifique*, emprunts que nous reconnaissons à l'époque tout en pointant les nuances ou les différences de point de vue (en particulier dans le rapport de la discussion avec la vérité).

Il faudrait revenir sur les présupposés dégagés par ce travail ensemble (*principes ou hypothèses* nous n'avons jamais tranché) qui structuraient notre réflexion commune et guidaient notre action : *intérieurisation du débat, nécessité du regard réflexif, résolution rationnelle du conflit comme expérience mathématique privilégiée, primat du collectif sur l'individuel comme moyen d'agir*...

Il faudrait décrire concrètement le dispositif (incarnation de cette réflexion) mis en place durant l'année 1 et le déroulement effectif de cette année (*enthousiasme, désenchantement, crise, complicité*), c'est à dire comment le papillon est devenu chenille, et on verrait alors quelques jolis schémas dont Jean-Philippe avaient le secret et le besoin !

⁸ Et qui m'inspira, vingt-cinq ans plus tard, une chanson...mais c'est une autre histoire et presque une autre vie...

Tout ceci est (dans la) littérature citée en référence...

Il faudrait aussi suivre « à la trace » dans les travaux ultérieurs de Jean-Philippe, les marques comme des empreintes, de ces premiers pas de chercheurs. D'autres sont mille fois plus qualifiés que moi pour cette tâche et les contributions qui constituent cet ouvrage répondent parfois et en partie à cette question. Si je devais risquer une hypothèse, je dirais que la question « **de quoi fait-on l'expérience quand on fait (apprend et enseigne) des mathématiques ?** » qui me semble traverser tous les travaux de Jean-Philippe (de la didactique de l'algèbre à l'épistémographie en passant par la question de la nécessité avec le groupe Cesame) trouve son origine dans cette première recherche que nous avons partagée.

Mais, avant tout, il ne faudrait pas faire penser que l'esprit d'un homme (chercheur ou non) se limite à ce qu'il produit ni que l'essence d'une rencontre intellectuelle s'épuise dans le compte rendu de ce qu'elle a permis de faire advenir.

Il faut donc, pour finir, tenter de mettre des mots sur ce que l'on pourrait appeler le « style » de nos échanges en ces temps de formation.

Le style

Cela pourrait commencer par un inventaire à la Prévert :

- Un bureau encombré de dix mètres carrés où nos cent pas s'entrecroisaient,
- Des milliers de petits mots griffonnés à l'encre, violette pour lui marron pour moi, avec nos fiers stylos plumes,
- Des schémas au tableau qui portaient la pensée de Jean-Philippe et souvent ne me parlaient guère,
- Des sachets de Maalox (qu'il me fit découvrir, déjà « accroc » quand je l'ai connu) pour calmer nos estomacs d'anxieux,
- Des phrases interminables, ouvrant mille parenthèses, dans lesquelles nous nous perdions ensemble ou perdions l'autre,
- Des difficultés à écrire la moindre phrase qui ne nous semble pas immédiatement imparfaite, prétentieuse ou ridicule,
- Cette incapacité à finir à temps un article, un compte-rendu,

- Cette griserie de converser en rebondissant sur les propos de l'autre (« c'est exactement ça, je dirai même... »)
- L'effarement partagé devant les guerres intestines de ce microcosme de la recherche en didactique des mathématiques et notre ironie commune qui nous permet souvent de nous en protéger,
- Des dizaines et des dizaines de lectures partagées, offertes à l'autre comme un trésor, comme une colère ou comme un doute : Pascal et Chomsky, Perelman et Ducrot, Ricoeur et Jay Gould...
- Des chemins de traverses qui nous semblaient toujours plus riches que les passages obligés,

Cela devrait dire également la conviction que nous avons (plus par goût du jeu que par foncière modestie) de toujours « bricoler », tâtonner. Dans ce premier article la métaphore proposée *du marais* (pour le flou des phénomènes) *et des pilotis* (pour les quelques pieux conceptuels où nous nous perchions pour y voir mieux) est une tentative pour dire ce rapport à la recherche que nous partagions.

Cela oserait prendre le risque de dire l'émotion intellectuelle (et cette expression n'était ni pour Jean-Philippe ni pour moi un oxymore) que nos « découvertes » communes, nos compréhensions simultanées nous procuraient parfois. Je me souviens de ce jour où, lisant ensemble *un destin philosophique* de Jean Toussaint Desanti, nous avons compris ensemble en quoi « la vérité ne s'imposait pas d'elle-même » et de ce que cela signifiait pour la transmission des vérités mathématiques. Nous en aurions sauté de joie et pleuré de plaisir. Je pense même que nous l'avons fait !

Et enfin cela aurait le talent d'écrire que je n'ai pas pour dire le charme de nos conversations (plus souvent confuses que brillantes) et l'élan que nous y puisions (même plus tard quand nous nous croisions moins souvent) comme en écho à cette première aventure...

Feuilletant le livre de Desanti mentionné ci-dessus tout en cherchant mes mots pour ce paragraphe impossible, je tombe « en arrêt » sur cette phrase où Desanti parle de son rapport avec Maurice Clavel :

notre affaire n'était pas de nous convaincre mais de nous inquiéter.

Et je me dis que tout est dit !

Il reste juste à écrire en entier ce vers de Baudelaire que nous nous citions souvent dans nos courriels transatlantiques et que j'attache à jamais au souvenir de Jean-Philippe :

Nous avons dit souvent d'impérissables choses...



Références

Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (1986) Discussion raisonnement et vérité, *séminaire à la IV^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*.

Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (1987) Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques au CNAM, *Cahier de didactique des mathématiques n°44*.

Texte accessible en ligne Cahier de didactique des mathématiques n°44 [Cahier de didactique des mathématiques n°44](#)

Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (1987) Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques avec des adultes, *Éducation permanente n°90* (pp 95-110).

Mon chemin avec Jean-Philippe

Maryse Maurel

Premières rencontres

J'ai rencontré Jean-Philippe dans le cadre du GECO, au début des années 90, il participait avec François Léonard au groupe Hypermedia de l'INRP⁹. J'avais un poste à la faculté des Sciences de Nice et une partie de mon service à l'IREM de Nice. J'avais rejoint le GECO¹⁰ fondé en 1981 par François Léonard, Catherine Sackur et Jean-Pierre Ancillotti. Comme nous Jean-Philippe travaillait sur l'enseignement des débuts de l'algèbre. Nous avons eu envie d'un travail commun. Jean-Philippe est venu à Nice pour le séminaire du GECO le 11 mars 1991, il est revenu au mois de mai pour plusieurs séances de travail. En 1992, il est venu environ une fois par mois pour les vendredis après-midis du GECO. J'allais le chercher à l'aéroport vers midi, nous déjeunions face à la mer dans un restaurant de CAP 3000 et nous parlions déjà beaucoup. De mathématiques, de recherches sur l'enseignement des mathématiques, de nous, de nos centres d'intérêt, de nos passions. Nous apprenions à nous connaître. Ce fut le début d'une amitié profonde, d'une longue collaboration de recherche et de discussions sans fin. Jean-Philippe vivait et travaillait encore dans la région parisienne, il était PIUFM (Professeur d'Institut Universitaire de Formation des Maîtres) à l'IUFM de Cergy-Pontoise et terminait sa thèse sur *Les écritures symboliques de l'algèbre* qu'il a soutenue le 15 décembre 1992 à l'université Paris 7. Le jury était composé de Jérôme Chastenot de Géry, président, de Daniel Lacombe, directeur de thèse, de Hélène Bestougeff, Jean-Pierre Desclés et Colette Laborde, rapporteurs, et de Bernard Dumont et Marc Legrand, examinateurs.

Pendant deux ans, en 1991-92 et 1992-93, nous, les membres du GECO, avons rencontré régulièrement Jean-Philippe. Il apportait son travail sur les expressions symboliques de l'algèbre sous leur aspect sémantique et syntaxique et la notion de "dénotation" issue de Frege. Le GECO apportait la théorie de la triple approche, des connaissances locales et des trois orientations (Léonard & Sackur, 1991). Nous avons échangé et assimilé nos résultats respectifs. Une question s'est naturellement posée à nous : "Existe-t-il en algèbre des connaissances locales syntaxiques comme il existe des connaissances locales mathématiques ?". Nous avons commencé à chercher des connaissances locales d'algèbre en menant des entretiens d'explicitation avec des étudiants de première année et des élèves de seconde au lycée, pour construire un modèle de ces connaissances. C'était une fertilisation

⁹ INRP, Institut National de la Recherche Pédagogique, remplacé aujourd'hui par l'IFE, Institut Français de l'Éducation.

¹⁰ GECO ou Association pour le développement de la recherche sur le Génie Cognitif.

croisée intéressante dans la suite logique du travail du GECO orienté mathématiques-psychologie et de celui de Jean-Philippe, orienté mathématiques-linguistique.

SFIDA 0

Jean-Philippe était en relation avec ABC (Ferdinando Arzarello, Luciana Bazzini et Giampaolo Chiappini) qui travaillaient aussi sur l'enseignement de l'algèbre et sur la dénotation à partir de Frege. Ils ont organisé un groupe de travail à Turin en octobre 1992 (WALT ou *Workshop on Algebraic Learning in Torino*) que nous appellerons plus tard le SFIDA¹¹ 0. Jean-Philippe y a présenté nos premiers résultats sous le titre *Shells, shelles and hollow shells : towards a model of elementary algebraic representation* (Drouhard, 1992).

Il y aura ensuite SFIDA 1 à Turin, le 23 novembre 1993 sur le thème : *Calcul formel et algèbre*. SFIDA 2 à Gènes, le 20 mai 1994 sur le thème : *Dénotation et langage*, puis SFIDA 3 à Nice le 2 décembre 1994 sur le thème : *L'algèbre vue de Marseille*. C'est le début de l'aventure SFIDA¹² qui prendra fin le 30 novembre 2012, avec SFIDA 38, juste avant le départ de Jean-Philippe pour l'Argentine. Aventure passionnante et magnifique faite de discussions parfois très serrées mais toujours productives et d'amitiés certaines. Paolo Boero et Giampaolo Chiappini sont ici aujourd'hui pour en témoigner.

Nomination à Nice

Après sa soutenance de thèse, Jean-Philippe a candidaté sur un poste de maître de conférences à l'IUFM de Nice. Fortement soutenu par René Lozi et Martin Zerner, il l'a obtenu. À la rentrée universitaire de septembre 1993, il a donc emménagé à Nice rue de l'Opéra, a disposé d'un bureau à l'IUFM et a partagé avec moi le bureau de l'IREM à l'université des sciences de Nice dans le parc Valrose.



La Vénus et son banc

¹¹ SFIDA, Séminaire Franco Italien de Didactique de l'Algèbre.

¹² Les actes disponibles se trouvent sur le site <https://sites.google.com/site/actessfida/>

Jean-Philippe et moi avons souvent déjeuné ensemble au restaurant universitaire, pris notre café à la cafétéria de Valrose, palabré à l'infini au soleil sur le banc face à la Vénus, entre la bibliothèque et le grand château, nous avons passé de grands moments dans le bureau, souvent le soir, et nous avons poursuivi et approfondi le dialogue commencé l'année précédente, nous avons rompu des bâtons¹³ par centaines, nous avons renforcé notre amitié, nous avons posé les bases de CESAME.

GECO et Faire Faux

Avant de parler du projet CESAME, je voudrais évoquer la suite du travail GECO sur l'algèbre. Jean-Philippe nous a apporté la dénotation et nous a appris à la faire fonctionner. Nous avons continué les entretiens Faire Faux conçus dans les années 90 au sein du GECO avant l'arrivée de Jean-Philippe. Ces entretiens s'adressent aux élèves qui travaillent dans l'orientation de conformité et ne sont pas réceptifs aux contradictions qu'on leur oppose, ceux qui n'ont pas de procédures de contrôle. Un mathématicien, qui fait du "calcul aveugle" au sens de Leibniz, c'est-à-dire qui travaille dans l'orientation de conformité d'où l'algèbre tire sa force, est susceptible à tout instant de suspendre ce type de calcul, de revenir à l'origine mathématique de la règle utilisée ou de vérifier la justesse de ses calculs par des arguments éventuellement autres qu'algébriques : il passe alors dans l'orientation de performance ou dans celle de compréhension. Dans le modèle du GECO (GECO, 1994), ce qui caractérise un mathématicien professionnel, c'est sa capacité à changer rapidement d'orientation de travail. Par contre, les élèves en difficulté n'ont pas appris à le faire, ils déroulent leurs calculs sans se poser de question (Sackur & al, 1997). Nous avons appelé *calculateurs aveugles*, en référence au calcul aveugle de Leibniz, des élèves qui travaillent en conformité, avec leurs connaissances locales, et qui ne disposent pas des outils nécessaires pour contrôler leurs calculs, ou qui, s'ils en disposent, ne les utilisent pas. Ils n'utilisent pas notamment la conservation de la dénotation dans les réécritures des expressions algébriques et disent : "Et alors ? Moi j'ai appliqué les règles, si ce n'est pas bon ce n'est pas de ma faute." En gros, la faute en revient aux mathématiques, ou au professeur qui a posé une mauvaise question. Ces élèves ne se sentent pas responsables des résultats qu'ils produisent, ils font, à leur manière, le travail demandé par le maître ; au maître de faire son travail, c'est-à-dire de contrôler le vrai et le faux. À ces élèves nous proposons une écriture algébrique comme " $(a + b)^2 =$ " et nous leur demandons d'écrire quelque chose de faux, quelque chose de toujours faux. Ensuite nous les suivons avec un accompagnant qui utilise les techniques de l'explicitation pour reconfigurer leurs connaissances à partir d'une connaissance dont ils sont absolument sûrs.

¹³ Cette expression qui nous était familière au sein du groupe niçois découle évidemment de l'expression française "discuter à bâtons rompus".

Jean-Philippe s'est emparé de ce dispositif de recherche et d'aide au changement, et il l'a théorisé. Nous avons préparé une présentation pour SFIDA 2, à Genova, le 20 mai 1994, sur le thème : *Dénotation, sens, langage*. Nous l'avons rédigée pour les actes SFIDA sous le titre *Calculateurs aveugles, dénotation et entretien Faire Faux* (où l'on trouve des exemples d'entretiens Faire Faux) (GECO, 1994).

Le projet CESAME

Au départ, il y avait le dispositif didactique du débat scientifique développé par Marc Legrand à Grenoble. Jean-Philippe l'avait utilisé avec Yves Paquelier à Paris au CNAM. Je commençais aussi à l'utiliser dans mes enseignements de première année et j'avais organisé à Nice le 18 mai 1991 une journée de la CIIAn (Commission Inter Irem Analyse) où était venu Marc Legrand (Legrand, 1993). Le "grand projet" a pris naissance dans les questions didactiques autour du débat scientifique.

Le dispositif du débat scientifique nous intéressait par les valeurs qu'il portait et que nous partagions. Nous cherchions à établir une relation individualisée avec chaque étudiant, nous voulions que chaque étudiant s'engage à la première personne dans son travail mathématique, nous faisons l'hypothèse que chaque étudiant était capable d'apprendre des mathématiques et que ses connaissances formaient un système cohérent pour lui (principes de base du GECO). Nous empruntons à Marc Legrand ce qui était au cœur du débat scientifique, nous voulions faire en sorte que le travail sur le vrai et le faux soit à la charge de l'étudiant, que ce travail se fasse dans des discussions autour de problèmes ouverts à énoncés courts, pour que chaque étudiant puisse faire l'expérience de la contradiction, pour qu'il se demande qui tranche (le professeur, les mathématiques ?), nous voulions qu'il écarte l'aspect juridique (on fait comme ça parce que c'est comme ça qu'on doit faire ou parce que le professeur le dit), et nous voulions faire le lien avec l'orientation de conformité du GECO.

Il y avait aussi l'idée que les étudiants construisaient des connaissances particulières dans l'expérience du débat scientifique. Lesquelles ? Comment y accéder ? Comment les institutionnaliser ?

L'apport du GREX

De mon côté je travaillais depuis 1989 dans le GREX (Groupe de Recherche sur l'Explicitation). Je disposais d'un outil d'entretien, l'entretien d'explicitation, qui pouvait nous permettre de recueillir des données sur ces connaissances. Et puis dans les séminaires du GREX nous nous posions des questions sur la subjectivité, l'intersubjectivité, l'expérience, *l'action comme connaissance autonome* (dixit Piaget). Et l'envie était forte d'articuler toutes ces ressources, de partir de point de vue des étudiants, de leur vécu expérientiel du débat

scientifique comme données de recherche d'où nous pourrions extraire les connaissances qu'ils y avaient acquises. Catherine était déjà formée aux techniques de cet entretien, Jean-Philippe s'est formé et nous avons décidé de recueillir nos données de recherche avec des entretiens d'explicitation.

Le projet CESAME (suite)

Nous commençons à brasser les idées et à rompre des bâtons en tournant autour du débat scientifique et des questions : Qu'est-ce que les élèves et les étudiants apprennent dans le débat scientifique en cours de mathématiques ? Qu'est-ce qui est spécifique des mathématiques dans ce débat ? Qu'est-ce qu'ils n'apprennent pas ailleurs ? Que faut-il savoir en mathématiques pour faire de "bonnes" mathématiques ?

Au delà du plaisir de partager et de parler ensemble, il nous fallait construire un objet de recherche et un projet de recherche qui tiennent debout. En recherchant les notes que j'avais prises à cette époque, je retrouve le départ du projet CESAME. Ma question initiale à Jean-Philippe était toujours la même : "Qu'est-ce que le travail sur la subjectivité et l'intersubjectivité dans l'activité mathématique peut apporter de nouveau en didactique des mathématiques ? Et les données nouvelles obtenues par l'entretien d'explicitation, en quoi apportent-elles un plus dans les recherches en didactique des mathématiques, un plus original par rapport aux travaux de la didactique actuelle ?".

Jean-Philippe répondait, nous en discussions et je prenais des notes : Il faut chercher du côté des rapports entre les objets mathématiques et l'apodicticité, là où la question de la nécessité est centrale, ce qui nécessite de faire fonctionner un groupe d'étudiants comme une communauté de mathématiciens, ce que réalise le débat scientifique, et d'étudier, dans ce processus, pour un apprenti mathématicien, la construction d'un autrui et le rôle qu'il joue (Drouhard & Paquelier, 1992).

Les sujets et les autrui chez Legrand comme chez Brousseau sont épistémiques. Nous voulions travailler avec les sujets de la psychologie, selon l'héritage du GECO et ses résultats sur le travail dans l'espace psychologique.

Nous pensions qu'il fallait faire la différence entre l'institutionnalisation d'une vérité vraie et celle d'une vérité nécessaire. Et ce faisant, nous rejoignons le grand débat brûlant d'actualité à ce moment-là sur le vrai et le faux en mathématiques.

La nécessité s'éprouve, il faudra donc préciser les liens avec l'expérience et la prise de conscience. Et cette nécessité doit être institutionnalisée. Il faudra donc comparer l'institutionnalisation qui transforme une connaissance construite dans une situation *ad hoc* (cf. théorie des situations de Brousseau) et l'institutionnalisation de cette nécessité vécue expérimentalement (cf. débat scientifique de Marc Legrand).

Notre dynamique de travail a pris ces racines là, autour du camp de base que représentait le bureau de l'IREM et le Parc Valrose.

Le groupe CESAME

Le GECO était une association loi 1901, son rattachement institutionnel était le GR didactique du CNRS, nous alimentions son budget avec les revenus des stages de formation que nous organisions.

René Lozi venait de créer à l'IUFM de Nice, le DIERF (Département interdisciplinaire d'Études et de recherches sur la Formation). Il y avait donc possibilité d'un co-financement IREM-DIERF pour le projet en gestation.

La nomination de Jean-Philippe à l'IUFM offrait la possibilité d'être financé par le DIERF et mon rattachement à l'IREM celle d'utiliser la logistique de l'IREM. Nous recruterions d'autres personnes (Teresa Assude, Yves Paquelier, Nadia Douek, Mabel Panizza). Nous monterions un projet pour le DIERF afin de financer les déplacements des membres de CESAME qui n'étaient pas sur Nice. Nous demanderions un peu d'aide à l'IREM (utilisation du bureau, ordinateurs et photocopieuse, secrétariat, édition, déplacements).

L'aventure CESAME pouvait commencer. La première réunion officielle de CESAME s'est tenue à l'IREM de Nice le 14 avril 1994.

Dans le projet pour le DIERF, Jean-Philippe avait repris le modèle du double tétraèdre didactique présenté à ICME 1992 par Jean-Philippe et Yves, il proposait une didactique des mathématiques qui intègre l'expérience et l'intersubjectivité. D'où les deux mots clés "Autrui" et "Expérience" dans le nom que nous avons donné au nouveau projet. Nous l'appellerions CESAME qui est l'acronyme de « Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées ».



Séminaire CESAME à Montagnac

CESAME s'est construit à partir de notre diversité et de nos jardins personnels d'intérêts : didactique, linguistique, sémiotique, pragmatique, philosophie, psychologie, explicitation et psychophénoménologie. Jean-Philippe a su faire la synthèse de ces diversités.

En 1995, à la 8e École d'été de Didactique des Mathématiques à Saint Sauves d'Auvergne, Jean-Philippe a fait un cours de **Didactique de l'algèbre**, *Algèbre, calcul symbolique et didactique*.

En 1997, à la 9e École d'été de Didactique des Mathématiques à Houlgate, nous avons fait une présentation de travaux où Yves a exposé la partie *Préoccupations et méthodologie* et Jean-Philippe la partie *Nécessité, règles du jeu et niveau d'une connaissance*.

Nous avons animé un groupe IREM autour du débat scientifique qui a fait l'objet d'une publication IREM de Nice en 2000 sous le titre *L'élève en position de chercheur. Bilan d'un travail sur le débat scientifique*.

Il y a eu CESAME I, CESAME II, et j'ai oublié jusqu'à quel numéro nous sommes allés, car le groupe CESAME s'est maintenu après le départ de Jean-Philippe pour l'Argentine, même si son activité s'est un peu ralentie.

L'aventure CESAME avait commencé¹⁴, les aventures GECO et SFIDA continuaient.

Nous avons tous travaillé très longtemps à la rédaction d'un article de synthèse pour RDM, *L'expérience de la nécessité épistémique* (Sackur & al, 2005), et à de nombreux autres travaux présentés à PME, ICME, EMF, au séminaire national de didactique des mathématiques. Nous avons écrit pour Petit x, Grand N, Repères-IREM, Expliciter¹⁵.

Nous avons construit et expérimenté le dispositif CESAME au lycée en seconde (15 ans), en première année d'université (18 ans) (Sackur & Maurel, 1998) (Maurel & Sackur, 1998), à l'école primaire au cours moyen (9-10 ans) (Maurel & al, 2010). Nous en avons fait un dispositif d'enseignement en première année d'université (voir brochure CI2U, *Un pari épistémologique et didactique*, 2001).

Au bout de ce chemin de plus de 15 ans, Catherine est partie à la retraite, moi aussi. Nous avons regroupé dans un livre les résultats de cette période si féconde (Maurel & Sackur, 2011). Jean-Philippe s'est rapproché de l'Argentine, il a travaillé de plus en plus avec Mabel, nous avons continué les réunions CESAME lors de ses venues en France en janvier ou février. Jean-Philippe est revenu vers son premier amour, la formalisation, et a commencé son travail sur l'épistémographie dont nous parleront Teresa et Alain.

Comme toujours dans une certaine forme de marginalité et d'originalité.

¹⁴ Voir les résultats scientifiques dans l'article de Teresa Assude dans ce même recueil.

¹⁵ Journal du GREX, téléchargeable gratuitement sur le site du GREX <http://www.grex2.com/>



*Catherine, Jean-Philippe, Teresa, pendant la pause-restaurant d'une journée de travail
CESAME à Nice*

Et des reponsabilités institutionnelles en France

Outre les fonctions d'enseignement qu'il assurait à l'IUFM de Nice, Jean-Philippe a eu des reponsabilités institutionnelles

1997-2000 Directeur de l'IREM de Nice.

1998-2000 Directeur du DIERF (Département Interdisciplinaire d'Élaboration de Ressources de Formation) de l'IUFM de Nice.

2000-2006 créateur et premier responsable de la CORFEM, Commission InterIrem de Recherches sur la Formation des Enseignants de Mathématiques.

2000-2009 Directeur adjoint de l'IREM de Nice.

Évocation

Qu'est-ce qu'il me revient de cette période de travail et d'ébullition permanente et de compagnonnage de tous les jours avec Jean-Philippe, avec Catherine le vendredi, avec Teresa, Yves, Nadia et Mabel pour les réunions CESAME.

Nous avons beaucoup travaillé, beaucoup parlé, beaucoup écrit, beaucoup ri, beaucoup bu de thé, de café, de maté.

Avec le GECO et avec Jean-Philippe, j'ai appris à faire de la recherche en didactique des mathématiques.

Nous avons passé des nuits dans le bureau de l'IREM pour boucler les actes SFIDA et pour finir des articles avant la dead line.

Nous avons accompagné des mémoires d'étudiants de l'IUFM.

Nous avons fait des enseignements ensemble à l'IUFM.

Catherine, Jean-Philippe et moi avons beaucoup voyagé en avion, en train, en voiture accompagnés d'interminables conversations, nous avons manqué la sortie de l'autoroute en allant à Modena, nous avons oublié à Nice l'adresse de l'hôtel réservé en allant à Turin, nous avons transporté des sacs à dos plein d'actes SFIDA. Nous sommes allés à Paris, Gènes, Turin, Modène, Parme et ailleurs.

Catherine et Jean-Philippe sont allés l'été aux quatre coins du monde pour les PME et autres colloques internationaux.

Nous avons partagé nos lectures, les articles de didactique des mathématiques bien sûr, mais aussi Frege, Wittgenstein, Bouveresse, Cavailles, Husserl, Desanti, Chalmers, Watzlawick et l'école de Palo Alto, Kuhn, Ricœur, et j'en oublie sûrement.

Toujours dans l'amitié, l'échange et la bonne humeur.

Jean-Philippe, tu me manques, tu nous manques.



Bibliographie

Drouhard J.P., Paquelier Y. (1992). Communication in Mathematics Classroom : a Tetrahedral Model. ICME 1992 lieu ?.

Drouhard J.P. (1992). "Shells, shelles and free shells": towards a model of elementary algebraic knowledge representation. Actes SFIDA, SFIDA 0 : sur site <https://sites.google.com/site/actessfida/>

Drouhard J.P., Léonard F., Maurel M., Pécal M., Sackur C. (1994). Calculateurs aveugles, dénotation et entretien Faire Faux. Actes SFIDA, SFIDA 2 : sur site <https://sites.google.com/site/actessfida/>

- GECO (1994), Vers un modèle de l'évolution des connaissances locales : théorie et techniques. In Margolinas C. (éd.) Les Débats de Didactique des Mathématiques (pp.145-156). Grenoble : La Pensée Sauvage éd.
- Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. Repères-IREM. 10, 123-158.
- Léonard, F., & Sackur, C. (1991). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2/3), 205-240.
- Maurel M., Sackur C. (1998). Les inéquations en classe de seconde et l'expérience de la nécessité., Actes SFIDA, SFIDA 11 sur site <https://sites.google.com/site/actessfida/>
- Maurel M & Sackur C (2010). Faire l'expérience des mathématiques. Entre enseignement et recherche. Lyon : Aléas éditeur. Disponible gratuitement sur academia.edu
- Maurel M., Sackur C., Drouhard J.P., Perriollat O. & Ciaravola F. (2010). « Il ne faut pas désarticuler un nombre ». Mise en œuvre du dispositif CESAME en primaire. Grand N, 85, 43-59.
- Sackur C., Maurel M. (1998). Les outils théoriques du GECO et les inéquations en classe de seconde, Actes SFIDA, SFIDA 10 sur site <https://sites.google.com/site/actessfida/>
- Sackur C., Assude T., Drouhard J.Ph, Maurel M., Paquelier Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, Recherches en Didactique des Mathématiques, 25.1, 57-90.
- Sackur C., Drouhard J.-Ph, Maurel M. & Pecal M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?. Repères-IREM, 28, pp 37-68.

À propos des recherches

Dall'esperienza di SFIDA come laboratorio per il confronto di idee sulla didattica dell'algebra, una riflessione su : Potenzialità e limiti degli approcci linguistico e semiotico per analizzare il comportamento degli studenti in algebra e innovare la pratica di insegnamento

Giampaolo Chiappini

Istituto per le Tecnologie Didattiche – CNR

All'inizio degli anni 90 la ricerca didattica internazionale relativa all'apprendimento algebrico era prevalentemente ancorata ad un approccio metodologico volto ad indagare le misconcezioni degli studenti nell'apprendimento di questa disciplina, sulla base degli errori da essi compiuti in specifici test¹⁶.

In quegli stessi anni, però, alcuni ricercatori si stavano sempre più convincendo che l'approccio di ricerca basato sull'analisi delle misconcezioni non potesse portare ad una reale innovazione della didattica dell'algebra.

Questi ricercatori ritenevano che quando gli studenti si avvicinano all'algebra si trovano ad operare con dei simboli che traggono il loro significato da idee che sono specifiche di questo dominio di conoscenza e che sono molto distanti, in molti casi in aperto conflitto, con quelle di cui hanno fatto esperienza in ambito aritmetico. Filloy e Rojano (1989) avevano usato l'espressione *didactical cut* per descrivere le discrepanze profonde che emergono nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. Si tratta di discrepanze che la ricerca più avanzata di quegli anni vedeva radicate nella dualità operativa strutturale dei concetti algebrici e nella difficoltà di passare dalla simbolizzazione di tipo numerico dell'aritmetica a quella letterale tipica dell'algebra. Sfard (1991) aveva evidenziato che con l'approccio all'algebra si entra in contatto con una nuova modalità strutturale di concepire le nozioni matematiche, che si aggiunge a quella operativa tipica dell'aritmetica¹⁷. A tale riguardo Sfard aveva sottolineato che gli studenti mostrano grande difficoltà a dominare le differenti concettualizzazioni delle espressioni e proposizioni algebriche che sono specifiche della concezione strutturale dell'algebra. Altri ricercatori, come Laborde (1982), avevano messo in

¹⁶ Questo approccio metodologico era basato sulla convinzione che gli errori sistematici degli studenti in algebra (molto diffusi e persistenti) fossero una conseguenza di idee sbagliate dovute a credenze che inibivano la possibilità di apprendimento dagli errori. Attraverso questo tipo di approccio si cercava di mettere a fuoco le idee sbagliate degli studenti in algebra e le credenze che impedivano di attuare un cambiamento concettuale, con il fine di meglio indirizzare il lavoro del docente.

¹⁷ Per esempio, diversamente dalla concezione operativa che concettualizza un'espressione quale $2x+1$ come sequenza di calcoli (i.e. aggiungi 1 al prodotto di 2 per un numero qualsiasi), la concezione strutturale concepisce la stessa espressione $2x+1$ in modi differenti, cioè come un numero non specificato derivante da una computazione (non è importante il tipo di computazione), come una funzione, come una stringa di simboli che può essere manipolata.

evidenza la complessità dei processi coinvolti nell'uso del linguaggio simbolico dell'algebra.

All'inizio degli anni 90 i risultati di queste ricerche convinsero un numero crescente di ricercatori che le difficoltà nell'apprendimento dell'algebra erano dovute a ragioni molto più complesse e profonde rispetto a quelle che potevano essere indagate e spiegate mediante l'approccio di ricerca centrato sull'analisi delle misconcezioni degli studenti.

Secondo questi ricercatori, per affrontare le problematiche di apprendimento dell'algebra era pertanto necessario comprendere maggiormente la natura del linguaggio algebrico e i processi coinvolti nell'afferrare il senso del suo uso.

Nel 1992, si tennero in Italia due importanti eventi improntati su questo indirizzo:

Dall'8 al 10 ottobre venne realizzato a Torino Walt (Workshop on Algebraic Language) che vide gli interventi di numerosi ricercatori impegnati su questo tema (Sutherland, Sfar, Bell, Boero, Drouhard, e altri, oltre ad Arzarello, Bazzini e Chiappini che in quegli stessi anni avevano iniziato una collaborazione sul tema). In questo Workshop, che a posteriori fu identificato anche come SFIDA 0, Jean-Philippe (d'ora in avanti, J-Ph) presentò il lavoro *Shells, shelles and free shells": towards a model of elementary algebraic knowledge representation* e Arzarello, Bazzini e Chiappini (d'ora in avanti ABC) presentarono il lavoro *Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking*

Dal 5 al 7 Novembre 1992 si tenne a Pisa il Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica dedicato all'apprendimento dell'algebra, in cui ABC presentarono le loro ricerche sull'argomento (Arzarello, Bazzini e Chiappini, 1994).

Questi due eventi segnarono la nascita di un nuovo approccio metodologico per studiare le problematiche dell'apprendimento dell'algebra e migliorare la didattica di questa disciplina.

Evidenziarono inoltre un forte affinità sul piano culturale tra l'impostazione della ricerca di J-Ph e quella condotta dal gruppo ABC che si concretizzò nella iniziativa di SFIDA a partire dal Novembre del 1993. Da questa data, l'esperienza di SFIDA è proseguita per circa 20 anni sino al Novembre 2012, con due edizioni ogni anno, in Maggio e Novembre.

Al centro dello studio di J-Ph e di ABC di quegli anni vi era l'analisi della natura del linguaggio simbolico dell'algebra. Questa analisi veniva utilizzata sia per indagare le difficoltà di apprendimento degli studenti sia per elaborare modelli, tecniche e strumenti volti a migliorare l'apprendimento dell'algebra.

Occorre anzitutto sottolineare che J-Ph e ABC condividevano il fatto che per compiere questo studio erano possibili due approcci, quello semiotico e quello linguistico. Come è noto, i due approcci hanno molti punti di contatto, ma sono profondamente diversi tra loro.

I simboli dell'algebra sono segni, che al pari di altri segni come le figure geometriche, i grafici, le tabelle e altri tipi di segni, rappresentano oggetti matematici. Pertanto, le relazioni di questi segni con gli oggetti matematici possono essere analizzati attraverso i metodi della semiotica. Però, i simboli algebrici, a differenza delle figure, dei grafici e di altri segni matematici sono anche elementi di un linguaggio, il linguaggio dell'algebra. Infatti il loro modo d'uso è governato da precise regole grammaticali, cioè da una specifica "sintassi" e il significato è determinato dalla semantica, che a sua volta è strettamente legata alla sintassi.

Sin dai primi lavori, J-Ph era profondamente cosciente delle differenze tra l'approccio semiotico e l'approccio linguistico e dei relativi metodi di indagine. Nella prima fase del suo lavoro di ricerca J-Ph esplorò in particolare l'approccio linguistico. Nella sua ricerca egli usò due riferimenti principali. Usò Kirshner (1987) per dare una descrizione della sintassi del linguaggio simbolico dell'algebra che sta alla base della manipolazione algebrica. Usò Frege (1984) per compiere un'analisi della semantica delle espressioni algebriche.

Come è noto, il modello di Frege è un modello triadico, in cui si distingue tra denotazione e senso di un'espressione. La denotazione di un'espressione algebrica può essere un valore numerico (come nel caso di "e"), una funzione numerica (come nel caso di "a+b"), un valore di verità (come nel caso di " $1 > 0$ " o una funzione booleana (come nel caso di " $x+1 < 10$ ").

Il senso di un'espressione algebrica è il modo in cui l'oggetto denotato è presentato alla mente. Per esempio, in \mathbb{N} le espressioni " $2x+1$ " e " $x+(x+1)$ " denotano la stessa funzione numerica rappresentante i numeri dispari ma presentano alla mente tale oggetto in modo diverso: come successore di un pari e come somma di due numeri consecutivi.

Anche ABC negli stessi anni usarono la semantica di Frege come quadro di riferimento nei loro studi sull'apprendimento dell'algebra. Le prospettive di J-Ph e quelle di ABC erano però diverse.

J-Ph concentrò maggiormente l'attenzione sulla denotazione e portò avanti insieme a Sackur e Maurel la sperimentazione della tecnica di Faire Faux che queste ricercatrici avevano in precedenza già elaborato insieme a François Léonard (Drouhard et al., 1994). J-Ph contribuì a migliorare questa tecnica inquadrandola sul piano teorico con il concetto di "calculateurs aveugles" e facendola diventare una tecnica dell'esplicitazione per favorire una consapevolezza maggiore nell'operare con i simboli algebrici. In seguito, sempre insieme a Sackur e Maurel, J-Ph elaborerà una metodologia per far compiere agli studenti l'esperienza della non arbitrarietà delle regole algebriche (Sackur, Drouhard & Maurel, 2000).

ABC, invece, concentrarono maggiormente l'attenzione sul senso delle espressioni algebriche, ed elaborarono un quadro per l'apprendimento dell'algebra come gioco di interpretazioni che nella sua forma più matura fu pubblicato alcuni anni dopo (Arzarello, Bazzin, Chiappini, 2001)

Vediamo più in dettaglio in cosa consistano la tecnica del fare falso e la metodologia per far compiere l'esperienza della necessità della conoscenza algebrica.

Per evidenziare in cosa consiste la tecnica Faire Faux faccio riferimento a quanto esposto da J-Ph a SFIDA 2 a Genova nel 1994.

La tecnica di fare sempre falso è stata elaborata partendo dal metodo della "prescrizione del sintomo" sviluppata alla fine degli anni 60 dal gruppo di psicoterapeuti di Palo Alto in California (Watzlawich, Beavin, Jackson). La prescrizione del sintomo è una tecnica volta a rendere intenzionale una sintomatologia che si vuole eliminare, cambiandone il suo significato originario, ristrutturandone la sua consistenza epistemologica con aspetti non più negativi e permettendone un maggior controllo da parte dei pazienti.

J-Ph e i suoi colleghi usarono questa tecnica nell'apprendimento dell'algebra attraverso il metodo delle interviste. Si erano accorti che nel calcolo algebrico, la richiesta di dare una risposta corretta non permette al docente di capire se lo studente fosse veramente cosciente della trasformazione effettuata (cioè, che la trasformazione algebrica conserva la denotazione) o fosse solo il risultato di un calcolo cieco (calculateurs aveugles).

Quali sono le caratteristiche principali di questa tecnica ?

Invece di chiedere agli studenti di risolvere per esempio $(a+b)^2=$, gli autori della tecnica chiedevano di scrivere dopo l'uguale qualcosa che fosse sempre falso. Per esempio la risposta $a^2+3ab+b^2$ data da molti studenti non era sempre falsa. Nel colloquio essi portavano gli studenti a prendere coscienza di questo fatto.

La tecnica chiaramente non risolveva i problemi di apprendimento dell'algebra, ma consentiva di porre l'attenzione su ciò che un'espressione denota e quindi di comprendere che vero e falso in algebra non sono sinonimi di corretto e incorretto. Creava le condizioni per poter cominciare a lavorare sull'algebra.

Ricordo che all'epoca avevo trovato molto interessante la tecnica di fare sempre falso, perché ristrutturava completamente il modo tradizionale di porre i compiti algebrici e perché lasciava intravedere nuove possibilità di interazione tra insegnante, compito e allievo.

Ritengo importante sottolineare che la riflessione di tipo linguistico compiuta da J-Ph sul linguaggio dell'algebra attraverso la semantica di Frege è stata determinante per inquadrare sul piano teorico questa tecnica didattica e per farla evolvere sul piano metodologico.

Successivamente, infatti, J-Ph e le sue colleghe Maurel e Sackur elaborarono una metodologia, articolata in quattro fasi, per far compiere agli studenti l'esperienza della non arbitrarietà delle regole di manipolazione algebrica e, quindi, della necessità di tale regole (Sackur, Drouhard & Maurel, 2000).

J-Ph e le sue colleghe erano sicuramente coscienti della difficoltà del compito didattico che si stavano ponendo, e cioè far passare gli studenti da un comportamento di calcolo cieco

(*calculateurs aveugles*), centrato esclusivamente sul ricordo molto spesso fallace delle regole di manipolazione algebrica, ad un calcolo consapevole, in cui le regole dell'algebra non sono viste dallo studente come arbitrarie ma rispondenti ad una necessità matematica. Per far compiere agli studenti questa evoluzione elaborarono una metodologia articolata in quattro fasi che presentava una forte connotazione sociale, in quegli anni non proprio conforme al panorama di ricerca in cui J-Ph si era formato.

I riferimenti da lui usati per elaborare questa metodologia erano costituiti da:

Ernest (1997) e Bartolini Bussi (1991) per quanto concerne l'importanza rispettivamente dell'interazione sociale e del dispositivo della discussione matematica per l'apprendimento

Wittgenstein (1978) in quanto consentiva di effettuare una sottile caratterizzazione della necessità, legate alla resistenza, anche se apparentemente paradossale, degli oggetti matematici: "the idea (expressed here in a very sketchy way) that mathematical objects resist us to the very extent that we want them to resist, and not because of their physical nature as walls do" (Sackur, Drouhard & Maurel, 2000).

Husserl in quanto consentiva di comprendere meglio come il soggetto può sperimentare qualcosa in matematica e quindi, per elaborare gli esperimenti usati nel loro studio.

In SFIDA XI del 1998, Sackur e Maurel presentarono i primi risultati di questa ricerca applicati alla soluzione delle disequazioni e nel 2000 questi risultati furono diffusi nel convegno PME (Sackur, Drouhard & Maurel, 2000)

I risultati conseguiti con le precedenti ricerche portarono J-Ph e le sue colleghe all'inizio degli anni 2000 a esplorare in modo approfondito il tipo di conoscenza e di competenze che lo studente deve possedere per fare algebra e più in generale per fare matematica.

Si erano infatti convinti che le conoscenze semiotiche e linguistiche erano sicuramente una componente fondamentale di quelle coinvolte nel fare algebra (per esempio attraverso il controllo della denotazione), ma sicuramente non erano le uniche competenze coinvolte.

Inoltre erano convinti che lo studio delle conoscenze coinvolti nel fare algebra non poteva essere compiuto attraverso un'analisi accurata dei fallimenti degli studenti nel risolvere i compiti algebrici né mediante lo studio dei successi in questo campo. Al più, questi tipi di studi, potevano mettere in evidenza deficienze e misconcezioni o mostrare abilità possedute dagli studenti, ma non evidenziare il loro sviluppo concettuale relativo alla materia in gioco.

Al centro del loro interesse vi era la messa a fuoco di ciò che gli studenti conoscono o si supponga che essi conoscano (o che devono conoscere) quando fanno algebra e più in generale matematica (e non solo per far finta di fare matematica !).

Nel 2002, in SFIDA 18, J-Ph, Sackur e Panizza affrontano questo tipo di problematiche. Una presentazione più sistematica sulla tematica degli ordini di conoscenza viene presentata nel 2005 su RDM (Sackur et al, 2005). E' importante evidenziare che in quella stessa edizione di SFIDA aveva partecipato per la prima volta ai lavori anche Giorgio Bagni. Come è noto, l'interesse di Giorgio in campo algebrico era di tipo storico e epistemologico, oltre che chiaramente di tipo didattico. La partecipazione assidua di Giorgio a tutti i successivi seminari di Sfida portarono all'istaurarsi di una collaborazione tra Giorgio e J-Ph. Li legava il comune interesse per l'analisi della natura del sapere algebrico. Tra di loro si è progressivamente instaurata una collaborazione e una reciproca influenza sui loro rispettivi lavori di ricerca (si veda a tale riguardo Bagni, Drouhard, 2006). Questo loro rapporto professionale e amicale si è interrotto con la morte improvvisa di Giorgio Bagni avvenuta nel 2009.

Intorno al 2005 J-Ph aveva iniziato un'elaborazione chiamata epistemografia che aveva per scopo la descrizione della struttura di ciò che i soggetti devono conoscere per fare effettivamente matematica (Drouhard, 2008; Drouhard, 2010)

J-Ph ha chiamato questa teoria "epistemografia" perché riguarda la prospettiva dell'organizzazione sincronica della conoscenza coinvolta nel fare matematica, che è differente dall'epistemologia che è invece centrata sull'evoluzione diacronica di tale conoscenza.

In base alla teoria epistemografica di J-Ph, le conoscenze necessarie per fare matematica possono essere categorizzata secondo tre dimensioni: la dimensione semio-linguistica, quella praxica e quella teorica. Per operare secondo queste tre dimensioni, il soggetto deve mobilitare non meno di 8 diversi tipi di conoscenza:

La conoscenza semio-linguistica relativa ai vari registri semiotici che permettono di rappresentare e trattare gli oggetti matematici (ben descritta da Duval e da Peirce);

La conoscenza semantica relativa alle relazioni tra scritte e oggetti matematici, ben descritta dalla semantica di Frege;

La conoscenza di ordine teorico relativa alle proprietà di oggetti matematici quale, ad esempio, che la moltiplicazione è commutativa;

La conoscenza strumentale relativa all'uso di strumenti per fare matematica (calcolatrice, ditta, plotter, abbaco, strategie di calcolo ...);

Le conoscenze pragmatiche che permettono di usare le rappresentazioni semiotiche come strumenti;

Le conoscenze 'pratiche' relative all'uso strumentale dei concetti matematici (proprietà) per perseguire un certo obiettivo matematico, ad esempio usare la proprietà distributiva della moltiplicazione per eseguire un calcolo;

Le conoscenze normo-logiche riguardanti le regole coinvolte nella validazione logica, nell'uso degli strumenti;

Le conoscenze identificatorie che permettono l'identificazione e la categorizzazione di oggetti.

Il quadro teorico dell'epistemografia non è solo uno strumento utile per spiegare cosa occorre conoscere per fare algebra e più in generale matematica, ma è anche un modello di riferimento per la trasposizione didattica, per mettere a fuoco cosa occorre fare apprendere agli studenti per consentire loro di fare veramente algebra e, più in generale, per fare matematica

Ciò che mi ha sempre colpito nell'evoluzione della ricerca di J-Ph è stata la capacità di saper integrare la dimensione teorica dei suoi studi, volta a inquadrare e spiegare sul piano razionale la natura del problema didattico che cercava di affrontare, con la dimensione applicata di essi, volta a suggerire tecniche e modelli per migliorare l'apprendimento (si pensi alla tecnica di fare falso, alla metodologia per far compiere l'esperienza della necessità matematica di una regola o di un sapere, sino all'epistemografia). Nella sua ricerca i riferimenti teorici di tipo semiotico e linguistico sono stati sempre dei riferimenti molto importanti che hanno consentito avanzamenti della sua ricerca sia sul piano teorico sia su quello più applicativo. Questi riferimenti sono sempre stati usati da lui in modo estremamente laico, non dogmatico, mi viene da dire in modo eclettico.

La sua ricerca è sempre stata per me una fonte non banale di ispirazione, anche se i miei obiettivi di ricerca erano diversi dai suoi, in un certo senso complementari, come dirò meglio in seguito. In questo quadro SFIDA è stato uno strumento importante di condivisione di idee e suggestioni per la ricerca e di collaborazione (si pensi alla collaborazione tra J-Ph e Giorgio Bagni).

Per parlare dei limiti dell'approccio semiotico e linguistico per la ricerca volta a promuovere il miglioramento dell'apprendimento dell'algebra, farò riferimento alla mia esperienza.

Si è detto inizialmente che negli stessi anni in cui J-Ph aveva usato la semantica di Frege, ABC avevano iniziato ad usare lo stesso riferimento per analizzare e descrivere la natura profonda del pensiero degli studenti nel risolvere compiti algebrici. Per fare ciò, concentrano l'attenzione sulla relazione tra denotazione e senso delle espressioni algebriche con l'obiettivo di indagare i processi di pensiero che consentivano agli studenti di cogliere il senso di un'espressione algebrica mantenendo il controllo di ciò che l'espressione denota.

Per esempio, nell'ambito di SFIDA ABC avevano discusso in modo approfondito il comportamento di Anna (una studentessa di 20 anni in matematica) nel risolvere il seguente

compito “Prove that the number $(p - 1)(q - 1) / 8$ is an even number, provided that p and q are odd primes”.

ABC, all’epoca, avevano realizzato numerose analisi di questo tipo, su compiti differenti riportate nel libro *“L’Algebra come strumento di pensiero”* (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994)

Nel compiere questo tipo di analisi si erano resi conto che il modello di semantica di Frege era molto utile nel descrivere i processi di pensiero che consentivano a studenti come Anna di cogliere il senso delle espressioni algebriche durante la soluzione dei compiti proposti. Tuttavia avevano evidenziato anche limiti nell’uso di questo modello, soprattutto quando gli studenti non erano in grado di comprendere la relazione tra senso/denotazione, collegata all’uso dei segni algebrici in gioco. In questi casi il modello appariva inadeguato a spiegare la natura delle difficoltà incontrate dagli studenti e, soprattutto, appariva inadatto a orientare nella messa a punto di condizioni che consentissero a tali studenti di giungere alla soluzione dei compiti assegnati. Nel 1994, a tale riguardo avevano scritto: "Però anche la semantica di Frege risulta insoddisfacente per spiegare la dinamica dei processi che risultano coinvolti nell’uso del linguaggio algebrico. Senso e denotazione sono gli ingredienti giusti cui guardare, ma essi sono utili per darci alcune istantanee delle difficoltà algebriche, non per ricostruire l'intero film" (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994).

Molti anni dopo, nel 2012, con un articolo su un numero di RDM curato da J-Ph e Coulanges, ABC hanno evidenziato i differenti percorsi da loro attuati per superare i limiti che il solo riferimento alla semantica di Frege poneva per la ricerca sull’apprendimento dell’algebra.

In particolare, la mia ricerca negli anni si è orientata principalmente verso lo sviluppo di dispositivi digitali a supporto dell’apprendimento matematico e in particolare in campo algebrico. La necessità di dovermi misurare concretamente con la costruzione di un dispositivo tecnologico che potesse realmente contribuire a realizzare le condizioni per lo sviluppo di una significativa esperienza degli studenti in specifici campi della matematica e, in particolare in algebra, mi ha fatto comprendere che nessun modello e quadro teorico può essere in grado di dare risposte a un problema di apprendimento di così grande portata. Piuttosto, ho imparato che anche solo per iniziare ad affrontare questo problema sia necessaria una intelligente integrazione di più quadri teorici e di più modelli (Chiappini, 2015).

Ho imparato, per esempio, che se la semantica di Frege poteva essere molto utile per precisare gli ingredienti fondamentali (senso e denotazione) da tenere sotto controllo nell’uso delle espressioni algebriche, la semiotica di Peirce offriva nuovi importanti strumenti per meglio intervenire sulle difficoltà che gli alunni evidenziavano (Chiappini, 2014). Infatti, l’importanza attribuita da Peirce al segno come attivatore dei processi di semiosi (mediante una catena di interpretazioni, in potenza infinita, di sempre nuovi interpretanti) apriva la

strada alla possibilità di progettare differenti concrete strutture di segni per veicolare significati matematici. Inoltre, la sua distinzione tra tre categorie di segni (indici, icone e simboli), in base al tipo di rapporto che ciascun segno stabilisce con l'oggetto di riferimento, poteva essere sfruttata per cercare di costruire significati algebrici, storicamente espressi per via simbolica, mediante strutture di segni con caratteristiche indicali o iconiche. In pratica, quello che abbiamo realizzato con la progettazione di AlNuSet è proprio questo.

Ma per rendere incisivo questo strumento tecnologico, cioè per rendere disponibili utili affordance per l'apprendimento dello studente in algebra, il riferimento a Peirce doveva essere integrato con molti altri riferimenti che sono specifici della Human Computer Interaction. Successivamente, per spiegare il tipo di mediazione che AlNuSet forniva alla costruzione di conoscenze algebriche è stato necessario ricorrere all'Activity Theory, e al modello di Ciclo di apprendimento espansivo introdotto da Engestrom (Chiappini, 2012)

Tutti questi riferimenti sono stati preziosi per il mio lavoro di ricerca, ho imparato con il tempo a servirmi di loro cercando di non rimanere intrappolato nelle spire di visioni dogmatiche, rischio piuttosto presente nel nostro campo di ricerca. Anche J-Ph è sempre stato molto interessato alle problematiche di inquadramento teorico dei fenomeni di apprendimento matematico, e mi è sempre sembrato piuttosto immune da correre rischi di dogmatismo.

Al termine del mio intervento mi fa piacere indicare due aspetti che evidenziano una certa complementarità e sintonia tra le ricerche di J-Ph e le mie.

J-Ph attraverso l'epistemografia ha voluto fornito uno strumento per categorizzare le conoscenze che sono coinvolte nel fare algebra. Attraverso la mia ricerca, invece, ho cercato di sfruttare in modo appropriato la tecnologia per creare le condizioni affinché gli studenti possano compiere un'esperienza vera e concreta della conoscenza algebrica. In questo quadro, le ricerche condotte da J-Ph, e in particolare la ricerca epistemografica, sono state per me un riferimento molto utile per mettere a fuoco il tipo di conoscenze di cui lo studente deve poter fare esperienza attraverso la mediazione della tecnologia e per verificare come quelle conoscenze sono supportate dall'utilizzo del dispositivo tecnologico.

J-Ph ha elaborato l'epistemografia in modo tale che potesse diventare uno strumento per essere usato all'interno di qualsiasi quadro teorico e di qualsiasi progetto che abbiano come fine il miglioramento del processo di insegnamento apprendimento in ambito matematico. Anche gli strumenti prodotti dalla mia ricerca sono stati elaborati con lo stesso fine.

Bibliografia

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking in Algebraic Learning. *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino*, Vol 52, n. 2, 105-125.

- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche per la scuola dell'obbligo*. Progetto strategico CNR Tecnologie ed Innovazioni didattiche, Collana Innovazioni Didattiche, Quaderno N° 6, Pavia.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (2001). A model for analyzing algebraic process of thinking. In R Sutherland, T. Rojano, A Bell (Eds), *Perspectives on school algebra*, Kluwer Academic Publisher, pp 61-82.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., (2012). A theoretical model to analyze algebraic thinking and its application in school activities. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 32 (3), 195-209.
- Bagni, G., Drouhard, J-Ph. (2006). Quali saperi sono acquisiti da chi fa matematica? Una conversazione con Jean-Philippe Drouhard. *La matematica e la sua didattica*, 20, 3, 443-455.
- Bartolini-Bussi M. G. (1991). Social Interaction and Mathematical Knowledge. Proceedings of PME XV, (Assisi), Furinghetti F., Dir., Università di Genova, Italy
- Chiappini G., (2015). A framework to evaluate the educational potential of a digital artefact for math learning. *Research on Education and Media*, 7 (2), 28-35.
- Chiappini G. (2012). The transformation of ergonomic affordances into cultural affordances: the case of the AlNuSet system. *International International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19 (4), 135-140.
- Chiappini G. (2014). La mediazione semiotica di diagrammi digitali visuo-spaziali e deittici per l'apprendimento dell'algebra. *Sistemi Intelligenti*, 26 (2), 299-334.
- Drouhard, J-Ph. (1994). Shells, Shelletes and Hollow Shells: Towards a Model of Elementary Algebraic Knowledge Representation, *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino*, Vol 52, n. 3, 249-262.
- Drouhard, J-Ph., Léonard F., Maurel, M., Pécal M., Sackur, C. (1994). Calculateurs aveugles, dénotation et entretiens "faire faux", Actes de SFIDA 2
- Drouhard J-Ph., Sackur C., Panizza M. (2002). Perspective paradigmatique et ordres de connaissance. Actes de SFIDA 18
- Drouhard, J-Ph. (2008). Epistemography: how to know what students know, and are supposed to know. TSC 17. ICME 11, Monterrey, México
- Drouhard, J-Ph. (2010). Epistemography and algebra. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.). Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon: INRP. 479-486.
- Ernest P. (1997). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press.
- Filloy, E. and Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra'. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, 2, 19-25.
- Frege, G. (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Trans. Black, Dudman, Geach, Kaal, Kluge, McGuinness, & Stoothoff. B. McGuinness (Ed.). Oxford: Basil Blackwell.
- Kirshner, D. (1987). Linguistic analysis of symbolic elementary algebra, Unpublished Doctoral Dissertation. Vancouver, BC: University of British Columbia.
- Laborde, C. (1982). Langue naturelle et écriture symbolique deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique. Thèse d'État. Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Maurel M., Sackur C. : Les inéquations en classe de seconde et l'expérience de la nécessité, Actes de ASFIDA 11
- Sackur, C., Drouhard, J-Ph., Maurel, M. (2000). Experiencing the Necessity of a Mathematical Statement. In Proceedings of PME 24, T. Nakahara, M. Koyama, ed., Hiroshima University.
- Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J-Ph., Paquelier Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *RDM*. 25/1, 57-90.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Wittgenstein L. (1978). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. MIT Press (Cambridge, Mass.).



L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ?

Lalina Coulange

Jean-Philippe Drouhard et moi avons eu l'occasion (qui me paraît aujourd'hui encore douloureusement récente) de travailler ensemble en tant que rédacteurs invités par Jean-Luc Dorier et Aline Robert de l'ouvrage collectif – (Coulange, Drouhard, Dorier et Robert 2012). Je garde un souvenir particulièrement ému de cette collaboration avec Jean-Philippe, qui nous avait donné l'envie de recréer de nouvelles occasions de retravailler ensemble et de faire dialoguer nos entrées complémentaires en didactique de l'algèbre élémentaire...

Cet ouvrage recouvrait pour nous un véritable enjeu : celui de constituer un bilan d'étape des travaux conduits dans ce champ – constitué autour de collectifs d'auteurs et d'une variété d'entrées théoriques possibles dans ce domaine de recherche en didactique des mathématiques. En cela, Jean-Philippe était un interlocuteur idéal, du fait de son intelligence « en mouvement », qui favorisait plus que d'autres, les rencontres de points de vue ou d'approches didactiques, les collectifs de pensée et de travail scientifique... Ma relecture personnelle et actualisée de cet ouvrage est particulière. Plus que le bilan que l'œuvre est censée constituer, j'entrevois de nombreuses perspectives ouvertes pour de nouvelles recherches en didactique de l'algèbre, et plus particulièrement – celles liées aux petits cailloux du chemin de *Hansel* ou du *Petit Poucet* (Drouhard et Panizza 2012) ou à l'approche épistémographique de Drouhard (2012). Ma contribution vise à en partager quelques-unes – comme des exemples possibles – en lien avec les différentes approches représentées dans cet ouvrage de référence.

Programme de calcul et Sens en didactique de l'algèbre ?

Les *Programmes de Calcul* (que nous désignerons PC par la suite) prennent une place particulièrement centrale dans les travaux conduits dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique – et ils figurent dès lors largement dans les contributions de plusieurs auteurs dans l'ouvrage collectif (Chevallard & Bosch 2012 ; Assude, Coppé et Pressiat 2012, Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, & Gascón, 2012). Les chercheurs en didactique des mathématiques (dont les auteurs cités auparavant) situent l'origine des PC dans les travaux de Drouhard (1995). Vu l'importance que les PC ont pris dans certains travaux en didactique de l'algèbre, on est à même de s'étonner que l'objet en question n'apparaisse pas comme fondamental dans l'article concerné : les programmes de calcul apparaissent tout juste dans une note de bas de page du texte cité !

Sens d'une Expression Symbolique Algébrique

Resituons brièvement le contexte de cette apparition. C'est en lien avec le triptyque emprunté à Frege (1881/1971, 1892) – repris par de nombreux auteurs (Arzarello, Bazzini & Chiappini 2012 ; Drouhard et Panizza 2012 ; Bardini 2012) en parlant du sens (*sinn*) d'une *Expression Symbolique Algébrique* (que nous désignerons ESA par la suite) c'est-à-dire au mode de donation de cette ESA que Drouhard (1995) parle de PC :

Nous avons ici [s'agissant du sens d'une ESA] un point de contact avec l'écriture considérée comme un « programme de calcul », au travers de la théorie des *expressions* qui prolonge les travaux de Frege. (op. cité, p. 38)

Cette acception du sens par Frege qui conduit Drouhard (1995) à parler pour la première fois de Programme de Calcul, se rapproche de ce que Arzarello et al. (1994) appellent le « sens algébrique » d'une ESA, c'est-à-dire « *the very way which the denoted is obtained by the means of computational rules* » (op. cite, p. 111).

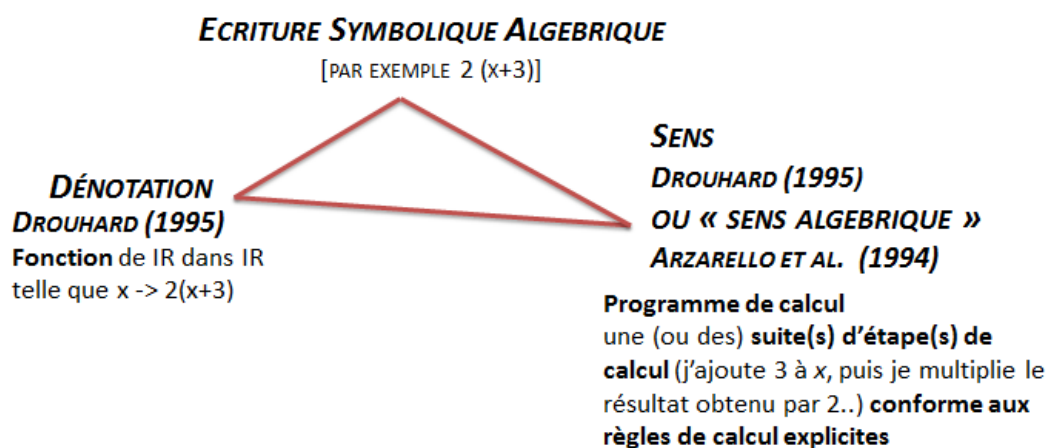


Figure 1. Sens d'une ESA et PC

Ces chercheurs ont davantage centré leurs travaux sur d'autres aspects sémantiques des ESA : relativement à la dénotation, aux sens contextualisés (Arzarello et al. 1994) ou aux interprétations dans des cadres mathématiques (Drouhard et Panizza 2012) ainsi qu'aux connotations (Drouhard 1995). Ainsi Drouhard et Panizza (2012) mettent-ils d'ailleurs le lecteur en garde contre une réduction potentielle du sémantique (et même du sens !) au seul PC.

Le sens tel que Frege le définit présente des analogies avec un *programme de calcul* (Drouhard 1995, 1999) : « pour obtenir 13, ajouter 1 à 5 puis 7 » ; pour obtenir le faux ajouter 1 à 5 et l'égaliser à 7 ». Il nous semble toutefois qu'il faut se garder d'assimiler le sens au seul programme de calcul, car cela reviendrait à réduire toute la complexité de l'acte cognitif de « donner du sens » à un simple calcul, autrement dit réduirait l'élève à une sorte de machine à calculer. À plus forte raison, réduire toute la richesse de la sémantique de l'algèbre (dénotation, connotation et interprétations incluses) aux seuls programmes de calcul nous semble un réductionnisme un peu brutal. (Drouhard et Panizza 2012, p. 218).

Programme de Calcul

Chevallard et Bosch (2012) en citant Drouhard (1995) affirment qu'une expression algébrique « exprime » une entité, qui n'est autre qu'un PC.

[...] une « expression algébrique » est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. L'expression algébrique $E(x) = 15x - 3(x+1)$ exprime un programme de calcul Π dont une expression « rhétorique » est la suivante : « multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu, le triple du successeur du nombre donné. » (op. cité, p. 28)

La définition ainsi donnée se réfère aux travaux de Drouhard, mais me paraît porteuse de plusieurs différences.

D'une part, suivant Assude et al. (2012), Chevallard (2007) parle d'un couple Expression Algébrique et Programme de Calcul et non d'un triplet ESA-Dénotation-Sens (PC), comme les auteurs cités auparavant, en référence aux travaux de Frege.

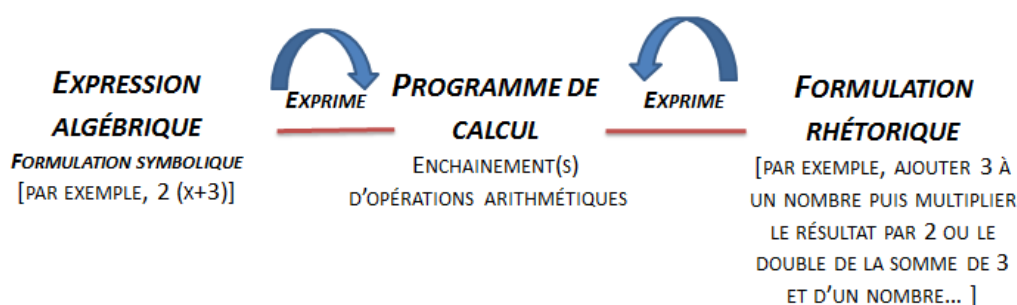


Figure 2. PC – Expression algébrique et Expression rhétorique

D'autre part, toujours d'après Assude et al. (2012), Chevallard (ibid.) parle d'une « expression rhétorique » de l'objet PC, sans pour autant le réduire à cette seule expression. Dans cette acception, le PC recouvre plus que des problèmes rhétoriques du type « *choisis un nombre, multiplie le par 5, puis ajoute 4 au résultat obtenu* » (op. cité, p. 46). Ces auteurs précisent les relations entre l'objet PC et le champ des « *problèmes arithmétiques scolaires* », un PC arithmétique étant une « *chaîne structurée et hiérarchisée, permettant de résoudre tous les problèmes d'un même type* » (Assude et al. 2012 citant Chevallard 2007, p. 46) – ce qui inscrit les PC dans la perspective de modélisation algébrique ouverte par la Théorie Anthropologique du Didactique.

Sens d'une ESA et PC ?

Le Programme de Calcul ne remplit pas les mêmes fonctions, ni n'occupe pas la même place au sein de la théorie anthropologique du didactique et de l'approche sémio-linguistique ou épistémographique.

Toutefois, d'après l'ensemble des auteurs cités auparavant, il existe bien une entité théorique correspondant au *sens* (algébrique) d'une ESA ou *exprimée* par elle. D'autre part, cette entité théorique ne se résume pas à des formulations rhétoriques du type « on prend un nombre, etc. ». Notons d'ailleurs que d'autres auteurs comme Bardini (2012) et Douek et Morselli (2012) parlent de situation ou de problèmes type « pense à un nombre » (que Bardini rapproche du volet algorithmique de la traduction des écritures symboliques de Widmann) - et non de programmes de calcul.

Et si finalement – tout comme Drouhard et Panizza (2012) nous le signalent en positionnant la question des registres de représentation sémiotique au cœur d'une approche épistémographique (Drouhard 2012), la clé réside précisément dans le fait de s'intéresser aux spécificités de l'expression rhétorique d'un PC ou autrement dit, au registre discursif de représentation sémiotique d'une ESA – aux propriétés de ce registre de représentation ?

Un type de registre discursif ou rhétorique en algèbre

On peut effectivement considérer le registre discursif associé aux problèmes ou aux situations « pense à un nombre... » comme un type de registre discursif de représentation sémiotique au sens de Duval (1993), ou comme une représentation au sens de Brousseau (2004) – repris par Mercier (2012), c'est-à-dire comme un registre de pratiques en lien avec des situations didactiques.

Ce type de registres a sans nul doute des potentialités particulières du fait de sa proximité avec le sens d'une ESA et aussi en ce qu'il constitue un premier pas (nécessaire ?) vers la dénotation, ce que la théorie anthropologique permet d'appréhender d'une autre façon - avec la question de l'équivalence de formulation rhétoriques de programmes de calcul (Assude et al. 2012 ; Ruiz-Munzon et al. 2012).

Toutefois il a aussi ses limites signalées entre autres, par Bardini (2012) – comme la primauté de l'inconnue imposée dans la lecture séquentielle imposée par ce type de registre discursif.

Mais ce sont aussi ces limites qui permettent de contribuer à faire émerger et à donner du sens à la représentation et/ou au registre de représentation algébrique. La contribution à l'ouvrage de Douek et Morselli (2012) – se situant dans un autre cadre (à partir des travaux

sur la rationalité d'Habermas 2001) montre précisément comment les fonctionnalités du langage algébrique (Boero 2011) apparaissent en prise d'appui sur l'expression des limites du registre discursif. En cela, ce travail, comme d'autres, illustre d'ailleurs bien cette remarque conclusive de Drouhard et Panizza (2012) que « l'articulation des registres est le problème, mais c'est aussi la solution ; la mise en œuvre des conversions amène en effet à identifier et expliciter ce qui est implicite. »

Comme le montrent Douek et Morselli (2012) ou Mercier (2012) dans un autre exemple, ce type de situations « en prise d'appui sur le registre discursif », nécessitent toutefois d'élargir le cadre de l'activité algébrique afin de prendre en charge la rationalité épistémique de certains élèves, qui peut paraître *a priori* éloignée des savoirs algébriques « classiques » – mais qui s'avère pourtant propice à dévoiler d'autres potentialités de ces savoirs¹⁸.

Ce point me conduit à formuler, toujours en appui sur ma relecture personnelle de l'œuvre collective – une remarque d'un niveau bien plus général, en lien avec une tension qui m'apparaît comme particulièrement heuristique dans les travaux de didactique de l'algèbre élémentaire – et particulièrement présente dans l'approche épistémographique développée par Drouhard (2012).

Entre objectivation et subjectivation et/ou contextualisation

Il me semble en effet qu'en filigrane de l'œuvre collective (et particulièrement dans les exemples donnés dans les deux contributions qui viennent d'être citées) apparaissent des tensions entre l'objectivation et la subjectivation (par rapport au sujet) ou la contextualisation (par rapport à un cadre, un domaine, une (ou des) situation(s) ...) des connaissances et des savoirs algébriques. Bardini (2012) signale d'ailleurs sur cette tension, dans sa réaction à l'issue du deuxième volet de l'ouvrage en revenant sur la référence à Frege (1881/1971) :

Sous le prisme de la subjectivité, nous pouvons envisager une certaine hiérarchie entre ces trois composantes. À une extrémité du spectre se situe la représentation d'un signe, laquelle est entièrement subjective ; elle est inhérente et datée. C'est l'« image » que le sujet se fait à propos du signe en question [...]. La dénotation est au contraire entièrement objective car c'est l'objet même désigné par ce signe. Entre les deux se situe le sens du signe qui n'a pas un caractère subjectif et qui n'est pas non plus l'objet lui-même. (op. cité p. 336).

Cette tension heuristique entre ce qui permet d'*objectiver* les savoirs, ou les objets algébriques à travers des dimensions à la fois sémantiques et syntaxiques – ce qui permet de les *contextualiser* (*via* des interprétations, des représentations ou des « sens contextualisés »...) – et ce qui permet de les *subjectiver* (*via* la connotation, différents types

¹⁸ Notons qu'il y aurait d'ailleurs de ce point de vue un rapprochement intéressant à faire entre ces deux contributions de ce point de vue : entre la proposition de l'élève surnommé Tor (Douek et Morselli 2012) et celle des élèves qui réécrivent $x + 5y$ en $x + y + 4y$ pour pouvoir substituer une valeur numérique à $x + y$ (Mercier 2012). Des pratiques rationnelles d'élèves ainsi données à voir semblent apparentées à une pratique algébrique – au rôle méconnu : la substitution (voir à ce sujet la contribution de Constantin dans ce même ouvrage).

de rationalités, la reconnaissance de labels...) me semble au cœur des travaux de didactique de l'algèbre élémentaire d'une part – mais aussi et c'est en cela qu'il était précurseur – de Drouhard (1995).

J'aime ainsi à penser que Jean-Philippe aurait aimé discuter et échanger avec moi à partir de mon schéma « brouillon du jour » à l'issue de ma relecture de l'ouvrage (à voir comme un outil pour cheminer et non comme une figure synthétique d'une quelconque pensée organisée et définitive...) :

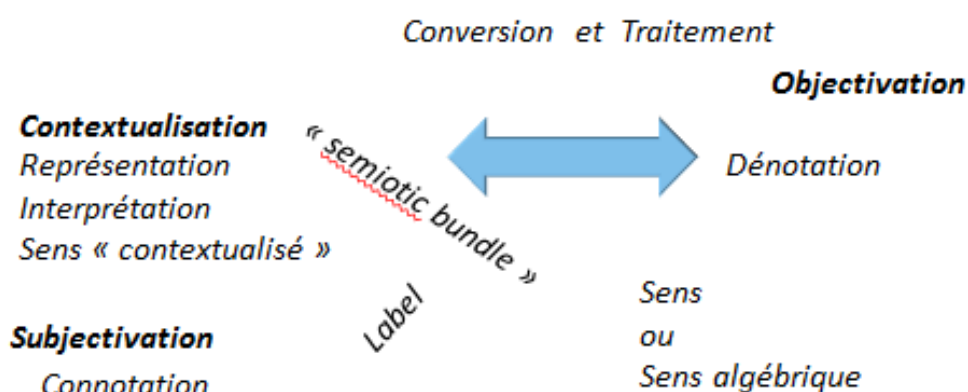
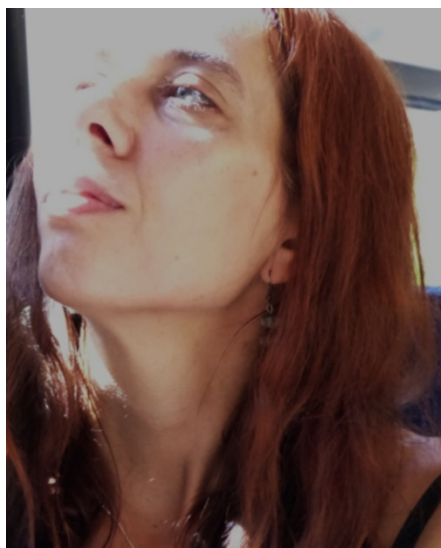


Figure 3. Un schéma « brouillon » - tension entre objectivation et subjectivation / contextualisation

Et bien d'autres petits cailloux ... à suivre

A défaut de conclure – j'aime à penser que nous saurons collectivement, suivre les petits cailloux de Hansel ou du Petit Poucet, laissés par Jean-Philippe – pour aider les élèves à mieux identifier et expliciter ce qui est implicite, en algèbre...



Bibliographie

- Assude T., Coppé S., Pressiat A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 41–62.
- Arzarello F., Bazzini, L., Chiappini G.P. (1994) Intensional Semantics as a Tool to Analyze Algebraic thinking. In Arzarello F., Gallo E. (Eds), *Proceedings of the International Workshop on Algebraic Learning*, 105-125.
- Arzarello F., Bazzini, L., Chiappini G.P. (2012) A theoretical model to analyze Algebraic Thinking and its application in school activities, In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 193–207.
- Bardini C. (2012) Décoder, accompagner et favoriser la construction de concepts algébriques et leurs représentations, In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 327–346.
- Boero P. (2011) Les domaines d'expérience dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : lier le travail scolaire à l'expérience des élèves. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F., Wozniak F. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques*. 109-148.
- Chevallard Y. (2007) Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141
- Chevallard Y., Bosch M. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 9–40.
- Brousseau G. (2004) Les représentations, étude en théorie des situations didactiques, *Revue des sciences de l'éducation* 30(2) 241–277.
<http://www.erudit.org/revue/rse/2004/v30/n2/012669ar.html>
- Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (2012) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*, H-S, RDM.
- Douek N. Morselli M. (2012), Preuve et algèbre au collège : de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 284–304.
- Drouhard J-P. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M-J. (Eds), *Actes de la 8^{ème} école d'été de la didactique des mathématiques*, 325-344.
- Drouhard J-P. (2012) L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In Abboud-Blanchard M., Flückiger M. (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – année 2011*, 129-133.
- Drouhard J-P., Panizza M. (2012) Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 209-235.
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Mercier A. (2012) Vous avez dit « algèbre » ? In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 163–180.

Ruiz-Munzon N., Matheron Y., Bosch M., Gascon J. (2012) Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 87 –106.

Substitutions et transformations de mouvement : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique

Céline Constantin

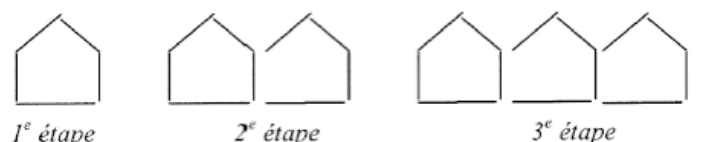
LIRDEF, Université de Montpellier

Le texte présenté ici retrace quelque peu la manière dont les travaux de Jean-Philippe Drouhard ont pu nourrir mon propre travail de recherche entamé dans le cadre d'une thèse (Constantin 2014), et comment les discussions que nous avons pu avoir, tout comme ses recherches continuent d'interroger ce travail et de nourrir de nouvelles pistes à explorer.

Genèse d'une problématique et élaboration d'une ingénierie en appui sur la notion de transformation de mouvement

L'origine de mon travail de thèse se situe dans l'observation et l'analyse d'erreurs récurrentes d'élèves confrontés à des développements ou des factorisations d'expressions. Ces erreurs se révèlent à l'occasion d'adaptations (Robert 2005) fines de pratiques du calcul algébrique en fonction des formes d'expressions rencontrées. Elles s'observent depuis longtemps dans bien d'autres recherches (Tonnel 1979, Abou-Raad & Mercier 2009, ou Croset 2009 par exemple). La problématique qui a tout d'abord été au cœur de ma recherche était celle de l'identification ou de l'élucidation de savoirs qui puissent se constituer comme savoirs opérationnels pour l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique. Par savoirs opérationnels, j'entends des savoirs qui puissent soutenir et accompagner ces adaptations tout en portant le regard sur les indices mathématiquement pertinents des expressions, et qui permettent de nourrir un discours (Mercier 2012) pour les élèves, comme pour les enseignants qui décrivent, justifie et éclaire les techniques du calcul algébrique. Le constat de l'assujettissement des techniques aux formes d'expressions dans les difficultés d'élèves m'a amenée à me centrer sur la partie du calcul algébrique correspondant aux traitements des expressions symboliques algébriques (Drouhard 1992) en excluant de fait le calcul équationnel. Je me suis de plus centrée sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition comme propriété centrale au niveau du collège où les techniques de calcul se construisent. Je présenterai ici deux extraits correspondant à l'élaboration de ma problématique qui témoignent des apports du point de vue développé par Jean-Philippe Drouhard, et de la manière dont les outils de l'analyse épistémographique (Drouhard 2013) permettent de se saisir d'épisodes observés dans les classes.

L'exploration de différentes situations envisagées ou observées par la recherche m'a conduite à interroger les savoirs à l'œuvre dans les situations de modélisation et comment ils peuvent se constituer en arrière-plan d'une construction du calcul algébrique (ou d'une théorie pour le calcul algébrique) en les envisageant comme point de départ pour l'enseignement du calcul algébrique. J'illustrerai mon propos à partir d'un extrait de Krysinska et Schneider (2010) à propos des suites de nombres figurés :



Les suites de nombres figurés constituent le système initial qui, à la suite d'une certaine réflexion, se trouve modélisé par trois formules différentes, $4x + 1$ ou $5 + 4(x - 1)$ ou encore $5x - (x - 1)$. Krysinska, Schneider (2010) p. 178

L'un des enseignants observés dans cette recherche envisage cette situation pour amener les élèves à construire une première manipulation des écritures et procèdera finalement par ostension. Les auteurs suggèrent une autre voie possible qui aurait pu consister à proposer aux élèves d'envisager de transformer l'expression $5 + 4(x - 1)$ pour obtenir $4x + 1$.

Mais il y a alors un changement de regard à porter sur l'égalité construite. Dans cette situation, la double « traduction » du nombre d'objets à une étape donnée amène à produire deux relations entre les variables du système et par conséquent deux expressions dont l'égalité est assurée par l'une des propriétés du système (pourvu qu'on ait correctement modélisé) : l'indépendance du nombre d'objets selon la façon de compter. Dans le calcul algébrique, l'une des expressions (généralement celle qui est écrite à droite) doit s'interpréter comme transformée de l'autre en opérant sur les écritures. L'égalité témoigne alors d'une transformation portant sur les écritures, ou autrement dit, d'un calcul algébrique qui permet d'obtenir le membre de droite à partir du membre de gauche, au moyen éventuellement d'une expression intermédiaire. Les expressions deviennent dès lors des objets sur lesquels il est possible d'opérer. Comment se saisir de ce travail sur les formalismes ? Si la dialectique entre système et modèle permet de contrôler les égalités par dénotation, elle n'est cependant pas de nature à livrer les logiques de fonctionnement des transformations que l'on peut y associer au sein du modèle, c'est-à-dire des modes de production d'égalités à partir d'un travail sur les écritures.

Le point de vue linguistique développé dans les travaux de Drouhard permet de s'y attaquer. Le calcul algébrique y est défini comme un ensemble d'applications $\mathcal{T}: L \rightarrow L$, appelées transformations de mouvement (Drouhard et Panizza 2012), L désignant un langage, permettant d'associer à toute expression symbolique algébrique, une autre expression qui lui soit égale en vertu des propriétés de corps commutatif ordonné de l'ensemble des nombres

réels. Ainsi la chaîne de caractère « $3x + 5 = 5 + 3x$ » peut-elle être interprétée comme résultante d'une transformation de mouvement \mathcal{T} fondée sur la commutativité de l'addition et telle que $\mathcal{T}(\ll 3x + 5 \gg) = \ll 5 + 3x \gg$. Cette modélisation permet à la fois de mettre l'accent sur l'action, sur une interprétation de l'égalité en termes de production de manipulation d'écritures et ce en lien avec les propriétés mathématiques les régissant. L'étude des caractéristiques de ces transformations de mouvement et des savoirs attenants sera donc le point de départ d'un nouveau questionnement :

Des savoirs de nature sémio-linguistique peuvent-ils se constituer comme fondement d'un enseignement pour le calcul algébrique ?

Par ailleurs, je fais l'hypothèse que le changement de regard à porter sur les égalités au moment de la construction d'une certaine théorie pour le calcul algébrique puisse ne pas aller de soi. Cette hypothèse s'appuie d'une part sur la recherche de transformations de mouvement pré-existantes dans le langage arithmétique L_{Arithm} et d'autre part sur l'observation d'épisodes de classe.

J'illustrerai mon propos ici par un épisode de classe dont je n'analyserai qu'un des aspects pour étayer cette hypothèse. Une classe de 5e (12 ans) cherche à produire des expressions égales à des expressions données, après avoir étudié l'équivalence de programmes de calculs à partir d'une exploration numérique étendue sur tableur. Aucun calcul algébrique n'a encore été à l'étude dans la classe, et la question qui se pose est celle de trouver des expressions égales pour produire des programmes de calcul équivalents. Les élèves n'envisageront que peu de manipulations (enlever les parenthèses) avant de se mettre à construire une technique inédite qui n'a rien d'une manipulation d'écriture. S'emparant de façon saisissante de la dénotation, ils testent chacune des premières formules proposées, et concluent aussitôt : elles ne conviennent pas. Au bout de quelques tentatives de ce que l'on pourrait interpréter comme des manipulations d'écritures que propose un élève (enlever les parenthèses par exemple), sans que les autres s'en emparent du reste, un phénomène tout à fait inattendu se produit. Certains élèves tentent d'élaborer une technique à partir de la seule théorie dont ils disposent : la dénotation. La démarche est légitime : la dénotation servant de technologie pour invalider des égalités, une autre fonction potentielle est explorée, une fonction productrice de technique. La difficulté tient à ce que la dénotation ne permet pas d'engendrer une expression égale à une autre, ou d'identifier un mode de production d'une telle expression algébrique. Les élèves ont ainsi à produire une expression égale à $(n \times 4 + 5) \times 2$. L'un d'entre eux explicite : il remplace n par 5, ce qui donne 50. Il sait que 50 c'est 5 fois 10, ce qui correspond à $10 \times n$ pour $n = 5$. Il propose donc l'égalité $(n \times 4 + 5) \times 2 = 10 \times n$. Le contrôle par les autres élèves conduira à invalider la technique en appui sur la

dénotation. Mais cela ne donnera pas davantage accès aux gestes idoines du calcul algébrique. Les outils de l'analyse épistémographique permettent d'interpréter cet épisode au regard des relations qu'entretiennent les différents savoirs qui gravitent autour d'un objet, et du positionnement de l'activité vis-à-vis de ces savoirs.

Les transformations de mouvement s'insèrent dans l'analyse épistémographique (Drouhard 2013) qui considère que les savoirs relatifs aux objets mathématiques sont situés dans un espace essentiellement à trois dimensions :

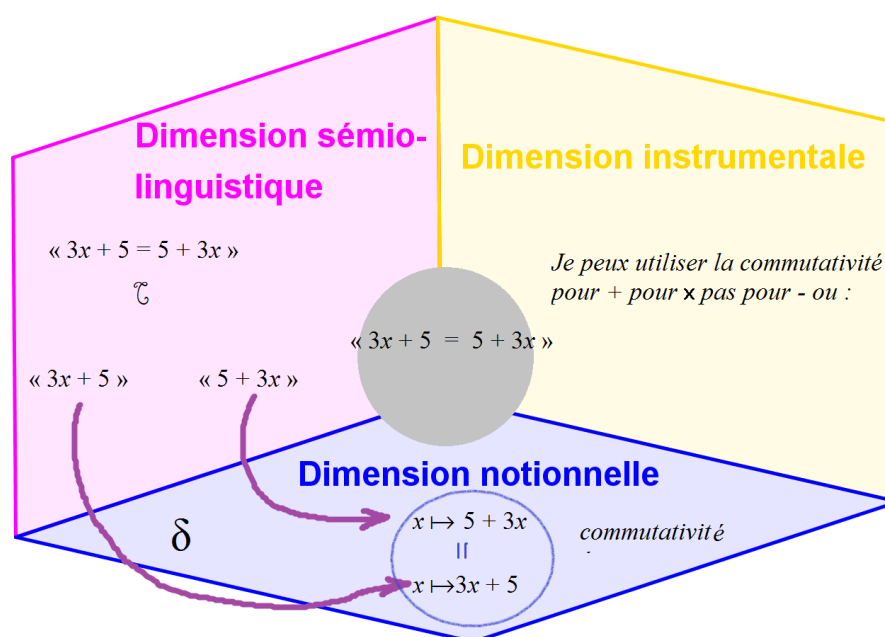


Figure 1 – Schéma simplifié de la projection des savoirs relatifs à un objet dans le cadre de l'analyse épistémographique

L'analyse épistémographique s'intéresse à la manière dont les savoirs et leurs représentations adviennent ensemble, non pas d'un point de vue historique, mais d'un point de vue synchronique (Drouhard 2013). Ce modèle ne s'inscrit pas dans une modélisation de l'activité (d'un sujet), mais de connaissances. De ce point de vue les savoirs réfèrent donc à une définition très large de « ce qu'il y a à savoir », ou de ce que l'on « peut savoir » ici pour faire des mathématiques.

La *dimension notionnelle* recouvre les propriétés ou les définitions mathématiques de l'objet. L'une de ses caractéristiques est qu'elle ne dépend pas du système de représentation sémiotique dans lequel l'objet s'exprime (langagier ou scriptural par exemple).

La *dimension sémio-linguistique* recouvre « ce qu'il y a à savoir des systèmes de représentation sémiotique (en particulier le langage symbolique) pour faire des

mathématiques ». En font partie les règles syntaxiques de juxtaposition de symboles, la grammaire des expressions ou les transformations de mouvement.

La *dimension instrumentale* concerne « ce qu'il y a à savoir des instruments (matériels, notionnel, sémiotiques ou stratégiques) pour faire des mathématiques ». On y trouve par exemple des savoirs liés aux portées ou aux limites de techniques ou de propriétés. Cette dimension est donc liée à une fin et recouvre des savoirs qui permettent par exemple de faire des choix (adaptations) ou plus généralement d'opérer sur les objets selon un but visé.

Cette typologie des savoirs permet de préciser la nature du travail et des savoirs en jeu. Dans l'épisode observé le professeur attend des élèves un travail dans la dimension sémiolinguistique, or ce travail est inédit, et les élèves s'appuyant sur la dénotation changent de dimension en inscrivant leur technique dans la dimension notionnelle.

La difficulté réside dans le fait que la dénotation n'est pas injective. Elle entretient une relation pourtant fondamentale avec ces transformations permettant un certain contrôle des égalités produites puisque le dénoté d'une expression n'est pas modifié par une transformation de mouvement. Mais la dénotation ne pilote pas les transformations de mouvement

Une autre interprétation de cette difficulté à faire émerger une transformation de mouvement réside dans le fait qu'il n'y a pas de véritable précurseur, au moment de l'introduction du calcul algébrique dans la scolarité, de ce sens donné aux expressions.

Examinons le cas des expressions arithmétiques rencontrées à l'école primaire, et des égalités afférentes. Tout d'abord, la très grande majorité des propositions usent du signe « = » comme marqueur de la réalisation d'un calcul comme dans « $57 \times 2 = 114$ ». Or, l'effectuation, c'est-à-dire l'exécution d'un calcul numérique n'est pas une transformation de mouvement. Le travail s'effectue en effet sur les dénotés dans la dimension notionnelle, et ne porte pas *sur* les expressions, c'est-à-dire qu'il ne s'effectue pas dans la dimension sémiolinguistique. Pour les mêmes raisons, une égalité reposant sur une décomposition comme « $50 = 5 \times 10$ » ne réfère pas davantage à une transformation de mouvement.

Deux transformations de mouvement apparaissent néanmoins au moment de la construction des propriétés de la multiplication en primaire. Ainsi « $4 + 4 + 4 = 4 \times 3$ » relève-t-elle de la transformation « $4 + 4 + 4 \xrightarrow{\text{déf } \times} 4 \times 3$ » reposant sur la définition de la multiplication par addition itérée ? De la même façon on pourra trouver des égalités comme « $3 \times 4 = 4 \times 3$ » issue de la transformation fondée sur la commutativité de la multiplication « $3 \times 4 \xrightarrow{\text{commut}} 4 \times 3$ ». Néanmoins, ces transformations pourront apparaître en début d'apprentissage, au moment de la construction de la multiplication, mais auront une place certainement réduite dans les pratiques par rapport aux effectuations.

Enfin, une dernière transformation de mouvement apparaît à l'occasion du travail sur les écritures décimales de nombres et la décomposition additive comme « $520 = (5 \times 100) + (2 \times 10)$ ». La transformation de mouvement porte bien sur les chiffres de l'expression arithmétique « 520 » et se base sur les propriétés mathématiques de la numération, c'est-à-dire de la valeur des chiffres selon leur rang dans l'écriture décimale de position.

Ces transformations de mouvement dans le langage L_{Arithm} sont cependant de nature très différente des transformations de mouvement dans L_{Alg} . En effet, d'une part elles portent sur les chiffres, ce qui n'a pas d'équivalent dans les expressions de L_{Alg} , et d'autre part les propriétés activées dans la dimension mathématique réfèrent à une théorie de la numération particulière dans le sens où elle donne un certain sens à la syntaxe. Le seul équivalent que l'on pourrait envisager dans L_{Alg} serait celui de l'effacement du signe \times pour « $3 \times x = 3x$ ». Or, les transformations de mouvement qui nous occupent sont celles qui relèvent plutôt de l'application des propriétés de corps de \mathbb{R} . Plus encore, dans les décompositions des écritures décimales de nombres, n'apparaissent pas les dialectiques précédentes, c'est-à-dire l'interprétation d'une expression telle que « $(5 \times 100) + (2 \times 10)$ » comme étant celle d'un programme de calcul.

La rupture de l'interprétation du signe « = » s'accompagne d'un émergent manquant dans les traitements des expressions arithmétiques : celui d'une transformation de mouvement. Le travail dans L_{Arithm} ne paraît donc pas, tel qu'il peut exister dans les pratiques antérieures des élèves, de nature à la faire émerger.

Comment dès lors envisager des savoirs de nature sémio-linguistique comme fondement d'un enseignement du calcul algébrique ? Quels savoirs à enseigner y associer, et dans quelle mesure et comment peuvent-ils être enseignés et appris ?

Afin d'apporter des éléments de réponse, une ingénierie didactique a été élaborée et expérimentée dans le cadre de la thèse. Elle repose en particulier sur l'hypothèse selon laquelle il est possible de construire une transformation de mouvement dans L_{Arithm} pour la prolonger dans L_{Alg} tout en la généralisant du côté notionnel en appui sur la définition de la multiplication par addition itérée dans le cadre des entiers puis en l'étendant aux autres types de nombres.

Les travaux de Drouhard apportent de ce point de vue des connaissances sur les transformations de mouvement qui ont été un point d'appui essentiel pour la construction de l'ingénierie. L'une des propriétés de ces transformations est celle des invariants des expressions sur lesquelles elles opèrent : ces invariants sont les fonctions syntaxiques des expressions.

Il nous a fallu de nombreux tâtonnements avant de déterminer les invariants qui identifient les sous-expressions à transformer, indépendamment des différences de forme entre les expressions. Ces invariants, ce sont les fonctions syntaxiques ("terme", "facteur", "membre" etc.) que ces sous-expressions remplissent au sein des expressions. Drouhard 1992

On distingue, en sémio-linguistique, catégorie et fonction syntaxique : une catégorie est relative à la nature des objets algébriques comme une égalité, une somme, ou une fraction par exemple. Une fonction syntaxique est la relation qu'entretiennent des sous-ensembles d'une catégorie. Ainsi pour la catégorie somme, la fonction syntaxique est celle de terme de la somme.

Les travaux de Drouhard (1992) montrent que l'usage des fonctions syntaxiques permet de décrire l'ensemble des transformations de mouvement sans avoir recours nécessairement à des transformations élémentaires que l'on composerait et qui rendraient compte selon les expressions, d'une multitude d'étapes que l'expert, ou même le débutant, n'effectue pas toujours dans sa pratique effective.

Cette propriété a deux conséquences.

D'une part, elle permet d'envisager de créer un discours pour la classe qui résiste aux modifications mathématiquement non pertinentes des expressions comme le degré ou la nature des coefficients, autrement dit qui ne soit pas modifié au fur et à mesure des altérations potentielles des catégories employées et des extensions des usages de la distributivité par exemple.

La souplesse de telles descriptions permet d'incorporer dans un même discours un ensemble de transformations de mouvement susceptible de porter sur des expressions dont les sous-expressions peuvent être très diverses (et potentiellement de nature de plus en plus générale), ce qui correspond finalement bien à la flexibilité des usages des écritures algébriques. Ceci amène à supposer que l'on puisse élaborer un discours de nature à accompagner des adaptations de techniques dans le calcul algébrique, tout en discriminant certains indices visuels pour mettre en avant les éléments pertinents que sont les fonctions syntaxiques sur lesquelles opérer.

Dans le même temps, ces spécificités ouvrent la voie aux difficultés langagières afférentes : « les structures profondes » des expressions sur lesquelles opèrent les transformations de mouvement demandent un travail préalable d'identification qui peut être extrêmement complexe et difficile pour les élèves dans la mesure où :

Une partie importante de la compétence de l'élève va donc résider dans sa capacité à reconstituer le sens, partiellement implicite, d'une formule, à partir d'indices visuels (Kirshner 1989, Kirshner & Awrty 2004), tel le petit Poucet (ou le petit Hansel) à la recherche d'indices pour retrouver le chemin de sa maison. Drouhard & Panizza 2012 p. 219

Une autre conséquence de la propriété énoncée précédemment a trait aux conditions supposées favorables à l'émergence d'une transformation de mouvement pour l'élaboration d'une ingénierie. Une première condition est la suivante : construire une transformation de

mouvement demande *a priori* d'envisager une activité de reconnaissance qui porte sur les fonctions syntaxiques comme invariants. L'appui sur des écritures souples du point de vue syntaxique, avec des variations des écritures, en particulier des déictiques spatiaux peut être un levier pour identifier ces fonctions syntaxiques.

Enfin, travailler sur la notion de transformation de mouvement amène à expliciter et à confronter les élèves à un type de tâches consistant à produire des égalités pour lequel il s'agira de construire des savoirs à la fois sémio-linguistiques et notionnels (propriétés de \mathbb{R}) à même de légitimer les égalités et les techniques de production des écritures (technologie de nature double) et fonctionnant de manière dialectique. A titre d'illustration, nous reproduisons ci-dessous des égalités numériques produites par des élèves de 5^e (12-13 ans) face à un tel type de tâches et dont les écritures montrent une certaine souplesse :

The image shows three examples of handwritten mathematical equations in blue ink on a light background. Each equation is written on a separate line and demonstrates the distributive property of multiplication over addition. The first equation is $47 \times (20 + 2) = (47 \times 20) + (47 \times 2)$. The second equation is $86 \times 4 + 86 \times 30 = 86 \times (30 + 4)$. The third equation is $136 \times (200 + 30 + 5) = (136 \times 200) + (136 \times 30) + (136 \times 5)$.

Figure 2 – Exemples d'égalités produites par les groupes

La thèse montre qu'il est possible que les élèves construisent et s'emparent d'un discours fondé sur les transformations de mouvement articulant les dimensions sémio-linguistique et notionnelle. L'expérimentation menée dans une classe de 5^e (élèves de 12 – 13 ans) donne à voir une flexibilité des écritures qui persiste y compris dans L_{Alg} après l'ingénierie expérimentée. Ceci amène à supposer que les identifications opérées dépassent les simples indices formels et s'apparente à celle de fonctions syntaxiques ainsi qu'en témoigne l'extrait de copie suivant au moment de l'évaluation qui a lieu près d'un mois après la séquence d'enseignement.

The image shows a handwritten copy of three mathematical equations on lined paper. The equations are written in green ink and demonstrate the distributive property. The first equation is $6 \times (x + 4) = 6 \times 4 + 6 \times x$. The second equation is $(x - 8) \times 2 = 2 \times x - 2 \times 8$. The third equation is $5 \times c + 5 \times 7 = 5 \times (c + 7)$. There are red diagonal lines to the right of the equations, possibly indicating a checkmark or a mark of completion.

Figure 3 – Extrait d'une copie d'élève de 5^e

On observe ainsi le positionnement du produit par 4 en premier tandis que 4 est le terme de droite de la somme $x + 4$, ce qui pourrait conduire à une égalité fautive dans le cas de la différence, mais un contrôle semble s'exercer pour cet élève au regard de la seconde égalité. Les élèves inscrivent les justifications des égalités tantôt dans une dimension tantôt dans l'autre évoquant le théorème de la distributivité pour légitimer les équivalences, ou la description des transformations de mouvement afférentes. De multiples interprétations des écritures émergent, à la fois comme écriture de nombre, comme programme de calcul, ou comme résultante de transformation de mouvement :

a) Vrai : $13 \times 105 = 13 \times (98 + 2 + 5) = 13 \times 98 + 13 \times 2 + 13 \times 5$

1365 1365

aussi égale à aussi égale à

Figure 4 – Extrait d'une copie d'élève de 5 (12-13 ans)

Dans cet extrait de copie par exemple, $(98 + 2 + 5)$ est interprété comme une autre écriture de 105 et l'égalité $13 \times 105 = 13 \times 98 + 13 \times 2 + 13 \times 5$ est justifiée à la fois par un développement dont on voit les traces, et par dénotation.

Si l'expérimentation menée témoigne d'un usage souple des écritures et des interprétations multiples des égalités, la question du devenir des techniques de calcul algébrique ainsi construites dans le cas de traitements d'expressions plus complexes demeure.

Ceci va de pair avec l'analyse de l'évolution des catégories des expressions tout au long du collège qui accompagne l'extension et la construction de systèmes de nombres de plus en plus vastes, depuis les nombres entiers aux nombres décimaux, rationnels, relatifs et dans une certaine mesure réels.

Comment dès-lors accompagner ces adaptations ?

Une source importante de difficultés, d'ordre strictement linguistique, réside dans le fait que, dans l'usage le plus banal de l'algèbre (par exemple pour introduire une « règle », ou en général n'importe quelle propriété des nombres) certaines formules (par exemple « $(ab)^2 = a^2b^2$ ») servent à noter des substitutions, où aux lettres seront substituées des expressions, voire (dans le cas par exemple des combinaisons linéaires de lignes d'un système de type « $L_1 - 2L_2 + L_3$ ») des propositions. [...]

En toute rigueur, il faudrait donc explicitement distinguer les variables selon le type d'objets (fonctions numériques ou formulaires) que les propositions algébriques sont susceptibles de dénoter car, selon ce type, leur dénotation et leur sens ne sont plus les mêmes.

[...] Autrement dit, les variables des formules algébriques sont implicitement typées (en informatique les variables sont dites typées quand on doit déclarer explicitement si elles sont de type entier, booléen, décimal, alphanumérique etc.), ce qui contribue encore à désorienter bon nombre d'élèves. Drouhard et Panizza 2012 p. 226

L'analyse de l'évolution des catégories et des usages de la propriété de distributivité dans les manuels tout au long du collège m'a amenée à questionner un nouveau savoir

potentiellement opérationnel pour l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique : la substitution. Cette notion a commencé à être formalisée dans le cadre de l'analyse épistémographique (AE) dans Drouhard (2015). Avant de préciser comment elle s'insère dans les outils de l'AE, la suite de ce texte illustre, au travers d'extraits d'analyses de manuels, les questions soulevées par l'observation des différentes catégories en jeu dans les développements et les factorisations qui occasionnent des adaptations de techniques dans le calcul algébrique.

La substitution

Un savoir implicite dans les manuels scolaires ?

Observons tout d'abord un exemple. L'extrait de manuel suivant montre l'un des formalismes de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition tel qu'on le rencontre en 5^e :

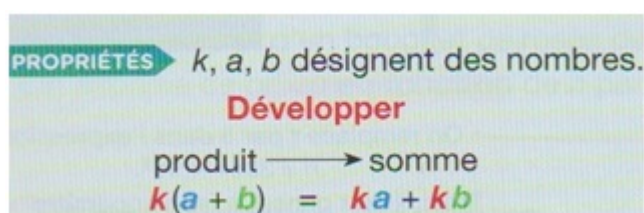


Figure 5 - Manuel Transmath (2010) 5e

Les variables k , a et b sont explicitement typées et renvoient à des nombres, de sorte que les catégories correspondant à la construction de l'identité relèvent de Constantes comme « 5 » ou Variable comme « x ». Observons maintenant l'un des exercices du même manuel :

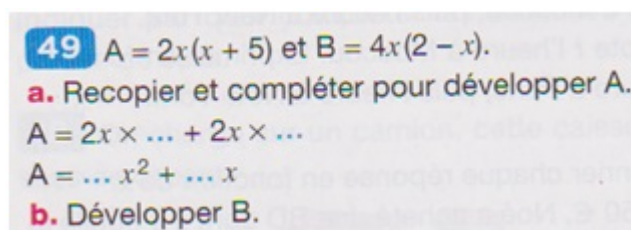


Figure 6 - Manuel Transmath (2010) 5e

Si l'on envisage d'utiliser le formalisme exposé dans la partie Cours, une altération de catégorie dans la substituante¹⁹ s'impose : « $2x$ » relève de la catégorie Pseudo-monôme et se trouve en position prioritaire par rapport au produit. Il y a là une adaptation muette et précoce

¹⁹ Nous empruntons ici un terme à Serfati (2005) défini comme « forme » donnée engagée dans une substitution. Les substituantes sont pour nous ici des expressions symboliques algébriques se substituant dans les faits aux lieux des lettres des identités correspondant à la propriété de distributivité.

présentée comme allant de soi alors qu'elle relève potentiellement d'un choix lié à l'associativité de la multiplication amenant à réinterpréter un produit de trois facteurs en un produit de deux facteurs. En outre, si k désigne un nombre, est-il transparent pour les élèves qu'on peut le remplacer par $2x$? Autrement dit est-il transparent que $2x$ soit aussi une écriture de nombre ?

Par ailleurs, selon le type de tâches, une expression comme « $2x$ » va pouvoir relever de la catégorie Pseudo-monôme (pour développer) ou de la catégorie Produit (pour réduire) comme il en va pour « $4x$ » dans l'exemple ci-dessous :

54 Recopier et compléter afin de réduire chaque expression.

a. $4x + 9x = (\dots + \dots)x = \dots x$

b. $21y - 11y = (\dots - \dots)y = \dots y$

Figure 7 - Manuel Transmath (2010) 5

La flexibilité dans l'interprétation d'une expression comme « $2x$ » semble donc une condition nécessaire pour construire un discours à même d'accompagner l'évolution du *typage* des expressions en lien avec la quantification des propositions servant de théorie pour le calcul algébrique.

Une autre extension de l'utilisation du formalisme de la distributivité interroge la manière dont il peut être lié aux techniques de calcul algébrique. Examinons l'extrait de manuel suivant :

<p>(3) la distributivité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$ • $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$ 	$C = 3 \times x + 5 \times x + 2 \times x$ $C = (3 + 5 + 2) \times x$ $C = 10x$
--	---

Figure 8 - Triangle 5e (2010) Cours

Les écritures proposées suggèrent qu'il ne s'agit pas d'une adaptation de la technique en utilisant à deux reprises la distributivité sous sa forme « binaire » c'est-à-dire avec une somme de deux termes car le parenthésage serait autre. L'extension semble plutôt porter sur le formalisme avec une utilisation implicite d'une identité que l'on pourrait écrire $k(a + b + c) = ka + kb + kc$. Or le passage de l'identité du Cours à celle-ci n'est pas organisé, et cette extension apparaît en tout début d'apprentissage.

Au contraire de la catégorie Pseudo-monôme, l'utilisant de la catégorie Somme pour les substituantes est minoritaire dans les manuels de 5^e analysés (Triangle, Phare, Transmath), elle est pourtant majeure en 4^e pour construire la distributivité dite double à partir de la distributivité simple à l'instar de l'exemple suivant :

a, b, c, d désignent des nombres relatifs.

a. Recopier et compléter : $(a + b)(c + d) = (a + b) \times \dots + (a + b) \times \dots$

b. Utiliser à nouveau la distributivité pour achever le développement de $(a + b)(c + d)$.

Figure 9 - Transmath 4 (2011) Activité

On peut questionner ici encore la transparence de cette modification implicite du typage des expressions, et la modification de dénotation qu'elle entraîne, d'autant que les identités se construisent à partir d'explorations numériques, c'est-à-dire que leur mode de construction repose sur des nombres.

La substitution apparaît plus présente en 3^e pour outiller les factorisations, elle peut être posée (comme dans le manuel Transmath) ou non (manuel Phare) :

Solution

a. $A = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(x + 4)$
 $A = (4x + 1)(4x + 1) - (4x + 1)(x + 4)$ ←

$A = (4x + 1)[4x + 1 - (x + 4)]$ ←

$A = (4x + 1)[4x + 1 - x - 4]$

$A = (4x + 1)(3x - 3)$

- On observe que $(4x + 1)$ est un facteur commun à chacun des produits $(4x + 1)(4x + 1)$ et $(4x + 1)(x + 4)$.
- On applique $ka - kb = k(a - b)$.
avec $k = 4x + 1$, $a = 4x + 1$ et $b = x + 4$.
Attention, à laisser $x + 4$ entre parenthèses dans le crochet.

Figure 10 - Transmath 3 (2012)

Cet extrait donne à voir l'importance des étapes nécessaires avant d'effectuer une substitution. Il faut tout d'abord modifier l'écriture de « $(4x + 1)^2$ » pour passer de la catégorie Puissance à celle de Produit. Il s'agit ensuite de reconnaître l'un des formalismes de la théorie algébrique disponible faite d'identités. Or, 6 identités sont disponibles en 3^e (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction sous sa forme simple, distributivité double, et trois identités remarquables). Il y a donc potentiellement 12 expressions à examiner. Comment alors « reconnaître » ?

La recherche systématique de la description des adaptations du point de vue des catégories employées permet de faire émerger des caractéristiques et des implicites dans les usages des écritures.

La substitution dans l'analyse épistémographique, vers de nouvelles pistes à explorer

Drouhard définit la notion de substitution dans son travail en 2015 (Drouhard 2015), en appui sur ce qu'il nomme dès lors *formules de substitution* :

Dans ces formules les lettres sont destinées à être substituées par des expressions (et non pas seulement par des nombres). Les dénotés de telles **formules de substitution** ne sont donc pas des nombres mais des écritures symboliques.

De sorte que :

Une description cohérente de la sémantique du calcul algébrique doit adjoindre à la dénotation δ une nouvelle classe de fonctions que l'on pourrait appeler « dénotations littérales » et noter avec le symbole « Δ ». Si on désigne par L le langage symbolique (considéré comme un ensemble d'écritures notées « ϵ »), la dénotation littérale Δ est donc une fonction de L dans L telle que :

pour toute écriture ϵ de L comprenant n variables v_1, \dots, v_n , l'image de ϵ par L (appelée « dénoté de ϵ ») est une fonction notée L_ϵ de L dans L qui à tout n -uplet d'écritures $(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$ associe l'écriture obtenue par substitution de chaque variable v_i de ϵ par l'écriture ϵ'_i correspondante.

Il adjoint ainsi aux transformations de mouvement les substitutions comme un second type de transformations dans la dimension sémio-linguistique.

Les extensions précoces et muettes des manuels observées précédemment interrogent d'une certaine manière la transparence du changement de dénotation de certaines formules, d'autant qu'elles sont bâties en appui sur une dénotation « numérique ».

Celles-ci paraissent dès lors ouvrir une nouvelle voie à explorer : l'explicitation dans une certaine mesure de ce changement de dénotation des égalités, et l'étude de substitutions peuvent-elles être une piste pour l'enseignement du calcul algébrique ?

La substitution pourrait s'avérer motrice pour articuler les différents formalismes des identités soutenant le calcul algébrique, de la distributivité sous sa forme simple, ou double et inversement. Elle pourrait d'autre part permettre de créer de nouvelles identités comme $k(a + (b + c)) \underset{b \sim (b+c)}{=} ka + k(b + c) \underset{\mathcal{J}}{=} ka + kb + kc$. Elle pourrait soutenir explicitement

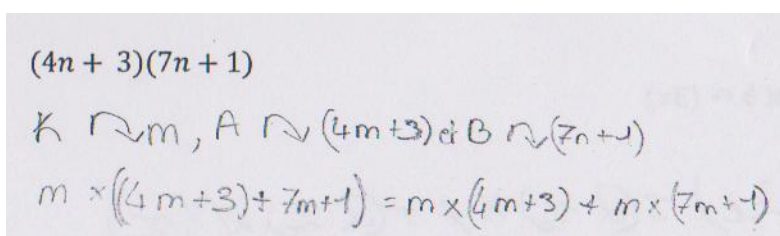
des adaptations existantes, en particulier en début d'apprentissage où l'expérience des formes fait défaut. Par exemple $k \sim (3x), a \sim x, b \sim 5$ dans la forme « $k(a + b) = ka + kb$ » donne $(3x)x + (3x)5$. Elle pourrait même nourrir de nouvelles adaptations permettant de développer le carré d'une somme de trois termes. La substitution peut toutefois rigidifier la pratique, les transformations de mouvement paraissent donc complémentaires.

Un autre enjeu semble émerger d'une pré-expérimentation menée dans une classe de 4^e (élèves de 13 – 14 ans).

Un procédé fondamental en linguistique pour travailler la notion de structure consiste à procéder par substitution. Pour distinguer un infinitif d'un participe passé dans une phrase contenant un verbe du premier groupe, on peut le remplacer par un autre (*faire* par exemple) du deuxième ou du troisième groupe dans la phrase et dont l'oralisation permettra d'entendre

et de distinguer les deux formes. Pour savoir si un mot est un verbe, on essaye de le conjuguer, et on regarde ce que cela donne. De même la substitution peut-elle contribuer à nourrir le travail de reconnaissance nécessaire dans la pratique du calcul algébrique ?

Observons deux extraits de travaux d'élèves de 4^e issus d'une expérimentation menée en 2016. L'énoncé est le suivant : « proposer des substitutions possibles pour utiliser la distributivité pour développer les expressions suivantes, puis effectuer le développement ». Les notations choisies sont celles des travaux de Serfati (2005) quant aux substitutions.



$$(4n + 3)(7n + 1)$$

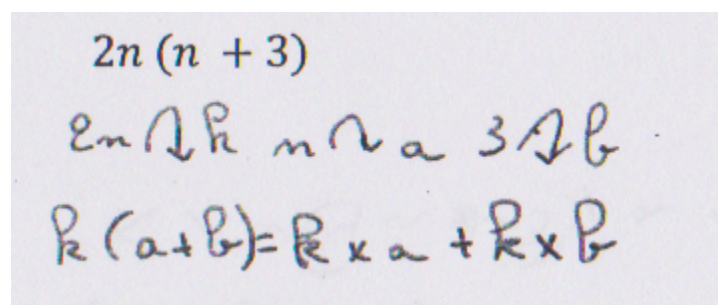
$$K \rightsquigarrow m, A \rightsquigarrow (4m + 3) \text{ et } B \rightsquigarrow (7m + 1)$$

$$m \times ((4m + 3) + 7m + 1) = m \times (4m + 3) + m \times (7m + 1)$$

Figure 11 – Extrait d'un exercice de substitution d'un élève de 4^e

La substitution permet après coup d'observer que le choix des substituantes effectué par cet élève n'a pas permis de produire l'expression à développer. L'égalité produite par substitution dans « $k(a + b) = ka + kb$ » témoigne d'un développement juste (et c'est là l'un des intérêts de ce travail « aveugle » au sens de Leibniz), mais qui n'est pas celui de l'expression donnée.

Or, la substitution peut aussi se penser dans un mouvement de généralisation, c'est-à-dire, qu'elle peut s'opérer non pas dans « $k(a + b) = ka + kb$ », mais dans l'expression fournie pour observer si l'on obtient l'une des expressions « $k(a + b)$ » ou « $ka + kb$ » :



$$2n(n + 3)$$

$$2n \rightsquigarrow K, n \rightsquigarrow a, 3 \rightsquigarrow B$$

$$K(a + B) = K \times a + K \times B$$

Figure 12 – Extrait d'un exercice de substitution d'un élève de 4^e

Ceci permet une reconnaissance, et une validation des choix des substituantes en appui sur le caractère réversible de la substitution, pour ensuite pouvoir développer.

Si de tels enjeux semblent se dessiner, de nombreuses questions demeurent, en particulier celle du choix des ostensifs : utilise-t-on pour noter une substitution une flèche comme ici ou un signe « = » qui en étendrait encore l'usage ? Par ailleurs jusqu'où parenthéser ? Écrit-on

$(3x + 1)$ ou $((3x) + 1)$? Parenthèse-t-on les nombres ? Ce que Serfati nomme les assemblages dûment complétés, c'est-à-dire entièrement parenthésés permet un travail « aveugle » dans la dimension sémio-linguistique, mais dans quelle mesure outillent-ils ou gênent-ils les interprétations ou les manipulations ? Comment travailler l'apparition des signes $()$ ou \times nécessaires si l'on ne parenthèse pas entièrement ?

Quelle influence une substitution peut-elle avoir sur le sens ou la dénotation d'une expression ?

Si en toute fin, la substitution « experte » se passe d'ostensif, je conclurai en reprenant les termes de Drouhard à propos de l'exploration de ce point de vue linguistique qui permet à mon sens de lever un certain nombre d'implicites dans le travail des formalismes et d'en questionner la transparence :

La raison principale de s'intéresser à la syntaxe du langage des écritures du calcul symbolique mathématique est que ce langage est bien plus complexe qu'il n'y paraît de prime abord. (Drouhard 2015).



Céline Constantin et Lalina Coulanges, SFIDA-34 à Nice, 26 novembre 2010

Références

Abou-Raad N., Mercier A. (2009). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2), 155-288.

Constantin C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de doctorat. Aix-Marseille Université.

- Croset M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- Drouhard J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de l'université Paris 7.
- Drouhard J.-Ph. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In Abboud-Blanchard M. & Flückiger M. (Eds.) *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques - Année 2011* (pp. 129-133). IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.
- Drouhard J.-Ph., Panizza M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 203-229). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Drouhard J.-Ph. (2013). El análisis epistemográfico : un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática. Comunicación en las *XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia*, La Falda, Córdoba. Area Lógico-Epistemológica de la Escuela de Filosofía y Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.
- Drouhard J.-Ph. (2015). *Le langage des écritures symboliques*. Communication, Séminaire Franco-Argentin de didactique de l'algèbre. Marseille Université.
- Krysinska M., Schneider M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Editions de l'Université de Liège. Coll. Si les mathématiques m'étaient contées.
- Mercier A. (2012). Vous avez dit algèbre ? In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Robert A. (2008). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck (Ed), *La classe de mathématiques activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.31–68), Octarès.
- Serfati M. (2005). *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Editions PETRA.
- Tonnelle J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Manuels scolaires

- Bourgeat F., Carlod V., Jacquemoud D., Keller A., Maze M., Plantiveau A., Puigredo F., Verdier F. (2014) 5e Collection Transmath, Editions Nathan.
- Brault R., Daro I., Ferrero C., Perbos-Raimbourg C., Telmon C. (2010), Mathématiques 5e Collection Phare, Editions Hachette.
- Brault R., Cipolin M.-C., Cuq S., Daro I., Ferrero C., Marfaing I., Ripaud B. (2012), Mathématiques 3e Collection Phare, Editions Hachette.
- Chapiron G., Mante M., Mulet-Marquis R., Perotin C. (2010) Mathématiques 5e Collection Triangle, Editions Hatier.
- Malaval J., Chaput A., Carlod V., Fundakowski M., Maze M., Plantiveau A., Puigredo F., Quaire S., Wallon P. (2011) 4e Collection Transmath, Editions Nathan.
- Malaval J., Carlod V., Estevens F., Fundakowski M., Keller A., Maze M., Odor F., Plantiveau A., Puigredo F., Wallon P. (2012) 3e

Espaces de questionnement et de débat scientifique : de CESAME à l'épistémographie

Teresa Assude

Aix-Marseille université –EA 4671 ADEF

La pensée et la vie scientifique de Jean-Philippe Drouhard sont encore bien présentes pour certains chercheurs, ce qui est bien mon cas. Dans ce texte, je veux présenter ce que le travail conjoint avec Jean-Philippe m'a apporté et en quoi ses travaux contribuent encore au développement des recherches en didactique des mathématiques en donnant un exemple concret.

1 – Des espaces de débat scientifique et de questionnement

Dans le volume spécial de la revue *Recherches en didactique des mathématiques* consacré à l'enseignement de l'algèbre élémentaire, Jean-Philippe Drouhard écrivait à propos du Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre (SFIDA) qui s'est tenu pendant 20 ans sous son impulsion et était animé conjointement avec des collègues italiens : « SFIDA est essentiellement un lieu authentique de débat scientifique qui permet d'affiner les travaux par la confrontation critique et de faire émerger de nouvelles idées dans le champ de la didactique de l'algèbre » (Drouhard, 2012a, p.187).

L'historique et les apports de SFIDA sont présentés dans ce volume de la revue RDM mais je veux souligner ici le fait que ce séminaire soit un « lieu authentique de débat scientifique ». La création de lieux de débats scientifique est un trait de ce chercheur. Il a mis en place des lieux de débat scientifique, et pas seulement dans le cadre de SFIDA. Certes le propre de la vie d'un chercheur est de participer à des débats scientifiques qui puissent faire avancer la connaissance, mais dans le cas de Jean-Philippe Drouhard la création de ces lieux était relative non seulement à sa vie de chercheur mais aussi à celle des élèves.

A la suite des travaux de Marc Legrand sur le débat scientifique avec des étudiants comme moyen d'accès aux savoirs mathématiques et aux règles logiques, Jean-Philippe Drouhard a mis en place ce type de dispositif (voir textes de Maryse Maurel et d'Yves Paquelier). Ce dispositif n'était pas seulement destiné à l'enseignement mais aussi à la recherche. La question abordée était celle : qui faut-il savoir de plus que les mathématiques pour faire des mathématiques ?

Par ailleurs, dans le cadre de la création de lieux de débat scientifique qui a été aussi celle du groupe CESAME, j'ai pu vivre en première personne ce qu'est le débat scientifique

en dehors des institutions officielles créées à cet effet. Ces institutions existent et sont essentielles pour la recherche, comme les équipes d'accueil, les laboratoires, etc. Mais ce ne sont pas les seuls lieux où vit le débat scientifique. CESAME – acronyme de « *Construction expérimentielle du savoir et autrui dans les mathématiques enseignés* » - était un groupe constitué par des chercheurs de l'enseignement supérieur mais aussi des chercheurs de l'enseignement secondaire qui n'avaient pas le statut officiel de chercheurs. Ce groupe a duré très longtemps (plus de 15 ans), ce qui indique qu'il répondait aux attentes des participants : être un espace de questionnement et de débat scientifique, être un lieu de production de dispositifs d'enseignement, d'expérimentation, et enfin être un espace de production de connaissances.

2 – Du GECO à CESAME

Le groupe CESAME s'est placé dans la continuité du travail du GECO (Association pour le Génie Cognitif) qui était fondé sur une triple approche mathématique, psychologique et sociale des faits d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Maurel & Sackur, 2010). L'activité du sujet (notamment l'élève) était modélisée par rapport à trois espaces (psychologique, social et mathématique), à partir du point de vue statique par la notion de connaissance locale, et du point de vue dynamique par les trois orientations.

Selon le groupe GECO, une connaissance est locale si elle est cohérente dans l'espace psychologique, valide dans l'espace social et efficace dans l'espace réel. Cette connaissance locale a un domaine de validité mais le sujet ne le connaît pas forcément. Des travaux menés sur l'apprentissage des décimaux (Leonard et Sackur, 1990) ont permis d'analyser les erreurs des élèves comme des connaissances locales : ce qui était cohérent, valide et efficace pour les nombres naturels devient faux pour les nombres décimaux. Certains élèves ne se rendent pas compte, au moins dans un premier temps, que leurs connaissances sont locales et de leur domaine de validité. Les connaissances évoluent dans et par l'action du sujet, et sont orientés vers un objectif. Ainsi le point de vue dynamique est abordé par les trois orientations. Dans l'espace psychologique, le sujet agit orienté par la compréhension, dans l'espace social par la conformité et dans l'espace réel par la performance. L'activité du sujet s'organise souvent dans une seule dimension, et la particularité des experts est le changement d'orientation. Les travaux du GECO (Sackur, Drouhard, Maurel, Pécal, 1997) sur l'algèbre ont montré que les élèves, notamment ceux en difficulté, agissent souvent en conformité. Ils appliquent des règles sans essayer de comprendre ni de voir en quoi ces règles peuvent être efficaces (performance).

A la suite de ces travaux, le groupe CESAME s'est posé les deux questions suivantes :

- Le sujet-élève dans la classe de mathématiques, de quoi fait-il l'expérience lorsqu'il fait et apprend des mathématiques ?
- Qu'y a-t-il à apprendre de plus que des énoncés pour faire des mathématiques ?

Le groupe CESAME (Sackur, Assude, Maurel, Drouhard, Paquelier, 2005) a modélisé l'activité mathématique à partir de trois ordres de connaissance. Ainsi, pour faire des mathématiques on a besoin de connaissances de trois ordres :

- Les connaissances d'ordre 1 correspondent aux définitions, théorèmes, axiomes, etc., à ce sur quoi on joue le « jeu mathématique » ;
- Les connaissances d'ordre II correspondant aux règles du jeu mathématique. Par exemple, une connaissance d'ordre 2 correspond au caractère nécessaire d'un théorème : « cela ne peut pas en être autrement » ;
- Les connaissances d'ordre III correspondent à ce que sont les mathématiques. Par exemple, faire des mathématiques correspond à un jeu avec des connaissances d'ordre 1 selon les règles du jeu de l'ordre 2. Souvent, les connaissances de cet ordre peuvent apparaître par la négative : « ça, ce n'est pas des mathématiques ».

Le groupe CESAME a travaillé sur les connaissances d'ordre 2, notamment les règles concernant la logique mathématique, les règles gouvernant la validité et les règles gouvernant la sémiotique. Ces connaissances sont constitutives de la réalité mathématique mais restent souvent implicites dans le travail mathématique de l'élève. Or que faire pour que les élèves apprennent des connaissances d'ordre 2 ? La mise en place du « dispositif CESAME » a répondu à cette question. Nous ne décrivons pas ici ce dispositif (Sackur & Maurel, 2000 ; Sackur et al. 2005) mais indiquons seulement quelques principes. Nous pensons que l'élève doit faire l'expérience de ces connaissances en jouant le jeu mathématique (en lien avec les connaissances d'ordre 1), en se confrontant à la résistance de la réalité mathématique et à autrui. Pour cela le dispositif suppose de partir de connaissances locales (travail du GECCO) qu'on suppose apparaître dans les situations proposées. A partir des contradictions et du débat avec autrui, l'élève non seulement peut apprendre des connaissances d'ordre 1 mais aussi des connaissances d'ordre 2. L'enseignant doit pouvoir institutionnaliser ces différents types de connaissances pour que l'élève puisse en prendre conscience.

3 – De CESAME à l'épistémographie

Le projet épistémographique de Jean-Philippe Drouhard a pris appui sur les travaux du GECCO et du groupe CESAME auxquels il a participé activement mais il a développé d'autres questionnements. Quel est ce projet ? Nous suivons ici essentiellement deux textes (Drouhard 2007 ; Drouhard 2012b)

L'épistémographie est présentée comme un outil au service de la didactique des mathématiques (ou plus généralement des didactiques des disciplines scientifiques), et non pas comme une théorie didactique. Il s'agit d'un modèle a priori de l'organisation des savoirs, d'une typologie des savoirs. Autrement dit, l'épistémographie « a pour but de décrire non pas la nature mais plutôt la structure des savoirs mathématiques ».

Pour situer l'intérêt de l'épistémographie, Jean-Philippe Drouhard parle d'un modèle en couches de description de l'activité mathématique scolaire. Plusieurs couches peuvent être prévues à cet effet : l'école, la classe, la mathématisation des problèmes, le traitement discursif et le traitement intra-discursif. L'épistémographie s'intéresse plutôt aux deux dernières couches plus profondes de l'activité mathématique scolaire.

De ce point de vue, le projet de l'épistémographie se précise car il « consiste à unifier, par delà les différents positionnements (plus du côté de l'objet ou plus de celui du sujet) trois perspectives théoriques : celle qui privilégie la représentation (approches sémiotiques), celle qui privilégie l'action (approches pratiques) et enfin celle qui privilégie le rôle des règles. »

Ceci dit, nous retrouvons différentes versions de cette typologie des savoirs qui n'était pas encore stabilisée. Nous voyons là le cheminement du chercheur qui évolue en fonction de son questionnement. Présentons ici deux des états de cette typologie. L'une était constitué par cinq systèmes organisés et liées entre eux :

- les entités ou ce sur quoi porte le domaine étudié ;
- les représentations sémio-linguistiques qui permettent de représenter les entités ;
- les instruments ou ce qui permet d'opérer sur les entités ;
- les règles du jeu ou ce qui fixe ce qu'il est légitime de faire ;
- les identificateurs qui permettent d'identifier les entités.

A partir de cette description, Jean-Philippe Drouhard émet une hypothèse : « pour faire des mathématiques, il faut pouvoir opérer (dans un certain but) sur des objets mathématiques accessibles au travers de représentations sémiotiques, avec des instruments, en suivant des principes. »

Dans l'autre typologie, les « objets du travail du mathématicien présentent (au moins) trois aspects (dimensions) indissociables : une dimension sémio-linguistique, une dimension pratique et une dimension théorique. » Huit connaissances ont été repérées pour travailler sur ces trois dimensions (ibidem) :

- les connaissances sémio-linguistiques qui permettent de représenter les objets et les relations mathématiques ;
- les connaissances sémantiques qui établissent des relations entre les écritures et les objets ;

- les connaissances notionnelles qui correspondent aux propriétés d'ordre théorique des objets mathématiques ;
- les connaissances instrumentales qui permettent de mobiliser des instruments et ont une finalité pratique ;
- les connaissances pragmatiques qui correspondent aux traitements des représentations sémiotiques ;
- les connaissances pratiques correspondent aux usages des objets mathématiques en tant qu'outils ;
- les connaissances nomologiques qui correspondent aux règles du jeu, notamment les règles de validité logique, des traitements sémiotiques et des usages des instruments ;
- les identifiants qui permettent d'identifier et de catégoriser les objets mathématiques.

Le projet de l'épistémographie en tant que tel est récent dans les travaux de Jean-Philippe Drouhard mais les questions qu'il se posait étaient déjà présentes dès son travail de thèse qui s'intéressait à la genèse et à la syntaxe des écritures mathématiques, notamment numériques et algébriques. (Drouhard, 1999) Cet intérêt pour des couches profondes de l'activité mathématique a continué tout au long de sa vie de chercheur, et l'épistémographie correspond au dernier état de son travail.

Le mot *épistémographie* est composé par épistémé et graphie. Le premier désigne ce qui a trait au savoir et le deuxième correspond à des procédés d'enregistrement, aux enregistrements, aux descriptions. Ainsi l'épistémographie désigne ce qui a trait aux descriptions des savoirs, comme la géographie désigne les descriptions de la terre. Le choix de ce mot est tout à fait pertinent pour désigner le projet et la vie scientifique de Jean-Philippe Drouhard qui s'est questionné et intéressé par la dimension structurale du langage mathématique. C'est bien *À la recherche du temps de l'épistémographie* qu'il a consacré toute sa vie de chercheur.

4 – Présentation d'un exemple

En quoi et comment les travaux sur l'épistémographie questionnent encore mes recherches actuelles ? Voilà la question que je veux traiter maintenant pour montrer l'actualité et la pertinence de l'approche épistémographique.

Cette approche me permet de questionner mes recherches actuelles à partir de trois points de vue. Le premier est celui de l'existence et de la gestion des implicites dans le travail mathématique de l'élève. L'approche épistémographique permet de s'intéresser aux couches profondes de l'activité mathématique qui restent souvent dans l'implicite et à la charge de l'élève dans sa sphère privée. Le fait que les expressions dénotent et la différence entre sens et

dénotation nous semble un exemple où les implicites ont été levés et repensés pour qu'ils fassent l'objet d'un enseignement explicite.

Le deuxième point de vue est celui des règles du jeu. En ayant participé au travail de CESAME sur les trois ordres de connaissances, la sensibilité à ce point est vraiment très présente dans mes travaux.

Le troisième point de vue est celui de la dimension sémio-linguistique qui n'est pas spécifique à l'approche épistémographique. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la dimension sémiotique de l'activité mathématique en France et à l'étranger, et beaucoup de publications en rendent compte (par exemple, Duval 1995).

4.1 – Contexte de recherche

L'exemple présenté est issu de recherches sur la scolarisation des élèves reconnus institutionnellement handicapés dans des classes ordinaires. Nous avons travaillé dans le cadre d'une ULIS (Unité localisé d'inclusion scolaire) accueillant des élèves dyslexiques qui par ailleurs étaient dans les classes correspondant à leur âge. Nous avons choisi de travailler sur la résolution de problèmes mathématiques et le raisonnement à partir de situations étudiées dans des recherches existantes (Hersant, 2008, 2010 ; Douaire, Argaud, Dussuc, Hubert, 2003). Nos questions étaient d'identifier les adaptations des situations faites par les enseignants, s'il y en a, pour tenir compte de ces élèves, et de suivre les raisonnements de ces élèves par rapport aux raisonnements d'autres élèves identifiés dans les recherches existantes. Nous n'allons pas rendre compte ici des résultats de ces recherches mais montrer juste quelques exemples (Assude & Tambone, 2016).

La situation proposée dans une classe de 3^{ème} accueillant des élèves dyslexiques correspond à l'étude du théorème suivant : la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de trois. La situation comportait quatre phases. Dans un premier temps, on demande de trouver trois nombres consécutifs dont la somme est S , S étant un multiple de 3. Dans un deuxième temps, la question est la même avec S non multiple de 3. Dans un troisième temps, il s'agit de formuler une conjecture qui réponde à la question : à quelles conditions le problème a-t-il toujours une solution ? Le quatrième temps est celui de la preuve.

Cette situation nous intéressait à plusieurs titres. La première raison est qu'elle permet aux élèves la rencontre avec l'impossibilité, la formulation de conjectures et la preuve. Le débat scientifique peut se mettre en place lors de l'acceptation qu'il y a des cas impossibles et dans la preuve des conjectures. La deuxième raison est qu'il existe de travaux de recherche sur ce problème et que nous pouvons comparer nos observations avec les résultats de ces travaux. Cela nous permettait de valider ou invalider notre hypothèse selon laquelle il n'existe pas de différence entre les difficultés et les raisonnements des élèves dyslexiques et ceux d'autres élèves.

4.2 – Observations du cheminement de la classe

Nous allons présenter nos observations par rapport aux quatre étapes de la situation en mettant l'accent sur les difficultés et les avancements dans les raisonnements. Nous parlerons des « élèves » sans spécifier lesquels pour signifier qu'il y a eu des élèves qui sont passés par ce cheminement.

Dans la première étape, la difficulté est celle de prendre en compte toutes les contraintes du problème car les élèves prennent trois nombres quelconques dont la somme est S ou alors ils font n'importe quelle opération. Pour certains élèves, les termes « somme » ou « nombres consécutifs » posent problème. Dans cette étape, la classe se rend compte de l'importance de toutes les contraintes du problème (règles du jeu) et des techniques émergent pour résoudre le problème. Ces techniques sont essentiellement de trois types : technique par essais et tâtonnements, technique mixte en divisant et par essais (par exemple, pour 96 on divise 90 par 3 et ensuite on fait $1+2+3 = 6$, donc la solution est 31, 32 et 33) et technique de la division par 3.

Dans la deuxième étape, les élèves mettent en œuvre les techniques utilisées auparavant qui marchent pour les nombres-sommes multiples de 3. Les élèves sont déstabilisés avec les sommes qui ne sont pas des multiples de 3. Ils oublient à nouveau les contraintes du problème en prenant des nombres décimaux, ou des nombres qui ne sont pas consécutifs. Ils se rendent compte à nouveau qu'il faut prendre en compte toutes les contraintes du problème (règle du jeu). La conclusion pour la classe est qu'il y a des cas impossibles.

Dans la troisième étape, les élèves vérifient à nouveau qu'il y a des cas qui marchent et d'autres qui ne marchent pas. Deux types d'observation faites par les élèves sont relevées : les sommes se trouvent en ajoutant 3 ; le rôle du nombre du « milieu ». Plusieurs formulations d'une conjecture sont apparues dans la classe : « pour que ça marche, le nombre doit se diviser par 3 (on est dans la table de 3) » ; « pour que ça marche, le nombre est multiple de 3 (ou divisible par 3) » ; « la somme de trois nombres est divisible par 3 » ; « la somme de trois nombres qui se suivent est un multiple de 3 (divisible par 3) ». L'enseignant a aidé à la formulation des deux dernières formulations au sens qu'il a demandé un énoncé qui tienne compte du problème.

Dans la quatrième étape, plusieurs types de preuve sont apparus mais le plus fréquent a été la preuve pragmatique avec des exemples numériques. Un autre type de preuve est une preuve discursive en utilisant le « nombre du milieu » : « si on prend un nombre, plus celui d'avant, plus celui d'après, c'est trois fois le nombre ». Le troisième type de preuve correspond aux preuves algébriques où on utilise les expressions littérales.

4.3 – Exemples de preuves

Pour illustrer les différents types de preuve, nous avons choisi quatre productions d'élèves qui nous paraissent significatives.

Preuve A - preuve pragmatique avec quelques exemples numériques

Pau 4: $4+3+5 = 12$ Pau 9: $9+8+10 = 27$
 $4 \times 3 = 12$ $9 \times 3 = 27$

 Pau 6: $6+5+7 = 18$
 $6 \times 3 = 18$
 Cet énoncé est vrai

Preuve B - preuve discursive avec un exemple numérique

Cet énoncé est vrai car quand on fait
 la somme d'un nombre entier 5 +
 et de son successeur 5 + 4
 et de son prédécesseur 5 + 4 + 6 = 15
 15 est égale au triple de 5.
 Donc cet énoncé est vrai ✓

Preuve C - preuve algébrique

$(a-1) + a + (a+1) =$
 $a-1+a+a+1$
 $a+a+a-1+1$
 $3a$

 $3 \times a = 3a$
 Cet énoncé est vrai
 $(a-1) + a + (a+1) = 3 \times a$

Preuve D - preuve « exemple générique »

avec trois exemples numériques et une expression littérale

$4 + 3 + 5 = 4 \times 3 = 12$
 $11 + 10 + 12 = 3 \times 11 = 33$
 $22 + 21 + 23 = 3 \times 22 = 66$

Les 3 exemples sont justes

De ces 3 exemples, cet énoncé est vrai.

Expression littérale = $b + a + c = 3 \times b$
 démontrant l'énoncé

5 – Exemple d'analyse épistémographique

5.1 – Plan des entités (objet, outil, instrument) et des représentations sémio-linguistiques

Un plan pour l'analyse est celui des entités, ce sur quoi porte le théorème. Il s'agit des objets mathématiques (nombres naturels, somme, nombres consécutifs) et des relations (le théorème lui-même). Ces objets sont étudiés par les relations établies par le théorème. Ce ne sont pas forcément des outils (au sens de la dialectique outil-objet de Douady). L'émergence de certaines techniques met en place des instruments. Par exemple, dans la technique par essais et tâtonnements, certains élèves utilisent la calculatrice pour essayer de trouver les nombres consécutifs.

Dans ce plan, on peut aussi s'intéresser aux connaissances sémio-linguistiques. Dans les techniques et les preuves produites par les élèves, plusieurs registres sémiotiques sont utilisés. Le registre numérique est utilisé à la fois pour les techniques et pour les preuves. Voyons les exemples des preuves présentées précédemment.

Dans la preuve A, l'élève calcule les sommes à partir du « nombre du milieu » : pour 4, pour 9 et pour 6 en calculant la somme et en calculant le produit par 3. Il conclut que l'énoncé est vrai. Dans ce cas, le registre numérique est le registre prédominant.

Dans la preuve B, deux registres sont utilisés : le langage naturel et le registre numérique, mais c'est essentiellement un discours qui est mis en œuvre. Les mots successeur et prédécesseur sont utilisés (même s'il se trompe) ce qui aurait pu être généralisable mais ensuite c'est par le biais d'un exemple que l'élève conclut que l'énoncé est vrai. Dans ce cas, cette preuve est un pas de plus vers la démonstration que par rapport à la preuve A.

Dans la preuve C, le registre algébrique est celui qui permet de faire la démonstration. Dans ce cas, la lettre est utilisée pour désigner des objets (le nombre a), des relations (le prédécesseur $a-1$ et le successeur $a+1$, la somme de ces trois nombres génériques, multiple de 3). La lettre est ici un objet de calcul et des traitements des expressions (au sens de Duval) sont menés pour arriver à des formes équivalentes qui permettent de démontrer le théorème.

La preuve D est tout à fait intéressante car elle montre un état intermédiaire entre une preuve par des exemples numériques et une démonstration. Deux registres sont utilisés, le registre numérique et le registre littéral. Les trois exemples numériques montrent, dans sa disposition spatiale, le rôle du « nombre du milieu ». Pour ces exemples, l'élève calcule et montre que la somme des trois nombres consécutifs est un multiple du nombre du milieu. Il fait cela pour 4, 11 et 22, et il conclut que l'énoncé est vrai. Il va alors plus loin que la preuve A car il utilise les lettres pour généraliser. Dans ce cas, les premières lettres de l'alphabet a , b et c représentent les trois nombres consécutifs. Cela reste implicite car les relations mathématiques ne sont pas vraiment établies. Mais cela indique que l'élève n'a pas choisi ces lettres au hasard. La lettre b désigne le nombre du milieu, la lettre a le prédécesseur et la lettre c le successeur. La disposition spatiale reprend la disposition spatiale des exemples numériques. La conversion (au sens de Duval) du registre numérique dans le registre littéral conserve l'ordre : l'ordre des nombres devient l'ordre alphabétique des lettres. La lettre n'est pas encore un objet de calcul mais elles montrent déjà des relations.

5.2 – Plan nomologique

Un deuxième plan est celui des règles du jeu mathématique. Cela peut concerner les règles de validité logique, des règles définitoires du jeu mathématique, des règles liées aux registres de représentation sémio-linguistiques (règles de formation, de traitement ou de conversion) ou encore des règles des usages des instruments (artefacts).

Dans les exemples précédents, les élèves oublient les contraintes du problème. Or ces contraintes définissent le jeu mathématique, et toutes les contraintes sont importantes. Le fait de revenir à l'énoncé, même si c'est l'enseignant qui le répète un certain nombre de fois au moins au début de la situation, est un moyen de contrôle qu'on respecte ces règles. On peut aussi remarquer que le respect de ces règles peut être mis en cause lorsqu'on rencontre une situation problématique. Lorsque les élèves ont rencontré un cas impossible, ils ont oublié à nouveau certaines règles du jeu mathématique pour obtenir une solution. Là encore, le fait de revenir à l'énoncé du problème a permis de prendre en compte toutes les contraintes du problème et d'accepter cette idée qu'un problème peut ne pas avoir de solution.

En ce qui concerne les règles définitoires du jeu, la différence entre le problème pour modéliser et le problème pour prouver apparaît nécessaire à expliciter. Dans le cas du problème pour modéliser, les informations de l'énoncé peuvent être utiles ou inutiles. Le caractère utile/inutile est en lien avec le choix des variables pour modéliser le problème. Dans

le cas du problème pour prouver, toutes les informations sont nécessaires. Certains élèves n'ont pas forcément conscience de ces distinctions. Il semble important d'expliciter des implicites du travail mathématique, et l'une des formes possibles est celle de revenir sur l'énoncé du problème.

En ce qui concerne les règles logiques, nos exemples montrent le cheminement à faire par les élèves et l'importance des états intermédiaires. Les différents types de preuve (Balacheff 1987) montrent que ces états intermédiaires peuvent être importants pour l'apprentissage du raisonnement (et notamment le raisonnement déductif). Le passage d'une preuve par des exemples (qui n'est pas une démonstration dans notre exemple) à une preuve algébrique (qui peut être une démonstration) peut se faire par des états où la preuve rhétorique présente des éléments génériques au-delà des exemples numériques. De même, pour des preuves mixtes où la lettre désigne des objets, et surtout certaines relations même si ces relations ne sont pas encore des relations mathématiques et où la lettre n'est pas encore objet de calcul. Les différents statuts de la lettre apparaissent aussi comme des implicites à expliciter pour le travail mathématique.

5.3 – Plan identificatoire

Ce plan permet d'identifier ce que sont les mathématiques, ou ce que sont les domaines mathématiques ou les entités. Comme l'indique Jean-Philippe Drouhard, les connaissances identificatoires (ou les identifiants) permettent d'identifier et de catégoriser les objets, les domaines ou les mathématiques elles-mêmes. Les définitions font partie de ce plan, mais d'autres éléments aussi. Par exemple, lorsqu'on dit : « ça, ce n'est pas des mathématiques » ou « ça, ce n'est pas une démonstration ». Parfois ce sont des discours performatifs qui permettent d'identifier tel domaine.

Dans nos exemples, l'enseignant indique à un moment ce que les élèves ont fait : « vous avez formulé des conjectures » ; « une conjecture doit être démontrée ou invalidée ». Par ailleurs, l'enseignant a aussi parlé de l'importance des conjectures et des preuves (démonstrations) en mathématiques. Ce type de discours concourt à ce que les élèves identifient comme étant des mathématiques.

6 – Conclusion

L'épistémographie s'intéresse à la description d'une structuration des savoirs mathématiques. Les trois plans d'analyse, et pour chaque plan son organisation, permettent de rentrer dans des analyses spécifiques en prenant en compte les spécificités des objets, des relations ou des domaines mathématiques. Un intérêt des analyses épistémographiques est de travailler sur les implicites du travail mathématique pour pouvoir les expliciter et ainsi en faire prendre conscience aux élèves.

Nous avons vu un exemple d'inventivité sémiotique d'un élève qui utilise les lettres dans l'ordre alphabétique pour indiquer des relations entre un nombre, son prédécesseur et son successeur. Cette inventivité est importante dans l'apprentissage du raisonnement, et doit pouvoir être valorisée dans la classe. Certes, ce n'est pas encore une démonstration mais le processus de généralisation est déjà en marche, et l'usage d'une analogie est parlant.

L'importance du plan nomologique pour le travail mathématique est aussi un apport de l'épistémographie. Les différents types de règles du jeu sont aussi à expliciter : des règles logiques mais aussi des règles définitoires du jeu ou des règles liés aux usages des représentations sémiotiques (au niveau de la formation, du traitement ou des conversions). Nous avons vu un exemple avec la différence entre problème pour modéliser et problème pour prouver, notamment sur le caractère utile/inutile des informations ou le caractère nécessaire des informations.

Les travaux de Jean-Philippe Drouhard sur l'épistémographie et sur l'algèbre sont actuels et peuvent encore apporter beaucoup aux travaux des didacticiens des mathématiques. Par ailleurs, ce chercheur a consacré sa vie scientifique à la mise en place d'espaces de questionnement et de débat scientifique ouverts et sans dogmatisme. Des espaces pour les élèves où ceux-ci pouvaient faire l'expérience de faire des mathématiques en débattant, en argumentant, en faisant l'expérience du caractère nécessaire des énoncés mathématiques. Ce chercheur s'est aussi préoccupé de créer des espaces de débat avec d'autres chercheurs qui permettaient à chacun de présenter ses travaux et d'avancer ensemble. C'est bien mon expérience dans le cadre du travail du groupe CESAME qui, en dehors des circuits institutionnels, était un lieu de pensée, de production et de réflexion tout à fait stimulant et nourrissant.



Références

- Assude, T., & Tambone, J. (2016). Episodes biographiques d'une élève dyslexique relatifs à la résolution d'un problème mathématique. *Recherche en Education*, 24, 147-163.
- Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Douaire J., Argaud H-C., Dussuc M-P., Hubert C. (2003), Gestion des mises en commun par les maîtres débutants. In J. Colomb, J. Douaire, R. Noirfalise, *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes* (pp.53-69). Lyon : INRP.
- Drouhard J-P. (1999). Signes et sens en calcul symbolique. *Actes du séminaire SFIDA 1995-1997*, pp.VI.3-22.
- Drouhard, J-P. (2007). *Epistémographie*. Projet de Note de Synthèse pour l'HDR (non publié).
- Drouhard, J.P. (2012a). Le séminaire franco-italien de didactique de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*. Hors série. Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives, 183-192.
- Drouhard, J-P. (2012b). *L'épistémographie. Mise au point d'un outil au service de la didactique*. Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques, pp.129-133.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang
- Duval R (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.
- Hersant, M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N*, n°81, pp.57-75.
- Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques*. Habilitation à diriger des recherches, Nantes : Université de Nantes.
- Leonard, F & Sackur, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2-3, 205-240.
- Maurel M & Sackur C (2010). *Faire l'expérience des mathématiques. Entre enseignement et recherche*. Lyon : Aléas éditeur.
- Sackur C, Drouhard JP, Maurel M, Pécal M (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères*, n°28, pp.
- Sackur C & Maurel M (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques, *Petit x*, 53, 5-26.
- Sackur C, Assude T, Drouhard J.Ph, Maurel M., Paquelier Y (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25.1, 57-90



Réunion de travail CESAME, Nice, 11 septembre 2011

Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire

Claire Margolinas

Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne

Introduction

Dans l'institution scolaire, il est courant de penser que l'entrée dans l'algèbre ne se fait qu'à l'arrivée au collège, avec l'usage des lettres et que ce sont justement les lettres qui permettent de savoir si l'on fait de l'arithmétique ou de l'algèbre. En didactique des mathématiques, Chevallard et ses collaborateurs (Chevallard, 1984; Chevallard, 1989; Chevallard, 1989-1990) ont montré qu'il existait une dialectique entre arithmétique et algébrique, qui ne se résume pas à des critères de surface.

En partant d'un tout autre point de vue, Jean-Philippe Drouhard (Drouhard & Panizza, 2012) s'est au contraire intéressé, avec Mabel Panizza, à la forme même donnée aux écritures mathématiques (que celles-ci contiennent plutôt des chiffres ou plutôt des lettres), dans leur dimension proprement linguistique : à la fois dénotation et sens. Il montre en particulier comment les implicites sémio-linguistiques révèlent des problèmes épineux qui permettent de mieux comprendre certaines difficultés des élèves.

En observant deux leçons successives d'une classe de CP résolvant un problème tout à fait classique à ce niveau, j'ai pu commencer à montrer, avec Marceline Laparra (Laparra & Margolinas, 2009), que la dimension d'entrée dans l'écrit – pourtant omniprésente au CP quand il s'agit d'écrire en français – semblait aller de soit quand il s'agissait de mathématiques élémentaires.

Le travail que je propose en hommage à Jean-Philippe Drouhard consiste à reprendre le corpus de ces leçons pour prendre au sérieux la façon dont les différentes étapes de résolution du problème : conversion, traitement algébrique, conversion constituent un outil permettant de mieux comprendre les très nombreuses difficultés rencontrées non seulement par les élèves, mais aussi par leurs professeurs.

Je m'excuse d'avance de ne pas être une experte de l'épistémographie, j'ai suivi ce très important travail de trop loin pour pouvoir être considérée autrement que comme une amatrice pas très éclairée.

Points de départ

Discipline et représentation

« Il n’y a pas de discipline sans représentation (sémiotique et linguistique) des objets de cette discipline. »
 « La composante sémio-linguistique d’un objet de savoir donné est ce qu’il faut savoir du système de représentation sémio-linguistique pour représenter cet objet. »
 (Drouhard, 2014)

Connaissance et savoir

En m’appuyant sur la distinction entre connaissance et savoir je vais m’interroger ici sur la composante sémio-linguistique des connaissances des élèves et des professeurs.

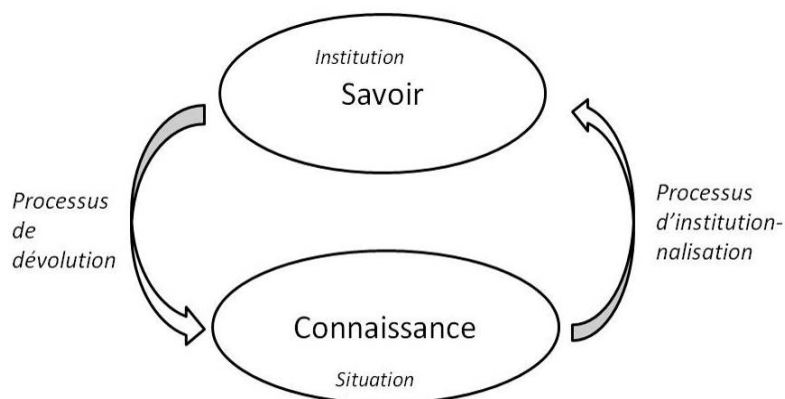


Figure 1 : Savoir et connaissance

La distinction entre savoirs et connaissances (Brousseau, 1990; Conne, 1992; Margolinas, 2014), proposée dans le cadre de la didactique des mathématiques, nous rapproche de l’affirmation de Drouhard (ci-dessus) sur l’existence même d’une discipline – ici, les mathématiques.

Dans les institutions productrices de mathématiques, le savoir se présente comme un texte : il est linéarisé, dépersonnalisé, détemporalisé et universalisé, il s’appuie sur une représentation (sémiotique et linguistique) qui est non seulement linéarisée mais de plus, en mathématiques, de nature écrite. Ce n’est pas nécessairement le cas pour toutes les disciplines, ni à toutes les époques, ce qui serait un autre débat (Laparra & Margolinas, 2016). La forte relation des mathématiques avec l’écrit font d’ailleurs parfois considérer les mathématiques comme « une langue », malgré les efforts des mathématiciens eux-mêmes pour nuancer une telle affirmation (Lafforgue (n.d.), Thurston (1994)). De plus, pour qui s’intéresse aux systèmes sémiotiques, il est essentiel de considérer que ceux-ci n’existent jamais indépendamment des autres systèmes qui coexistent dans la société, ce qui n’est pas toujours le cas, notamment en classe, comme ce texte entend le montrer.

Cependant, les mathématiques ne sont pas une construction culturelle « gratuite », même si elles sont abstraites. Les concepts mathématiques émergent des problèmes qu'ils permettent de résoudre et ce, même pour les concepts les plus élémentaires, comme celui de « quantité », lié à celui de « nombre ». On attend d'un enfant, dès le début de l'école élémentaire, non seulement qu'il sache réciter la suite orale des mots-nombres (un, deux, trois, etc.) mais aussi qu'il sache dénombrer par comptage (c'est-à-dire connaître le nombre d'objets d'une collection) quand c'est utile et pas seulement à la demande (par exemple s'il veut savoir combien d'assiettes il faut porter pour mettre la table). On attend d'un ingénieur qu'il soit capable de décider de la modélisation qu'il doit mettre en place pour résoudre une question qui lui est posée, et pas seulement de savoir résoudre des équations différentielles à la demande.

Dans ces exemples, ce qui est attendu n'est pas la restitution d'un texte de savoir, mais une conduite adéquate en situation qui correspond à la recherche d'une réponse (souvent non verbale) en situation : c'est ce que nous appelons une connaissance. Définir une connaissance est difficile : une connaissance est ce qui permet un équilibre en situation et qui est le plus souvent implicite, la connaissance se manifeste par ce qu'elle permet de faire dans une situation donnée. Pour l'observateur, elle n'est identifiable que grâce à une analyse *a priori* de la situation : quelles sont les différentes façons d'atteindre un but ? Comment peuvent-elles se manifester ? Si nous reprenons l'exemple simple de l'enfant qui met la table, il est possible d'observer s'il cherche à estimer la quantité de convives ou bien s'il la connaît déjà et comment il fait usage ou non de cette quantité : il peut aller chercher une poignée de fourchettes et déposer chaque couvert là où il sait que les convives s'assoient d'habitude puis rapporter ce qui est en trop : dans ce cas la quantité ne se manifeste pas comme une connaissance mais seulement la correspondance terme à terme. Peut-être qu'il ne fera pas de même pour les assiettes (plus lourdes) ? Compte-t-il les assiettes ? Jusqu'à quel nombre ? Etc. Ce n'est pas parce qu'il ne compte pas les fourchettes que la connaissance du comptage n'est pas disponible dans une autre situation (assiettes, par exemple), cette connaissance n'est pas utile pour lui dans cette situation-là mais le sera peut-être dans une autre. La connaissance n'est pas « dans » le sujet, elle se manifeste dans l'interaction entre le sujet et une situation.

La distinction entre savoir et connaissance est fondamentale dans le cadre de la Théorie des Situations (Brousseau, 1998).

« La détermination d'une connaissance mathématique par un problème dont cette connaissance est la solution est un procédé aussi ancien que les mathématiques. La [théorie des situations didactiques en mathématiques] est simplement une théorisation de ce procédé. Il existe de nombreuses situations relatives à une même connaissance. De même, de nombreuses connaissances peuvent intervenir dans une décision unique. Un des objets de la théorie des situations didactiques en mathématiques (T.S.D.M) est de classer les situations et par conséquent les connaissances en fonction de leurs rapports et des possibilités d'apprentissage et d'enseignement qu'elles offrent. » (Brousseau, 2003, p. 2).

Mathématiques au C.P. : entrée dans l'écrit et algèbre (?)

Composantes sémio-linguistique et notionnelle

« Dans certains cas (en mathématiques par exemple) la composante sémio-linguistique est plus complexe que la composante notionnelle même. » (Drouhard, 2014)

« Ce sont les conversions qui permettent d'accéder à l'objet (considéré comme l'invariant de ses représentations) » (Drouhard, 2013a)

Dimensions algébriques

« Notre thèse est ainsi que l'algèbre est un objet qui se déploie dans trois dimensions de l'espace dit épistémographique et une dimension du temps [...] »

- Art de résolution de problèmes numériques
- Ensemble de systèmes sémiotiques de représentation des nombres, de leurs relations et de la résolution de problèmes numériques
- D'une science des nombres [...]

En ce qui concerne la dernière dimension temporelle, la prendre en compte revient à considérer l'algèbre comme un complexe qui évolue et dont les caractérisations possibles varient selon les époques » (Drouhard, 2013b)

Je vais interroger ces dimensions dans le cadre temporel de la classe et du curriculum, dans le domaine du « calcul » à l'école primaire.

Une observation en C.P. : en amont du travail écrit sur le fichier

L'observation sur laquelle je vais m'appuyer a été faite en octobre 2005²⁰ au C.P.²¹, dans une classe ordinaire. L'enseignante de la classe s'appuie sur le manuel scolaire *J'apprends les maths*²², les élèves disposent d'un fichier²³ utilisé quotidiennement. Voici la page du fichier utilisée lors de notre observation (Figure 2).

²⁰ Dans cette classe, qui a été l'objet d'une observation pendant toute l'année scolaire, nous n'avons pas encore l'autorisation de filmer, le corpus a été établi sur la base de mes notes manuscrites.

²¹ Première classe de l'école élémentaire, élèves de 6-7 ans.

²² Brissiaud, R., Clerc, P., & Ouzoulias, A. (2001). *J'apprends les maths avec Picbille*. Paris: Retz.

²³ Version du manuel destinée aux élèves, dans lequel les élèves écrivent directement leurs réponses, les fichiers sont très répandus au début de l'école élémentaire.

24 **Addition de 3 nombres. Introduction du nombre zéro**

Dictée

Combien l'écureuil a-t-il gagné de noisettes?
Complète l'égalité.

La partie : trois tours de roue

$2 + 0 + 1 =$

Complète les égalités.

$1 + 2 + 2 =$ $2 + 0 + 2 =$

Complète les égalités. Si tu n'es pas sûr(e), dessine les noisettes ou des points.

$0 + 2 + 0 =$ $2 + 1 + 2 =$

$1 + 1 + 1 =$ $2 + 2 + 2 =$

Écris l'égalité.

A) Dictée de nombres représentés sur les doigts. L'enseignant montre un nombre de doigts compris entre 1 et 10, pour 7, par exemple, 5 doigts levés sur la main droite et 2 sur la main gauche. Les élèves écrivent le nombre correspondant. On peut commencer cette activité par la tâche inverse : le maître dit un nombre, les élèves montrent le plus rapidement possible la quantité de doigts correspondante.

B) L'usage du signe « ne se limite pas à la somme de deux nombres. En outre, on introduit ici le zéro : quand on ajoute zéro, « on n'ajoute rien ».

Figure 2 : Fichier C.P. J'apprends les maths

Le travail des élèves dans le fichier a été précédé d'un travail par groupes de quatre élèves, qui est adapté par l'enseignante des propositions se trouvant dans le livre du maître destiné aux professeurs (p.62-63), auxquelles réfèrent l'illustration « la loterie des noisettes » en haut de la page du fichier.

Dans la classe observée, dans cette activité préliminaire, dans le groupe de trois élèves, deux élèves sont des « joueurs » ; un élève est chargé de s'occuper des jetons ; le quatrième élève est un « secrétaire » qui dispose d'une ardoise effaçable. Les joueurs disposent de dix jetons, d'un dé numéroté uniquement 0, 1, 2, d'un verre et d'une barquette. Le premier joueur lance le dé, récolte le nombre de jetons obtenu (donné par l'élève chargé des jetons) et ceci trois fois de suite. Le deuxième joueur fait alors de même.

Le professeur a indiqué la façon dont le secrétaire doit organiser son ardoise : « Deux joueurs/ partagez en deux en mettant une lettre », ce qui a déjà été utilisé pour d'autres jeux. Elle rappelle les règles de l'écriture des calculs en ligne²⁴ en donnant un exemple « 2+ » et en suite on relance le dé et « on met un = pour montrer combien on a trouvé en tout ». Cependant, la façon dont vont être utilisées les deux façons de rendre compte de la partie (tableau et écriture en ligne) n'est pas très claire.

Les élèves ont beaucoup de mal à s'organiser dans l'ensemble du jeu : le verre sert à recevoir les jetons donnés par le responsable des jetons, qui prend son rôle très au sérieux, le verre est ensuite vidé dans la barquette qui, normalement, sert à recueillir les gains des chaque joueur jusqu'à la fin de ses lancés. Cependant, les élèves qui jouent, dans leur précipitation à jouer, ne voient pas la barquette à la fin de chaque jeu, ce qui fait que les gains sont

²⁴ Dénomination des programmes scolaires, sur laquelle je reviendrai.

invérifiables et que les jetons finissent par manquer. L'enjeu d'écriture étant dévolu uniquement au secrétaire, les joueurs ne s'y intéressent pas du tout. De plus, certains élèves ont du mal à trouver le résultat du gain total à partir du gain de chaque lancé (Ingrid, par exemple, qui compte 3 comme résultat des lancés 1, 1, 2).

L'enseignante intervient assez peu durant le travail de groupe, mais elle insiste auprès des secrétaires sur l'utilisation du signe « = », en particulier quand Huseyin écrit « $1 + 1 + 2 \quad 4$ » elle dit « il manque un signe là [entre 2 et 4]. Huseyin écrit alors « $1 + 1 + 2 - 4$ », ce que l'enseignante fait rectifier en « $1 + 1 + 2 = 4$ ».

C'est une fois le jeu rangé, et notamment les ardoises effacées que l'enseignante distribue le fichier (fig. 2). La maîtresse revient sur le jeu et demande aux élèves d'expliquer :

« P : comment vous avez fait pour trouver le nombre de billes ?

Huseyin : avec nos doigts

P : d'autres méthodes ?

Alexis : j'ai compté les billes si y avait 5 dans le chariot²⁵

P : dans le jeu que vous étiez en train de faire

Alexis : moi ma méthode j'ai compté dans ma tête

Mohamed : deux et j'ai eu deux et après j'ai dis quatre et un et ça faisait cinq

P : tu savais que deux et deux ça faisait quatre

Axel : j'ai compté dans ma tête »,

Remarque sur ce dialogue : l'enseignante parle de « billes » alors que dans le jeu que les élèves viennent de vivre il s'agit de « jetons ». Or dans le fichier de la classe, le personnage le plus important est *Picbille* et les objets de référence sont des noisettes ou bien des billes, en utilisant le mot bille, l'enseignante évoque immédiatement le contexte du fichier (réponse d'Alexis).

Ce qui compte pour l'enseignante ici, c'est d'essayer de savoir comment obtenir le bon nombre correspondant à trois lancer de dés, et c'est bien à cette question que les élèves essayent de répondre comme ils peuvent. Il n'est pas question de la façon d'utiliser l'écrit pour rendre compte de la partie.

L'enseignante porte alors l'attention des élèves sur la première image du fichier (la loterie des noisettes) et elle leur demande ce qu'ils comprennent de l'image :

« Samuel : elle vend des noisettes

Élève (non identifié) : l'écureuil compte les noisettes

²⁵ Représentation prototypique de ce fichier visible dans le dernier encart de la figure 2.

Sahra : il en avait deux il a ramené deux noisettes

P (agacée, s'adressant à Huseyin) : combien de noisettes/ regarde ton image »

L'enseignante fait alors elle-même le rapport entre le jeu qu'ils ont vécu et la loterie des noisettes :

« P : nous on on a lancé le dé mais lui il a tourné le roue »

Elle interroge alors les élèves sur le résultat final du jeu de la loterie de l'image :

« P : on écrit combien de noisettes en tout ? »

Elle demande alors aux élèves de travailler seuls et :

« P : d'essayer de me trouver une méthode pour me trouver en tout combien est-ce qu'il a gagné »

Dimension algébrique : observation d'un mélange des composantes sémio-linguistiques et notionnelles

En m'appuyant sur la caractérisation de l'algèbre donnée par Jean-Philippe Drouhard au début de cette partie, l'art de la résolution de problèmes numériques est en jeu dans cette situation : tous les élèves ne savent pas avec certitude donner le résultat des trois récoltes de jetons. Cependant, presque tous savent comment ils pourraient le faire : en comptant sur leur doigts ou bien en comptant directement le nombre de jetons obtenus (qui est inférieur ou égal à six). Par contre, les résultats du « jeu du dé » ont été écrits (sur l'ardoise effaçable) de plusieurs manières (en colonne, en ligne) en utilisant de façon plus ou moins conforme les règles de l'écriture algébrique. J'emploie ici le terme « algébrique » en référence aux « signes algébriques » que sont + et =, en effet, en arithmétique, le raisonnement repose sur l'oral (ce dont témoigne les vieux cahiers de brouillons, dont les tables arithmétiques sont écrites en toutes lettres : « 3 et 2 font 5 » et non pas « $3+2=5$ » comme dans les cahiers contemporains). En s'appuyant sur leur corps (doigts) et sur la récitation de la suite des nombres à l'oral, les élèves se placent dans l'univers de l'oralité et non pas dans celui de la littératie (Laparra & Margolinas, 2016).

L'enseignante interagit avec les élèves à la fois sur la recherche du résultat (art de résolution) mais aussi sur l'écriture de ce résultat (composante sémio-linguistique). Elle ne semble pas s'apercevoir de deux phénomènes :

- Que la résolution du problème (trouver le nombre de jetons) et la façon d'utiliser l'écrit pour en rendre compte sont deux tâches tout à fait différentes
- Que les élèves savent assez bien résoudre le problème dans l'ensemble mais qu'ils ne savent pas comment utiliser l'écrit pour en rendre compte (il est d'ailleurs vraisemblable qu'ils ne perçoivent pas le sens de cet usage).

On a donc un exemple d'une composante sémio-linguistique plus complexe que la composante notionnelle.

Quand les élèves investissent l'écrit : le cas de Wyssem

Dans la suite de l'observation, les élèves sont obligés d'investir l'écrit pour répondre aux questions du fichier (fig. 3)



Figure 3 : La première question du fichier

Wyssem écrit :

$$1+2+2 = 1225 \text{ et } 2+0+2 = 224$$

Nous comprenons ce que Wyssem a voulu faire : rendre compte de l'intégralité des deux « parties ». Dans la première, le joueur a tiré 1, 2, 2 et a gagné 5, dans la seconde il a tiré 2, 0, 2 et a gagné 4. Wyssem cherche donc à rendre compte d'une succession temporelle des événements : trois tirages puis annonce du résultat final. Pour faire cela, il investit la raison graphique (Goody, 1979) en écrivant les nombres en écriture chiffrée de gauche à droite, comme il est en train d'apprendre à le faire pour écrire les mots. Du point de vue des fonctions de l'écrit, c'est ici la fonction bureaucratique (*Ibid.*) qui prévaut : rendre compte avec l'écrit de l'organisation des actions et du résultat des actions réalisées. Comme les nombres tirés ainsi que le résultat s'écrivent avec un seul chiffre, cette écriture n'est pas ambiguë (contrairement à 1241632 qui s'interpréterait plus difficilement comme 12, 4, 16 résultat 32).

Remarquons au passage que Wyssem a d'abord été confronté à une autre écriture, en colonne, au cours du jeu et que l'écriture qu'il emploie correspond à une transcription en ligne de cette écriture en colonne.

1
2
2
5

Quelle est la différence entre l'écriture attendue et celle de Wyssem ? Wyssem est sans doute prêt à comprendre que l'on veuille séparer le résultat obtenu des nombres qui permettent de l'obtenir. Cette séparation peut être obtenue conventionnellement par n'importe

quel signe ou par un mot (« font »), le signe formé par deux traits « = » peut faire l'affaire. Cependant, le fait qu'il se lise « égal » complique les choses : la partie n'est pas « égale » à son résultat et justement Wyssem veut garder la trace de cette partie jouée (Pour une étude qui rend compte de difficultés similaires, au sujet du zéro, voir Pascal, 1980). De plus, dans la partie jouée, la barquette (vide à l'origine) se remplit d'abord avec 1 jeton, puis avec 2 puis encore avec 2, c'est cette barquette qui contient 5 jetons à la fin. Il y a donc une totale égalité de traitement de chaque dé tiré. C'est ici la première partie de l'égalité qui pose problème : il aurait fallu écrire soit $0+1+1+2$: et dans ce cas l'ajout des jetons s'écrit +1, +1, +2, soit $+1+1+2$. Cependant ces écritures ne sont pas usuelles et n'ont sans pas doute pas été envisagées par les auteurs du manuel, qui ne considèrent la situation d'amorce de la leçon que comme une amorce et pas comme un milieu que les élèves convoquent pour investir la tâche d'écriture.

La réaction de l'enseignante, qui est bien sûr de rayer l'écriture de Wyssem en manifestant son mécontentement pour ne laisser que ce qui était attendu apprend bien à Wyssem quel est le contrat (on peut supposer qu'il apprendra vite ce qui est attendu), mais ne lui permet pas d'investir une question proprement algébrique : de quelle écriture faire usage et pour faire quoi ?

Quand les élèves investissent l'écrit : le cas de Huseyin

Au cours du jeu, Huseyin qui est le secrétaire écrit $2+2=2=6$. L'enseignante qui intervient lui dit de façon assez méprisante : « mais deux plus deux combien ça fait ? ». Huseyin (qui est bon en calcul d'une façon général) ne comprend pas la soudaine colère de la maîtresse, d'autant qu'il sait très bien que deux et deux font quatre.

L'écriture d'Huseyin s'explique sans doute par le fait que jusqu'à alors le fichier n'a pas introduit d'addition de trois nombres mais seulement de deux. Huseyin sait que l'écriture correcte est « $\#+\#=\#$ » où # représente un nombre. Il sait sans doute aussi qu'après le « = » il faut écrire le résultat final de l'opération. Il ne sait donc que faire des deux premiers nombres et il sait comment écrire le résultat : « $2+2 \text{ ?}2=6$ » cependant, il ne sait pas s'il vaut mieux écrire « = » car c'est ce qu'on écrit d'habitude après les signes $\#+\#$ ou bien un autre signe (par exemple +). Comme Wyssem, il apprendra sans doute très vite par contrat ce qu'il convient de faire.

Cependant, l'écriture d'Huseyin révèle à nouveau l'inventivité des élèves et leur désir d'investir l'écriture algébrique. Dans le cas d'Huseyin, il n'y a aucune trace d'essai de s'appuyer sur l'écriture linguistique au détriment de l'écriture algébrique. Son écrit révèle qu'il a appris l'écriture antérieure (addition de deux nombres) en s'appuyant sur un contrat, qui ressemble à ce qui s'appelle informatiquement un « masque », le sens du signe « = » comme annonce du résultat a été partiellement intégré, mais c'est sans doute celui du signe

« + » qui est obscur, peut-être pour les raisons annoncées plus haut : si + sert d'opérateur, alors il faut l'écrire aussi devant le premier nombre, or Huseyin sait que cela ne se fait pas.

La réaction de l'enseignante nous apprend qu'elle ne peut pas lire une écriture mathématique comme un écrit qui est en cours d'apprentissage : si Huseyin écrit la séquence $2+2=2$ c'est nécessairement qu'il se trompe non pas sur l'écriture mais sur l'addition. Alors que cette enseignante a très certainement été entraînée à reconnaître des mots derrière des tentatives d'écrit (au C.P.) très difficiles à comprendre, elle n'imagine pas que l'écrit mathématique aussi est en cours d'apprentissage.

Retour à la dimension écrite du travail algébrique

Les élèves observés font preuve d'une grande inventivité sémiotique. Ils manifestent donc des *connaissances* en situation, alors qu'ils manquent clairement de *savoirs*, et que l'institutionnalisation qui pourrait transformer ces connaissances implicites en savoir semble se réduire à l'imposition d'un contrat.

De plus, la situation dans laquelle ils s'essayent à des écritures mathématiques n'est pas claire à plus d'un titre.

D'une part la situation de production d'écrit mathématique n'est pas identifiée comme telle par l'enseignante, qui manifeste la transparence pour elle du savoir « écrit mathématique » (Margolinas & Laparra, 2011). Il ne semble pas y avoir de différence pour l'enseignante entre l'obtention des résultats et leur écriture, ce que nous avons également remarqué (avec un autre enseignant, dans la même classe) au sujet des schémas (Laparra & Margolinas, 2009).

D'autre part, il n'y a pas de conditions rendant un tel écrit nécessaire. Les situations de formulation d'un tel écrit peuvent être cherchées en particulier soit dans une fonction bureaucratique, soit dans une fonction communicative.

- En pensant à une fonction bureaucratique, qui relève plutôt de l'auto-formulation, on pourrait mettre en place une situation de formulation avec éloignement dans le temps, dans laquelle il faudrait reproduire à plusieurs jours d'intervalle la partie et son résultat sans avoir besoin de refaire de calcul (Margolinas & Wozniak, 2012).
- En pensant à une fonction communicative, qui relève de la formulation à autrui, il serait possible de mettre en place une communication de la partie et de son résultat, comme cela a été fait dans d'autres travaux (Conne, 1987).

Conclusion

Minoration de l'apprentissage de la composante sémiotique

Les écritures algébriques sont considérées comme des savoirs qu'il faut enseigner par une « visite de l'œuvre » (Chevallard, 2010), même dans les apprentissages premiers, alors qu'aux mêmes niveaux, existe une certaine reconnaissance de la nécessité de construire des situations pour que les élèves commencent d'y acquérir des connaissances avant de les institutionnaliser comme des savoirs.

La forme écrite engendre une posture normative : on ne fait pas n'importe quoi avec l'écrit, surtout s'il s'agit de mathématiques... La forme écrite ne serait pas supposée être d'abord une connaissance en situation alors que l'écriture algébrique est une réponse à des problèmes posés par le travail mathématique.

Les élèves de C.P. investissent pourtant les écritures mathématiques comme des connaissances en situation et ils essayent donc d'optimiser ces écritures pour qu'elles soient utiles. Ils montrent donc qu'il est potentiellement possible d'entrer dans la problématique de l'écrit mathématique au moment même où l'on introduit ces écrits, d'autant que l'apprentissage par contrat va rendre ensuite difficile l'idée même que l'on pourrait écrire autrement que ce que l'on a appris.

On peut donc s'interroger sur le rapport à l'algébrique que peuvent entretenir des élèves à qui on a montré précocement et constamment qu'il ne fallait surtout pas « jouer » avec l'écriture mathématique.

Articulation des registres : le problème et la solution ?

« L'articulation des registres est le problème, mais aussi la solution; la mise en œuvre des conversions amène en effet à identifier et expliciter ce qui est implicite. Une piste à explorer pour les enseignants pourrait donc être de baser le travail des élèves sur une variation systématique de registres. [...]

En fait seule deux conditions semblent nécessaires pour que l'enseignant puisse accompagner efficacement ses élèves dans les apprentissages sémio-linguistiques : il doit d'abord bien maîtriser les registres de représentation des mathématiques – ce qui n'est quasiment jamais un problème en algèbre élémentaire ; mais il doit également être en mesure de repérer dans quel *ordre* sont les difficultés de ses élèves, et où elles peuvent apparaître. » (Drouhard & Panizza, 2012, p. 233)



Bibliographie

- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques Retrieved 22/05/2012, from http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie: L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Education et Didactique*, 4(1), 136-143. <http://educationdidactique.revues.org/771>
- Conne, F. (1987). Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire. *Math-Ecole*, 128, 2-12.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2-3), 221-270.
- Drouhard, J.-P., & Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro spécial hors série Revue Recherches en didactique des mathématiques* (pp. 209-235). Grenoble: La pensée sauvage.
- Drouhard, J.-P. (2013a). Langage et maths en maternelle. Stage FC Valbonne.
- Drouhard, J.-P. (2013b). La nature de l'algèbre (points de vue épistémographique et épistémologique). Un projet d'article avec I. Bagni.

- Drouhard, J.-P. (2014). L'analyse épistémographique: présentations, réflexions, questions. Séminaire ETOS ACADIS.
- Goody, J. (1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trad. 1977 ed.). Paris: Les éditions de minuit.
- Lafforgue, L. (n.d.). Les mathématiques sont-elles une langue ?, from <https://www.laurentlafforgue.org/textes/LangueMathematique.pdf>
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir ? *Pratiques*, 143-144, 51-82. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00722211>
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes.
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue Française de Pédagogie*, 188, 13-22.
- Pascal, D. (1980). *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. Université d'Aix-Marseille II, Marseille.
- Thurston, W. P. (1994). Proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177. <https://arxiv.org/pdf/math/9404236.pdf>

Espaces de Travail Mathématique et Epistémographie

Une rencontre multidimensionnelle

Alain Kuzniak

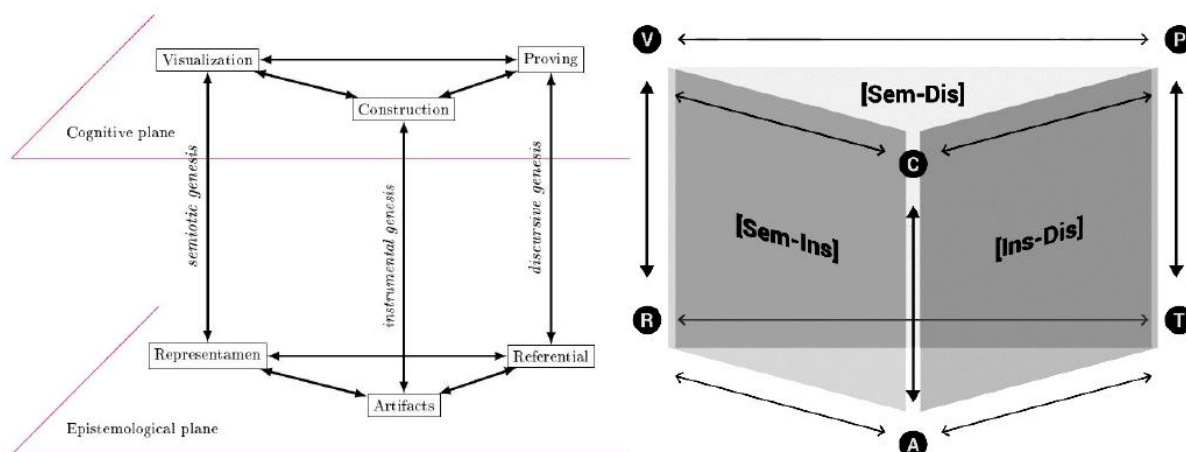
LDAR, Université Paris Diderot

Ma première véritable rencontre avec Jean-Philippe date de novembre 2013. Je l'avais bien sûr croisé bien avant et j'avais partagé avec lui de grands moments de convivialité. Mais, c'est à partir de 2013 et suite à son arrivée à Buenos Aires, que nous avons commencé une collaboration de travail très intense favorisée par un projet supporté par l'USPC, association alors naissante de diverses universités parisiennes dont Paris-Diderot. Cette collaboration s'est malheureusement trop rapidement et trop brutalement arrêtée et nombreuses sont les occasions qui me rappellent ces moments heureux et cette fin douloureuse. Je souhaite ici revenir sur les fruits et les promesses liées à nos recherches communes et à nos échanges à Buenos Aires, à Paris, à San Lorenzo del Escorial, lors du symposium ETM4, sans oublier Valparaiso que je lui avais fait découvrir combinant ainsi plaisir de la recherche et découverte de lieux et pays nouveaux.

Dans ce chapitre, je présenterai les apports de l'épistémographie des savoirs pour la didactique, que Drouhard a développé pour une étude spécifique de l'algèbre (Drouhard, 2012 ; Drouhard et Panizza, 2012), au cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) et notamment l'intérêt de son approche multidimensionnelle pour comprendre la notion d'outil et d'instrument dans le travail mathématique.

Espace de Travail Mathématique (ETM) et Epistémographie

Je ne détaillerai pas ici le cadre des ETM qui a fait l'objet de présentations diverses tant dans des colloques comme les symposiums ETM rappelés plus haut que des articles (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak, Tanguay et Iliada, 2016). Je renvoie le lecteur intéressé à ces différentes publications. Simplement, pour fixer le cadre général de ce chapitre et en faciliter la lecture, il peut être commode d'entrer dans les ETM grâce à deux diagrammes qui en structurent l'approche théorique et fournissent un cadre méthodologique aux études qui s'inscrivent dans ce courant de recherche.



Diagrammes associés aux ETM

Ces diagrammes permettent de mettre en évidence des manières de faire et des cheminements de pensée qui apparaissent dans la résolution des problèmes de mathématiques proposés dans l'enseignement. Le travail mathématique se donne à voir à travers l'usage, plus ou moins coordonné, par un individu d'artefacts, de signes (representamen) et d'éléments du référentiel théorique constitutifs du plan épistémologique. Un des points de la recherche entamée avec Jean-Philippe portait précisément sur la compréhension, ou tout au moins sur la description, du processus de coordination entre tous ces objets aux statuts et rôles différents dans la constitution de l'activité mathématique par les élèves. Elle nous a conduit à privilégier un regard multidimensionnel sur les objets mathématiques : un point de vue sémiotique relatif aux signes constitutifs de l'objet ; un point de vue instrumental articulé sur l'usage d'un certain nombre d'artefacts en relation avec l'objet et enfin un point de vue orienté vers la preuve discursive où l'objet apparaît comme une notion mathématique intégrée dans un corpus théorique qui sert de référence.

Dans la suite, je me propose de donner quelques éléments sur l'approche que nous avons suivie en m'appuyant largement sur les deux publications que nous avons réalisées ensemble (Drouhard et Kuzniak, 2015 ; Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). Ainsi, d'une certaine manière, la pensée de Jean-Philippe nourrit ce travail et j'espère ne pas trop la trahir.

Artefact, outil, instrument : un triptyque à clarifier

Privilégier l'étude du travail mathématique en didactique des mathématiques conduit nécessairement à s'interroger sur l'appropriation des différents outils mathématiques. Mais, les mots se bousculent dans ce domaine et les différents usages des objets mathématiques peuvent renvoyer à des notions qui ne sont pas évidentes à distinguer comme celles d'artefacts, d'outils ou d'instruments.

Définitions traditionnelles

L'emploi courant du terme *artefact* en didactique est certainement dû à l'influence de Rabardel (1995) qui l'a introduit pour désigner, conformément à l'usage des préhistoriens ou des archéologues, un objet transformé par l'homme pour une certaine fin. Il s'agit d'un terme a priori neutre dont les usages restent à définir notamment dans une perspective technologique.

Plus finalisée par rapport à la réalisation de certaines tâches, apparaît la notion *d'outil* : un gâteau est un artefact mais ce n'est pas un outil. Pour entrer dans les nuances, certains auteurs estiment qu'un outil n'est pas nécessairement transformé pour réaliser la tâche pour laquelle il va être utile, ainsi une pierre peut-elle être utilisée comme serre-livres.

Les valeurs sémantiques du mot *instrument* sont très variées mais dans son acception standard dans le domaine scientifique, il s'agit d'un objet fabriqué pour permettre de réaliser une technique ou favoriser une opération (observation, mesure...). Dans le langage ordinaire, on peut donc y voir un outil particulier et performant dont la conception et la réalisation sont le fruit d'une anticipation importante.

Instruments et outils

La notion d'instrument a acquis une signification particulière dans les travaux didactiques à la suite de l'influence de Rabardel et plus largement de l'importation de certains concepts de la théorie de l'activité. Dans ce contexte, un instrument résulte d'une construction de schèmes par le sujet mis en activité et il devient ainsi le fruit d'une genèse cognitive. Pour reprendre la distinction de Rabardel, l'instrument n'est pas un *donné* mais il doit être élaboré par le sujet. Un instrument est alors formé de deux composantes : un artefact, matériel ou symbolique, et des schèmes d'utilisation associés.

Dans la suite de ce chapitre et chaque fois que cela sera utile, je réserverai le terme *d'outil* aux objets du plan épistémologique ayant un usage potentiel déterminé dans le cadre de la résolution d'un problème. L'emploi du mot *instrument* sera privilégié dès lors qu'une interaction existera entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil qu'il faudra mettre en œuvre pour résoudre effectivement la tâche proposée.

Une vision dynamique et multidimensionnelle

Pour tenter de comprendre l'usage effectif et la dynamique des outils et instruments dans le travail mathématique, nous nous sommes appuyés sur le point de vue multidimensionnel introduit par Drouhard (2012) dans son épistémographie des savoirs mathématiques. En relation avec les différents pôles du plan épistémologique et les différentes dimensions du travail mathématique, il est possible de considérer, a priori, trois types d'outils et d'instruments : des outils sémiotiques comme les algorithmes de traitement dans les registres de représentation sémiotique ; des outils notionnels comme les théorèmes nécessaires pour valider certains raisonnements ; des artefacts matériels comme les calculatrices. En un sens

proche d'Engeström (1999), Drouhard introduit un second niveau avec la notion de méta-instruments qui réfèrent à des savoirs stratégiques sur les usages des autres instruments.

Ce point de vue multidimensionnel sur la notion d'outils et d'instruments rejoint ainsi les préoccupations de chercheurs utilisant le cadre des ETM en didactique de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca et Mena-Lorca, 2012). Ces derniers ont développé la notion d'artefact symbolique pour décrire l'usage particulier dans le raisonnement mathématique de certains théorèmes comme le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de Pythagore ou bien de techniques algébriques comme les règles de factorisation ou de développement. Finalement, les distinctions suivantes ont été retenus dans l'article Kuzniak, Nechache et Drouhard (2016, p. 864) pour caractériser trois types d'outils en relation avec les trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive du modèle des ETM.

- Semiotic tools are non-material tools for operating on semiotic representations of mathematical objects ;
- Technological tools are artifacts like drawing tools or routinized techniques based on algorithms or calculators with implemented calculation algorithms ;
- Theoretical tools are non-material tools for mathematical reasoning based on the logical and mathematical properties of mathematical objects.
- *La question étudiée*

Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte du caractère multidimensionnel des instruments mathématiques permet de préciser et de comprendre la nature des interactions existant dans les ETM entre chacun des éléments du plan épistémologique en relation avec les genèses associées : genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Nous illustrerons cette approche par l'étude de la fonction et des usages dans l'espace de travail de différents objets utilisés en mathématiques. Il s'agira plus particulièrement d'explicitier leur rôle dans la circulation du savoir mathématique conçu à travers la modélisation des Espaces de Travail Mathématique retenu dans Kuzniak et Richard (2014) qui met en exergue trois plans principaux d'interaction [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis]. Nous essaierons notamment de voir dans quelle mesure certains de ces objets peuvent intervenir en tant qu'instrument dans toutes ces interactions et constituer de ce fait ce que nous appellerons un instrument mathématique.

Dans le cadre de chapitre, je ne donnerai que deux des exemples étudiés dans Drouhard et Kuzniak (2015) : les arbres en probabilités comme exemple d'objet outil initialement purement sémiotique, le calcul algébrique littéral comme exemple d'outil symbolique pour favoriser le calcul. Dans l'article précité, nous avons envisagé aussi le théorème de Thalès en géométrie comme objet du référentiel théorique et, enfin, le compas comme artefact matériel.

Arbres probabilistes ou la complétude du travail mathématique idoine

Dans cette section, j'explore le statut particulier de l'arbre probabiliste considéré comme un objet de type diagramme dans le travail mathématique scolaire à la fin du secondaire en explicitant son rôle éventuel d'instrument sémiotique puis d'instrument mathématique dans le sens introduit dans le paragraphe précédent. Les arbres dont il est question sont des *arbres probabilistes* qui dérivent des *arbres ensemblistes* de façon à favoriser les solutions et les calculs dans les problèmes impliquant les probabilités conditionnelles. Il y a ainsi une évolution d'un premier type de représentation essentiellement descriptif à un second type qui remplit des fonctions de preuves et dont un des enjeux soulevés par ses introducteurs initiaux était d'en faire un registre sémiotique au sens de Duval (1993).

Comme le souligne Parzysz (1993), les arbres ont longtemps fait l'objet d'un usage spontané avec des règles de fonctionnement implicites laissées à l'initiative de leur utilisateur. Il s'agit alors essentiellement d'un outil de modélisation qui permet de représenter et de mémoriser des situations ensemblistes de dénombrement portant sur des choix d'où les bifurcations qui représentent les alternatives. Grâce aux travaux didactiques entrepris dans les années 90, on assiste progressivement à la transformation de ce diagramme initial en outil mathématique autonome dont nous allons montrer qu'il permet un travail mathématique complet au sens des ETM car en plus de son rôle sémiotique, il sera possible de fonder une validation discursive sur le seul emploi des arbres.

Cette transformation d'un pur diagramme représentatif en un instrument de preuve passe par différents états intermédiaires (arbre de choix et d'occurrence, arbre pondéré, arbre probabiliste à marges) pour atteindre le statut d'instrument mathématique avec des règles de calcul ad-hoc.

Les arbres probabilistes ont pour principal domaine d'application les problèmes mettant en œuvre des probabilités conditionnelles. Le problème standard est le problème (A) décrit grâce à un modèle d'urne.

(A) On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires. On jette le dé. Si le résultat obtenu sur le dé est 1 ou 2, on tire une boule au hasard dans l'urne U1. L'urne U1 contient $\frac{1}{4}$ de boules blanches et $\frac{3}{4}$ de boules noires. Si le résultat obtenu sur le dé est 3 ou 4 ou 5 ou 6, on tire une boule au hasard dans l'urne U2. L'urne U2 contient $\frac{5}{6}$ de boules blanches et $\frac{1}{6}$ de boules noires.

Quelle est la probabilité que la boule ainsi obtenue soit blanche ?

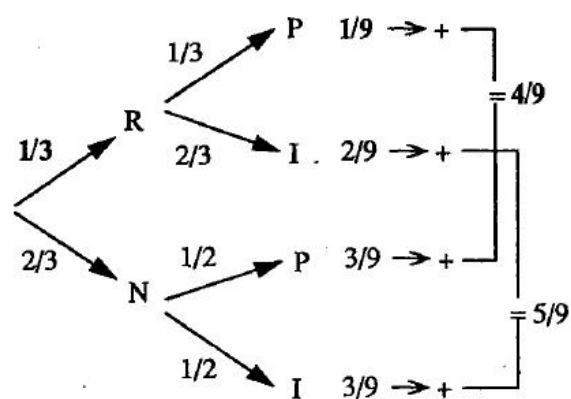
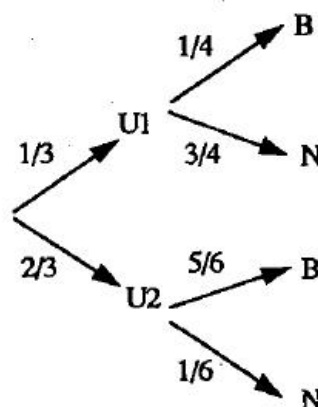
Si on sait que la boule obtenue est blanche, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'urne U1 ?

À ce problème standard peuvent être associées deux représentations, une en tableau et l'autre en arbre dont l'usage a été institutionnalisé dans les derniers programmes de lycée.

À ce problème standard peuvent être associées deux représentations, une en tableau et l'autre en arbre dont l'usage a été institutionnalisé dans les derniers programmes de lycée.

L'arbre peut ainsi être considéré d'une part comme une représentation mais aussi comme un artefact qui produit un résultat à partir d'un calcul. De fait, les dimensions sémiotiques et instrumentales du travail mathématique sont concernées. Peut-on fonder une démonstration sur le résultat donné par le calcul sur cet arbre.

L'arbre est traditionnellement accompagné, dans l'enseignement, d'un discours utilisant les symboles qui justifient chacune des étapes. Pour s'autonomiser et apparaître complet en tant qu'outil mathématique, il est nécessaire de légitimer les règles de calcul sur un arbre qui permettent d'obtenir les valeurs recherchées. C'est à ce travail que se sont appliquées Dupuis et Rousset-Bert (1996), ce qui les a conduit à introduire ce qu'elles appellent un arbre « à marges » où les calculs figurent en bout des branches et ceci avec deux marges de façon à gérer implicitement la formule de Bayes pour répondre à la question 2 du problème (A).



Comme nous l'avons noté les arbres probabilistes ont été officiellement introduits dans l'enseignement secondaire français actuel (2010). Leur introduction est graduelle et suit la construction sémiotique que nous avons dégagée avec d'abord un outil de modélisation parmi

d'autres (arbres, diagrammes, tableaux) en classe de seconde puis un lien étroit, en classe de première, avec les arbres de choix dans le cas d'un tirage de Bernoulli. Les arbres servent alors de support à loi binomiale et à la définition des coefficients binomiaux vus comme le nombre de chemins donnant p succès dans une épreuve à n tirages. Enfin, l'institutionnalisation comme un outil mathématique complet autonome s'effectue en Terminale où les arbres pondérés sont les outils de représentation privilégiés pour étudier les probabilités conditionnelles. Leur statut d'outil et d'instrument légitimes est explicité dans les programmes de terminales scientifiques en 2012 par le travail qu'il est nécessaire d'effectuer avec eux :

Outil de représentation : On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau.

Règle d'usage : On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés.

Rôle de preuve : Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.

Cette institutionnalisation des arbres comme outil légitime du travail mathématique en probabilité entraîne leur usage dans les manuels et dans les classes avec un certain nombre de variations sur leur statut suivant les classes et les manuels. Ainsi, certains manuels introduisent des règles de construction et des règles de fonctionnement d'un arbre en les mettant parfois en relation avec le substrat ensembliste.

Par exemple dans le manuel Transmath p. 353 (Aimani et ali, 2012), trois règles sont données

1. La somme des probabilités sur les branches partant d'un même noeud est 1 (loi des noeuds).
2. La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin (loi des chemins).
3. La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements associés aux chemins qui mènent à E .

Par la suite, dans le même manuel, les solutions d'exercices proposées font explicitement référence à ces règles. Ainsi une rhétorique interne au registre des arbres se met en place et l'arbre devient un outil à part entière de l'ETM proposé.

Cette première étude montre la création récente d'un outil sémiotique qui se transforme ensuite en outil mathématique de l'ETM. Cet outil permet la représentation d'un type de problème, il constitue aussi un outil de calcul et, in fine, il est reconnu comme un support légitime de preuve. Il permet ainsi *a priori* un travail mathématique complet dans l'ETM idoine du lycée et des études didactique en cours (Nechache, 2017) s'attachent à observer l'usage effectif de cet outil et donc sa transformation en instrument niveau des ETM personnels des élèves.

Calcul algébrique

J'aborde, dans cette partie, une question qui était au cœur de notre collaboration avec Jean-Philippe et qui concerne spécifiquement la place du calcul algébrique et, plus largement, du calcul symbolique en algèbre et dans le travail mathématique. Pour avancer sur cette question, nous avons utilisé des éléments de l'analyse épistémographique (Drouhard, 2012) spécifiquement dédiée à l'étude de l'algèbre. Dans la suite, je reprends des éléments de l'analyse de Drouhard et Kuzniak (2015) en les appliquant sur un autre exemple suscité par les recherches actuelles de Hoppenot (2017) sur l'étude, par des étudiants d'IUT, des domaines de définition de fonctions composées. Plus particulièrement, je considérerai la question du domaine de définition de $\ln(f(x))$ avec comme cas particulier $f(x) = x^2 - 10x + 20$. D'après Hoppenot, les étudiants ont tendance à gommer la particularité de la fonction f , en concluant immédiatement que le domaine de définition de $\ln(f)$ est \mathbb{R}^+ comme pour le logarithme. Cet exemple ne mobilise pas le seul domaine de l'algèbre mais aussi celui de l'analyse. Cette implication de l'algèbre en tant qu'outil dans d'autres domaines mathématiques est fréquente et en constitue sans doute une de ses particularités les plus saillantes.

Objets et savoirs algébriques

Les dimensions du travail mathématique sur les objets algébriques se sont pas réductibles les unes aux autres. Dans notre exemple, nous devons considérer l'inéquation $x^2 - 10x + 20 > 0$. Celle-ci comporte une première dimension purement sémiotique (sémio-linguistique pour Drouhard) associée à la représentation des objets considérés (l'écriture « $x^2 - 10x + 20 > 0$ »). Le traitement de cette écriture s'effectue dans des registres de représentation sémiotique. Ils sont nécessaires pour pouvoir représenter les objets sur lesquels on travaille, et en interpréter et en transformer les représentations. Ici, notamment, on s'appuie sur les règles de priorité et la manipulation de monômes de différents degrés.

Mais le traitement purement sémiotique de cette inéquation ne suffit pas à en rendre compte, il faut y introduire une composante en lien avec le référentiel théorique avec des objets bien définis en mathématiques : notion d'intervalles, propriétés du corps ordonné des réels, composition de fonctions... Dans notre exemple, il faudra aussi compter avec des propriétés de la fonction logarithme et de la fonction f qui peuvent renvoyer à un ensemble de propriétés liées à l'analyse (continuité, croissance). Cet ensemble de propriétés nourrit la dimension discursive, associée à la preuve, qui doit normalement permettre aux élèves d'identifier que le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des x tels que $x^2 - 10x + 20 > 0$ et de manière plus subtile comprendre que c'est l'ensemble des images de la fonction f qui est en jeu pour assurer la définition de la fonction logarithme. Cette identification relance alors le travail dans la dimension sémiotique avec des traitements possibles dans différents registres : purement algébriques, tableaux de variations. Une dynamique du travail se met alors en place dans le plan [Sem-Dis].

Le travail doit également se continuer dans la dimension instrumentale par des calculs à partir des expressions algébriques qui peuvent être faits avec une calculatrice formelle. Mais, et c'est sans doute là, la principale originalité de l'apport de Jean-Philippe, indépendamment d'un traitement basé sur un artefact matériel, il faut considérer les procédures générales que l'on peut mettre en œuvre pour réaliser les tâches souhaitées: ici par exemple, la décomposition canonique nécessaire pour transformer « $x^2-10x+20$ » en « $(x-5)^2 - 5$ ». Il existe ainsi une troisième dimension, instrumentale, qui va nécessiter un certain nombre de savoirs sur les outils mathématiques pour mener à bien, en pratique, le travail mathématique. Ce sont, en quelque sorte, les modes d'emploi et les précautions d'usage de ces outils. Les savoirs instrumentaux se distinguent ici des deux autres types de savoirs, sémiotiques et théoriques, par le fait que leur énoncé s'accompagne toujours de la mention d'un but (plus ou moins explicitement) comme : « Pour résoudre une équation qui ne se ramène pas immédiatement à un cas connu, on a souvent intérêt à la mettre sous forme factorisée ». Il s'agira donc, souvent mais pas seulement, de savoirs plus stratégiques que nous avons identifiés dans la définition des outils et instruments (voir plus haut).

L'algèbre et les outils et instruments du travail algébrique

Il est ainsi possible de répondre à la question controversée de la nature de l'algèbre et de caractériser sa spécificité épistémologique dans les mathématiques en identifiant les outils et instruments du calcul algébrique. Elle consiste à considérer que le travail algébrique se déploie dans l'entièreté des trois dimensions du plan épistémologique (notionnelle et référentielle, instrumentale et sémio-linguistique). Pour le dire de manière plus imagée et indépendante de notre cadre théorique, l'algèbre est à la fois une science des nombres et de leurs structures, un art de la résolution des problèmes numériques, et un ensemble de systèmes de représentations sémiotiques permettant d'exprimer d'une part les problèmes numériques et leur résolution et d'autre part les nombres que ces problèmes mettent en jeu.

Pour résoudre une inéquation dans le cas d'un travail mathématique de type algébrique, on applique :

- des règles de calcul littéral, qui ne sont pas autre chose que des jeux d'écritures (des « transformations de mouvement »),
- des propriétés mathématiques (telle que le fait que le produit de deux nombres négatifs est positif),
- et des considérations stratégiques plus ou moins contraignantes, par exemple le fait que pour factoriser une différence telle que « $18x - 8$ » on a fortement intérêt à commencer par une mise en facteurs communs (aboutissant à « $2(9x - 4)$ ») avant d'appliquer la différence de deux carrés (aboutissant à « $2((3x + 4)(3x - 4))$ »).

On retrouve ici les trois dimensions introduites dans l'approche en terme d'ETM et d'épistémographie. Cela nous amène à considérer que les outils du travail algébrique, que l'on utilise pour opérer sur des objets algébriques tridimensionnels, doivent eux aussi être considérés comme tridimensionnels. Plus précisément, les trois dimensions des outils et

instruments du travail algébrique correspondent aux trois dimensions des objets algébriques sur lesquels ces outils opèrent :

- la dimension sémiotique des outils et instruments du travail algébrique («outils sémiotiques») est celle des transformations dites de mouvement des écritures (Drouhard et Panizza, 2012).
- la dimension discursive associée à la preuve («outils théoriques») est celle des propriétés mathématiques utilisées comme outil de résolution,
- la dimension instrumentale sur des outils considéré comme des artefacts symbolique est celle des algorithmes d'emploi de ces instruments associés à des stratégies d'emploi des instruments, suggérant par exemple un ordre d'emploi des instruments, qui renvoie à un savoir second sur l'usage des instruments.

Pour résumer, nous avons considéré les objets mathématiques, dans leur trois dimensions, mis en œuvre dans le travail mathématique en ayant un rôle d'outil dans le plan épistémologique et « instrumentalisés » par un travail cognitif du sujet qui les utilise en reprenant ici la distinction outil/instrument que nous avons retenu plus haut. Bien entendu, à chaque étape du travail algébrique, telle ou telle dimension sera privilégiée et on parlera alors d'outil ou d'instrument sémiotique, théorique ou technologique (voire d'ordre meta).

Conclusion : un rêve pieircien inachevé

Dans cet article, j'ai réservé le terme d'outil aux objets du plan épistémologique de l'ETM ayant un usage défini dans le cadre des mathématiques. Sous ce terme générique, il est possible de distinguer des outils technologiques comme les artefacts matériels mais aussi certains algorithmes, des outils théoriques qui sont les théorèmes et les propriétés et enfin des outils sémiotiques définis à partir de diagrammes, de symboles ou d'objets tangibles ayant un rôle de signe. Le terme d'*instrument* est retenu dès lors qu'une interaction existe entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil pour résoudre effectivement une tâche proposée. De ce fait, les différentes dimensions –instrumentale, discursive, sémiotique– des ETM avec leurs genèses propres permettent d'analyser chacune des transformations cognitives particulières d'un outil donné en instrument. De cette manière, il est possible d'avoir un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments en pointant des différences entre instrument sémiotique, instrument théorique et instrument technologique. Nous réservons le terme d'instrument mathématique aux outils dont la maîtrise cognitive permettait un travail mathématique complet jouant sur les différentes dimensions cognitives du travail dans son ensemble.

Une fois dégagées ces précisions terminologiques et conceptuelles, cette approche multidimensionnelle a été utilisée pour comprendre la nature très particulière du calcul algébrique qui se caractérise par une proximité très forte des différentes dimensions du plan épistémologique. L'étude des arbres probabilistes a montré la grande flexibilité des outils

introduits en mathématiques et la nécessité d'une prise en compte précise de leur rôle pour en assurer un emploi adéquat dans leur domaine d'usage. Ainsi, un objet purement sémiotique comme un arbre peut, à la suite de certaines transformations, devenir un instrument mathématique remplissant toutes les fonctions attendues pour ce type d'instrument. Cet éclaircissement des différentes fonctions et usages des outils et instruments dans le cadre des ETM, entrepris avec l'appui de l'approche épistémographique, permet une étude plus fine du travail mathématique nécessaire pour résoudre des situations mathématiques complexes et guider un enseignement prenant en compte la diversité cognitive de ce travail.

Mais bien des choses étaient encore possibles autour de cette rencontre entre deux approches théoriques. Pour le symposium ETM5 à Florina (2016), Jean-Philippe, associé à Mabel, avait envoyé un résumé de son projet de communication lui permettant de réaliser en quelque sorte son rêve pieircien en faisant évoluer le modèle des ETM vers un modèle triadique complet : les Espaces Epistémographiques de Travail Mathématique (E_tTM). Dans ce modèle, il intégrait un troisième plan dit *ergotopique*. Il concluait son résumé par cette phrase caractéristique de son humour de chercheur engagé: *Ce texte n'est qu'un résumé de propositions qu'il reviendra aux participants de ETM5 de discuter, d'amender, de reprendre et d'affiner...*

« Efficace et discret, travaillant son domaine sans s'accrocher aux positions de pouvoir, Jean-Philippe était un chercheur comme on les rêve. » Jean-Baptiste Lagrange.



Jean-Philippe Drouhard, Assia Nechache, Alain Kuzniak

Références

- Aimani, S., Bonneval J.M., Devynck J.-B. & Yvonnet, P. (2012). *Manuel de Terminale S. Collection Transmath*. Paris: Nathan.
- Drouhard, J-P. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In M. Abboud-Blanchard & A. Flückiger (Eds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (Année 2011)*. IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot. pp. 129-133.
- Drouhard, J-P., Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.209-235). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Drouhard, J-P. et Kuzniak, A. (2015). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les Espaces de Travail Mathématique. In I. Gomez-Chacon (Ed.), *Mathematical Working Spaces, Actes d'ETM4, Madrid* (pp. 337-351).
- Dupuis, C. & Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilités : analyse en terme de registre de représentation. *Repères Irem* 22. 51-72.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5., 37-65.
- Engeström, Y. (1999). Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research. Web: <http://lhc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/>.
- Hoppenot, P. (2017). Domaine de définition d'une fonction composée pour des étudiants non scientifiques. Exemple de la fonction $\ln(u(x))$ en IUT. *Colloque Asi9*. Belfort.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16. 9-24.
- Kuzniak, A., Nechache, A. et Drouhard, J-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, 861-874.
- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1), 17–26.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2012). Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matemático. *Relime*, 17(4.1).
- Nechache, A. (2017). *La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités*. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 67-90.
- Parzysz, B. (1993). Des statistiques aux probabilités. Exploitions les arbres. *Repères Irem*, 10, 93-104.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Écriture et pensée mathématique : le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire²⁶

Raymond Duval

On ne peut comprendre une recherche qu'à partir de la question qui la commande et qui commande les choix de sa problématique. Personnellement, bien que j'ai rencontré Jean-Philippe plus ou moins régulièrement, je n'avais pu comprendre véritablement la démarche de sa pensée. Il m'aura, hélas, fallu lire sa thèse en vue de cette rencontre autour de ses travaux pour vraiment le réaliser. Aussi est-ce ce dialogue que je regrette de n'avoir pas eu avec lui que je vais engager ici pour reprendre nos débats trop fragmentaires, comme le sont d'ailleurs tous les échanges oraux.

Je commencerai par des distinctions qui sont nécessaires pour bien saisir ce qui a été l'objet de la recherche de Jean-Philippe : les différentes écritures symboliques utilisées dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Car il s'agit de ne jamais confondre le langage et les écritures purement symboliques, ni les systèmes d'écritures et toutes les incomplètes et complètes qu'ils permettent de produire.

Nous pourrons ensuite aborder le champ et la problématique des travaux de Jean-Philippe tels qu'il les a lui-même présentés dans sa thèse de 1992. Autrement dit, cette section sera un Jean-Philippe par lui-même ! Il m'a paru important de détacher, dans une troisième section, les conclusions auxquelles les analyses linguistiques des « Écritures Symboliques Algébriques (ESA) » l'ont conduit. Il est nécessaire de prendre en compte la distinction entre frégéenne entre sens et dénotation, distinction non linguistique, pour analyser les écritures symboliques algébriques, parce c'est le fond du problème concernant l'introduction de l'algèbre au Collège est celui de la dénotation des ESA. Ce problème, nous le retrouverons au cœur des travaux ultérieurs de 1996 à 2012. Nous les regarderons, dans une quatrième section, pour voir si, ou comment, le champ et la problématique de ses travaux ont pu évoluer, et surtout quelles ont pu en être les avancées. La pierre de touche sera le problème que Jean-Philippe a reconnu comme crucial pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une théorie de l'apprentissage du fonctionnement propre aux écritures symboliques, *pour tous les élèves de 11 à 16 ans*.

C'est seulement dans la cinquième section que j'engagerai vraiment le dialogue avec Jean-Philippe autour de la question qui lui tenait à cœur. Quel point de vue adopter pour découvrir les facteurs d'apprentissage des écritures symboliques algébriques ? Cette question

²⁶ Je voudrais remercier Mabel Panizza dont les conseils m'ont guidé parmi les travaux de Jean-Philippe, et dont la relecture attentive de mon texte m'a aidé à rendre le plus clair possible des analyses importantes pour la formation des futurs enseignants du Primaire et du Collège.

recouvre en fait quatre questions dont nous aurons pu suivre, dans les sections précédentes, l'émergence ainsi que les éléments théoriques élaborés par Jean-Philippe pour tenter d'y répondre. Car les points de blocage dans l'apprentissage de l'algèbre au Collège sont bien là, et ils restent toujours aussi résistants depuis plus d'une quarante années²⁷

Je terminerai sur les deux apports essentiels des travaux de Jean-Philippe à ces quatre questions en débat.

1. Distinctions préalables pour décrire et définir la spécificité des écritures symboliques

Les écritures symboliques sont un type de représentation graphique qui n'ont rien de véritablement commun ni avec un langage, ni avec des figures. Pour le comprendre, arrêtons un instant sur ce que l'écriture a de spécifique par rapport à deux autres types de représentations plus communes, les expressions linguistiques et les figures instrumentalement construites en fonction de propriétés géométriques.

1.1. Écritures symboliques versus écritures alphabétiques : une rupture totale avec la parole.

L'ÉCRITURE est ce type de représentation graphique qui consiste en *une suite linéaire d'éléments qui sont visuellement distinguables et dont l'ordre de succession obéit à des contraintes*. Ces éléments sont soit les lettres d'un alphabet soit les chiffres d'un système de numération.

Il est important de bien séparer deux types d'écritures. Les écritures alphabétiques sont un codage de la parole, c'est-à-dire d'une énonciation orale. Les ÉCRITURES SYMBOLIQUES, qui ont été développées à des fins exclusives de calcul, sont DES ÉCRITURES OPÉRATOIRES qui ne peuvent ni s'énoncer en langue naturelle ni se dire oralement.

Et dans les écritures symboliques, il est important de ne pas confondre deux niveaux d'unités de sens. Le premier niveau de sens est celui des éléments signifiants qui dépendent entièrement du système sémiotique utilisé, tel que Saussure (1972) l'a défini : phonèmes, morphèmes, et mots d'une langue naturelle, chiffres désignant des nombres dans un système de numération. Ainsi, les chiffres "0" et "1" par exemple n'ont pas la même valeur oppositive de choix dans un système d'écriture binaire et dans un système d'écriture décimale. Le deuxième niveau de sens est celui des expressions incomplètes ou complètes que l'on peut produire en utilisant un système sémiotique : syntagmes nominaux et verbaux pour les phrases, et ce que nous appellerons des syntagmes opératoires pour les écritures symboliques.

²⁷ Ils ont évidemment donné lieu à de nombreuses études. Une classification en est esquissée dans Duval et *alii*, 2015.

	ECRITURES SYMBOLIQUES
1. SYSTÈME D'ÉCRITURE DÉCIMAL	4 (<i>élément désignant un nombre</i>) 44 (<i>suite de deux éléments désignant un autre nombre</i>)
2. EXPRESSION INCOMPLÈTE : les syntagmes opératoires articulent au moins un chiffre (ou une lettre) et UN SYMBOLE D'OPÉRATION	(2 + 2), (5 - 1), (2 × 2) , (8 : 2) , 8/2 40 + 4, 12 × 2 <i>syntagmes opératoires</i>

Figure 1. Deux niveaux d'unité de sens dans les écritures symboliques

D'un strict point de vue linguistique et sémiotique, il est donc important de ne pas confondre les écritures symboliques utilisées en mathématiques et les écritures alphabétiques qui permettent de transcrire toute expression orale d'une langue naturelle. Elles s'opposent entre elles sur les quatre critères suivants :

	ECRITURES SYMBOLIQUES	ECRITURES ALPHABÉTIQUES
1. Commutation oral/écrit, univoque et réflexe	NON	OUI
2. Contraintes déterminant l'ordre de succession des éléments ayant une <i>valeur oppositive de choix</i>	Syntaxiques	Reproduction des éléments articulés dans la production vocale
3. Fonction de désignation d'objet pour les éléments	OUI <i>Désignation de nombres</i>	NON
4. Concaténation des éléments <i>en unités de sens</i> d'un <i>niveau plus complexe d'expression</i>	Formation de syntagmes opératoires (expressions incomplètes)	Reproduction des unités de sens du discours oral

Figure 2. La rupture entre écritures symboliques et écritures alphabétiques

Les écritures symboliques désignent toute la gamme des écritures qui ont été développées pour pouvoir effectuer des calculs. Tout calcul est une suite d'opérations consistant à substituer une expression symbolique à une autre expression symbolique, que ces expressions soient numériques ou littérales. Deux types de substitutions doivent être distingués, selon que les substitutions portent sur des syntagmes opératoires, c'est-à-dire sur des expressions incomplètes, ou sur des égalités, des équations ou des expressions, qui constituent un troisième niveau de sens et que nous appellerons des expressions complètes.

Substituer une EXPRESSION INCOMPLÈTE à une autre consiste à le réduire

- soit à un élément du système d'écriture décimal : $(2 + 2) \rightarrow 4$, ou $12 \times 12 \rightarrow 144$
- soit un syntagme opératoire moins complexe : $3 (a + 2/3b) \rightarrow 3a + 2b$
- soit à un syntagme opératoire de degré inférieur : $x^2 \rightarrow (x \times x)$.

Ces substitutions sont évidemment réversibles. Elles sont déterminées par les propriétés des symboles d'opérations ou par la nature des nombres. Nous les appellerons donc des SUBSTITUTIONS OPÉRATOIRES.

Substituer une EXPRESSION COMPLÈTE à une autre est une opération différente. D'une part, elle exige que l'on puisse changer un terme d'un membre à l'autre de l'équation et que l'on puisse effectuer une substitution opératoire dans l'un des deux membres.

$$a + 2 = 4 \rightarrow a = 2 \qquad 2a = 8/2 \rightarrow a = 4$$

D'autre part, elle exige que dans cette substitution les deux expressions complètes conservent la même valeur de sens. La substitution doit se faire *salva veritate*, selon l'expression employée par Leibniz, *alors que les expressions incomplètes mises en relation dans chacune de deux expressions incomplètes ne sont pas les mêmes !* C'est pour décrire ce mécanisme de substitution sémiotique que Frege (1892) a introduit sa célèbre distinction entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). La «dénotation» est l'unité de sens propre à une expression complète, et le «sens» étant l'unité de sens d'une expression incomplète. En étendant cette distinction aux expressions incomplètes, la dénotation devient «l'objet désigné» par un syntagme opératoire ou nominal, et le sens devient la «signification» propre à chacune des expressions incomplètes employée pour dénoter ou désigner un objet. Autrement dit, *avec les expressions incomplètes, la dénotation résulte d'une opération de désignation*. Ces substitutions sont des SUBSTITUTIONS SÉMANTIQUES.

Comparons maintenant les quatre expressions complètes ci-dessous du point de vue des substitutions à faire pour calculer ou pour «résoudre».

$$2 \times 2 = \frac{2 \times 2}{4} = 8 : \quad 2 \times \frac{\dots}{2} = 8 : \quad (a + b) / 2 = a/2 + b/2$$

$$\text{ou } 2 \dots = 8 :$$

1. Un seul membre à prendre en compte	OUI		
2. Les deux membres indépendamment l'un de l'autre		OUI	
3. Possibilité de passer un terme à l'autre <i>salva denotatione</i>			OUI $2 \times \dots = 8 : 2$ $\dots = (8 : 2) / 2$
4. Nécessité de passer un terme d'un membre à l'autre dans l'équation <i>salva veritate</i>			OUI $(a + b) / 2 = a/2 + b/2$ $a + b = 2(a/2) + 2(b/2)$

Figure 3. Continuum des écritures symboliques au niveau des expressions complètes

Les deux premières expressions (ci-dessus, les deux premières colonnes), n'exigent que des substitutions opératoires. Le syntagme opératoire est réduit à l'écriture d'un nombre dans le système décimal. Aucune substitution sémantique à faire. En revanche, tout change pour calculer ou résoudre les deux expressions suivantes, même si l'égalité numérique à trou (troisième colonne) ne comporte aucune lettre. Autrement dit, la substitution sémantique ne doit jamais être confondue avec une substitution opératoire, même si la résolution d'une équation recourt à l'une et à l'autre.

Ces distinctions et ces comparaisons permettent de faire trois remarques importantes pour entrer dans la problématique des recherches de Jean-Philippe :

- (1) Elles mettent en évidence la complexité des écritures symboliques.

D'une part, elles exigent qu'on puisse *reconnaître tout de suite trois niveaux d'unités de sens qui s'emboîtent* : les éléments signifiants dans un système sémiotique et qui sont souvent confondu avec les « signes », les expressions incomplètes et les expressions complètes. Sans leur reconnaissance, on ne peut pas lire les expressions symboliques, mais seulement les épeler, éléments par éléments.

D'autre part, il faut *avoir pris conscience de l'opération spécifique de substitution sémantique* pour pouvoir « résoudre » une équation, ou pour pouvoir appliquer une formule dans une situation particulière et résoudre un problème concret.

- (2) *Le premier pas dans l'algèbre ne commence pas avec l'introduction de lettres, mais avec l'écriture d'expressions incomplètes* pour former une expression complète, dont la

résolution va exiger une substitution sémantique. Les égalités numériques à trou en sont un premier exemple (Duval et *alii*, 2015, p.67, 73).

Ainsi toute expression symbolique dans laquelle le symbole de relation “=” peut être remplacé par symbole de désignation d’un résultat «→» n’est pas une expression symbolique algébrique complète. L’utilisation du symbole «=» pour désigner le résultat d’une opération arithmétique crée une équivoque, qui va constituer un obstacle pour l’entrée dans les écritures symboliques algébriques.

L’introduction des lettres commence avec la formation des expressions incomplètes, qui exige, comme on le verra plus loin, *la prise de conscience d’une opération discursive spécifique aux écritures symboliques : la désignation fonctionnelle.*

- (3) L’algèbre n’est pas et ne peut pas être à proprement parler un langage. *Elle est un registre discursif cognitivement monofonctionnel* et non pas multifonctionnel comme les langues naturelles.

La lecture et la compréhension des expressions symboliques *exigent donc que l’on reconnaisse visuellement les différents niveaux de sens d’une expression, pour pouvoir en distinguer toutes les unités de sens.* Autrement on en reste à la seule reconnaissance des différents caractères (chiffres, lettres, symboles d’opération ou de relation) que l’on peut seulement épeler les uns après les autres. Et on se heurte alors à de sérieuses difficultés pour transformer les syntagmes opératoires en d’autres syntagmes *et, plus encore, pour effectuer des substitutions sémantiques.* Ces difficultés peuvent vite bloquer la grande majorité des élèves, non seulement pour résoudre des équations, mais plus simplement pour appliquer une formule !

2. Le champ et la problématique des travaux de Jean-Philippe

2.1. La complexité paradoxale des écritures symboliques

Pour comprendre l’idée directrice des travaux de Jean-Philippe, il faut ouvrir sa thèse soutenue en 1992, et intitulée *Les écritures symboliques de l’algèbre élémentaire.* Voici comment il la présente dans les premières lignes de l’introduction. Il y annonce d’emblée deux changements complets de perspective par rapport à ce qui était consensuellement admis dans les travaux didactiques sur l’algèbre élémentaire.

Au tout début de ce travail il y a l’hypothèse très générale, qu’en algèbre, à *côté de difficultés conceptuelles*, l’apprenant est également confronté à des difficultés d’ordre linguistique, liées à *la complexité du langage symbolique* des mathématiques. En d’autres termes, la “transparence” du langage symbolique est posée comme illusoire, et un des objectifs de ce travail est précisément de lever cette “*illusion de transparence*”. (1992, p. 3).

Tout d’abord, en parlant d’« illusion de transparence », Jean-Philippe remet en cause une idée dont l’évidence s’est vite imposée avec le développement de l’algèbre, *celle du caractère*

*entièrement explicite et contrôlable des écritures symboliques*²⁸. Les écritures symboliques sont, en effet, le seul type de représentation utilisé en mathématiques où, d'une part, tous les éléments signifiants nécessaires pour comprendre une expression complète sont explicitement donnés, à de minimes exceptions près²⁹, et où, d'autre part ce que chaque élément signifiant est univoque. En d'autres termes, une égalité ou équation sont autosuffisantes. Elles ne dépendent d'aucun contexte, et d'aucune situation comme presque tous les énoncés en langue naturelle. En outre, les transformations d'une expression symbolique en d'autres expressions symboliques sont totalement explicites et parfaitement contrôlables. C'est pourquoi, à la différence de toutes les propositions en langue naturelle, elles sont algorithmisables. Les écritures symboliques devraient donc être plus faciles à comprendre que tous les énoncés en langage naturel, ou que les figures géométriques ou même que les graphes qui doivent être appréhendés qualitativement et non pas ponctuellement.

Or ce n'est pas le cas. Si les écritures symboliques sont mathématiquement transparentes, ce n'est là une « illusion de transparence ». Car, comme on vient de le montrer, *elles écrasent dans une même succession différents types de groupements de chiffres, de lettres et de symboles. Et ces groupements constituent des unités de sens de niveaux différents*. Ils sont quasiment impossibles à discriminer et à reconnaître pour la majorité des jeunes élèves. Dans ses travaux ultérieurs, Jean-Philippe a préféré parler d'« implicite » plutôt que d'« illusion de transparence »

Le deuxième changement porte sur le rapport entre les écritures symboliques et les concepts. Pour Jean-Philippe, les difficultés de reconnaissance des unités et des niveaux de sens ne sont pas des difficultés conceptuelles. Elles se situent à la fois en amont et en aval de l'acquisition de concepts. Si les substitutions opératoires sont mathématiquement justifiées par un « petit nombre de propriétés » relatives au type de nombre ou aux propriétés des opérations, ce ne sont pas ces propriétés qui aident à entrer dans les deux mécanismes de substitution opératoire et de substitution sémantique qui sont totalement étrangers à toute pratique de la parole et à toute discussion dans un débat en dehors des mathématiques. Autrement dit, *il y a une séparation totale entre la complexité des écritures algébriques et la nature des nombres représentés par ces écritures*. Jean Philippe s'engage dans une direction opposée à celle des travaux didactiques, dans lesquels les écritures symboliques étaient toujours analysées en relation avec les types de nombres qu'elles représentent. *Le fonctionnement opératoire et discursif des écritures symboliques est au moins aussi important que la nature des nombres qu'elles représentent*.

²⁸ Condillac l'exprimait de cette façon à la fin du XVIII^{ème} : l'algèbre, qui est le langage des mathématiques, est une simplification de la langue et une économie de signes permettant d'augmenter la capacité de calcul.

²⁹ On écrit "a" au lieu de "1 x a" et "2a" au lieu de "2 x a".

Pour justifier ce double renversement, Jean-Philippe poursuit en expliquant comment il a pris conscience de l'impasse des recherches sur l'enseignement de l'algèbre : J'avais choisi initialement d'étudier pour commencer les erreurs "classiques" dans le cadre de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, IL M'A FALLU METTRE AU POINT UNE SYNTAXE DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES CORRECTES, QUI DEVAIT SERVIR DE RÉFÉRENCE POUR L'ÉTUDE DES ERREURS.

Ce faisant, j'effectuais un "pas de côté" pour mieux aborder la didactique de l'algèbre, autrement dit je mettais entre parenthèses les questions d'enseignement, pour mieux y revenir ensuite. J'ai pris délibérément le parti de renverser la perspective usuelle, par rapport à nombre d'études didactiques, qui consiste à partir de la situation d'enseignement³⁰. J'aurais pu me demander par exemple "*qu'est-ce que devrait être une situation (a)-didactique en algèbre ?*" et construire ma recherche autour de cette problématique. J'ai préféré me poser d'abord la question "*qu'est-ce que l'algèbre (en tant qu'elle est enseignée) ?*", PUIS PRÉCISER CETTE QUESTION EN "*QUE SONT LES ÉCRITURES SYMBOLIQUES DE L'ALGÈBRE ?*" avant d'aborder les questions plus proprement didactiques. (1992, p. 3).

Pour comprendre l'explication de Jean-Philippe, il faut rappeler qu'il y a plusieurs schémas méthodologiques dans les recherches en didactique des mathématiques. Ils sont organisés autour de données et d'exigences qui relèvent de trois points de vue différents, qui sont ceux des trois principaux types d'acteurs du système éducatif : (1) celui de la discipline enseignée, ici le point de vue mathématique sur les contenus mathématiques fixés dans les programmes, (2) l'enseignant et les situations d'enseignement à organiser, et (3) *last but not least* les élèves avec les difficultés spécifiques de compréhension auxquelles ils se heurtent pour apprendre en mathématiques, c'est-à-dire des difficultés qu'ils ne rencontrent pas dans les autres matières. Les schémas méthodologiques de recherche varient selon l'ordre d'importance que l'on établit entre ces trois points de vue.

Ainsi, Jean-Philippe a cherché à « mettre au point une syntaxe des expressions algébriques correctes » pour analyser les erreurs, c'est-à-dire les points de vue (1) et (3). Mais il a pris conscience que les écritures symboliques utilisées dans l'algèbre élémentaire présentaient une complexité propre, didactiquement paradoxale. Elles devaient donc être étudiées pour elles-mêmes, *avant toute analyse des erreurs observées comme avant toute recherche sur les problèmes ou l'utilisation d'outils informatiques permettant d'introduire l'algèbre*. Autrement dit, il s'agit de développer une analyse théorique du fonctionnement des écritures algébriques. Lorsqu'il parlait d'un « pas de côté » à faire, Jean-Philippe percevait la nécessité d'introduire un quatrième point de vue. Ce quatrième point de vue est totalement différent des trois points de vue que les recherches didactiques croisent, en privilégiant surtout le point de vue des enseignants dans leur classe et se focalisant sur tel ou tel contenu mathématique particulier, par exemple l'introduction des lettres dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. D'où la question : quel point de vue adopter pour analyser la complexité des écritures symboliques, qui ne soit pas le point de vue mathématique.

... (3) Il a fallu définir précisément cet objet, autrement dit déterminer ce que j'ai appelé les Expressions symboliques de l'Algèbre élémentaire (ÉSA) au sein des écritures mathématiques. J'AI POSÉ COMME HYPOTHÈSE QUE LES ÉSA POUVAIENT ÊTRE DÉCRITES PAR UN MODÈLE LINGUISTIQUE (UNE GRAMMAIRE). (1992, p. 3-4).

³⁰ Jean-Philippe a probablement commencé son travail de thèse dans les années 1985-1986. Les travaux auxquels il fait référence dans son introduction sont des travaux publiés entre 1982 et 1992.

2.2. Pourquoi un point de vue linguistique, et quelle théorie linguistique ?

Personne, évidemment, ne confondra un point de vue et une théorie. On parle de « point de vue » en deux sens. Soit pour désigner ce que perçoit chaque « acteur » dans une situation ou dans une organisation, ainsi que les problèmes auxquels il est confronté. En classe, par exemple, il y a le point de vue de chacun des élèves et il y a le point de vue l'enseignant qui doit organiser les activités et gérer leur déroulement individuel, par groupes ou collectif. Soit pour désigner l'ensemble des phénomènes ou des objets dont l'étude correspond à une discipline. Il y a ainsi un point de vue mathématique, un point de vue psychologique, un point de vue sociologique et aussi un point de vue linguistique. En ce second sens « point de vue » et « discipline » sont synonymes. On voit alors que pour chaque discipline, il y a toujours plusieurs théories possibles, qui ne vont pas privilégier les mêmes phénomènes, les mêmes aspects ni, surtout, les mêmes questions dans le champ des objets d'étude d'une discipline.

Le choix d'un point de vue linguistique pour étudier les écritures symboliques algébriques est doublement surprenant. D'une part, il ne reprend pas le point de vue épistémologique et historique sur le développement de l'algèbre, qui avait déjà été adopté dans nombre de travaux. D'autre part, les écritures symboliques, qui sont des écritures opératoires et non pas d'abord représentatives, ne sont pas et ne peuvent pas être à proprement parler « un langage » ou une « langue », comme nous l'avons vu plus haut.

Ce choix s'inscrit dans un parcours personnel.

Au point de départ Jean-Philippe était intéressé par la linguistique. Et il a commencé à étudier les mathématiques parce qu'il avait l'intuition qu'il trouverait dans cette discipline des questions à travailler, principalement pour tout ce qui concerne le fonctionnement et l'utilisation des règles mathématiques, qui lui permettraient de mieux comprendre les questions linguistiques.³¹

Pour Jean-Philippe *la syntaxe, en tant que les règles de formation D'EXPRESSIONS COMPLÈTES CORRECTES, que ce soit des phrases ou des équations, a été en fait le point de rapprochement entre le langage et les écritures symboliques*. Ce point est important, car il aide à comprendre le choix de la théorie linguistique. Deux grandes théories ont marqué le développement de la linguistique, et leur influence s'est exercée bien au delà de leur linguistique, celle de Saussure (1915)³² et celle de Chomsky (1957)³³. Elles ne privilégient pas les mêmes questions concernant le langage.

La première porte sur ce qui constitue les valeurs de sens dans la parole, c'est-à-dire sur les structures qui permettent de différencier des unités de sens dans tout langage considéré

³¹ Jean-Philippe a obtenu une licence de sciences du Langage en 1982. Ce témoignage de la mère de Jean-Philippe a été recueilli par Mabel Panizza.

³² Saussure F. de. *Cours de linguistique générale*. Paris, Payot, 1973.

³³ Chomsky N. *Syntactic Structures*. The Hague, Mouton § Co. 1957

comme un système. La comparaison des systèmes d'écriture des nombres, binaire et décimal, en offre un parfait exemple. Un chiffre est une unité de sens qui se détermine par opposition au choix possible d'un autre chiffre dans le système utilisé. La théorie de Saussure a fondé la méthode d'analyse structurale qui a constitué un apport majeur pour l'analyse des signes, et plus largement pour l'analyse des contenus de toutes les représentations produites ou transmises en utilisant des systèmes de communication, linguistiques ou non linguistiques.

La théorie de Chomsky, au contraire, porte les invariants organisationnels qui sont sous-jacents à la production d'expressions linguistiques complètes. Les premiers invariants organisationnels sont les syntagmes nominaux et verbaux. Ils sont communs à toutes les langues du monde. Et à partir de ces invariants, on peut développer une grammaire générative et transformationnelle, c'est-à-dire des règles de formations de phrases dans les différentes langues naturelles. Ces règles sont *des règles de récursivité* qui correspondent *la structure syntaxique profonde*, c'est-à-dire aux règles de production des phrases communes à toutes les langues, *par opposition à la structure de surface*, c'est-à-dire aux règles syntaxiques observables.

Jean-Philippe a choisi d'utiliser un modèle de grammaire générative pour analyser les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire (1992, chap. IV). Car, ce type de modèle permet de mettre en évidence les deux aspects à prendre en compte dans l'analyse des écritures algébriques : l'aspect *implicite* des règles récursives des expressions algébriques correctes, et l'aspect *explicite* des propriétés mathématiques qui déterminent l'organisation des écritures algébriques produites. Or les règles récursives de formation des expressions symboliques s'avèrent plus complexes que les règles mathématiques de substitution d'une expression incomplète à une autre, c'est-à-dire du calcul.

3. Conclusion de l'analyse linguistique des ESA : nécessité de la distinction frégréenne entre sens et dénotation.

L'hypothèse de travail annoncée dans l'introduction était : « les ESA peuvent être décrites par un modèle linguistique (une grammaire) » (1992, p. 4). La recherche de la thèse a conduit Jean-Philippe à une conclusion paradoxale par rapport à cette hypothèse. Pour mettre en évidence l'implicite des écritures symboliques algébriques, il faut recourir à la distinction sémantique de Frege entre le sens d'une expression et ce qu'elle dénote. La troisième partie de la thèse, intitulée « De la signification des ESA » est d'ailleurs composée comme une défense et illustration de l'importance didactique de la distinction de Frege. Autrement dit, la thèse pourrait presque être considérée comme une preuve par l'absurde de la nécessité de fonder l'analyse des écritures symboliques de l'algèbre sur la distinction de Frege. Quelles analyses ont ainsi conduit Jean-Philippe à ce retournement de problématique?

Tout d'abord, les analyses que Jean-Philippe a développées dans le cadre de la grammaire transformationnelle portent essentiellement sur les expressions numériques, et non pas sur les expressions algébriques proprement dites. Elle conduit à définir des règles pour engendrer les écritures symboliques, et qui constituent l' « automate formel ».

Nous opérons dans ce travail de modélisation syntaxique un renversement de perspective quant à la définition des ESA. Etant donné que nous ne pouvons pas caractériser les ESA par les nombres qu'elles représentent, NOUS LES DÉFINIRONS DORÉNAVANT COMME LES ÉCRITURES ENGENDRÉES PAR NOTRE GRAMMAIRE, ou si l'on préfère, la définition des ESA correspond strictement aux règles de réécriture qui les engendrent (1992, p.136).

Ces analyses concernent uniquement ce que nous avons appelé des *expressions incomplètes*, c'est-à-dire des *syntagmes opératoires* (*supra*, Fig. 1, ligne 2). Ainsi les syntagmes opératoires analysés sont les puissances et les produits dans les différentes étapes de leurs transformations au cours de leur calcul (1992, chap. V, VII, VIII).

Le retournement de la problématique, centrée sur les règles récursives apparaît avec l'analyse l'écriture fractionnaire, c'est-à-dire de syntagmes opératoires. Car les règles d'écriture qui permettent d'écrire les fractions s'avèrent insuffisantes pour les calculer et comprendre comment les calculer. Là, il est nécessaire de recourir à la distinction sémantique de Frege entre le sens et la dénotation pour les expressions numériques, incomplètes et complètes : un même nombre est désignable par des écritures numériques différentes.

La complexité des écritures fractionnaires apparaît, non pas avec les syntagmes opératoires qui s'articulent autour d'un seul symbole d'opération ($1/2$, ou a/b), mais avec ceux qui s'articulent avec autour de *deux symboles d'opération* ($3 + 1/2$) (et plus encore avec comprenant *trois symboles d'opérations* ($(4 + 6) / (4 + 1)$) (1992, p. 298, 314, 344-348). Reprenant un exemple cité par Stella Baruk qui avait interrogé un élève sur l'écriture suivante

$$2 = 10/5 = \overset{\longleftarrow \dots}{(4 + 6)} / (4 + 1) \overset{\dots \longrightarrow}{=} 6/1 = 6$$

Jean-Philippe explique la réaction de l'élève qui admettait les deux simplifications et ne voyait pas pourquoi l'une devait s'imposer et non pas l'autre.

Comme elle faisait remarquer que la suite des égalités revient à $2 = 6$, l'élève lui répond «*Et alors ?*» Pourtant, cet élève voit bien (on le voit dans la suite de l'entretien) que le nombre 2 n'est pas égal au nombre 6. La résolution de cette contradiction réside selon nous dans le fait QUE POUR LUI L'ESA $10/5$ NE DÉSIGNE PAS LE NOMBRE 2, NI L'ESA $6/1$ LE NOMBRE 6. En effet, SI LES ÉCRITURES SONT PRIVÉES DE DÉSIGNATION ABSENTE, on ne peut exiger de l'égalité qu'elle désigne cette désignation absente. En conséquence, l'égalité joue vis-à-vis des transformations un rôle identique à celui bien connu en arithmétique, à savoir le signe du résultat d'une opération.

L'absence de désignation des fractions entraîne à terme celle des relations et en particulier celle de l'égalité ... et l'égalité $10/5 = 6/1$ a peu de chances DE DÉSIGNER UNE VALEUR DE VÉRITÉ (en l'occurrence «Faux »)

.... L'absence de dénotation rend donc très difficile le jugement de correction posé sur une transformation litigieuse. Pour l'élève le débat est perçu comme un échange d'arguments d'autorité (1992, p.360-361)

Autrement dit, la transformation des écritures fractionnaires fait apparaître une différence profonde entre la substitution opératoire qui porte sur *des expressions incomplètes linéaires* et la substitution sémantique qui porte sur *des expressions complètes non linéaires*. Le calcul

avec des expressions incomplètes fractionnaires constitue le cas où la substitution sémantique est déjà implicitement prérequise avant même que l'on travaille avec des équations.

D'où les deux conclusions de la thèse sur les résultats des différentes analyses. La première porte sur les insuffisances et les limites de l'automate formel, qui n'est pas un logiciel de calcul formel et qui « fait des erreurs de calcul » (p. 369).

L'«automate formel» est un élève qui ne tient pas compte, lorsqu'il manipule des ESA, de leur dénotation ... Le problème de l'automate formel n'est pas tant de ne pas savoir calculer les dénotations, que de ne pas savoir s'il peut le faire à tout moment, et encore plus d'ignorer quand il a intérêt à le faire (p. 362, 363).

Autrement dit si on associe le choix parmi les transformations syntaxiques au «sens» (Sinn) de ces écritures (qui est alors au niveau des métarègles) alors on peut dire que l'automate formel «donne un sens» à ce qu'il fait, un «sens» mais pas une dénotation (p. 365)

La deuxième conclusion porte sur la nécessité de faire prendre conscience aux élèves de la différence entre le sens d'une expression symbolique et sa dénotation

HORS D'UN DISCOURS SUR LA NOTION DE DÉNOTATION MÊME (AUTREMENT DIT UN MÉTADISCOURS ... Pour les élèves il y a bien différence mais pas contradiction. Pour qu'il y ait contradiction, il faudrait qu'il y ait dénotation (1992, p. 374)

Cette conclusion annule-t-elle l'hypothèse qui était annoncé dès les premières lignes de la thèse et qui est réaffirmée à mi-parcours, à savoir que les EAS sont indépendantes des nombres qu'elles représentent ? Non ! Car la distinction de Frege est impossible à faire sur un terme, sur un signe ou sur une expression incomplète. *Aussi dire qu'un signe, un terme ou un syntagme opératoire représente un nombre, c'est ne rien dire.* Sur un signe, un terme ou sur une expression, considérés isolément ou pour eux-mêmes, *on ne peut pas distinguer le sens et la dénotation.* Le faire est arbitraire. On est tout de suite dans le malentendu et le dialogue de sourds évoqués par Jean-Philippe. C'est là que Jean-Philippe a dû abandonner l'analyse des ESA en termes de grammaire générative pour revenir aux analyses sémantico-logiques de Frege. Mais il n'a pas abandonné pour autant le point de vue mathématique.

Frege, en effet, a successivement donné deux explications différentes de cette distinction. L'une est mathématique (1891) et l'autre est cognitive (1892).

— L'explication mathématique porte sur la nature de l'objet dénoté et c'est celle que Jean-Philippe a retenue :

Nous avons retenu de la lecture de Frege l'idée que l'on a intérêt (d'un point de vue logique mais aussi didactique) à CONSIDÉRER LA DÉNOTATION D'UNE EXPRESSION NON PAS COMME UN NOMBRE MAIS COMME UNE FONCTION. (p. 267)

Et cela le conduit à distinguer le sens d'une fonction et son interprétation :

J'appelle interprétation d'une ESA X dans un cadre donné tout objet qui correspond à la dénotation de X dans ce cadre (p. 280).

Cela peut être un nombre ou tout autre chose, selon le cadre du problème dans lequel on utilise une équation (p. 280).

— L'explication cognitive et épistémologique porte sur le mécanisme sémantico-sémiotique du calcul et du raisonnement mathématique. Celui-ci requiert que l'on se

trouve devant DEUX termes, DEUX signes ou DEUX expressions incomplètes ayant des sens différents. Autrement, la distinction entre sens et dénotation est indiscernable.

On ne fait pas du tout la même analyse des écritures symboliques algébriques, selon utilise l'explication mathématique ou l'explication cognitive de la distinction entre sens et dénotation. Selon l'explication mathématique, la dénotation ne renvoie à rien d'autre qu'aux trois valeurs de vérité (vrai, faux, indécidable), ou plus précisément à la seule valeur vrai. Et elle ne concerne que des expressions complètes. Selon l'explication cognitive, la dénotation porte sur deux termes ou deux expressions de sens différents, et elle ne concerne que des expressions incomplètes, c'est-à-dire des termes, des syntagmes opératoires et, aussi, des syntagmes nominaux dans les langues naturelles.

La conclusion, paradoxale par rapport au problème de la recherche, à laquelle aboutit l'analyse linguistique des ESA (correctes) soulève plusieurs questions.

- Q. 1 Dans le continuum des écritures symboliques (ci-dessus, Fig. 3) où se situe le saut à faire faire aux élèves pour introduire l'algèbre élémentaires ? Avec l'introduction des lettres, ou avec la prise de conscience entre le sens et la dénotation d'expressions symboliques qui peuvent être aussi bien des expressions numériques que des expressions algébriques ?
- Q. 2 Si la distinction entre le sens et la dénotation, qui s'avère nécessaire pour savoir utiliser et transformer et transformer correctement les écritures symboliques, est-elle une connaissance du même ordre que la connaissance des propriétés des nombres et de celle des opérations ?
- Q.3 La notion d'écriture symbolique algébrique (ESA), n'est-elle pas une notion trop globale, et donc inutilisable pour analyser le fonctionnement des écritures symboliques ? Ne faudrait-il pas d'abord distinguer les systèmes d'écriture symbolique des nombres et l'ensemble des types d'expressions que l'on peut former en utilisant ces systèmes ? Et ne faudrait-il pas, ensuite, distinguer les expressions incomplètes (les syntagmes opératoires) et les expressions complètes (les équations) ?

L'ultime conclusion de la thèse porte sur les quatre aspects distincts des ESA dont la prise en compte est requise pour utiliser et transformer correctement les ESA

“Comprendre” les ESA, c'est prendre en compte leur syntaxe, leur dénotation, leur sens, et leur interprétation (p. 376).

Cette conclusion soulève la question suivante concernant l'utilisation de la distinction de Frege.

- Q. 4 La distinction entre dénotation, sens, et interprétation est-elle pertinente pour analyser leur compréhension d'un point de vue didactique et non pas seulement mathématique ?

4. Les travaux ultérieurs de 1996 à 2012

Des travaux de Jean-Philippe, nous n'en retiendrons trois. Ils marquent des développements plus spécifiques des conclusions de sa thèse. Deux sont des communications faites au séminaire SFIDA, et le troisième est un long article dans un numéro spécial de RDM consacré à l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

4.1. *Signes et sens en calcul symbolique (1996)*

Le but de cette communication est de montrer *l'équivoque du mot sens dans l'expression « donner du sens »*. Cette expression était alors répétée en boucle dans les débats didactiques portant, non pas sur l'enseignement de l'algèbre, mais sur celui des algorithmes de calcul. Et on faisait du « sens » des opérations arithmétiques, principalement pour celles de multiplication et de division, la condition préalable de l'apprentissage des algorithmes de calcul. Jean-Philippe s'y interroge sur ce dont on parle quand on emploie ce mot « sens » qui ont tous les sens que l'on veut.

Et il conclut sur ces deux points essentiels :

D'une part, l'apport de ce travail à la DIDACTIQUE DU CALCUL SYMBOLIQUE pourrait être au moins le suivant : on ne devrait pouvoir parler de *sens* tel quel, sans préciser exactement *de quoi ?* en particulier s'il s'agit du sens d'une connaissance, d'un concept, d'une écriture (et plus généralement d'un signifiant) ou d'une activité.

D'autre part, AUCUN DE CES DIFFÉRENTS ASPECTS NE SE RÉDUIT AUX AUTRES. Faire de l'algèbre, c'est mener une activité *qui a du sens* sur des écritures *qui ont du sens* liées à des concepts *qui ont du sens* dont on a une connaissance *qui a du sens*. Chaque aspect peut être étudié isolément, mais si l'on veut penser de manière globale les questions de didactique de l'algèbre on doit tenter de PRENDRE EN COMPTE SIMULTANÉMENT CES ASPECTS. (SFIDA-6, p. 20)

Ce qui est surprenant dans cet article, c'est qu'il comprend dix rubriques hétérogènes : *Linguistique, Signes* (la distinction entre signe et substance matérielle du signe, qui remonte à Saussure ainsi que la notion de graphème élaborée par analogie avec celle de phonème), *Ecritures, Syntaxe, Transformations, Sémantique, Dénotation* (la rubrique la plus longue et la plus détaillée), *Sens, Connotation, et Autres sens*.

4.2. *Une ébauche de panorama des relations entre algèbre, langage et théories de l'apprentissage (2000)*

Il s'agit de trois propositions présentées en lien avec une Étude ICMI sur l'algèbre

Mon projet est donc de bâtir l'article autour de la problématique suivante : quel(s) point(s) de vue est-il important de prendre en compte lorsqu'on tente de BÂTIR UN CURRICULUM ? Je compte y apporter la réponse suivante : LE POINT DE VUE LINGUISTIQUE. (SFIDA-15 p. 14).

La première proposition reprend sans la modifier toute la problématique qui avait été développée dans la thèse. Elle en constitue un résumé limpide... si on a pris la peine de lire la thèse ! Et on peut y vérifier que, pour Jean-Philippe, le point de vue linguistique est celui de la théorie de la « grammaire transformationnelle de Chomsky ».

REDÉFINITION DU CHAMP : ALGÈBRE OU ÉCRITURES SYMBOLIQUES ?

... Nous avons proposé (à SFIDA-6) de parler d'“ESA“ (expressions symboliques de l'algèbre élémentaire) qui forment un “langage” au sens chomskyen du terme... Dans ce cadre, l'apprentissage de l'algèbre élémentaire (en tant que théorie de la résolution des (in)équations) et de systèmes des premier et second degré) perd son caractère unique et central : ce n'est plus qu'un moment (certes crucial) dans l'apprentissage de quelque chose d'autrement important à savoir le langage symbolique écrit, et par lequel s'écrivent, se pensent et se font les mathématiques (et pas mal de sciences mathématisées). Avant l'algèbre élémentaire, il y a déjà le calcul des fractions ...

L'algèbre élémentaire n'est donc plus caractérisée que comme le moment de la lettre comme inconnue (ce qui est assez raisonnable si on la définit comme une théorie des équations) : ce n'est qu'une étape, la suivante étant celle de l'apparition des symboles fonctionnels ($f(x)$)...

L'algèbre élémentaire est le lieu d'un grand paradoxe didactique ; contrairement à la géométrie classique, lieu noble de l'apprentissage de la réflexion, de la démonstration, l'algèbre est un “non-lieu” en quelque sorte, on n'y enseigne rien de compliqué, à peine quelques règles qu'il devrait suffire d'appliquer bêtement, sans chercher à comprendre. (SFIDA-15, p.14-15)

La deuxième proposition renvoie à la communication du SFIDA-6.

FAIRE DU LANGAGE SYMBOLIQUE DES MATHÉMATIQUES UN OBJET

... Pour cela je me propose de reprendre ... l'essentiel de la présentation que j'avais faite à SFIDA-6 intitulé « Signes et sens en calcul symbolique » (p.15)

En revanche la troisième proposition apporte une réponse précise à la question (Q. 2)

THÉORIES DE L'APPRENTISSAGE ET LANGAGE

...La question que j'aimerais poser à ces théories (constructivistes) est de savoir si la maîtrise d'un langage (ici le langage mathématique symbolique) se « construit » (radicalement, socialement ou autre) ... (Une réponse) est ce que nous avons appelé à Nice les « connaissances d'ordre II » parmi lesquelles nous considérons que figurent les règles d'emploi et d'usage des outils sémiotiques, et donc en particulier linguistiques. (p. 17).

Ces « connaissances d'ordre II » renvoient directement à ce que Jean-Philippe appelait dans sa thèse un « métadiscours sur les expressions mathématiques », c'est-à-dire sur les écritures symboliques. Et *ce métadiscours doit d'abord porter sur les règles d'emploi de outils sémiotiques, c'est-à-dire sur la dénotation des écritures symboliques, et non seulement sur leur sens ou sur leur syntaxe, comme cela était déjà expliqué dans les conclusions de la thèse (1992, p. 359-376)*. Autrement dit, la réponse que cette proposition donne à la question Q.2 ne fait qu'exprimer les exigences contradictoires qui sont inhérentes à tout apprentissage des mathématiques, mais que les théories didactiques ne parviennent pas à surmonter. On peut formuler ces exigences par les deux questions suivantes :

- Q. 5 *Ces connaissances d'ordre II, qui ne sont pas des connaissances mathématiques (propriétés des nombres ou des opérations, procédures de résolution) mais des connaissances permettant de manipuler correctement les outils sémiotico-linguistiques utilisés (les écritures symboliques) sont-elles vraiment des connaissances ?*
- Q. 5' *Le métadiscours requis pour faire acquérir la notion sémantico-sémiotique de dénotation, sans laquelle on ne peut pas comprendre les transformations d'écritures symboliques en d'autres écritures symboliques, relève-t-il du langage utilisé pour les interactions verbales en classe ?*

Autrement dit, il ne suffit pas de faire « faire des mathématiques » ou des « activités mathématiques » pour que les élèves comprennent comment on travaille en mathématiques et, ici, comment on travaille avec les écritures symboliques. Or cela est impérativement la condition cognitive et motivationnelle pour que les élèves puissent apprendre des mathématiques et qu'ils soient capables de les utiliser dans n'importe quel contexte, mathématique ou réel. *Une théorie de l'apprentissage des mathématiques qui soit fondée sur la compréhension de la manière dont on travaille en mathématiques est donc nécessaire.* Et cette théorie doit intervenir dans l'organisation du curriculum et non pas de manière locale et marginale dans l'organisation d'une séquence d'activité en classe pour l'acquisition d'un concept particulier. Mais là Jean-Philippe avoue qu'il n'a trouvé aucune théorie didactique qui prenne en compte ce prérequis fondamental pour l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. Même pas la théorie des situations.

Nous interrogeons régulièrement la Théorie des situations (qui n'est pas à proprement parler une théorie de l'apprentissage mais PLUTÔT UNE THÉORIE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES basée sur des éléments de théories de l'apprentissage) pour savoir dans quelle mesure elle rend compte de l'enseignement d'un langage, mais sans trouver d'argument clair dans un sens ou dans l'autre (p. 17)

4.3 Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire (2012)

Cet article mérite une attention particulière, puisqu'il a été publié dans un numéro spécial sur le bilan et les perspectives des recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Jean-Philippe y présente une vue d'ensemble de la problématique et de ses travaux. On y retrouve toutes les conclusions de la thèse concernant la nécessité d'une double analyse des écritures symboliques algébriques : d'une part une analyse linguistique, c'est-à-dire une analyse chomskyenne des règles permettant de les générer, et d'autre part la nécessité de prendre en compte la distinction sémantique de Frege entre dénotation et sens des écritures symboliques. Par rapport aux travaux antérieurs, l'apport de cet article est triple.

Tout d'abord, l'approche linguistique est d'emblée présentée comme l'opposition entre deux niveaux :

- celui d'un «structure profonde», non perceptible, « où toutes les informations pertinentes (tant pour la détermination de la structure syntaxique que pour le calcul de la dénotation) figurent explicitement» (p. 219) de manière à pouvoir faire produire par un logiciel toutes les écritures symboliques arithmétiques ou algébriques,
- celui d'un «structure de surface», perceptible, c'est-à-dire une écriture symbolique correcte que l'on peut lire, mais *dans laquelle des éléments de la structure profonde sont implicites.* Parmi les éléments qui sont implicites, il y a l'ordre des opérations, la portée des opérands *et, surtout, toutes les marques de la dénotation.*

Cette opposition permet de mettre en avant deux types de transformation :

- les « transformations de remontée » pour « mettre sous leur forme usuelle c'est-à-dire « superficielle », toutes les écritures explicites unidimensionnelles de la structure profonde (p. 219),
- les « transformations de mouvement » qui celles du calcul fait sur les écritures implicites de surface, mais en référence aux propriétés mathématiques. Par exemple, « les calculs liés à ce qu'on appelle la « règle des signes », ou « Le changement du statut du signe d'égalité » (p. 220).

Le deuxième apport est peut-être le plus important. L'article esquisse *les étapes d'un curriculum, des dernières années du Primaire jusqu'à la fin du Collège*, pour que les élèves puissent acquérir et maîtriser les écritures symboliques. Et cette esquisse implique une réponse à la question Q.1. Dans le continuum des écritures symboliques, allant des expressions numériques incomplètes ($2+4$) aux expressions algébriques complètes ($a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$), où se situe le saut à faire faire aux élèves pour introduire l'algèbre élémentaire ?

La réponse est nette. *Associer l'introduction de l'algèbre à l'utilisation de lettres, comme cela est fait dans beaucoup de recherches didactiques est une erreur. On pourrait même dire qu'il est alors trop tard !* Car il y a au moins deux étapes avant le calcul littéral : « L'algèbre avant la lettre I : Fractions » (p. 218) et « L'algèbre avant la lettre II : Relatifs » (p. 220). *La nouveauté du calcul avec des lettres vient de la nécessité de prendre en compte la dénotation pour le signe "=" :*

En toute rigueur, et afin d'éviter toute ambiguïté, il faudrait explicitement distinguer les variables (lettres) selon le type d'objets qu'elles sont susceptibles de dénoter car non seulement leur dénotation change mais également leur sens et donc la signification du signe " $=$ ". Dans le cas des substitutions " $=$ " note l'identité, ce qui entraîne que l'énoncé correspondant devient implicitement universellement quantifié. La résolution de n'importe quelle équation suppose un va-et-vient constant entre des égalités qui sont des identités (notant les transformations) et des égalités qui n'en sont pas (les différentes étapes du calcul), dont l'apparence est absolument identique, avec les mêmes variables (lettres) et le même signe " $=$ ". (p. 225)

Le dernier apport de l'article est la prise en compte de l'analyse sémiotique en termes de registre. Cela apparaît dans le titre de l'article qui aurait pu tout aussi bien s'intituler *Hans et Gretel et le double implicite des écritures symboliques en Algèbre élémentaire*, pour marquer la continuité théorique avec les conclusions de la thèse de 1992. Mais la référence aux registres apparaît dans la dernière partie consacrée à l'analyse d'une résolution de problème. La notion de conversion est utilisée pour la première des « trois étapes dans processus de résolution algébrique d'un problème », mais l'article s'attache surtout à « montrer la complexité cognitive de la troisième étape, lorsqu'il faut récupérer un certain nombre d'éléments omis ou implicites dans les deux premières étapes en raison des contraintes propres du registre algébrique » (p. 218).

Cet article soulève une dernière question concernant les questions de l'apprentissage proprement dit et non pas celles de l'enseignement qui sont le plus souvent mise en avant.

Q. 6 Quel point de vue, autre que le point de vue mathématique, permet de prendre en compte les problèmes de compréhension auxquels les élèves se heurtent dans l'utilisation des écritures symboliques au Primaire et au Collège ? Un point de vue linguistique, comme Jean-Philippe le défendait ? Un point de vue sémiotique comme tous ceux qui se réfèrent surtout à Peirce ? Un point de vue cognitif comme dans la théorie des registres de représentation sémiotique ? Un point de vue épistémologique, fondé sur l'histoire même de l'algèbre ?

5. Quel point de vue adopter pour découvrir les facteurs d'apprentissage des écritures symboliques algébriques ?

C'est la question à laquelle toutes les recherches de Jean-Philippe conduisent. Elle s'impose dans la mesure où il a lui-même souligné l'absence de théories de l'apprentissage dans les recherches didactiques. Elle s'impose aussi parce que s'il a pu expliciter tout ce qu'implique la compréhension et l'utilisation des ESA pour résoudre des équations et des problèmes. Cependant les analyses qu'il a développées ne permettent de dire *comment faire acquérir toutes les connaissances d'ordre II*, et, tout particulièrement, celles qui touchent à la dénotation des écritures symboliques.

Pour pouvoir avancer des éléments de réponse, nous comparerons le point de vue linguistique adopté par Jean-Philippe et le point de vue sémio-cognitif qu'il a également voulu prendre en compte, lorsqu'il a commencé à parler d'« analyse sémio-linguistique » et non plus seulement d'« analyse linguistique ». Pour comparer ces deux points de vue, nous distinguerons :

- la compréhension et l'utilisation des écritures symboliques pour la résolution d'équations,
- la résolution de problèmes impliquant une mise en équation.

Ce sont là deux questions totalement différentes, et les travaux de Jean-Philippe n'ont porté que sur la compréhension des écritures symboliques pour la résolution d'équations. La comparaison de l'approche sémio-linguistique et de l'approche sémio-cognitive fait apparaître quatre points de clivage.

5.1. La complexité des ESA : un implicite syntaxique ou la superposition d'unités de sens de nature différente ?

Le choix de la théorie linguistique de Chomsky présente un intérêt. Il permet de distinguer deux niveaux d'organisation totalement différents : celui de la structure profonde où tout doit être syntaxiquement explicite pour permettre de générer toutes les expressions possibles de surface que l'algèbre élémentaire enseignée au Collège conduit à utiliser et

calculer, et que l'on trouve dans les manuels. La comparaison des niveaux, fait alors apparaître tout ce qui est implicite. Suffirait-il alors d'expliciter ce qui est implicite pour que les ESA cessent d'être opaques ou fallacieusement transparentes ?

Le problème est qu'il n'y a rien de commun entre deux types d'explicitation de l'implicite.

- celle requise pour élaborer un logiciel qui génère des expressions symboliques et qui les transforme en d'autres, c'est-à-dire qui les calcule,
- celle requise pour qu'un élève *reconnaisse visuellement* les différentes unités de sens qui composent toute expression symbolique un peu complexe comme, par exemple l'écriture fractionnaire $(4 + 6) / (4+1)$.

Le piège pour la lecture des expressions symboliques est de réduire les unités de sens d'un syntagme opératoire ou d'une équation à la suite linéaire des éléments visuellement séparés par des blancs. C'est ce que l'on fait lorsqu'on dit oralement une équation à écrire : on l'épelle ! En réalité *les écritures symboliques algébriques superposent et aplatissent en une succession linéaire de chiffres, de lettres et de symboles trois types d'unités de sens*, comme nous l'avons vu dans la section 1.2. Il y a bien évidemment les termes que l'on énumère successivement. Ils relèvent de systèmes d'écriture des nombres et d'un corpus de symboles d'opération et de relation). Mais il y a surtout les unités de sens qui sont formées par des regroupements de termes. Et ici, il est crucial de bien séparer les expressions complètes (les équations) et les expressions incomplètes que nous avons aussi appelé « syntagmes opératoires ». Les syntagmes opératoires présentent un type de difficulté bien connu, celui de l'ordre des opérations. La transformation des syntagmes opératoires est indépendante de la résolution des équations, même si celle-ci l'implique.

Reprenons le cas particulier des fractions qui sont des syntagmes opératoires. Jean-Philippe dans sa thèse les a analysées comme si leur calcul impliquait une expression complète, et cela l'a conduit à mettre en évidence une impasse didactique (ci-dessus, 3). En réalité, il s'agit *d'un syntagme opératoire qu'il faut délinéariser en le visualisant comme un arbre d'opérations*. En voici un exemple en partie emprunté à un manuel, paru il y a presque quarante ans, et dont l'originalité était d'expliquer les écritures symboliques, *parce que c'est avec l'écriture des nombres et celles de lettres, représentant des nombres ou des ensembles de nombres, que l'on travaille*³⁴. Cet exemple montre la nécessité de distinguer des degrés de complexité dans l'écriture d'un syntagme opératoire. Le degré de complexité dépend à la fois du nombre de symboles d'opération et de l'ordre des opérations.

³⁴ Deledicq et Lassave 1979, p. 80

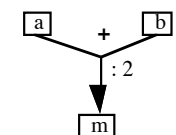
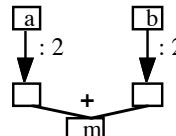
	Nombre d'unités de sens élémentaires	Nombre de syntagmes opératoires	Nombre de NIVEAUX D'UNITÉS DE SENS	Diagramme des opérations	Condition fréguenne de réécriture
$\frac{a+b}{2}$	5	2	1		NON
$a/2 + b/2$	7	3	2		NON

Figure 4. Analyse du degré de complexité des syntagmes opératoires

Ce type de visualisation, congruent à l'ordre de priorité des opérations, vaut toutes les explications verbales pour expliquer ou justifier la procédure de calcul. des syntagmes opératoires.

La résolution des équations exige au contraire un type de substitution que nous avons appelé la condition fréguenne d'invariance de la dénotation. Et là nous touchons au deuxième point de clivage.

5.2. La dénotation des expressions symboliques : une fonction mathématique ou l'invariance d'une désignation en utilisant deux expressions différentes ?

Nous retrouvons ici les deux explications données par Frege que nous avons évoquées plus (supra, III) : l'une mathématique, et l'autre cognitive.

La première est celle retenue par Jean-Philippe dans sa thèse et reprise dans les travaux ultérieurs. Elle revient à *appliquer la distinction entre sens et dénotation à une seule expression symbolique considérée pour elle-même*, c'est-à-dire à chaque expression symbolique considérée indépendamment de la précédente, ou de la suivante, dans un calcul ou un processus de résolution. Le sens et la dénotation d'une expression apparaissent alors comme deux aspects associés et cependant entièrement indépendants l'un de l'autre :

Le sens d'une expression A et la dénotation de cette expression A

Cela conduit à identifier le sens de l'expression à l'objet dénoté, c'est-à-dire une fonction ou une valeur de vérité indépendante du sens de l'expression. C'est pourquoi Jean-Philippe prend toujours soin de préciser *que la dénotation d'une équation n'est pas un nombre*. Cela se justifie mathématiquement puisqu'une équation du second ou du troisième degré peut avoir plusieurs solutions ou aucune solution (réelle). Mais ce choix est paradoxal, dans la mesure

où la problématique de Jean-Philippe était d'analyser la spécificité propre aux EAS, indépendamment de ce qu'elle représente mathématiquement.

L'explication cognitive est totalement différente. *Elle revient à appliquer la distinction à deux expressions symboliques pour expliquer le mécanisme du calcul.* Calculer, c'est substituer de manière non tautologique une expression B à une expression A dont le sens est différent de B, mais en gardant invariante la dénotation de A, c'est-à-dire ce que A désigne. Appliquée aux phrases de la langue naturelle, cette distinction permet de rendre compte de la cohérence ou de l'incohérence d'un enchaînement de propositions dans un raisonnement, ou dans une argumentation ou dans une description. Ainsi le mécanisme de substitution qui fonde le calcul, tel que Frege l'explique dans l'article de 1892, peut être schématisé de la manière suivante :

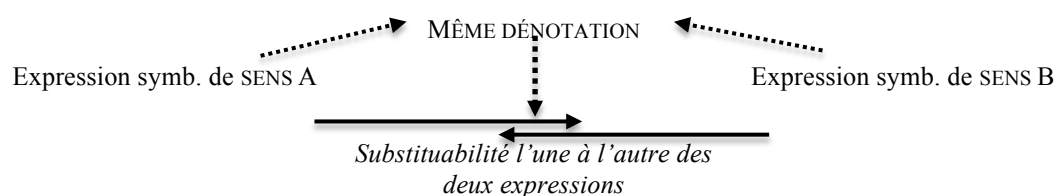


Figure 5. Schéma du mécanisme de substitution de toute opération de calcul

Les deux flèches en trait plein représentent les deux substitutions possibles d'une expression A à une expression, en fonction de celle qui est donnée au départ. Cette substitution n'est possible que sous la condition d'une même dénotation, c'est-à-dire dire d'une équivalence sémantique. Pour le calcul des syntagmes opératoires, l'expression "*salva suppositione*" est plus appropriée que l'expression *salva veritate*, qui n'est pertinente que pour les expressions complètes.

Deux observations permettent de voir l'importance cruciale de cette explication cognitive pour une théorie de la compréhension et de l'apprentissage des écritures symboliques par les élèves.

La première porte sur la comparaison entre deux manières d'écrire ou de représenter les nombres, l'une en termes de sens élémentaires, et l'autre en termes de syntagmes opératoires. Quelle différence, par exemple, entre les écritures

4 et $(1+1 +1 +1)$ ou $(2 + 2)$ ou (2×2) ou $(6 - 4)$, ou encore $(8 / 2)$?

D'un côté, il n'y a aucune différence entre sens et dénotation pour l'écriture 4, comme pour toutes celles résultant de la seule utilisation d'un système numérique de position en base n . Et cela pour une raison très simple expliquée par Saussure. Les signes n'existent pas par eux-mêmes. Les signes ne sont des signes qu'à l'intérieur d'un système sémiotique, dans lequel ils s'opposent entre eux comme des valeurs de choix pour signifier ou désigner. Le sens d'un signe est sa valeur de choix. *Ainsi la seule utilisation d'un chiffre ou de plusieurs*

chiffres dans le système décimal dénote automatiquement un nombre. Et il n'y a pas de substitution possible. Pour que les chiffres 0 et 1, par exemple changent de dénotation, il faut qu'ils changent de sens et, pour cela il faut changer la base du système.

De l'autre côté, la distinction entre sens et dénotation s'impose cognitivement et didactiquement avec les syntagmes opératoires les plus simples ($2 + 2$) ou (2×2). Il n'y a donc pas besoin d'attendre l'introduction des écritures fractionnaires, comme Jean-Philippe le pensait, pour que la prise de conscience de cette distinction devienne une condition nécessaire de la compréhension des écritures symboliques. Sinon, chaque fois que le deuxième membre d'une expression complète ne comporte qu'une seule unité élémentaire de sens,

$$2 \times 2 = 4 \quad 2x = 4$$

le symbole « = » sera automatiquement compris comme le résultat d'un calcul. Et cela crée un obstacle qui sera insurmontable, non seulement pour comprendre les lettres comme des variables et, surtout pour comprendre qu'une équation puisse avoir plusieurs solutions

$$x^2 = 4$$

La deuxième observation porte sur la mise en équation. La mise en équation des données d'un problème est le test par excellence pour une acquisition significative et utile de connaissances en algèbre. Car sans cela les élèves ne pourront jamais utiliser des équations pour résoudre des problèmes, même des problèmes d'application concrète d'une formule. Rappelons nous, ici que dans les enquêtes PISA, ce n'est même pas cela qui est demandé, mais seulement l'utilisation d'une formule qui est donnée dans l'énoncé (Duval, Pluvinage, 2016). Or *la mise en équation exige que les élèves aient pris conscience de la nécessité d'une double désignation d'un même objet.* Autrement dit, il faut « *savoir* » écrire par soi-même, et spontanément, deux expressions symboliques de sens différents. Une expression étant la lettre choisie pour désigner l'une des données du problème, la deuxième doit être un syntagme opératoire construit avec cette lettre pour désigner fonctionnellement l'autre donnée du problème. Mettre en équation les données d'un problème consiste à changer le registre de représentation dans lequel sont présentées les données. Le schéma suivant montre la complexité des opérations cognitives de conversion.

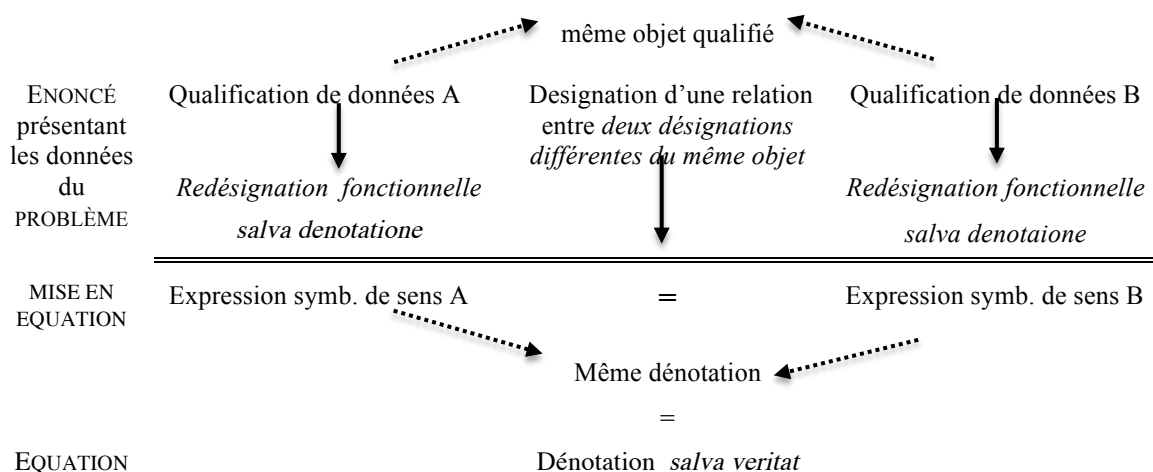


Figure 6. Schéma du mécanisme de conversion de données pour leur mise en équation

Sur ce schéma, les deux flèches internes aux cases de la deuxième ligne du tableau représentent les opérations de conversion des données à effectuer. Ce sont les *opérations de redésignation fonctionnelle* des données, qui vont permettre de calculer la donnée manquante et de résoudre le problème. Cette redésignation fonctionnelle n'a rien de commun avec la formation des syntagmes nominaux dans les langues naturelles pour désigner un objet. Les opérations de redésignation fonctionnelle requièrent des tâches cognitives spécifiques afin que les jeunes élèves puissent en prendre conscience.

Les cinq autres flèches, celles reliant deux cases internes du tableau, concernent uniquement L'ÉQUIVALENCE DE DÉNOTATION ENTRE DEUX EXPRESSIONS DE SENS DIFFÉRENTS ;

- l'équivalence *salva denotatione* concerne les expressions incomplètes, c'est-à-dire les expressions incomplètes qui peuvent être calculées par substitution opératoire, c'est-à-dire indépendamment de l'équation (ci-dessus, 1.2)
- l'équivalence *salva veritate* concerne uniquement les expressions complètes, c'est-à-dire les propositions et les équations. Ici ne s'agit plus seulement de prendre conscience que le deuxième membre doit avoir la même dénotation que le premier, mais que la dénotation de l'équation en est indépendante (dernière ligne du tableau). C'est pourquoi la mise en équation requiert également des tâches cognitives spécifiques pour prendre conscience que sa dénotation implique la vérité de l'expression complète.

Et, bien évidemment, *prendre conscience ce n'est pas connaître, mais reconnaître*. Ce n'est pas acquérir une connaissance et un savoir ou un savoir-faire, mais devenir capable de telles acquisitions.

En s'en tenant à l'explication mathématique de la distinction de Frege, Jean-Philippe

s'est d'emblée situé au niveau des équations déjà données et des procédures de résolution. (ci-dessus, III). Il ne pouvait donc pas réellement prendre en compte l'activité de mise en équation qui est cruciale dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, et sans laquelle son enseignement au Collège est un enseignement de choses inutilisables.

5.3. Écriture et sémiotique : les signes purement écrits de l'algèbre sont-ils encore des signes ?

L'autonomie sémiotique des signes, qui s'est imposée avec l'algèbre, s'est faite au prix d'une neutralisation totale de leur fonction cognitive d'évocation de quelque d'autre. Cette neutralisation a eu deux conséquences révolutionnaires pour le développement des mathématiques : la suppression de la distinction entre signifiant et signifié et également la suppression de leur valeur d'opposition au sein d'un système sémiotique, ce qui n'est pas le cas pour l'écriture des nombres (Duval 2006, p. 82). Leibniz est le premier à en avoir perçu la nouveauté radicale pour la pensée mathématique et pour la manière de travailler en mathématiques. Dans un texte de 1684, donc peu après la formation de l'écriture algébrique moderne, il note : «... cette pensée là, j'ai coutume de l'appeler *aveugle* ou encore *symbolique*... ; c'est celle dont nous usons en algèbre et en arithmétique... » (Leibniz 1972, p. 152-153). Autrement dit, les signes purement écrits de l'algèbre sont-ils encore des signes dans le sens où l'on parle de signes en dehors de l'algèbre et des systèmes d'écriture des nombres ? Pour bien comprendre cette question, *il est important de ne pas confondre trois types d'écriture* : les écritures signifiantes, les écritures conceptuelles et les écritures symboliques.

Les *écritures signifiantes* sont toutes les écritures alphabétiques qui transcrivent la parole ou tout discours en langue naturelle (*supra*, Fig. 2). Elles requièrent une oralisation vocale, subvocalisée ou dans la tête, complète ou par échantillonnage, dont la rapidité varie considérablement selon le type de texte. Le premier schéma d'analyse sémiotique développé par les stoïciens, et distinguant le signifiant, le signifié et l'objet dénoté par le signe s'applique au langage naturel et aux écritures alphabétiques. C'est ce schéma qui s'est imposé jusqu'à Peirce. Autrement dit la distinction entre le signifiant et le signifié d'un signe est une distinction logico-linguiste, et non pas mathématique (Duval, 2006, p. 93).

Les *écritures conceptuelles* sont celles dans lesquelles les mots, les symboles ou les schémas représentent une connaissance, de manière plus ou moins conventionnelle. Ici c'est un concept qui est le signifié d'un signe, que ce soit un mot ou un symbole. Autrement dit, l'acquisition de concepts est la condition essentielle pour comprendre ce qui est écrit ou schématisé. Il ne suffit plus alors de savoir lire, ou d'avoir une bonne maîtrise de la langue, pour comprendre les écritures conceptuelles. Cela n'est d'ailleurs pas nécessaire. Il faut avoir la compréhension des concepts et non pas des mots.

Dans la plupart des études didactiques sur l'algèbre, les écritures algébriques sont assimilées à des écritures conceptuelles qui sont plus économiques et qui seraient plus simples. L'utilisation du symbolisme mathématique doit alors être subordonnée à des connaissances mathématiques. Ce postulat théorique a longtemps été prédominant en didactique et même en didactique de l'algèbre. G. Vergnaud l'a parfaitement formulée en conclusion de son article « Les champs conceptuels » :

Je me contenterai pour terminer de formuler la thèse suivante: le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de la conceptualisation; mais il contribue à cette conceptualisation, notamment pour la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques. Le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques, mais il ne possède pas, autant que les diagrammes, les formules et les équations, le laconisme indispensable à la sélection et au traitement des informations et relations pertinentes. Cette importance accordée au symbolisme n'empêche pas que, en dernier ressort, c'est l'action du sujet qui constitue la source et le critère de la conceptualisation (Vergnaud, 1990, p.166).

Les écritures symboliques sont les écritures qui n'utilisent que des chiffres, des lettres, des symboles d'opérations, des symboles de relation et des symboles de quantification. Autrement dit, ce ne sont que des caractères qui ne se distinguent que par leurs formes et par les règles de leurs groupements. Leur fonction n'est pas cognitive mais purement opératoire. Les suites qu'ils permettent de tracer permettent *de substituer des expressions à d'autres expressions sans avoir à tenir compte ni de leur signifié, ni de leur sens, ni de leur dénotation, ni même de la mobilisation de propriétés mathématiques*. C'est ce que Hilbert a expliqué dans le texte où il pose le problème de la décidabilité en arithmétique³⁵, problème qui a conduit Turing à imaginer une machine sémiotique autonome pour effectuer des calculs, et à développer la notion de programmation.

Pour que le raisonnement logique soit sûr, des objets extra-logiques discrets doivent être donnés en tant que vécu immédiat pour toute pensée... leur présentation, leur différenciation, leur consécution devant être accessibles dans une intuition immédiate... Lorsque j'adopte ce point de vue, *les objets* de la théorie des nombres *sont les signes eux-mêmes dont la configuration peut être reconnue par nous de façon générale et certaine*... Là-dessus repose la position philosophique solide que je tiens pour indispensable à la fondation de la mathématique pure, aussi bien qu'à toute pensée, compréhension et communication scientifiques : au commencement est le signe (tr. Nichanian 1979).

Autrement dit, avec les écritures symboliques, les signes peuvent être réduits à des objets, c'est-à-dire à la forme d'un caractère ou d'une suite de caractères que l'on utilise indépendamment de ce que les caractères pourraient signifier, pour ne garder que leur puissance de calcul.

La difficulté à laquelle les travaux de Jean-Philippe se sont heurtés est d'avoir analysé les écritures algébriques comme si elles pouvaient être à la fois des écritures opératoires et des écritures conceptuelles, sans même exclure qu'elles soient aussi des écritures signifiantes. En

³⁵ Hilbert 1922. *Neubegründung der Mathematik*,

posant dès le départ que les ESA sont indépendantes des propriétés mathématiques ou des objets mathématiques qu'elles représentent, et en choisissant une analyse grammaticale générationnelle c'est-à-dire des règles de programmation pour mettre en évidence leur complexité implicite, Jean-Philippe a considéré les ESA comme des écritures purement opératoires. Mais en montrant que leur utilisation par des élèves ou par des mathématiciens exigeait la prise en compte de la distinction entre leur sens et leur dénotation, il les a considérées comme des écritures conceptuelles, ce qui, contrairement à son hypothèse initiale, impliquait leur subordination à des connaissances mathématiques ! Enfin, en distinguant pas strictement les systèmes d'écriture des nombres (*de facto*, le système d'écriture décimale) et les expressions symboliques arithmétiques des nombres et de leurs opérations (ci-dessus, Fig. 1), il n'a pas vu la rupture radicale entre le langage naturel toujours lié à l'oralisation, et donc à la parole, et les registres d'écriture symbolique purement opératoire (ci-dessus, Fig. 2).

Cette difficulté n'est évidemment pas propre aux travaux de Jean-Philippe. On la retrouve dans presque toutes les recherches didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège. Toutes les écritures symboliques, arithmétiques ou algébriques, sont introduites comme des écritures conceptuelles. Et toutes les théories sémiotiques utilisées pour analyser sont *des théories généralistes des signes qui ne prennent pas réellement en compte la rupture entre le langage parlé et l'écriture*, entre les connaissances mathématiques et les autres types de connaissances, entre ce qui relève d'un support de communication et ce qui relève d'un système de traitement. Avec toutes les théories globalisantes de la notion de signe, il devient impossible de saisir et de prendre en compte la spécificité des écritures symboliques algébriques par rapport aux deux autres types d'écriture, ainsi que leur irréductibilité aux autres registres de représentation sémiotique.

Enfin, il y a une caractéristique primordiale des unités élémentaires de sens que sont les chiffres, les lettres et les symboles d'opérations — c'est-à-dire les unités élémentaires de sens qu'on appelle habituellement des « signes » — c'est LEUR OCCURRENCE, c'est à dire le nombre de fois où elle apparaissent dans une expression complète. *Ce sont les occurrences d'un lettre, c'est-à-dire leur nombre et leur place dans les expressions algébriques, qui constituent la base du calcul algébrique* La simplification des syntagmes opératoires, qui peuvent être plus ou moins complexes, repose sur la réduction du nombre des occurrences de l'une des trois unités de sens élémentaires qui les composent. De même la résolution d'une équation requiert le déplacement d'un membre à l'autre de certaines unités de sens de manière à séparer les syntagmes opératoires comprenant des lettres et ceux purement numériques (Duval, Pluvinage 2016, p.148-150). Le calcul algébrique et la résolution des équations reposent fondamentalement sur LA RECONNAISSANCE VISUELLE DES OCCURRENCES DE LETTRES ET DE LA FORME DE LEURS ARRANGEMENTS DANS LES SYNTAGMES OPÉRATOIRES. *Le calcul algébrique est « formel » au sens visuel du terme.* Mais, évidemment, cela requiert

que l'on puisse rapidement reconnaître les différents types d'unités de sens qui constituent une expression symbolique complète. Certes ce processus peut être squeezé pour la résolution des équations du premier degré. Il devient central pour celle des équations du second degré. Et l'obstacle pour les élèves sera d'autant plus grand qu'on ne l'aura pas pris en compte pour introduire l'algèbre élémentaire la résolution des égalités numériques ... à trou ! (Duval 2015, p. 62-67).

La différence entre le calcul numérique et le calcul algébrique n'est pas dans le recours à une lettre. Elle tient au fait que *dans le calcul numérique, le résultat du calcul aboutit toujours à un nom propre de nombre, et non pas seulement à un autre syntagme opératoire*, lequel peut toujours être réduit à un nom propre de nombre. Un nom propre de nombre est l'écriture d'un nombre résultant de la seule mobilisation d'un système de numération (3, 14, 144.). On peut ainsi reconnaître si deux écritures numériques différentes (2+4) et (2 × 3) ont le même nom propre ou si, selon le critère de Hilbert, ce sont les mêmes signes que l'on retrouve. Et de même pour la résolution des équations du premier degré que l'on peut donner aux élèves. Le résultat est vérifiable parce c'est un nom propre et que la (ou les deux) lettre(s) utilisée(s) ont un statut d'inconnue.

5.4. Que faut-il d'abord comprendre pour apprendre l'algèbre ? Et cela relève-t-il du point de vue mathématique ou d'un autre point de vue ?

Les réponses à ces deux questions sont liées. Elles marquent le point de clivage le plus important, du point de vue didactique, des choix faits pour organiser un curriculum et pour la formation des enseignants. Ce sont les analyses linguistiques des écritures symboliques algébriques, que Jean-Philippe a développées dans sa thèse pour répondre à la première question, qui l'ont conduit à se poser la deuxième question. Cette question est cruciale puisqu'elle porte sur les portes sur ce que les élèves doivent d'abord comprendre pour pouvoir apprendre (ci-dessus, Q.6)

La réponse avancée à partir de la communication à SFIDA-15 est une réponse ambiguë. Car elle subordonne les points de vue, linguistiques et sémiotique, au point de vue mathématique. Elle tient dans l'expression « Connaissances d'ordre II » que Jean-Philippe oppose aux « connaissances d'ordre I », c'est-à-dire les propriétés mathématiques et les ensembles de nombres dénotés par les écritures symboliques algébriques. Les connaissances d'ordre II ne peuvent donc pas être des connaissances mathématiques ! Et cependant, elles seraient déterminées par les connaissances mathématiques. Car il ne s'agit pas seulement « *des règles d'emploi et d'usage des outils sémiotiques* » que l'analyse linguistique a permis d'explicitier (2000, p. 17), il s'agit aussi, et surtout, de la distinction des « variables selon le type d'objets qu'elles sont susceptibles de dénoter car *non seulement leur dénotation change mais également leur sens et donc la signification du signe « = »* (2012, p. 219). Autrement dit,

la question de la dénotation des écritures symboliques ou, plus exactement, la question de la distinction entre le sens des écritures et ce qu'elles dénotent est au cœur de ce qu'il faut comprendre pour apprendre l'algèbre. Cela ne peut pas être discuté. Mais en ne retenant des deux explications que Frege en donne, Jean-Philippe ne pouvait pas avancer sur la question de ce qu'il faut comprendre pour apprendre l'algèbre (ci-dessus, 4.2).

L'impasse didactique de l'explication mathématique est l'impossibilité de distinguer le sens d'une expression et sa dénotation, tant que l'on ne considère qu'une seule expression à la fois. Cette distinction ne peut se faire qu'à partir de deux expressions A et B de sens différent pouvant être substituées l'une à l'autre parce qu'elles dénotent la même chose. C'est le mécanisme discursif du calcul (ci-dessus, Fig. 5). Cela veut dire qu'on ne peut jamais partir de la dénotation d'une expression, mais seulement de la production d'une expression ayant un sens pour dénoter quelque chose. Le sens des flèches sur les schémas des figures 5 et 6 ne peut pas être inversé. La nécessité épistémologique et cognitive de passer par le sens d'une écriture symbolique, ou plus exactement par le sens d'une expression symbolique, pour accéder à ce qu'elle dénote algébriquement met en évidence les deux conditions cognitives primordiales pour que tous les élèves puissent comprendre l'algèbre élémentaire enseignée au Collège.

La première concerne la nécessité d'un travail portant sur les opérations discursives de désignation. Car la compréhension et l'appropriation d'un langage ne se font pas à partir de la connaissance des règles permettant de produire des expressions correctement formées, mais à partir des opérations discursives que ce langage permet de faire pour désigner des objets ou ce dont on veut parler. La dénotation dans la mise en équation se fait par une opération discursive de RE-désignation, de ce qui d'une manière d'une autre a déjà été désigné autrement. Et là il y a un double problème. D'une part, dans les langues naturelles, il y a différentes opérations discursives possibles pour désigner. D'autre part, dans les écritures symboliques, la désignation fonctionnelle, c'est-à-dire la redésignation de deux choses différentes avec une même lettre, est une opération discursive qui n'existe pas dans les langues naturelles (Duval et Pluvineau, 2016). *Autrement dit, une prise de conscience en parallèle de toute la gamme des opérations possibles pour désigner une même chose est nécessaire pour entrer dans l'algèbre élémentaire.* Sans quoi, les élèves resteront incapables de produire, chacun par lui-même, une expression symbolique complète, c'est-à-dire de mettre en équation les données d'un problème.

La deuxième condition cognitive concerne *la reconnaissance visuelle des différentes unités de sens emboîtées dans l'écriture linéaire des écritures symboliques*, même celle des fractions. Nous avons vu plus haut que les expressions symboliques complètes comportent trois niveaux de sens : celui des noms propres de nombre, (ceux dont la production ne mobilisent que la connaissance du système de numération utilisé), celui des syntagmes opératoires (ceux associant un nombre ou une lettre à un symbole d'opération) et celui des

équations. Les deux niveaux supérieurs se distinguent par le fait qu'ils donnent lieu à deux types de substitution différents (ci-dessus, 1.2). *C'est là que l'on voit se creuser un fossé considérable entre connaissance et reconnaissance dans l'apprentissage de l'algèbre.* Ni la connaissance des règles d'emploi et d'usage des outils sémiotiques, ni la connaissance des propriétés des opérations ne permettent de reconnaître visuellement les différentes unités de sens. Pour cela un travail spécifique à chaque niveau de sens est nécessaire pour développer cette reconnaissance et la rendre visuellement immédiate, comme dans toute activité de lecture. Pour le niveau des syntagmes opératoires ce type de travail doit être une conversion des expressions incomplètes dans une représentation bidimensionnelle qui la délinéarise (supra, 5.1, Fig. 4).

La véritable opposition n'est donc pas entre des connaissances d'ordre I et des connaissances d'ordre II, qui sont déterminées du seul point de vue mathématique. Elle est entre le point de vue mathématique et le point de vue cognitif sur le choix des connaissances mathématiques à faire acquérir par les élèves au niveau de l'enseignement général, c'est-à-dire jusqu'à 16ans. Et là, le point de vue cognitif ne peut pas être subordonné au point de vue mathématique. Car il porte sur ce que nous avons appelé ailleurs *la face cachée des mathématiques*, c'est-à-dire la manière mathématique de travailler ou de « faire des mathématiques ». La caractéristique cognitive fondamentale de la manière mathématique de travailler est la mobilisation nécessaire et constante, de systèmes de représentations sémiotiques dont certains sont communs à toutes les activités de connaissance et dont d'autres sont spécifiques aux mathématiques. *Et d'un point de vue cognitif, l'objectif principal est la prise de conscience de cette manière mathématique de travailler* dans ce qu'elle a de radicalement différente de travailler dans les domaines de connaissance scientifique.

Pourtant, dans l'article de 2012, «Hans et Gretel, et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire», les connaissances d'ordre II sont présentées comme relevant d'un point de vue « sémio-linguistique ». Quel rapport avec le point de vue cognitif ou, plus précisément, sémio-cognitif ?

Le point de clivage entre ces deux points de vue apparaît avec l'emploi équivoque du mot « langage » : il y a d'un côté le « langage symbolique » (1992, p. 3) et, d'un autre côté, le langage permettant de « communiquer » ou « d'argumenter » en classe, aussi bien pour l'enseignant que pour les élèves (1992, p. 285). Or, on ne peut pas faire appel à la même théorie linguistique pour l'un et pour l'autre, car l'un relève d'un système sémiotique ou si l'on veut d'une « langue mathématique », tandis que l'autre relève d'un discours produit par un locuteur pour lui-même ou pour quelqu'un d'autre, nécessairement dans une langue naturelle. En choisissant la théorie de Chomsky, et non pas celles de Saussure et de Benveniste, Jean-Philippe ne pouvait pas développer les conditions cognitives et didactiques d'une *introduction de l'algèbre pour tous élèves* dans le cadre d'un enseignement commun jusqu'à 15 ou 16 ans.

De même, dans cet article, les auteurs parlent de « registre algébrique » pour caractériser les ESA. Mais il serait plus adéquat de parler des « registres d'écritures symboliques ». Tout d'abord, parce qu'un registre se caractérise par le système de représentations sémiotiques qu'il permet de produire, et par les opérations de transformations des représentations sémiotiques produites. Ici les représentations produites sont des écritures numériques et des écritures littérales, des écritures fractionnaires, formant des expressions incomplètes ou complètes. Il y a donc au moins deux registres d'écritures symboliques, Ils forment ce que j'ai appelé un « continuum » allant des premières expressions numériques aux écritures impliquant le calcul des prédicats, lesquelles sont évidemment hors de toute enseignement commun des mathématiques jusqu'à 15 ans (ci-dessus, Fig. 3 et IV Q. 5). Autrement dit ce que Jean-Philippe a appelé les ESA sont en fait des ESO, c'est-à-dire des écritures symboliques opératoires et uniquement opératoires. Cela va d'ailleurs dans le sens des conclusions de la Thèse de 1992 : le seuil crucial dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire celui de la prise en compte de la distinction frégéenne entre sens et dénotation. Et ce seuil se situe avant même l'introduction des lettres, avec l'expression fractionnaire des nombres, lorsque cette expression fractionnaire s'articule autour de plusieurs symboles d'opérations, et non pas d'un seul comme dans l'expression $\frac{1}{2}$, synonyme de « la moitié ».

6. Les deux apports des travaux de Jean-Philippe, limites et perspectives.

L'algèbre élémentaire n'est ni une langue ni un langage. Elle est uniquement une écriture qui a été développée pour permettre d'utiliser des algorithmes de transformation d'expressions en d'autres expressions. Autrement dit, à la différence des écritures alphabétiques, les écritures symboliques ne transcrivent aucune parole et ne sont reconvertibles en aucune production orale. Elles ne transcrivent aucune parole, aucun énoncé, car, ce qu'on croit être une simple transcription cache des opérations discursives complexes de redésignation ainsi qu'un changement de registre de représentation sémiotique. Le premier apport de Jean-Philippe est d'avoir mis en évidence la primauté des écritures symboliques (ES) non seulement sur la parole, mais surtout sur les propriétés et les concepts mathématiques. Pour lui, les connaissances mathématiques ne sont pas le sens des écritures symboliques, leur sens est uniquement ce qu'elles dénotent.

Et pourtant Jean-Philippe a choisi un point de vue linguistique pour analyser la production des écritures symboliques de l'algèbre élémentaire qui est enseignée au Collège (ESA) !

La première source de confusion vient de ce que Jean-Philippe a choisi la théorie linguistique de Chomsky, parce qu'elle portait sur des algorithmes de production

d'expressions, et non pas celles de Saussure et de Benveniste qui portent sur *les différents niveaux de choix du locuteur lorsqu'il parle, c'est-à-dire lorsqu'il énonce quelque chose*. C'est pourquoi ; lorsque Jean-Philippe parle de « syntaxe » et de « règles », il s'agit d'une syntaxe et de règles de calculabilité, et non pas d'une syntaxe et de règles de composition des « parties » de la phrase : le syntagme nominal (dont les éléments sont l'article, le nom, l'adjectif) et le syntagme verbal (dont les éléments sont le verbe et des syntagmes compléments pouvant devenir des syntagmes nominaux dans une autre phrase).

La deuxième source de confusion vient de ce que Jean-Philippe n'a pas distingué le système sémiotique utilisé, notion qui est pourtant l'apport sémio-linguistique fondamental de Saussure, et les expressions que l'on peut former à partir du système sémiotique utilisé. Il lui manque les critères théoriques pour pouvoir distinguer les trois niveaux d'unités de sens emboîtées qui constituent les expressions symboliques complètes. Et pourtant, leur reconnaissance visuelle rapide est, comme pour toute écriture, la première clé de leur compréhension. Celle qu'on ne donne pas aux élèves de Collège.

*

Ce que Jean-Philippe a appelé « les écritures symboliques algébriques » couvre toute la gamme des écritures symboliques permettant d'utiliser des algorithmes. Cela va du calcul numérique avec les entiers jusqu'à la résolution des équations, en passant bien évidemment, par le calcul avec les décimaux, puis avec les fractions pour les rationnels. Les ESA constituent un continuum. Ce continuum ne peut être perçu et étudié qu'à l'échelle du curriculum d'un enseignement mathématique commun pour tous les élèves, au Primaire et au Collège). Il est totalement occulté à l'échelle locale de l'organisation de séquences didactiques, c'est-à-dire de séquences de quelques semaines dont l'objectif d'acquisition est un contenu mathématique local, qui n'est que l'une des multiples composantes d'une connaissance plus globale, objectif final d'acquisition au terme d'un cycle de trois ou quatre années d'enseignement ! Dans ce continuum, le seuil décisif pour entrer dans l'algèbre n'est pas l'introduction des lettres, ou la généralisation qu'elles permettent, mais la prise de conscience de la différence entre la dénotation des expressions symboliques et leur sens. Cette prise de conscience doit se faire bien avant l'introduction des lettres. Les difficultés auxquelles les élèves se heurtent dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire ne sont que le syndrome de l'absence totale de cette prise de conscience.

Le deuxième apport des travaux de Jean-Philippe est donc d'avoir considéré toutes les « écritures symboliques algébriques » comme formant un tout. Elles ont ceci de commun qu'elles relèvent toutes d'un même ensemble de règles de formation et que leur sémantique et une sémantique fré géenne. Pour désigner ce tout, nous avons parlé de règles d'un « continuum ». Jean-Philippe, lui, a repris le terme « registre » en spécifiant « registre

algébrique». En ce sens nous ne pouvons qu'être d'accord. Car, en reprenant ce terme, il souligne le fait que toutes les expressions symboliques doivent être envisagées pour elles-mêmes, et qu'elles sont radicalement différentes de la langue maternelle utilisée pour les interactions verbales en classe. En ce sens, si les écritures symboliques sont un langage, c'est une langue qui est plus étrangère que les langues étrangères que les élèves doivent apprendre à parler. Malgré cela, on continue de croire, en en restant au seul point de vue mathématique, que les écritures symboliques seraient plus simples et plus rapides à apprendre ! Eh bien, il va falloir écouter Jean-Philippe qui n'a cessé d'expliquer le contraire.

*

Comment faire reconnaître, au premier coup d'œil, les différentes unités de sens emboîtées dans une expression symbolique, et comment faire prendre conscience de la différence entre le ou les sens d'une expression symbolique et ce qu'elle dénote ? Jean-Philippe avait souligné le caractère crucial de cette question pour la compréhension et l'apprentissage de l'algèbre par tous les élèves. Il avait aussi constaté que les théories didactiques, en donnant la priorité au point de vue des enseignants en classe et aux contenus mathématiques qu'ils ont à faire acquérir, n'y apportent aucune réponse. Les travaux de Jean-Philippe ne lui ont pas davantage permis d'avancer sur cette question. C'est là la limite de la problématique même de ses recherches. Pourquoi ?

Cette question de la compréhension et de l'apprentissage du registre des écritures symboliques exige une approche cognitive en termes de registres. Or la règle d'or d'une telle analyse est qu'un registre ne peut être analysé qu'à partir des variations que l'on fait dans un autre registre. Autrement dit pour analyser le registre écritures symboliques, *il faut prendre en compte plusieurs couples de registres, à l'intérieur desquels les conversions directes et les conversions inverses doivent d'abord être étudiées pour elles-mêmes* :

- (Écritures symboliques et langage naturel),
- (Écritures symboliques et graphiques cartésiens),
- (Écritures symboliques et Schémas),
- (Écritures symboliques et tableaux),
- (Langage naturel et tableaux).

La problématique de Jean-Philippe est restée fondamentalement une problématique mono-registre. Cela en constitue l'intérêt et l'apport, puisqu'elle a contribué à mettre en évidence la complexité du fonctionnement et de la mobilisation des « **E**critures **S**ymboliques **A**lgébriques » pour les élèves au Collège.

Cette limite, on la retrouve dans toutes les théories didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire, alors qu'elles diffèrent de la problématique de Jean-Philippe sur deux

points. *Soit elles sont mono-registres*, parce qu'elles s'appuient sur (l'un des autres registres qui sont toujours implicitement ou explicitement utilisés avec celui des écritures symboliques : les graphes, les tableurs, etc. *Soit elles juxtaposent des représentations de registres différents*, mais elles méconnaissent et elles squeezen tout le travail de coordination cognitive qui est nécessaire pour effectuer spontanément les conversions directes et inverses entre deux registres. Comment s'étonner que la grande majorité des élèves de Collège (plus de 350000 élèves d'une même classe d'âge) ne puissent franchir le premier seuil de compréhension de l'algèbre élémentaire ? A l'appui de cette question, je ne me référerai pas aux résultats des enquêtes PISA, évoquées plus haut, mais à ce témoignage de Bkouche, un mathématicien qui s'est beaucoup intéressé à la formation des enseignants :

Je demande un jour à un étudiant de CAPES, de résoudre le système d'équations :

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

L'étudiant dessine une droite et un cercle, je lui demande pourquoi.

Et il me répond "*parce que c'est plus concret*".

Grande discussion pour lui expliquer que *le problème est celui du lien entre le système d'équation et le DESSIN*.³⁶

Or Bkouche, lors des multiples échanges que nous avons eus, défendait le point de vue mathématique contre le point de vue cognitif, un peu comme Jean-Philippe s'en tenait à l'explication mathématique de la distinction frégéenne et en méconnaissait l'explication cognitive.

*

C'est l'écriture, et non pas seulement le langage et la parole, qui a été le seuil décisif dans l'évolution de l'humanité. La naissance de l'écriture ne marque pas seulement les débuts de l'histoire, elle a permis le développement de la connaissance, et en particulier des mathématiques³⁷. Cela attire l'attention sur un point fondamental caractéristique de l'activité mathématique. On ne peut faire de mathématiques sans d'abord écrire. *Les mathématiques s'écrivent. Elles ne se racontent pas réellement... sans écrire ou griffonner sur quelque chose*. L'écriture est l'un des facteurs primordiaux du développement cognitif de la pensée, car elle permet une objectivation que l'immédiateté du dire et du vouloir dire de la parole rend impossible (Duval 2000).

³⁶ R. Bkouche. Extrait d'un courriel du 9 Avril 2015.

³⁷ *L'histoire commence en Mésopotamie*. Catalogue de l'exposition au Musée de Louvre-Lens, nov.2016-janv.2017. On peut voir, entre autres, les reproductions de deux prismes gravés en écriture cunéiformes de la période 1749-1712 av. J.-C. Pour l'un, les faces correspondent à des tables numériques et métrologiques, et, pour l'autre, à huit problèmes portant sur des rectangles et des briques (n°261 et 262, p. 240-241). Or les premières tablettes écrites sur l'argile en cunéiforme remontent à 3300-3000 av. J.-C., (Fig. 66, p. 217).

Les écritures symboliques algébriques sont radicalement différentes de toutes les écritures dont la fonction première est de coder visuellement la parole, de la fixer, pour présenter le développement complet de son expression. Même si les équations remontent aux babyloniens, elles ne sont apparues que très tardivement³⁸. Et elles se sont constituées en moins de deux siècles de Cardan et Viète à Descartes et Leibniz.

Les écritures alphabétiques sont immédiatement commutables avec la parole, pour qui évidemment a appris à les lire, de même que la parole peut être immédiatement transcrite par qui a appris à écrire. Cependant, si on se place du point de vue des actes d'expression proprement dites, *dire et rédiger ne sont pas des activités commutables, parce que, lorsqu'on passe de la parole à l'écriture, le rapport au langage change*. D'une part les opérations discursives de désignation à faire sont plus complexes lorsqu'il s'agit d'écrire que lorsqu'il s'agit simplement de parler. Et, d'autre part, le focus de l'attention se trouve en partie déplacé des mots ou des syntagmes nominaux à ces unités de sens supérieures que sont équations et les propositions. C'est pourquoi l'écriture remplit des fonctions de distanciation, d'objectivation, de contrôle, et finalement de prise de conscience que la parole et les interactions verbales ne permettent pas d'accomplir. *Ecrire structure la pensée. Ce n'est pas en parlant qu'on apprend à écrire*.

Les écritures symboliques, qu'elles soient numériques ou algébriques (ESA), sont opératoires et purement opératoires. Cela veut dire que leur seule fonction est de permettre *des opérations algorithmisables de substitution d'expressions symboliques à d'autres expressions symboliques, en fonction des occurrences de signes qui les composent*. Cela implique, évidemment, que l'on dispose d'un système de numération qui fonctionne comme système sémiotique au sens de Saussure. C'est pourquoi les écritures symboliques ne sont d'aucune manière commutables avec la parole. Car ces opérations de substitution ne sont pas possibles avec l'utilisation, même seulement mentale, du langage naturel. *Et inversement, les opérations d'association de mots et d'idées, qui font la puissance du langage naturel, sont impossibles avec les écritures symboliques*.

Le langage naturel et les écritures symboliques sont deux registres de représentation sémiotique irréductibles l'un à l'autre. Du point de vue mathématique, le registre des écritures symboliques est devenu le registre par excellence des mathématiques. Mais du point de vue didactique, il y a un double travail à faire, sur les opérations de désignation propres à chacun de ces deux registres, et sur la non congruence des conversions dans le passage de l'un à l'autre.

Contre l'emploi équivoque du mot « langage » en didactique, Jean-Philippe a mis en évidence l'autonomie et la puissance incomparable de l'écriture par rapport à la parole.

³⁸ F. Pluvillage a attiré l'attention sur la coïncidence entre l'apparition des écritures symboliques et le développement de l'imprimerie qui a imposé la standardisation des caractères (Duval et Pluvillage, 2016).

Références

- Chomsky N., 1957. *Syntactic Structures*. The Hague :Mouton &Co
- Deledicq A., Lassave C., 1979, "*Faire des Mathématiques, 4ème*". Paris :Cedic.
- Drouhard J.-P., 1992. *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat. Paris VII.
- Drouhard J.-P., 1996. Signes et sens en calcul symbolique. SFIDA-6, *Langage et algèbre*. VI.3-VI.21.
- Drouhard J.-P., 2000. Une ébauche de panorama des relations entre algèbre, langage et théories de l'apprentissage. SFIDA-15, *L'algèbre élémentaire, un cadre privilégié pour manipuler des abstractions*, XV.13-XV.17.
- Drouhard, J.-P., Panizza, M., 2012. Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Numéro spécial hors-série, *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*, 209-236.
- Duval R., 2000. Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, 135-170.
- Duval R., 2006. Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numero Especial pp. 45-81. Clame.
- Duval R., Campos T. M.M., Barros, L.G., Dias, M.A., 2015. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso ?* São Paulo : Proem Editora.
- Duval R., Pluvinage F., 2016. Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, p. 117-152.
- Frege G., (1891) 1971. Fonction et concept. *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Imbert), 80-101. Paris : Seuil
- Frege G., (1892) 1971. Sens et dénotation. *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.
- Nichanian M.,1979. *La question générale du fondement : écriture et temporalité*. Strasbourg: Thèse de l'université des lettres et des sciences humaines.
- Leibniz, G.W. (1972). *Oeuvres I* (Ed., L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne.
- Saussure F. de., (1916) 1972. *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.
- Vergnaud G., 1990. Les champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 10/2.3 pp.133-170.



Politique de la recherche en didactique

Souvenirs de Jean-Philippe

Viviane Durand-Guerrier

Première rencontre

J'ai rencontré Jean-Philippe lors de la 6^{ème} école d'été de Didactique des Mathématiques qui s'est tenue à **Plestin-les-Grèves** (Côtes d'Armor) en Août 1991. Il était en train de terminer sa thèse de doctorat sur *les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. De mon côté, je terminais mon mémoire de DEA sur *les difficultés en logique des étudiants de premier cycle universitaire* avant de m'engager en thèse dans la suite de ce travail. Nous avons discuté longuement de nos questionnements respectifs et des apports de Frege sur les articulations entre la syntaxe et la sémantique. Lors de cette première rencontre en 1991, nous avons aussi discuté du rôle que pourraient jouer les recherches en Didactique des Mathématiques. Jean-Philippe était déjà très sensible à la nécessité que les travaux de recherche puissent intégrer les contraintes liées à leurs potentiels futurs utilisateurs (chercheurs, enseignants, formateurs, élèves). L'ensemble de sa carrière scientifique et les responsabilités qu'il a assumées sont pour moi à l'image des impressions que j'ai retenues de cette première rencontre.

Echanges scientifiques au cours du temps

Sur le plan scientifique, nous n'avons jamais eu de collaboration effective, mais nous avons poursuivi nos échanges scientifiques au fil de nos rencontres dans diverses manifestations et Jean-Philippe m'avait demandé avec d'autres d'être relectrice sur son projet de développement d'un épistémographie, ce que j'avais accepté avec plaisir.

Depuis son recrutement en Argentine, nous avons moins d'occasion de nous rencontrer. Néanmoins, nous avons déposé au printemps 2015 dans le cadre de l'appel MATHS-amSud, un projet associant l'Argentine, le Chili, la France et le Brésil intitulé : « *Le continu et l'analyse réelle – Enjeux mathématiques, épistémologiques et didactiques* ». Ce projet, coordonné par Elisabeth Montoya-Delgadillo (Chili), Jean-Philippe Drouhard (Argentine), Laurent Vivier et moi-même (France) n'avait finalement pas été retenu, mais il s'inscrivait dans une dynamique internationale de développement des recherches sur l'enseignement supérieur, qui se poursuit actuellement dans le cadre du Réseau INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics)³⁹. Jean-Philippe était porteur de l'axe épistémologique centré sur les outils sémiotiques, mettant en œuvre l'analyse

³⁹ <https://indrum2018.sciencesconf.org/>

épistémographique qu'il avait développé dans Drouhard (2015)⁴⁰. Les travaux internationaux sont toujours en cours, et le regard singulier de Jean-Philippe nous manque.

Un chercheur engagé

Sur le plan des responsabilités que Jean-Philippe a assumées, j'en retiendrai deux ici qui pour moi sont emblématiques de son engagement comme chercheur soucieux de l'applicabilité des résultats des travaux de recherche dans la communauté éducative à laquelle il appartenait avant son départ pour l'Argentine, et comme chercheur engagé dans la construction d'une communauté européenne de recherche en éducation mathématique.

La CORFEM

Le premier point que je souhaite retenir est sa contribution significative à la mise en place de la CORFEM (**CO**mmission de **R**echerche sur la **F**ormation des **E**nseignants de **M**athématiques), qui organise annuellement depuis 1994 un colloque ouvert à tous les acteurs impliqués dans la formation initiale des professeurs de mathématiques de collège et de lycée. Les colloques de la CORFEM se sont peu à peu imposés comme des lieux de rencontres essentiels pour accompagner la formation des formateurs d'enseignants de mathématiques ; pour suivre les évolutions de cette formation et être force de proposition; d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation des enseignants de mathématiques ; de permettre la coordination de différents travaux de recherche sur la formation et sur les pratiques des enseignants de mathématiques. Jean-Philippe était convaincu qu'il fallait se donner un tel instrument de cohésion sur le modèle de la COPIRELEM pour le premier degré. Sa nécessité a été confirmée au fil des années avec les mutations très importantes qu'a connues la formation des enseignants et est toujours d'actualité compte tenu des modifications en cours du système éducatif français et de leurs impacts sur la formation.

La société européenne ERME

Le deuxième point que j'ai souhaité retenir est son implication dans la communauté européenne de recherche en éducation. Je n'ai pas participé aux premières rencontres qui ont conduites à la création de la société ERME (European Society for Research in Mathematics Education)⁴¹, mais Jean-Philippe a su faire partager à un certain nombre de chercheurs de la communauté francophone, dont je fais partie, l'importance et la fécondité de notre insertion

⁴⁰ Drouhard, J-Ph. (2015). El análisis epistemográfico: una herramienta para la investigación en educación matemática. Proceedings of the XIV Inter American Conference on Mathematics Education. Tuxtla Gutiérrez, México.

⁴¹ <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/>

dans une communauté plus large que celle dans laquelle nous avons été éduqués en tant que chercheurs en didactique des mathématiques. Jean-Philippe a été le premier président de ERME, de 1997 à 1999 ; à la même période, il était membre actif de l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques) : membre des comités d'organisation des 8^{ème} et 9^{ème} école d'été de Didactique des Mathématiques (1997, 1999) ; membre du comité de l'ARDM et co-organisateur du séminaire national de didactique des mathématiques (1998 et 1999). La société ERME est maintenant bien installée. Un ouvrage fêtant les 20 ans est actuellement sous presse. Jean-Philippe avait accepté de faire partie du comité éditorial de l'ouvrage et de contribuer à un chapitre sur l'histoire de ERME par les anciens présidents et présidentes de ERME (Jean-Philippe Drouhard, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Viviane Durand-Guerrier et Barbara Jaworski). La parution de l'ouvrage⁴² est prévue pour mai 2018.

Pour conclure

Je garde de Jean-Philippe le souvenir d'un chercheur exigeant porteur d'un projet scientifique original ; d'un collègue engagé et disponible qui a contribué par ses actions aux évolutions de notre communauté de recherche et de ses liens avec la communauté concernée par les questions d'enseignement des mathématiques.



⁴² Dreyfus T., Artigue M., Potari D., Prediger, S. & Ruthven K. (Eds.) (in press, *Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*. Oxon, UK: Routledge - *New Perspectives on Research in Mathematics Education series*, Vol. 1.

SFIDA, et l'esprit de SFIDA en Europe : Les contributions de Jean-Philippe Drouhard promoteur culturel

Paolo Boero, Università di Genova

Comme introduction de ma contribution, je voudrais poser deux questions :

- Pour SFIDA, séminaire franco-italien de didactique de l'algèbre, il y a eu 33 rencontres étalées sur 18 ans. Pourquoi cette durée ?
- Pour le colloque CERME, Congress of European Research in Mathematics Education, le nombre des chercheurs participants est passé d'une centaine de chercheurs pour CERME-1 (1999) et CERME-2 (2001) à 900 chercheurs pour CERME-9 (2019 ; parmi eux, plus de 150 d'autres continents). Pourquoi ce succès ?

À quel besoin correspondait tout cela ? Où était Jean-Philippe, au moment des décisions sur SFIDA et sur ERME/CERME ?

J'ai eu la chance de participer, dès le début, aux décisions qui concernaient SFIDA, ERME et CERME ; mon témoignage concerne le rôle de Jean-Philippe dans ces moments importants pour le futur de ces rencontres.

1. Vers le milieu des années 90

Des chercheurs d'Italie et de France, âertageant la même passion pour l'enseignement/apprentissage de l'Algèbre, se retrouvent autour d'une table, à Turin en 1993, lors d'une conférence internationale.

« Pouvons-nous créer un groupe de recherche commun sur l'Algèbre ?

Mais nous n'avons pas des positions communes !

... un groupe dans le style de PME ? (L'exemple le plus consistant sur le plan scientifique, à cette époque)

Mais nous ne voulons pas communiquer des recherches déjà finies, PME suffit !

... quoi, alors ? ».

Peu à peu, émerge l'idée d'un lieu d'échange et de construction d'idées, à partir des travaux menés dans nos groupes de recherche, avec retour dans nos groupes de recherche. Un lieu de défi amical, d'enrichissement réciproque, ...

« *Sans textes publiés dans des volumes ambitieux ?* »

Oui ; en cas de résultats intéressants tirés des échanges communs, on ira les publier ailleurs ! Des “comptes-rendus” des contributions, ça suffit pour nous ! Des traces comme documents de travail et outils de mémoire, oui !

Qui va faire le parrainage ? Nos Universités, nos Unités de Recherche officielles ?

Non, pas de parrainage ! Parrainage signifie trop de paperasserie, beaucoup de problèmes de “représentativité”, etc. Le parrainage, c’est à nous mêmes qu’il revient ! Chercheurs italiens et français, avec l’envie de se connaître et de partager des problèmes ».

Et alors fut créé... SFIDA (le mot italien pour “defy”, "duel"), Séminaire Franco-Italien de Didactique de l’Algèbre, Seminario Franco-Italiano di Didattica dell’Algebra.

Ce fut un lieu de choix libre, avec l’unique obligation de se préparer à parler, de se faire entendre, et d’écouter les autres... Nous allons vite décider de construire un petit dictionnaire Italiano-Français pour les termes techniques, pour permettre à chacun de parler dans sa propre langue. En réalité, peu à peu le Français va devenir la langue la plus utilisée, en respectant le fait qu’en majorité les chercheurs italiens connaissaient le Français ; mais il est vrai que de plus en plus les chercheurs français pouvaient comprendre les exposés de quelques chercheurs Italiens qui parlaient en Italien (par manque de maîtrise du Français).

« *L’algèbre... Seulement l’algèbre ?* »

Non, dans un sens strict, oui, dans un sens large (selon les dynamiques de recherche des gens qui interviennent) ; d’où l’ouverture à des domaines de recherche limitrophes – la sémiotique, la psychologie, la linguistique, etc.

« *Mais... il faudrait UN cadre théorique...* »

Lequel ? Faut-il reproduire à petite échelle la “guerre des cadres théoriques” qu’on connaît bien en Europe ? Avec sous-entendu : qui a le droit de coloniser les autres ?

Faut-il vérifier la portée des cadres que les gens portent dans le débat, sur des cas concrets et à travers la précision à partager sur les mots nécessaires employés, avec le temps nécessaire... ou se contente-t-on un débat superficiel et ‘abstrait’ sur des mots qui font référence à d’autres mots, qui font référence à d’autres mots... ?

Oui, le “défi” signifie bien de soumettre à la preuve (sur des cas significatifs, et dans un contexte favorable de personnes engagées dans la recherche, préparés, et disponibles à se mettre en question) ses propres positions théoriques avec l’aide et la stimulation de ceux qui ont des positions différentes !

« *Un groupe auto-suffisant ?* »

Non ! Il faut inviter des gens de l'extérieur ! Selon le thème choisi, dans l'esprit d'ouverture qui fait partie de nos rencontres. Avec le peu d'argent que nous arriverons à trouver. Par exemple, vers la fin des années 90, un défi acharné et répété entre Jean-Philippe et Paolo se développe, à propos de la nécessité mathématique. Décision commune : invitons Gérard Vergnaud pour avoir une troisième voix dans ce débat. Non pas une 'autorité', mais un troisième partenaire.

Jean-Philippe était là, au centre de ces questionnements et de ces décisions: voix de culture, de liberté de parole, et de plaisir de rencontre, d'écoute et d'interaction avec des gens différents !

2. Fin des années 90 : Osnabrück, ..., ...Osnabrück à nouveau, 1999, constitution de ERME et CERME-1

L'Union Européenne est un thème à la mode (avec l'euro à venir et l'espoir d'une Europe plus importante dans le monde). Que faire en didactique des mathématiques ?

Une Association européenne, bien sûr...

... comme fédération d'associations nationales (selon le modèle UE) ? L'analogie avec la constitution de l'Europe poussait dans cette direction. Mais étaient déjà évidentes à cette époque les limites d'une Europe des états souverains. Et en plus une association pour promouvoir et développer la recherche s'adaptait mal à la structure de « fédération d'associations », dirigée par des représentants de ces associations nationales.

Alors... une Société européenne comme association de chercheurs individuels, avec des garanties de représentativité des grandes régions de l'Europe (et non pas des associations nationales) parmi les élus au suffrage universel ?

Un long débat. Quelquefois dramatique : *“Tu es là comme représentant de notre association, il faut que tu représentes notre position !”*. Et puis, la deuxième option étant adoptée, dans les élections au suffrage universel du premier Comité Directif de ERME : *“Tu dois soutenir X, même s'il n'est pas là, comme candidat de ton Association !”*

Jean-Philippe était là, à vivre la contradiction entre son appartenance à une Association, et les raisons d'un choix contraire, qui graduellement émergeait dans les discussions vives du groupe promoteur de ERME – Jean-Philippe étant là un des protagonistes de ces discussions, protagoniste positif, souvent capable de médiations importantes !

3. CERME 1 → CERME 2 (2001) : quelle structure pour les Congrès de ERME ?

- Séquence de conférences représentatives des grandes orientations de recherche en Europe, alternées avec des séances en parallèle d'exposées de recherches individuelles ?
- Ou temps majoritaire (2/3) pour des groupes de travail thématiques, lieux d'échange, de travail sur des temps longs et de maturation des chercheurs dans une perspective pluraliste (quant aux références théoriques et aux méthodes de recherche) ; avec des textes à évaluer ('peer review'), à réviser une première fois avant la Conférence, à lire préalablement, à discuter dans les groupes de travail, et à réviser encore avant la publication dans les Actes ?

Jean-Philippe était là (1999-2001), avec d'autres chercheurs de SFIDA, pour contribuer aux choix et à la structuration de la deuxième solution : une solution courageuse selon une vision de long terme, et soutenue avec des médiations importantes ! Dans l'esprit inclusif de **communication, collaboration et coopération** qui fonctionnait déjà dans SFIDA. Dans cette perspective, Jean-Philippe (et les autres chercheurs qui vivaient avec lui l'expérience productive de SFIDA et participaient à la construction de CERME) ont su trouver des alliés dans d'autres pays : des chercheurs qui voulaient des échanges libres et constructifs avec des traditions de recherche et des positions théoriques différentes, non pas « en général », mais sur des thèmes spécifiques.

En guise de conclusion

En revenant aux questions initiales

- SFIDA, 33 rencontres étalées sur 18 ans. Pourquoi cette durée ?
- CERME, conférence **européenne**: à partir d'une centaine pour CERME-1 (1999) et CERME-2 (2001) ... 900 chercheurs pour CERME-9 (2019 ; parmi eux, plus de 150 d'autres continents, en 2019). Pourquoi ce succès ?

À quel besoin cela correspond-il ?

À un besoin d'échange LIBRE (mais CONSTRUCTIF) avec autrui, au delà des dogmatismes dominants dans les lieux contrôlés de recherche, et des comportements destructifs envers d'autres lieux et positions. À un besoin de progrès dans son propre chemin de recherche à travers cet échange LIBRE (mais CONSTRUCTIF). Et à la conscience que dans les sciences humaines (la didactique des mathématiques appartient à ce domaine !) la

nature même des disciplines impose de considérer les problèmes de recherche dans une perspective globale (humaine !). À une perspective de rencontre et d'échanges des expériences locales (des équipes de Gênes ou de Nice ou de Turin... ou de Oxford, ou de Berkeley, ou de Tokyo,... ou de Buenos Aires), avec leurs différents apports liés aux traditions, aux besoins, aux « humanités » issues de l'histoire des lieux d'appartenance.

Au moment des décisions à propos de SFIDA et ERME/CERME, Jean-Philippe était là, comme PROMOTEUR CULTUREL: ces besoins étaient ses besoins, et Lui cherchait à traduire ces besoins en ORGANISATIONS flexibles, ouvertes, ... avec les médiations nécessaires sur le plan institutionnel (l'idéal non-institutionnalisé de SFIDA, la médiation haut-niveau à propos des groupe de travail de CERME).



SFIDA 35 Torino, 20 mai 2011, Préparation du numéro spécial de RDM consacré à l'algèbre

Témoignages

Nous étions si différents...

Pour Jean-Philippe

Robert Fillon

Penser à un ami mort, c'est trop souvent essayer de rassembler un puzzle incomplet. Ce sont les enfants, dit-on, qui égarent les pièces et rendent le jeu impraticable et frustrant. Adultes, nous ne devrions plus rien laisser se perdre. Je pense cependant avec tristesse à tout ce que je n'ai pas su de la vie de Jean-Philippe. Ce que je n'ai pas su et que j'aurais aimé savoir, alors que même nous ne nous étions à aucun moment de notre vie, comme on dit, « perdus de vue ». Il y avait entre nous cette idée filtrante : un jour on se retrouvera, on se racontera tout ce qu'on n'a pas pu se raconter, tout ensemble se renouera ; à ce moment tardif, nous pourrions ensemble reconstruire notre puzzle et éprouver ce sentiment de complétude dans lequel l'amitié prend sens et valeur. La mort a mis à bas ce projet ; à sa manière, violente, elle est venue rappeler que l'amitié, c'est toujours ici et maintenant, car nous risquons à tout moment de nous retrouver orphelins de nos belles intentions.

Nous étions si différents, Jean-Philippe et moi.

A l'origine, nous nous étions pourtant retrouvés dans une situation semblable. Nous nous sommes connus au Collège franciscain, à Monaco. Il y était pensionnaire, car ses parents habitaient alors la Corse ; il pouvait ainsi passer ses week-ends chez ses grands-parents retraités et habitant la Principauté. Mes propres parents m'avaient inscrit dans ce même collège par une sorte de défiance étrange à l'égard du Lycée de Monaco, dont ils considéraient l'enseignement comme un peu trop uniforme et standardisé. Ni lui ni moi n'étions spécialement religieux et notre présence dans ce Collège en voie de sécularisation (puisque le Directeur était d'ores et déjà un enseignant laïque sorti du rang) mais n'ayant pas encore accompli sa mue, nous a paru d'emblée incongrue. C'est sans doute ce qui nous a rapprochés.

Mais nous étions si différents. Tout en poursuivant tous deux une filière scientifique, j'ai très vite senti que ce n'était pas ma vocation. Jean-Philippe, lui, était pleinement dans son registre, il le savait mais n'en exprimait pas moins un regard décalé tant sur le monde matériel que sur les objets de la connaissance.

Je me souviens ainsi de sa chambre d'interne, trop petite pour contenir toutes ses affaires et lui ménager l'espace voulu. Plusieurs fois il avait bouleversé l'ordonnancement du mobilier, sans en être satisfait. Il avait fini par placer l'armoire au centre de la pièce et l'avait baptisée pour cela « armoire existentielle ». Cette appellation, bien dans l'époque, permettait sans doute de mieux accepter son volume et la gêne qu'elle occasionnait en concentrant l'attention sur le concept par quoi elle était désormais désignée.

Nous avons parfois voyagé ensemble à cette époque et je me souviens aussi de sa propension à perdre les objets. A chaque étape, Jean-Philippe ouvrait son sac et en répandait le contenu dans la chambre. Cette dispersion n'épargnait nullement les accessoires qui ne pouvaient manifestement avoir aucune utilité immédiate. C'était une sorte de rite de conjuration du réel, débouchant à peu près inmanquablement sur la disparition d'un objet au moins qu'il s'agissait, le lendemain ou le surlendemain, de tenter de récupérer, avec tous les aléas qu'une telle entreprise pouvait comporter.

Nous étions si différents, moi qui ne défaisais presque rien, ne posais rien, de peur justement que les objets ne m'échappent. Jean-Philippe avait cette distance par rapport au réel que j'ai toujours, d'une certaine manière, enviée. Elle eût représenté pour moi une charge d'angoisse, alors que pour lui elle était l'essence même de son rapport au monde. Est-ce un exemple de sa part, une leçon à suivre ? Ce n'est pas certain. Mais avoir côtoyé cette manière d'être représente incontestablement un enrichissement, une source de réflexions qui se prolongent aujourd'hui encore.

Etonnamment, c'est avec Jean-Philippe que j'ai partagé une des émotions artistiques qui m'ont le plus marqué. Nous étions partis en «voyage de classe» avec notre professeur de philosophie de Terminale. Par suite de divers concours de circonstances, le groupe des participants s'était peu à peu réduit, au point que nous nous étions retrouvés, Jean-Philippe et moi, à voyager vers Gênes, seuls dans la Renault 10 du professeur. Et là, nous avons découvert, au Palazzo Rosso, une galerie dont la voûte, peinte à fresque, figurait son propre écroulement, son envahissement par la végétation et son retour à l'état de nature. Paradoxe de l'art figurant sa propre destruction. Paradoxe qui en appelle d'autres, ceux des mathématiques, auxquels Jean-Philippe s'initia et m'initia à cette époque, et qui n'ont jamais cessé de m'interpeller. Nous n'étions pas si différents, parfois. Il me semble évident en tout cas que cet intérêt pour cette famille de jeux intellectuels prélude, chez lui, à son orientation vers la didactique. Le paradoxe stimule l'esprit, il suggère aussi que le raisonnement doit identifier certains pièges afin de les éviter : on a là les éléments premiers d'une méthode à élaborer et à développer pour bien apprendre les mathématiques, et, à l'étage au-dessus, bien évidemment décisif, apprendre à les apprendre.

Passé notre baccalauréat, j'ai revu Jean-Philippe à plusieurs reprises, à Marseille puis à Paris où il habitait la bien-nommée rue du Commerce, et je me souviens de longs moments, le matin, passés avec lui dans les magasins de bouche où il se montrait un client assidu, souriant et attentif. Le réel, pour le coup, était de son côté. Il était capable de cela aussi. Nous nous retrouvions toujours avec plaisir, mais nos vies, à l'époque, ne convergeaient pas vraiment. Nous étions si différents.

Nice nous a à nouveau rapprochés lorsqu'il est venu s'y installer. Il m'avait alors sollicité, et je l'avais mis en rapport avec mon beau-frère qui lui avait loué l'appartement où il

a habité avec Annie, rue de l'Opéra. Un lieu original, bien placé, pas forcément très commode avec un enfant, mais qui mettait à ses pieds les charmes inépuisables de la Vieille Ville. Comme on peut le dire d'un vêtement, cette adresse lui allait bien, je crois qu'il s'y sentait vraiment chez lui. Nous nous sommes un peu vus à cette époque, la proximité aidant ; mais assez vite ma profession m'a appelé vers d'autres horizons géographiques.

Puis ce fut le cas de la sienne. Nous n'étions pas si différents, au fond, même si j'ai été stupéfait au premier abord de le voir s'hispaniser et se tourner de plus en plus vers l'Argentine. Assurément, Mabel n'y était pas pour peu. Je pense aussi pour ma part à Borges, ce passionné également de paradoxes, qui ouvrit la grande porte littéraire aux interrogations lancinantes des logiciens du début du XXème siècle. Mais je crois aussi qu'il y eut dans cette mutation la conscience intense qu'avec sa richesse et sa puissance intellectuelles Jean-Philippe n'était pas destiné à n'avoir sur cette terre qu'une seule vie, mais au moins deux qui s'entrecroiseraient et se conforteraient l'une l'autre. Ce n'est pas, je crois, lui prêter un orgueil déplacé que de lui attribuer cette pensée, c'est seulement rendre justice à l'éminence de sa personnalité. L'Argentine pour lui fut un succès. La grande dépense d'énergie qu'elle lui coûta ne fut pas payée en vain.

Sur les réseaux sociaux, alors en pleine expansion, Jean-Philippe se montrait actif. J'avoue avoir eu beaucoup de mal à saisir pleinement l'humour de certains contenus qu'il publiait, en particulier les bandes dessinées. On était dans une veine comique tout entière fondée sur l'absurde, à l'anglo-saxonne, un angle très particulier de la dérision auquel mon esprit sans doute trop froid ne me permettait pas de m'adapter. Nous étions si différents, parfois. Mais j'avais été frappé par des photos qu'il avait partagées. Un paysage boisé, ensoleillé, environné par un cours d'eau. C'était au Mexique, le Canyon del Sumidero et il commentait ces images par la mention « Verdon tropical ». Il a tout de suite été évident pour moi que Jean-Philippe était désormais chez lui en Amérique latine. Comme s'il avait retrouvé ou plutôt réinventé ses origines, un besoin que tout homme ressent à un moment de sa vie et qui, s'il parvient à le satisfaire, lui procure apaisement et bien-être. Je me figurais alors que Jean-Philippe était sur le point d'atteindre à cette sérénité et j'en étais infiniment heureux pour lui.

Sa mort est venue briser tout net cette promesse. Elle laisse un grand vide inconsolable et un signe : celui d'avoir connu un homme absolument intègre dans la règle de vie qu'il s'était donnée, consistant à la fois à ne pas piétiner à l'excès les chemins fréquentés par ses semblables, et à ne jamais en rabattre sur les qualités qui font une belle personne.



Jean Philippe !

Linda Gattuso

Le grand Jean-Philippe, l'ami, le collègue, que de souvenirs, que de discussions, que de paroles ! Tout cela a commencé au Québec en 87' à la CIEAEM de Sherbrooke. Cette amitié s'est consolidée l'année suivante nous nous sommes retrouvés en Hongrie où le hasard a fait que nous avons tous les deux une dizaine de jours à vagabonder à Budapest à la suite de IME et de PME. En marchant ou en essayant les nombreux bains de la ville, nous discutons chacun de nos travaux bien différents mais mutuellement enrichissants. La vie nous a souvent réunis, lui ayant le poste à Nice et moi une belle famille dans le coin sans oublier les conférences où nous étions toujours heureux de poursuivre nos échanges. Il me faisait connaître les travaux français, mais aussi la vieille Nice et la socca ! Certes, il était question de didactique, mais aussi de linguistiques et des contrastes France-Québec.

Généreux de son temps, de son savoir, toujours de bonne humeur et très volubile, nos rencontres étaient toujours attendues. Il est venu chez moi et j'ai souvent occupé sa "mansarde" de rue de l'Opéra. Il m'a accueilli dans son équipe lors d'une sabbatique. J'espérais aller le voir à Buenos Aires, mais il est parti, trop, trop vite. De 87' à 2015, presque 30 ans de souvenirs, pour moi, il est encore là et je suis certaine que ses travaux resteront car il savait sortir du cadre et apporter une note toujours très originale qui confrontait parfois les idées reçues. C'est dans cette voie qu'il faut le suivre car pour ceux qui l'ont connu, je crois que Jean Philippe sera toujours vivant.



Paradoxe et humour

Comment faire échouer les élèves en mathématiques en 10 leçons



Un peu d'histoire au sujet de ce diaporama

Maryse Maurel

Ce diaporama de Jean-Philippe, rangé dans mon disque dur avec les autres articles, a été présenté le 30 septembre 2015, par Nadia Douek.

Dans le groupe GECO niçois, nous avons pratiqué le paradoxe à haute dose. Nous avons lu et relu *Paul Watzlawick*, en particulier *Changements. Paradoxes et psychothérapie*, et nous avons utilisé l'injonction paradoxale (celle qui prescrit le symptôme à éliminer) pour construire les entretiens *Faire Faux*. Jean-Philippe a tout de suite adoré cette façon de faire et de réfléchir et l'a totalement adopté, intégré et utilisé.

Nous nous sommes amusés, un soir, dans le bureau de l'IREM, à produire un "Comment réussir à échouer en dix leçons ?" pour les étudiants du DEUG MASS où j'enseignais. Le voici :

Comment réussir à échouer son DEUG en 10 leçons

En m'inspirant du titre du petit ouvrage de Paul Watzlawick *Comment réussir à échouer*, je vous propose quelques conseils pour réussir à échouer en DEUG.

Soyons bien d'accord, il ne s'agit pas d'échouer tout simplement et bêtement parce que vous ne faites pas votre travail d'étudiant. Ceci est trivial et le succès est quasi assuré ! Non, il s'agit de réussir à échouer en se comportant comme un vrai étudiant. C'est plus délicat. Voyons comment s'y prendre.

- 1) Soyez convaincu que l'échec est votre destin. N'ayez aucun projet personnel ni à court terme ni à long terme.
- 2) Soyez attiré par un métier auquel ce DEUG ne prépare pas du tout, ou mieux si c'est possible, mais c'est beaucoup plus difficile, soyez incapable de vous imaginer dans un métier quel qu'il soit.
- 3) N'ayez aucun goût particulier ni aucune préférence pour les disciplines enseignées dans ce DEUG.
- 4) Oubliez tout ce que vous avez appris au lycée, et si quelques connaissances vous reviennent malgré tous vos efforts, soyez convaincu qu'il ne peut y avoir aucun lien entre ces connaissances du lycée et celles de la faculté. Vous venez d'entrer dans un nouvel univers, laissez à la porte tout ce que vous avez déjà appris ailleurs.
- 5) Évitez de suivre les cours et les TD trop régulièrement. Vous risqueriez de trouver de l'intérêt pour la discipline enseignée et cela vous mettrait en contradiction avec 3). La meilleure solution est d'avoir une fréquentation totalement aléatoire (vous pouvez vous aider d'une table de nombres au hasard ou de la fonction random de votre calculatrice).
- 6) Venez à la faculté sans aucun document pour ne pas être tenté de les consulter en cas de besoin.
- 7) Interdisez-vous formellement de parler de ce que vous voulez ne pas apprendre en dehors des plages horaires qui vous sont attribuées pour faire de la présence. Évitez soigneusement de fréquenter les étudiants qui ont de "bonnes notes" ainsi que les autres étudiants de votre filière. Vous pourriez entendre malgré vous des informations nuisibles à votre réussite de l'échec.

8) Évitez d'aller à la BU et de lire des ouvrages ou des revues qui pourraient avoir de près ou de loin un rapport quelconque avec le contenu de vos enseignements. Évitez de rester à la faculté quand vous n'avez pas un cours ou un TD prévu dans votre emploi du temps pour y faire de la présence (voir 7)).

9) Évitez de poser des questions, autant à vous même qu'aux professeurs, refoulez tout esprit critique et toute pensée personnelle.

10) Commencez à chercher un problème seulement si vous avez déjà la solution ou le corrigé. Sinon, faites-le une seule fois et pendant peu de temps. Si la solution ne surgit pas immédiatement la première fois, c'est qu'elle n'est pas déjà dans votre tête, alors d'où pourrait-elle bien surgir la deuxième ou la troisième fois ?

Attention, le non-respect de l'une quelconque de ces règles risquerait fort de compromettre votre succès à échouer ! J'ai des contre-exemples à votre disposition.

Jean-Philippe a détourné ce texte vers la formation des enseignants de mathématiques, et en voici la dernière version, pour initiés.

Comment faire pour dégoûter définitivement les élèves des mathématiques en 10 leçons

Jean-Philippe Drouhard

University of Buenos Aires

1. La Théorie

Introduction

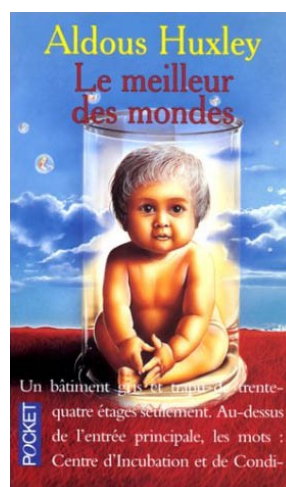
- Comment éviter que les générations à venir ne fassent preuve
 - d'esprit critique,
 - de capacité de raisonnement,
- facteurs qui contrarient considérablement le développement d'un sain comportement de
 - consommateur (moteur de la croissance),
 - citoyen (électeur du pouvoir en place).

Objectif

- empêcher le développement indésirable des capacités logiques, mathématiques et scientifiques.

Méthode

- Procédé Bokanovsky,
- Diminuer l'horaire des sciences et alourdir les contenus mathématiques,
- limités à leur partie la plus rébarbative et la moins susceptible de développer le raisonnement,
- tout en diminuant le temps consacré à leur étude.



Résultats

- Succès pour la majorité des élèves.
 - Ils renoncent à comprendre.
 - Ils s'en remettent à l'autorité du maître (éducation à la citoyenneté).
 - Plus tard ils s'en remettront à l'autorité des économistes invités sur les plateaux de **TF1**,
 - Ainsi qu'à tout détenteur de l'autorité (policier, vigile, inspecteur, directeur, DRH, HADOPI...).
 - Ils font semblant d'avoir compris et obéissent sans discuter (socialisation)
 - Plus tard ils accepteront sans broncher de mettre en œuvre les directives managériales (à *France Télécom S.A.* ou à *Éducation Nationale S.A.*).

Les élèves rebelles

- Ce sont les élèves qui ne font pas confiance à l'autorité, incapables de faire semblant de comprendre et d'obéir sans discuter.
- → Éducation spécialisée
 - mais les enseignants spécialisés ne sont pas fiables,
 - même les AVS/EVS expérimentés ne sont plus fiables.
- → extinction des réseaux d'aide spécialisée.
- → élimination des AVS/EVS expérimentés.

- → intégration des élèves à besoins spécifiques dans des classes ordinaires avec des maîtres non formés.

Quels enseignants spécialisés pour les élèves rebelles ?

- Formation bidon
 - → Coup de com'
 - → L'insuffisance calculée de la formation empêche l'adaptation de l'enseignement aux rebelles
- mais une simple reprise des enseignements ordinaires ne peut en améliorer les résultats qu'à la marge;
- et les conditions même de l'éducation spécialisée ne favorisent pas la peur d'apprendre et la soumission servile.

Formation en mathématiques

- Je vais me conformer aux demandes du Ministère en vous formant - scientifiquement- à optimiser votre potentiel de socialisateur de rebelles à l'éducation ordinaire.
- Je ferai appel aux ressources des recherches les plus pointues en didactique des mathématiques.
- programme en dix points, avec pour objectifs :
 - faire que l'élève renonce pour toujours à comprendre,
 - le rendre incapable de la moindre production,
 - le dégoûter totalement et à jamais des mathématiques (et du raisonnement en général).

Niveau I (débutants)

1^{er} principe : toujours plus de la même chose

- On joint ainsi l'ennuyeux (par obsolescence des savoirs) à l'inefficace.
- Intérêt des révisions.
- Celui qui se noie, le maintenir dans la piscine.



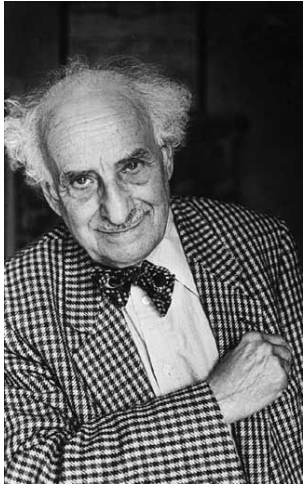
Stella Baruk

2^{ème} principe : répéter à l'élève que « c'est facile »

- Quand on n'arrive pas à faire quelque chose de facile c'est qu'on est un peu con.
- Et plus on dit que c'est facile, plus l'échec prouve la connerie.
- Le maître se montre gentil en encourageant mais en fait « casse » l'élève en lui prouvant sa nullité.
- C'est pour cela que l'évaluation en mathématiques est sans appel.
 - si on évaluait sur la connaissance de l'hébreu ou sur la virtuosité en viole de gambe, échouer ne serait pas très humiliant.

3^{ème} principe : dépersonnaliser, décontextualiser

- Il ne faut jamais relier les mathématiques à la réalité de la vie des enfants,
 - sinon ils risqueraient plus tard de raisonner dans leur vie de consommateurs, ce qui est justement ce qu'on veut éviter.



Hans Freudenthal



Ubiratan d'Ambrosio

- Le calcul mental est intéressant s'il est une source d'humiliation et de souffrance.
- il faut veiller à ce qu'il n'amène pas à une familiarité avec les nombres.
- Les mathématiques ne doivent pas avoir d'histoire.



Giorgio T. Bagni

Niveau II (avancés)

- où l'on commence à mettre en œuvre des éléments simples des recherches didactiques.

4^{ème} principe : 0% outil, 100% objet

- Les objets mathématiques doivent être étudiés pour eux-mêmes (aspect objet), jamais pour ce qu'ils pourraient permettre de faire (aspect outil).
- Les activités mathématiques doivent être sans intérêt, ne servir à rien, surtout pas à procurer du plaisir.
- On pourra utiliser sans modération les tests logiques, qui ont toute les qualités énumérées ici.



Régine Douady

Jeux

- Si on est forcé d'utiliser une approche ludique, on veillera à ce que la satisfaction de gagner soit indissociable de l'écrasement de l'adversaire.
- Il est en effet important de développer très tôt la compétition forcenée et l'individualisme et corrélativement de décourager toute coopération,
- (rôle d'éducation à la citoyenneté des maths).

5^{ème} principe : 0% de « méta- »

- l'apprentissage du raisonnement passant par le métacognitif (c'est-à-dire la réflexion sur le raisonnement lui-même) il importe d'en éradiquer toute possibilité d'accès.
- En particulier le maître s'abstiendra de tout commentaire sur le pourquoi et le

comment des activités mathématiques.

6^{ème} principe

- Vu qu'on sait que l'apprentissage de l'espace passe par un accès, moteur et multi-sensoriel,
 - aux trois types d'espace (micro, méso et macro),
 - ainsi qu'aux espaces de représentation sémiotiques et à l'articulation de ces espaces,
 - Alors, pour empêcher les élèves d'accéder à la connaissance de l'espace...



Marie-Hélène Salin

... il faut tout réduire et aplatir

- Restreindre strictement l'activité (en particulier géométrique) de l'élève à la feuille de papier, espace de représentation à deux dimensions.
- L'élève sera ainsi empêché de développer toute connaissance de l'espace dans lequel il vivra (grand et à trois dimensions) et surtout ne pourra jamais distinguer les propriétés géométrico-spatiales des conventions sémiotiques de représentation.

7^{ème} principe : appauvrir le nombre

- Il n'y a de nombre que cardinal,
- la division n'est qu'un partage.

Niveau III (confirmés)

- où l'on met en œuvre toutes les ressources des recherches didactiques de pointe.

8^{ème} principe : s'assurer que les situations

ne risquent pas de provoquer un apprentissage

- Ni dévolution,
- Ni action,
- Ni formulation,
- Ni validation,
- Ni institutionnalisation.



Guy Brousseau

9^{ème} principe : bloquer la sémiotique pour empêcher la noésis

- Les registres de représentation ne doivent être l'occasion
- Ni de traitement,
- Ni de signification,
- Ni (surtout) de conversion.
- Par exemple s'abstenir absolument de toute activité de type loto ou cartes multi-registres, ou encore d'Observation Raisonnée de la Langue Mathématique.



Raymond Duval

10^{ème} principe : le sens, verrouiller et confondre

- Tout ce qui précède contribue à bloquer l'accès au sens,
- mais il importe de verrouiller soigneusement **tout** accès au sens possible,
- car la curiosité spontanée et l'inventivité des élèves sont de redoutables obstacles à cette entreprise (surtout au primaire).

Confusion

- Aussi (mais ceci demande une bonne connaissance des théories de l'apprentissage) on s'attachera à générer le maximum de confusion afin d'éradiquer le peu de sens qui pourrait subsister,
- choisir la démarche d'apprentissage la plus éloignée du type de savoir que l'on veut faire acquérir.
 - Par exemple, faire apprendre par cœur des propriétés mathématiques que l'élève pourrait construire ou inversement lui demander de trouver par lui même des lois arbitraires de la représentation.

Conclusion

- Ne pas oublier : ennuyer ou martyriser les élèves en mathématiques est à la portée du premier venu, l'acquisition "sur le tas" de ces compétences est largement suffisant.
- Dégoûter à jamais des mathématiques de telle sorte que le dégoût soit transmis ensuite de génération en génération nécessite une formation spécifique appuyée sur une recherche d'excellence.



À l'université de Buenos Aires



Mabel et Jean-Philippe, gare de Monistrol

Cet ouvrage rassemble les contributions des participants à la journée de rencontres du 30 septembre 2016 autour des travaux de Jean-Philippe Drouhard, chercheur français en didactique des mathématiques, disparu brutalement le 14 décembre 2015.

Nous avons voulu réunir ces contributions et garder vivante l'œuvre de Jean-Philippe Drouhard pour permettre à ceux qui le connaissaient de retrouver la richesse de sa pensée et à ceux qui ne le connaissaient pas de la découvrir à travers les textes et les bibliographies.

Édité par Maryse Maurel

Dépôt légal janvier 2019

ISBN 978-2-9567301