



**HAL**  
open science

# L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques

Thomas Barrier, Viviane Durand-Guerrier, Zoé Mesnil

## ► To cite this version:

Thomas Barrier, Viviane Durand-Guerrier, Zoé Mesnil. L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation & Didactique*, 2019, 13 (1), pp.61-81. <10.4000/educationdidactique.3793>. <hal-02070074>

**HAL Id: hal-02070074**

**<https://hal.science/hal-02070074v1>**

Submitted on 23 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

---

# L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques

*Logical analysis as a tool for didactic studies in mathematics*

Thomas Barrier, Viviane Durand-Guerrier et Zoé Mesnil

---



## Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/3793>

DOI : [10.4000/educationdidactique.3793](https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793)

ISSN : 2111-4838

## Éditeur

Presses universitaires de Rennes

## Édition imprimée

Date de publication : 30 octobre 2019

Pagination : 61-81

ISBN : 978-2-7535-7833-3

ISSN : 1956-3485

## Référence électronique

Thomas Barrier, Viviane Durand-Guerrier et Zoé Mesnil, « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique* [En ligne], 13-1 | 2019, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 06 janvier 2021. URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/3793> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793>

---

## L'ANALYSE LOGIQUE COMME OUTIL POUR LES ÉTUDES DIDACTIQUES EN MATHÉMATIQUES

Thomas Barrier

Centre de recherches en sciences de l'éducation, Université libre de Bruxelles

Viviane Durand-Guerrier

IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

Zoé Mesnil

Laboratoire de Didactique André Revuz, université Paris-Diderot

Dans cet article, nous montrons comment une prise en charge explicite des questions de logique, et en particulier des questions de quantification, est susceptible de contribuer aux analyses didactiques en mathématiques. Nous nous intéressons tout d'abord aux processus de conceptualisation avant de nous focaliser plus spécifiquement sur les énoncés et leur signification, puis sur les situations de validation. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur divers travaux francophones, dont les nôtres. Nous avons cherché à mettre en évidence la cohérence d'ensemble et la complémentarité de ces approches. Les analyses sont illustrées dans le contexte de l'enseignement secondaire français, incluant les transitions école-collège et lycée-université.

Mots clés: logique, mathématiques, conceptualisation, langage, validation.

### *Logical analysis as a tool for didactic studies in mathematics*

*The purpose of this paper is to highlight the potential contribution of taking in account logical issues, in particular about quantification, for didactic analysis in mathematics. We first focus on conceptualization process, then we turn to statements and their meaning, and finally we study validation situations. To achieve our goal, we refer to various researches from French speaking didactique des mathématiques community, including ours. We have tried to show the global consistency of these approaches and their complementarity. The analyses are illustrated in the French secondary education context, including the primary-secondary and secondary tertiary-transitions.*

*Keywords: logic, mathematics, conceptualization, language, validation.*

## INTRODUCTION

La réapparition récente de contenus de logique dans les derniers programmes de mathématiques du lycée français a contribué à redonner de la vigueur à la question des relations entre le développement des compétences logiques des élèves, leurs pratiques langagières, le raisonnement et les apprentissages mathématiques. Cette question est d'autant plus vive du point de vue professionnel que nombre de professeur·e·s de mathématiques français·es ne disposent que de peu de connaissances théoriques dans le domaine, la logique étant souvent absente aujourd'hui des cursus conduisant au métier de professeur·e de mathématiques. Pour autant, la logique est bien présente dans l'activité mathématique, tant dans les contextes scolaires que dans la pratique experte que ce soit au niveau de l'action et de la conceptualisation, au niveau de la verbalisation et plus généralement au niveau du raisonnement mathématique, notamment déductif. Nous cherchons dans ce texte à identifier le rôle des compétences logiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en nous appuyant sur des illustrations relevant de l'enseignement secondaire, incluant les transitions école/collège et lycée/université. Plus précisément, notre objectif sera de mettre en évidence la manière dont les analyses logiques peuvent contribuer aux analyses didactiques. Du point de vue de la méthode, nous nous appuyons sur nos propres travaux et sur d'autres travaux, essentiellement francophones, de didactique des mathématiques se préoccupant de questions de logique, notamment ceux de Chellougui (2003), Chesnais (Barrier, Chesnais et Hache, 2014), Deloustal-Jorrand (2001), Hache (2015), Selden et Selden (1995)<sup>1</sup>. Nous ne proposons pas d'éléments empiriques originaux, l'apport de ce texte consiste plutôt en une mise en perspective de ces différents travaux, en la construction d'une cohérence. Ce texte est organisé en trois parties, chacune d'entre elles correspondant à une des trois catégories de travaux de recherche que nous avons dégagées : l'analyse logique des concepts, l'analyse logique des énoncés et l'analyse logique de la validation. Nous détaillons ci-dessous les objectifs et enjeux de ces trois parties.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la dimension logique de la conceptualisation. L'analyse logique des concepts mathématiques permet de poser la question du nombre et de la nature

des objets mathématiques qui sont mis en jeu en situation, aussi bien sur le plan matériel que verbal, et des éventuelles variations et ruptures associées qui peuvent apparaître au cours des apprentissages. Par ailleurs, la communauté des mathématicien·ne·s a développé des pratiques discursives qui lui sont propres et qui s'écartent parfois des pratiques langagières non mathématiques. Ces pratiques reposent sur de nombreux implicites qui sont parfois naturalisés au point d'être difficilement identifiables par les locuteurs·trices, y compris (voire en particulier) par les « locuteurs·trices compétent·e·s ». Il s'agit pourtant d'enjeux d'apprentissage, la transparence en classe ne garantissant d'aucune manière l'absence de difficultés ou d'obstacles dans le processus d'acculturation. En prenant appui sur un registre formel et/ou symbolique au sein duquel les énoncés mathématiques sont susceptibles d'être reformulés, l'analyse logique des énoncés permet de contribuer à l'étude des spécificités de ces pratiques, à l'identification de leur complexité. Enfin, la dimension logique et langagière de l'activité mathématique ne se réduit pas à la description des relations entre objets, à la représentation verbale d'un état de choses mathématiques. Le discours mathématique relève aussi du raisonnement, notamment du raisonnement déductif. L'analyse des pratiques langagières ne peut se faire indépendamment d'une prise en charge de l'intention stratégique de l'énonciateur·trice et de la structure des jeux de langage dans lesquels elles se situent. L'analyse logique de la validation permet là aussi une prise de distance par rapport aux usages. À l'image de ce qu'il se passe concernant la dimension descriptive du langage mathématique, voire à plus forte raison, les pratiques déductives reposent sur des implicites quant aux règles qui codifient l'élaboration d'un nouvel énoncé à partir de prémisses connues. Nous insistons sur le fait que notre propos n'est pas de « dénoncer » ces implicites ou d'alimenter l'illusion selon laquelle le discours mathématique serait, pourrait, ou devrait être parfaitement univoque. Ces implicites sont souvent tout aussi nécessaires au raisonnement et à la communication qu'ils peuvent être problématiques dans un contexte d'enseignement.

Nous terminons cette introduction en donnant quelques précisions sur notre approche des questions de logique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le terme de « logique » est utilisé dans divers contextes : on dira par exemple

qu'un argument élaboré dans le langage naturel est « logique » lorsqu'il paraît suffisamment consensuel ou évident ; dans d'autres circonstances, ce sont des théories mathématiques (théorie des modèles, théorie de la démonstration, etc.) ou d'autres disciplines (informatique, linguistique...) qui sont ainsi désignées ; dans les programmes scolaires actuels et les documents qui les accompagnent, le terme « logique » semble désigner des compétences mathématiques transversales relatives à la verbalisation et au raisonnement mais sans qu'aucune théorie sous-jacente ne soit avancée. Pour notre part, nous désignons par « logique » l'ensemble des travaux, de mathématicien-ne-s et de philosophes notamment, qui s'intéressent à la syntaxe permettant d'élaborer les énoncés, à la notion de vérité d'un énoncé dans une structure d'interprétation et à celles de validité logique et de démonstration. À la suite de divers travaux de didactique des mathématiques, nous considérons que le calcul des propositions, c'est-à-dire une approche de la logique centrée sur les seuls propositions et connecteurs propositionnels (« et », « ou », « implique », « non ») offre un cadre trop étroit pour rendre compte de l'activité mathématique (Durand-Guerrier et Arzac, 2003). Notre travail se situe dans le contexte du calcul des prédicats, c'est-à-dire que nous considérons nécessaire d'entrer « à l'intérieur » des propositions. Les propositions, c'est-à-dire les unités linguistiques auxquelles il est possible d'attribuer une valeur de vérité, au moins potentiellement, sont alors analysées à partir des catégories logiques fondamentales de propriété, de relation, de variable, de nom d'objet et de quantificateur. Signalons que c'est à ce contexte que renvoient implicitement les programmes de lycée lorsqu'il est question notamment des quantificateurs existentiel et universel ou de la quantification implicite des énoncés conditionnels. Du point de vue de l'analyse didactique, l'intérêt est de se doter d'outils pour rendre compte de la manière dont les objets et les moyens de les désigner (lettre de variable, nom d'objet) sont manipulés dans la pratique mathématique. Nous considérons que c'est à ce niveau que la logique est particulièrement féconde pour l'analyse des pratiques mathématiques. Ce cadre donne notamment la possibilité de prendre en considération des formules (dites ouvertes) comme «  $n$  est un nombre pair » qui n'ont pas à proprement parler de valeur de vérité, et d'aborder la question de la satisfaction d'une telle formule par divers objets d'un domaine d'interprétation

(Durand-Guerrier, 2005, p. 18-19). Dans ce texte, nous désignerons l'ensemble des formules (ouvertes ou closes) par le terme « énoncé », au sens de la production verbale d'un locuteur dans une situation d'énonciation, pour insister sur la dimension pragmatique de notre approche même si l'usage en logique semble plutôt être de réserver ce terme pour désigner les formules closes (sans variable qui ne soit sous la portée d'un quantificateur).

## ANALYSE LOGIQUE DES CONCEPTS

### Les catégories de la connaissance explicite<sup>2</sup>

La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990) définit la notion de concept à partir de trois ensembles. Le premier comprend les situations dans lesquelles le concept est susceptible d'être utilisé, le second comprend les invariants sur lesquels repose l'action des sujets et le troisième les représentations permettant les manipulations symboliques. Du côté de la description du comportement des sujets et de la conceptualisation, la notion centrale est celle de schème. Il s'agit de rendre compte d'une forme de régularité dans la conduite des sujets pour une classe de situations données. Au cœur des schèmes se trouvent ce que Vergnaud appelle les invariants opératoires :

Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments (Vergnaud, 1990, p. 145).

Le système des invariants opératoires est ce qui permet de penser le réel, il est au fondement des schèmes au sens où il ne peut y avoir d'organisation de l'action sans découpages (quels objets ?) et points de vue sur la situation (quelles relations entre ces objets ?), autrement dit sans énoncés tenus pour vrais par le sujet, au moins en acte (des jugements). Ces invariants opératoires sont selon Vergnaud de trois types logiques fondamentaux : les propositions, les fonctions propositionnelles et les arguments. Les propositions sont des formules closes possédant une

valeur de vérité. Elles sont implicitement universellement quantifiées puisque portant sur des classes de situations et permettent de décrire les théorèmes-en-acte. Les fonctions propositionnelles sont des formules ouvertes susceptibles d'être ou non satisfaites par divers objets. Elles permettent de décrire les concepts-en-acte. Les arguments sont des noms d'objets susceptibles d'être caractérisés ou d'être mis en relation via les fonctions propositionnelles. Pour ce qui nous intéresse ici, c'est-à-dire les relations entre logique, langage, raisonnement et apprentissage, nous retenons le fait que la conceptualisation mathématique repose sur une appréhension du monde que Vergnaud suggère de décrire par le langage des prédicats, y compris lorsque cette appréhension est opératoire plutôt que verbalement explicite. Précisons néanmoins que bien que Vergnaud souligne l'importance des invariants opératoires, il insiste sur le fait que les objectifs que se donne le sujet, les règles d'action, les inférences jouent aussi un rôle essentiel dans le fonctionnement des schèmes. Ceci nous semble aussi important pour ce qui est des aspects opératoires de la connaissance – les points de vue constituant la réalité organisée par le sujet sont toujours subordonnés à un but, à une action – que pour les aspects prédicatifs que nous aborderons dans les deuxième et troisième parties de ce texte. Ceci explique pourquoi nous nous intéresserons au langage aussi bien comme outil de construction et de description de la réalité mathématique (partie 2) que comme mode de raisonnement (partie 3).

Le processus de conceptualisation est un processus long, qui peut s'étendre sur plusieurs années, du fait de la variété des situations, des invariants et des signes qui peuvent être rencontrés. Le recours au langage des prédicats, à l'analyse « interne » des propositions en termes de relation entre objets, est un moyen d'envisager les ruptures potentielles dans les invariants opératoires et dans la manière dont la culture scolaire envisage d'organiser la réalité. Vergnaud (2002) signale l'évolution importante dans la forme opératoire des connaissances mobilisées lors d'une tâche de construction du symétrique d'une figure par rapport à une droite, sur papier quadrillé à l'école élémentaire, sur papier blanc au collège. Ici, les objets sont les figures et la droite ; le concept de symétrie fonctionne comme une relation ternaire, seul point de vue abordé à l'école élémentaire. Plus tard, au collège notamment, le concept

va être abordé comme un objet, par l'intermédiaire d'un processus de nominalisation. On affirmera par exemple que la symétrie conserve les angles, qu'elle est une isométrie. Ces variations dans le système des invariants opératoires occasionnent des ruptures qu'il nous semble important de saisir pour la recherche en didactique comme pour la formation des enseignant·e·s :

On peut aisément imaginer ce que l'accumulation de ruptures dans les formes opératoires et dans les formes prédicatives des connaissances mathématiques peut engendrer de difficultés pour les élèves. Les enseignants sont trop faiblement avertis de ces ruptures (Vergnaud, 2002, p. 16).

### Continuités et ruptures dans l'enseignement de la géométrie

La question des continuités et ruptures dans l'enseignement de la géométrie, en particulier à l'articulation entre l'école primaire et le collège, est une question vive de la recherche en didactique des mathématiques (Houdement et Kuzniak, 2006 ; Perrin-Glorian et Godin, 2017). Mangiante et Perrin-Glorian (2018) cherchent notamment à « penser un enseignement cohérent sur la scolarité obligatoire, permettant de s'appuyer efficacement sur G1 pour introduire G2<sup>3</sup> plutôt que de le rejeter en mettant en avant la méfiance par rapport à la figure ». L'approche qui est la nôtre dans ce texte nous semble pouvoir contribuer à cette réflexion dans la mesure où nous proposons un outil d'analyse (l'analyse logique) susceptible d'être mobilisé aussi bien pour questionner la structure des schèmes d'utilisation des instruments et celle de notre rapport aux figures matérielles (au cœur de G1), que celle des énoncés et des raisonnements déductifs qui sont aux fondements de G2.

D'un point de vue cognitif, Duval (2005) insiste sur l'importance de mettre en place des modes spécifiques d'appréhension des figures qui soient adaptés aux activités géométriques visées par l'enseignement. Il souligne en particulier le rôle du processus de « déconstruction dimensionnelle » dont nous allons voir qu'il joue un rôle essentiel dans diverses tâches de géométrie. Au cours de ce processus, les figures géométriques sont reconstruites à partir d'unités figurales de dimension inférieure (typiquement des

points et des droites) selon une dynamique qui est portée par les nécessités de la situation :

Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème (Duval, 2005, p. 26).

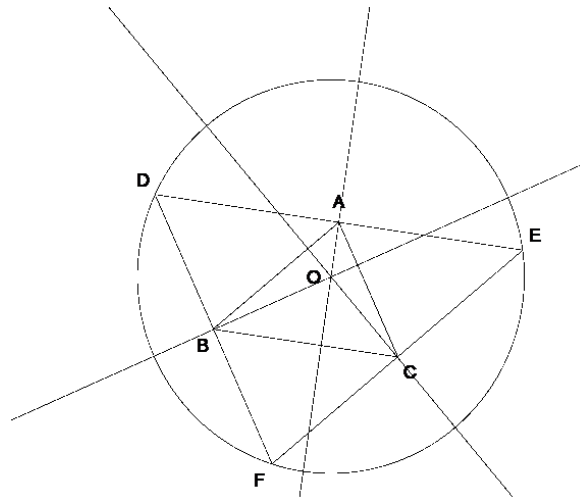
Que les connaissances en jeu soient plutôt de nature prédicative ou plutôt de nature opératoire, la question du nombre et de la nature des objets en jeu est essentielle dès lors que l'on cherche à analyser les comportements issus de l'interaction des sujets avec les situations. Par exemple, le tracé du milieu d'un segment ne conduira pas aux mêmes procédures selon que les invariants opératoires sur lesquels reposent les schèmes des élèves mobilisent les sommets dudit segment en tant qu'objets et l'alignement comme relation ternaire plutôt que le segment dans sa globalité et l'appartenance comme relation binaire (Barrier, Mathé et de Vittori, 2012). Au même titre que l'action matérielle (instrumentée ou non), la perception est déterminée par les invariants opératoires qui sont mis en jeu. Perception et action matérielle entretiennent des relations similaires à la conceptualisation :

On peut penser autrement, et prendre acte du fait que si les schèmes sont produits par le corps en situation, cela signifie que la perception et la pensée s'organisent mutuellement : pour parler comme James, la perception est « de la pensée et de la sensation qui ont fusionné ». On pourrait donc dire « au fond de la perception, la conceptualisation »<sup>4</sup>, ce qui ne serait pas une façon de revenir au kantisme, puisque la perception dont il s'agit ici n'est pas une perception-interface, mais une perception liée à la fois au monde et au concept (Sensevy, 2007, p. 27).

Considérons maintenant un exemple pour aborder les relations entre G1 et G2, et plus précisément entre les tâches de reproduction instrumentée de figure et les tâches de démonstration.

La figure ci-dessous est définie de la manière suivante : soit ABC un triangle, O le point d'intersection de ses hauteurs, D, E et F les points d'intersection des droites perpendiculaires à ces hauteurs passant respectivement par A, B et C. Il s'agit alors de démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF.

Figure 1



Une preuve assez « naturelle » consiste à faire observer que les droites (AE) et (BC) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (AO), tout comme (CE) et (BA). On en déduit alors que AECB est un parallélogramme, et un raisonnement identique montre que ACBD l'est également. Ceci permet de déduire que A est le milieu de [DE], puis que la hauteur du triangle ABC passant par A est la médiatrice du côté [DE] du triangle EDF, et enfin de conclure en montrant de même que la hauteur du triangle ABC passant par C est la médiatrice du côté [EF] du triangle EDF. Si l'on se focalise sur notre appréhension du point E, on peut constater que la première partie de la démonstration précédente suppose de considérer cet objet à la fois comme un point du cercle, un sommet du triangle DEF et comme un sommet du parallélogramme AECB, donc plutôt en relation avec des éléments de surface (des contours), mais aussi comme intersection des droites (AE) et (CE), elles-mêmes étant en relation de parallélisme avec d'autres droites (le réseau formé par ces droites fournissant le substrat pour « détacher » triangles et parallélogrammes dans le cadre d'un processus de déconstruction dimensionnelle), et comme extrémité du segment [DE], donc plutôt en relation avec des lignes. Comme le font observer Perrin-Glorian et Godin (2017, p. 14) :

La nécessité de changer constamment de dimension [...] dans le regard qu'on porte sur les figures dans une démonstration est une difficulté essentielle de

l'articulation entre le registre des figures et celui du langage en géométrie que pointe Duval (1995) et qu'il a appelée ensuite (Duval, 2005) déconstruction dimensionnelle.

Ces aspects liés au mode de visualisation des figures ne sont que rarement pris en charge dans l'enseignement ou même en formation des enseignant-e-s (Barrier, Mathé et Mithalal, 2016). Pour autant, leur prise en compte permet de penser des éléments de continuité entre le travail sur les figures matérielles tel qu'il se pratique en primaire et au début du collège et la géométrie théorique et déductive. Précisons cette remarque en appui sur la notion d'invariant opératoire. Considérons cette fois que la tâche des élèves soit de reproduire la figure ci-dessus à partir du triangle ABC donné comme amorce et des instruments usuels de géométrie et focalisons à nouveau notre attention sur le point E. L'appréhension spontanée de la figure modèle conduit d'abord à percevoir le point E comme un sommet du triangle DEF et/ou un point du cercle (une visualisation qualifiée par Duval d'iconique), cependant cette seule approche ne permet pas d'aboutir. La construction aux instruments du point E suppose de saisir les contraintes qui s'exercent sur ce point dans la figure modèle en relation avec des éléments de la figure de dimension 1 (les lignes). Du point de vue des invariants opératoires, le point E doit donc aussi être pensé et construit comme une intersection de lignes (elles-mêmes saisies en relation avec d'autres lignes) et plus seulement comme sommet, ce qui s'exprime par une relation ternaire entre un point et deux lignes : E est l'intersection de (AE) et (CE). Il faut donc que les élèves disposent du concept-en-acte de point comme intersection de droites. Cette même relation est centrale dans la tâche de géométrie théorique ci-dessus, elle est présente dans la définition de la figure et joue un rôle essentiel dans la preuve esquissée. En somme, il existe des proximités structurelles dans la manière de percevoir la figure 1 entre les deux tâches évoquées au niveau du système d'objets et de relations structurant les activités de reproduction et de démonstration.

Revenons à la problématique de l'articulation entre les paradigmes géométriques G1 et G2. Ces analyses montrent que d'un point de vue logique (formulé ici en termes d'invariants opératoires) certaines tâches clairement situées dans le paradigme G1 comme des tâches de reproduction instrumentée

de figures et d'autres tâches relevant du paradigme G2 comme des tâches de démonstration reposent sur le même type d'appréhension des figures. Ceci contribue à identifier des éléments de continuité entre G1 et G2 dans la perspective d'un enseignement cohérent sur la scolarité obligatoire (Mangiante et Perrin-Glorian, 2018).

Dans l'exemple qui va suivre, nous chercherons à montrer la manière dont l'analyse logique des concepts peut être un outil pour mieux saisir les invariants opératoires en lien avec l'activité des élèves dans chacune de ses facettes : opératoire, prédicative et perceptive. Signalons que dans cet exemple, nous nous intéresserons à la fois à l'activité des élèves, mais aussi à son articulation avec celle de l'enseignante. La communication réussie entre élèves et enseignante suppose en effet que les systèmes d'objets considérés soient cohérents entre les différent-e-s acteurs-trices.

### Rôle de l'analyse logique des concepts : une illustration en 6<sup>e</sup>

Commençons par dégager un certain nombre de configurations possibles pour le système des invariants opératoires associé au concept de symétrie. La symétrie axiale peut se définir comme une relation ternaire entre deux figures (ou deux points) et un axe de symétrie (S1). Elle peut aussi se définir comme une relation binaire entre une figure et un axe (S2), ou comme une relation binaire entre deux figures (caractérisation S1 avec quantification existentielle de l'axe de symétrie – S3). La symétrie peut aussi être définie comme propriété d'une figure (caractérisation S2 avec quantification existentielle sur l'axe de symétrie – S4). Elle peut aussi être appréhendée comme un objet dont les propriétés et relations avec d'autres objets pourront être étudiées (S5). Le concept de symétrie axiale peut donc mobiliser des arrière-plans logiques différents, selon l'arité des relations en jeu et selon la nature des objets concernés (points et/ou figures et/ou droites). Chacun de ces systèmes d'invariants opératoires peut être associé, à un moment ou à un autre de la scolarité des élèves, à des enjeux d'apprentissage propres (Perrin-Glorian, 2012). Il s'agit non seulement de percevoir les figures d'une manière spécifique, mais aussi de se familiariser avec des pratiques instrumentées et langagières qui sont propres à chacun de

ces aspects du concept de symétrie. Pour ce qui est des connaissances prédictives, il est intéressant de remarquer qu'une même expression peut prendre des significations différentes selon la caractérisation qui est mobilisée par le contexte. Prenons l'exemple de l'énoncé « F et G ne sont pas symétriques ». Sans plus de précisions, il est possible de le lire d'au moins trois manières : F n'est pas symétrique et G n'est pas symétrique (caractérisation S4, et-propositionnel au sens de Mesnil 2014, cf. partie 2) ; il est impossible de trouver une droite d telle que F et G soient symétriques l'un de l'autre par rapport à d (caractérisation S3, et-couple au sens de Mesnil 2014, cf. partie 2) ; F et G ne sont pas symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d (caractérisation S1, la droite d étant donnée par la situation d'énonciation).

Nous nous intéressons maintenant à une séance autour du concept de symétrie dans une classe de 6e. L'exemple est emprunté à Barrier, Chesnais et Hache (2014). On trouvera dans cet article des analyses plus développées que celles que nous proposons ci-dessous. La consigne de l'exercice proposé aux élèves est la suivante : « préciser, dans chaque cas, si les deux figures sont symétriques par rapport à la droite d ».

Figure 2

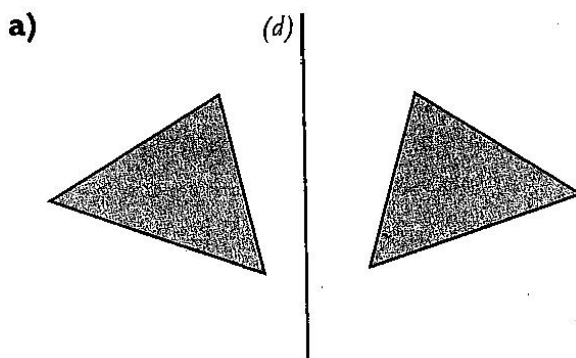
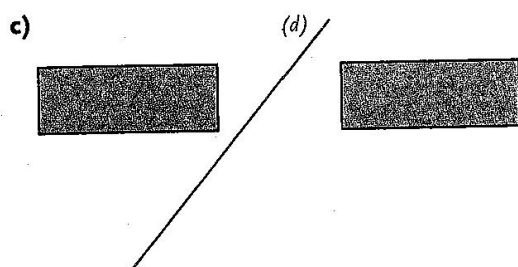


Figure 3



L'objectif de ces cas a) (figure 2) et c) (figure 3) semble être de travailler la caractérisation ternaire de la symétrie (S1) en revenant sur la définition de la symétrie par pliage, à l'aide d'un calque pour les séances auxquelles nous nous intéressons, déjà abordée à l'école primaire (deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d si elles se superposent par pliage le long de cette droite d), tout en précisant certains aspects de cette relation puisque les triangles, comme les deux rectangles, sont bien symétriques entre eux, mais pas par rapport à la droite d considérée. On peut s'attendre à ce que les élèves produisent une réponse positive (donc erronée), soit parce qu'ils ne prennent pas en compte l'axe (à l'image de S3 ou S4) ou soit parce qu'ils n'en identifient pas clairement le rôle (équidistance des sommets à l'axe, direction orthogonale).

L'exercice est traité en classe : travail individuel, interventions ponctuelles de l'enseignante, puis correction collective. Beaucoup d'élèves produisent une réponse erronée. Pour le cas a), plusieurs élèves déclarent par exemple que « les figures sont symétriques ». Pourtant, l'enseignante avait insisté quelques minutes auparavant sur l'importance de par rapport à dans l'expression « symétrique par rapport à la droite d » mais les élèves semblent en difficulté pour s'approprier cette remarque. Tout se passe comme s'ils ne prenaient pas particulièrement en compte l'axe de symétrie (que ce soit du point de vue perceptif, instrumental ou verbal), conformément à un schème dont le domaine de validité comprend les couples de figures qui ne sont pas symétriques (au sens de S3) et les couples de figures symétriques et leur axe de symétrie (au sens de S1). Cette difficulté porte notamment sur les aspects instrumentaux, plusieurs élèves s'interrogeant sur la nécessité de décalquer la droite<sup>5</sup>. Face à ces difficultés, l'enseignante prend en charge l'articulation des différents aspects de l'activité des élèves. La superposition par pliage ayant été évoquée, elle rappelle alors que « par rapport à la droite d » indique « l'endroit où l'on plie », faisant ainsi le lien entre le verbal et le matériel. D'une manière générale, on observe dans la séance une évolution dans le système des invariants opératoires structurant les schèmes des élèves, vers une prise en considération des trois objets (les deux figures et la droite). Les échanges entre l'enseignante et Lucien, élève en difficulté au début de la séance, en sont une bonne illustration :

Enseignante : le petit c, Lucien, est-ce que tu peux répondre, maintenant ?

Lucien : euh les deux rectangles sont pas symétriques

Enseignante : ne sont pas symétriques [intonation ascendante – phrase suspendue]

Lucien : par rapport à la droite d

Enseignante : oui, en revanche, c'est ce que tu disais tout à l'heure, tu avais bien l'impression qu'ils étaient symétriques, mais pas – je vois bien que quand je plie sur d, mes deux rectangles ne se ?

E : superposent pas

Enseignante : superposent pas, vous le voyez. En revanche est-ce que tu pourrais plier différemment pour qu'ils se superposent ?

Lucien : euh, droit, comme ça [Lucien indique par des gestes la direction verticale]

Enseignante : voilà, verticalement, on voit bien que si on plie verticalement – donc [elle écrit] les rectangles ne sont pas symétriques par rapport à d.

Dans cet extrait, on peut relever que grâce à la reprise par l'enseignante de la négation incomplète de Lucien, celui-ci parvient à préciser sa verbalisation, et peu après, toujours sous l'étayage de l'enseignante, à faire le lien avec les connaissances opératoires en jeu. Barrier, Chesnais et Hache (2014) analysent également une autre mise en œuvre de cette même tâche, dans une autre classe. La comparaison met en évidence des prises en compte différentes des enjeux de savoir liés à l'axe de symétrie, la deuxième enseignante ayant recours plus fortement aux implicites, avec de possibles malentendus. Un exemple :

Enseignante : Donc les figures a) et c) qu'est-ce qu'on peut dire ?

E : ne sont pas symétriques

P : ne sont pas symétriques [intonation descendante – fin de phrase].

Dans cette partie, nous avons cherché à montrer la manière dont l'analyse logique des concepts pouvait permettre de décrire les systèmes d'invariants opératoires qui sont au cœur des schèmes. Cela nous semble susceptible de contribuer aux analyses didactiques de l'activité des élèves (voire de l'enseignant.e.s), aussi bien dans ses aspects perceptifs, opératoires et langagiers. Dans la suite de ce texte, nous nous concentrons plus particulièrement sur les aspects langagiers de la conceptualisation et des apprentissages :

La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans le processus de conceptualisation (Vergnaud, 2002, p. 14).

## ANALYSE LOGIQUE DES ÉNONCÉS

La complexité qui réside dans le dire est notamment due à des variations de signification que l'analyse logique des énoncés nous permet de mettre au jour. Un exemple bien connu est celui des variations de signification du mot « un ». Son usage pour marquer une quantification universelle, que l'on retrouve dans le langage courant, est particulièrement fréquent en mathématiques : on dira « un entier divisible par 4 est pair » pour signifier que tout entier divisible par 4 est pair. Mais il existe aussi des emplois du mot « un » pour marquer une quantification existentielle, comme dans « 4 est le carré d'un entier ». Le langage des prédicats nous permet de modéliser les interprétations attendues : « pour tout entier  $n$  divisible par 4,  $n$  est pair » pour le premier énoncé, « il existe un entier  $n$  tel que  $n^2 = 4$  » pour le deuxième. Il permet aussi d'envisager des interprétations possibles, et de comprendre ainsi qu'un ou une élève puisse dire que l'énoncé « un rectangle a ses 4 côtés égaux » est vrai sans que cela soit une erreur due à un manque de connaissances mathématiques, seulement parce qu'il ou elle interprète cet énoncé comme « il existe un rectangle qui a ses 4 côtés égaux » (voir l'exemple du losange dans Durand-Guerrier, 1999, p. 73-75). Nous donnerons dans la suite d'autres exemples d'ambiguïtés ou d'implicites existants dans certaines formulations couramment utilisées au sein de la communauté mathématique, mais auparavant, nous présentons une utilisation des registres de représentation sémiotique pour décrire les différents niveaux de formalisation du langage mathématique.

### Registres de représentation sémiotique des énoncés du langage mathématique

La pratique mathématique experte, celle des mathématicien-ne-s, repose sur des allers-retours entre un langage plus ou moins formalisé, voire symbolique, et un langage plus proche du langage naturel. Le degré de formalisation des énoncés

dépend alors de la situation d'énonciation, des objectifs que le mathématicien ou la mathématicienne se donne (rédiger une démonstration, communiquer un énoncé, prendre des notes dans une conférence etc.), de sa familiarité avec les concepts en jeu comme de celle des personnes auxquelles il ou elle s'adresse (le cas échéant). Le plus souvent, les énoncés du langage mathématique empruntent aux deux registres, celui de la langue naturelle et celui du symbolisme logico-mathématique. La complexité de ces énoncés dépasse néanmoins celle de la seule juxtaposition de ces deux registres : le travail inaugural de Laborde (1982) en didactique montre qu'ils sont le lieu d'une véritable interaction entre deux codes, ce qui crée des déformations, des adaptations, qui sont autant de spécificités langagières que les élèves et étudiant-e-s doivent s'approprier. Par exemple, l'énoncé «  $n^2 = 2x \ 2k^2$  est un entier pair » ne respecte pas la syntaxe de la langue française : le prédicat « être un entier pair » attend comme argument un nom d'objet, or ici, le sujet est un énoncé (une égalité).

Mesnil (2014) a récemment prolongé ce travail en s'intéressant aux reformulations des énoncés entre différents registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1993). La dimension langagière de la pratique mathématique experte se caractérise non seulement par la maîtrise des usages propres à un registre sémiotique donné (le fonctionnement de la négation dans le langage des prédicats par exemple) mais aussi par l'aptitude à passer d'un registre à l'autre, en fonction des objectifs que l'on se donne. Mesnil distingue les quatre registres suivants :

- registre de la langue naturelle : « tout entier naturel divisible par 4 est pair » [on pourra néanmoins remarquer que bien que le registre relève de la langue naturelle le traitement des énoncés au sein de ce registre est spécifique au contexte mathématique] ou encore « si un entier est divisible par 4, alors il est pair »
- registre intermédiaire : « si  $n$  est divisible par 4 alors  $n$  est pair » [l'énoncé est classé dans le registre intermédiaire plutôt que formalisé car la quantification universelle sur  $n$  reste implicite ; on pourra remarquer la répétition de la variable  $n$ , cette tournure syntaxique étant spécifique des mathématiques]
- registre formalisé : « pour tout entier  $n$ , si  $n$  est divisible par 4 alors  $n$  est pair » [ici la structure logique est explicite ; on considère que les prédicats « être divisible par 4 » et « être pair » font partie du langage] ou « pour tout entier  $n$ , s'il existe un entier  $k$  tel

que  $n = 4k$  alors il existe un entier  $k'$  tel que  $n = 2k'$  »

– registre symbolique : «  $\forall n \in \mathbb{N} \ d_4(n) \Rightarrow p(n)$  » [ $d_4$  et  $p$  sont dans ce cas deux symboles appartenant au langage symbolique ; les ressources sémiotiques sont toutes symboliques] ou «  $\forall n \in \mathbb{N} \ [(\exists k \in \mathbb{N} \ n = 4k) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N} \ n = 2l)]$  »

Cette catégorisation est un raffinement de la catégorisation proposée par Duval (1993) qui ne mentionne que le registre de la langue naturelle et le registre symbolique. Ce point de vue tend à assimiler formalisation et symbolisation, processus qu'il est pourtant important de distinguer du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage. La formalisation peut être définie comme une mise en forme codifiée. La symbolisation oblige bien sûr à la formalisation, puisqu'il faut respecter les règles d'utilisation des signes, mais on peut formaliser sans symboliser. Illustrons cela à travers la distinction quantification/quantificateur introduite par Mesnil (2014) : dans une proposition il y a une quantification quand des éléments y expriment, implicitement ou explicitement, l'idée d'une quantité (par exemple, il y a une quantification universelle implicite dans la proposition « un entier divisible par 4 est pair », et une quantification universelle explicite dans « tout entier divisible par 4 est pair »), il y a un quantificateur quand la proposition peut être analysée en deux blocs : une expression exprimant la quantification (le quantificateur) et une formule dans laquelle la variable sur laquelle porte le quantificateur est libre (par exemple le quantificateur universel dans une formulation connue telle que « pour tout entier  $n$ , si  $n$  est divisible par 4 alors  $n$  est pair », ou dans une formulation plus inhabituelle « tout entier  $n$  est tel que si  $n$  est divisible par 4 alors  $n$  est pair »). Ainsi, l'expression de la quantification peut très bien se faire dans les registres de la langue naturelle ou intermédiaire, l'utilisation d'un quantificateur relève des registres formalisé ou symbolique. Et l'on voit bien alors que la conversion la plus délicate n'est pas celle consistant à passer de la formalisation à la symbolisation, mais bien celle qui consiste à formaliser, quand bien même les quantificateurs sont exprimés « en mots ».

Un autre apport de cette catégorisation est l'introduction du registre intermédiaire, qui relève plus d'une nécessité que d'un choix *a priori*. En effet, prenons un énoncé tel que «  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  », nous pourrions considérer que l'expression « avec

$k \in \mathbb{N}$  » joue le rôle d'un quantificateur existentiel, au sens défini ci-dessus. Regardons alors l'énoncé «  $n^2 = 2k$  avec  $k = 2k^2$  » (qui pourrait suivre le précédent dans la démonstration de « le carré d'un entier pair est pair »), l'expression « avec  $k = 2k^2$  » n'est pas un quantificateur, mais signale une affectation de valeur. Nous retrouvons là la polysémie du mot « avec » montrée par Hache (2015) qui s'est intéressé à ses usages dans des manuels de mathématiques du collège :

On constate donc une variété (sans doute ici non exhaustive) d'usages de « avec » en lien avec les variables : quantification universelle, quantification existentielle, quantification universelle et existentielle, condition de sens d'une expression, affectation de valeur, etc. (Hache 2015, p. 37).

Cette polysémie empêche de classer de tels énoncés dans le registre formalisé, et nécessite donc l'introduction de ce registre intermédiaire. Nous retrouvons la démarche de Laborde (1982) qui avait introduit une langue notée  $\mathbb{LM}$  (pour langue mathématique) aux côtés des expressions symboliques et des formulations relevant de la langue courante. La classification proposée ici adopte un point de vue plus syntaxique que celui de Laborde : en effet, une proposition telle que « tout entier divisible par 4 est pair » est classée dans le registre de la langue naturelle, de par la proximité de sa structure avec une phrase telle que « toute chose est bonne à prendre » alors que pour Laborde, elle relève de  $\mathbb{LM}$  de par la présence « de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques » (Laborde, 1982, p. 19).

Cette classification en différents registres permet de penser les difficultés potentielles qui pourraient se poser aux élèves au cours du travail de reformulation, notamment dans le passage des registres de la langue naturelle ou intermédiaire au registre formalisé. Tout d'abord, la structure syntaxique de la version formalisée d'un énoncé est parfois éloignée de certaines versions en langue naturelle. Au-delà de la difficulté qui consiste à exhiber les définitions des propriétés « être divisible par 4 » et « être pair » dans la proposition « un entier naturel divisible par 4 est pair », même en gardant ces termes, la variable  $n$ , inexistante dans la formulation dans le registre de la langue naturelle, est répétée trois fois dans la formulation « pour tout entier  $n$ , si  $n$  est divisible par 4 alors  $n$  est pair » du registre formalisé. Nous retrou-

vons également dans les conversions entre ces deux registres des difficultés liées à des problèmes de non-congruence : la proposition «  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  » qui relève du registre intermédiaire, peut se reformuler en « il existe un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k$  ». La quantification « il existe un entier naturel  $k$  » qui correspond à « avec  $k \in \mathbb{N}$  » est à placer en tête de proposition, et non à la fin.

La dernière difficulté que nous évoquerons ici est liée à la formulation de la négation d'un énoncé, qui nécessite fréquemment des conversions entre registres. Les programmes actuels de mathématiques pour la classe de Terminale Scientifique proposent la définition suivante pour exprimer que  $u_n$  tend vers  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  : « tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang ». Cette formulation relève du registre intermédiaire, et l'utilisation de l'expression « à partir d'un certain rang » permet sans doute effectivement pour les élèves de comprendre cette notion de limite d'une suite lors d'une première approche, et d'en mémoriser une définition. Mais à l'inverse, la négation qui serait « il existe un intervalle ouvert contenant  $l$  qui ne contient pas toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang » est difficile à comprendre. Le recours à la définition plus formalisée « pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$ , il existe un entier  $N_0$  tel que pour tout entier  $n \geq N_0$   $u_n \in I$  » permet une formulation plus aisée de la négation, « il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$  tel que pour tout entier  $N_0$ , il existe un entier  $n \geq N_0$  tel que  $u_n \notin I$  », que l'on pourra reformuler en « il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$  tel que l'on puisse trouver des termes de rang aussi élevé que l'on veut n'appartenant pas à  $I$  ». Nous retrouvons là un argument donné par Duval (1993) en faveur du travail dans plusieurs registres de représentation sémiotique : l'économie de traitement. Selon l'usage que l'on veut en faire, il sera plus économique de dire simplement «  $f$  n'est pas croissante sur  $I$  », ou de recourir à la définition formalisée pour pouvoir appliquer les règles de formation de la négation et obtenir « il existe deux réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 \leq x_2$  et  $f(x_1) > f(x_2)$  ». Nous voyons également qu'il serait tout-à-fait dommageable de ne s'exprimer que dans un des registres. Cela fait bien longtemps que l'on sait l'intérêt de ne pas se limiter au registre de la langue naturelle, quand bien même celui-ci pourrait donner l'impression d'une plus grande simplicité. On sait depuis les

tentatives logicistes et l'échec des mathématiques modernes l'impossibilité « pratique » de se limiter au seul registre formalisé, quand bien même celui-ci pourrait donner l'impression d'une plus grande rigueur. En reprenant encore une fois un argument de Duval, nous pourrions dire que « la compréhension [d'un énoncé mathématique] repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (Duval, 1993, p. 51).

Contrairement à ce qu'il se passe dans les registres formalisé et symbolique, il y a des ambiguïtés, des implicites, de la polysémie dans certains énoncés formulés dans les registres de la langue naturelle et intermédiaire. L'analyse logique des énoncés permet alors de débusquer ces autres difficultés potentielles, qui sont cette fois-ci intra-registre, et d'anticiper de possibles malentendus entre enseignant·e·s et élèves.

### Polysémie du mot « et » : différents usages, même en mathématiques

Depuis la réapparition de notions de logique dans les programmes du lycée (à partir de 2009), la plupart des manuels proposent des pages présentant les notions de logique, et notamment les connecteurs ET et OU<sup>6</sup>. Plusieurs manuels réduisent l'usage du « et » en mathématiques à son utilisation comme connecteur logique entre deux propositions, usage unique qui est opposé à la multiplicité de sens du « et » dans le langage courant. L'analyse logique de différents énoncés mathématiques comportant un « et » va nous montrer qu'il en est bien autrement.

Un premier usage du mot « et » est effectivement à rapprocher de la conjonction des propositions (au sens du calcul propositionnel). Ex : « les nombres entiers  $n$  et  $m$  sont premiers ». Sur le plan logique, nous avons ici affaire à la conjonction des deux propositions « le nombre entier  $n$  est premier » avec « le nombre entier  $m$  est premier ». Dans le registre intermédiaire, la partie prédicative des deux énoncés est mise en commun, ce qui permet une économie dans la manière de dire.

Un second usage correspond à la formation d'un couple dont les éléments sont mis en relation. Ex : « les nombres entiers  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux ». Ici, il est énoncé que la relation binaire « être premier avec » s'applique au couple d'entier  $n$  et  $m$ .

Si dans cet énoncé, la présence de « entre eux » est un indicateur de la présence d'une relation symétrique entre plusieurs éléments, on ne retrouve pas toujours d'indicateur syntaxique orientant la lecture. On dira par exemple parfois que « les figures a) et c) sont symétriques par rapport à la droite (d) », qui peut être entendu comme « les figures a) et c) sont symétriques *l'une de l'autre* par rapport à la droite (d) » ou alors comme « la droite (d) est un axe de symétrie de chacune des figures a) et c) ». Seule la connaissance du contexte permet de trancher entre ces deux interprétations. Remarquons enfin que cette pratique semble réservée au cas de relations pour lesquelles l'ordre des arguments n'a pas d'importance, autrement dit aux contextes « symétriques ». Prenons le cas de la relation binaire non symétrique « divise ». On dira que « le nombre entier  $n$  divise le nombre entier  $m$  », les deux arguments étant placés de part et d'autre du signe de relation. Mesnil (2014) signale un cas pour lequel une même occurrence du mot « et » dans un énoncé du registre intermédiaire recouvre les deux usages signalés ci-dessus : « les ensembles  $A$  et  $B$  sont non vides et disjoints ». Le premier « et » joue deux rôles, celui en lien avec la conjonction de propositions pour le prédicat « être vide », et celui en lien avec les relations symétriques pour la relation « être disjoint de ».

Un troisième usage correspond à l'énumération des éléments d'un ensemble. Dans ce cas, le mot « et » est utilisé avec l'article défini « les » : «  $-1$  et  $1$  sont les solutions réelles de l'équation  $x^4 - 1 = 0$  ». L'utilisation de l'article indéfini « des » dans la même phrase appellerait une toute autre interprétation (conjonction de deux propositions). L'utilisation de la forme rigide « ... et ... sont les ... » doit s'interpréter comme la conjonction de trois propositions, une d'entre elles exprimant le fait que tous les éléments de l'ensemble considéré ont bien été énumérés.

Savoir à quel usage du mot « et » on a affaire nécessite donc des connaissances relatives aux autres termes de l'énoncé dans lequel il est employé. Nous devons aux membres du CREM<sup>7</sup> de Nivelles (Belgique) l'exemple ci-après qui montre que cela n'est pas toujours suffisant. Considérons les deux énoncés « les multiples de 3 et de 4 sont des multiples de 12 » et « les multiples de 6 et de 9 sont des multiples de 3 ». Le premier doit être entendu comme « pour tout entier  $n$ , (si  $n$  est multiple de 3 et de 4, alors  $n$  est multiple de 12) », le deuxième

comme « pour tout entier  $n$ , [(si  $n$  est multiple de 6 alors  $n$  est multiple de 3) et (si  $n$  est multiple de 9 alors  $n$  est multiple de 3)] ». Les deux énoncés étant construits de façon rigoureusement similaire, la compréhension de la relation « être un multiple de » ne suffit pas pour choisir la bonne interprétation, il faut en outre avoir des connaissances sur les objets (ici les nombres en jeu).

Ceci montre la complexité propre à certaines formulations des registres de la langue naturelle ou intermédiaire. Dès lors, se pose la question des malentendus possibles entre l'intention de l'énonciatrice et l'interprétation de celui ou celle qui reconstruit la signification de l'énoncé. Nous proposons maintenant d'illustrer ce phénomène à l'aide de l'exemple de l'interprétation des implications implicitement universellement quantifiées par les élèves.

### Polysémie de l'implication : de l'implicite dans les pratiques langagières

La notion d'implication est également une notion polysémique (Durand-Guerrier, 2003). Commençons par distinguer les signes tels que « si..., alors... » ou «  $\Rightarrow$  » des propositions qu'ils permettent de construire. L'implication fonctionne

alors comme un opérateur syntaxique qui, au sein du calcul des propositions, permet de construire une nouvelle proposition à partir de deux propositions. La proposition  $(A \Rightarrow B)$  est équivalente à la proposition  $(\text{NON } A \text{ OU } B)$ . Les valeurs de vérité de ces deux énoncés sont le faux lorsque  $A$  est vrai et  $B$  est faux, et le vrai dans chacune des trois autres configurations pour les distributions de valeurs de vérité de  $A$  et de  $B$ . Le langage des prédicats, que nous utilisons comme ressource dans ce texte, permet par ailleurs de considérer des implications « ouvertes », c'est-à-dire des énoncés de la forme  $(P(x) \Rightarrow Q(x))$  dans lesquels la variable  $x$  est libre. Ces énoncés ne sont pas des propositions au sens où ils n'ont pas à proprement parler de valeur de vérité. On dira qu'ils sont satisfaits par un élément  $a$  d'un domaine d'interprétation lorsque l'implication entre propositions  $(P(a) \Rightarrow Q(a))$  est vraie. Cette notion de satisfaction permet d'étendre l'application de la notion de vérité aux implications universellement quantifiées (notamment) : on affirme que l'énoncé  $\forall x \in E (P(x) \Rightarrow Q(x))$  est vrai lorsque chaque élément du domaine d'interprétation  $E$  satisfait l'implication ouverte associée. Ces distinctions vont nous permettre d'analyser les écarts d'interprétation entre des élèves et des enseignant-e-s concernant la tâche ci-dessous (Durand-Guerrier, 1999).

Figure 4 : Le labyrinthe (dessin)

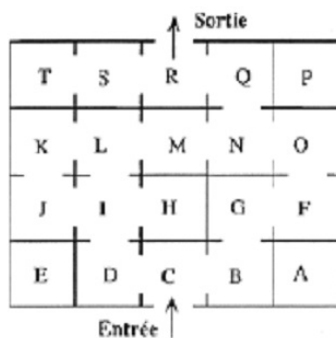


Figure 5 : Le labyrinthe – consignes et questions

*Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.*

Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.

Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure.

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.

*En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée*

**Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.**

Phrase n°1 : « X est passé par P »

Phrase n°2 : « X est passé par N »

Phrase n°3 : « X est passé par M »

Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »

Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »

Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Cette tâche a été proposée par des enseignant-e-s volontaires à des élèves de seconde dans le cadre d'une évaluation à l'échelon national organisée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). Lors de l'analyse des résultats présentés dans Bodin (1992), les auteur-e-s font part de leur étonnement quant aux réponses apportées par les élèves relativement à la phrase n° 6 en particulier. Les élèves répondent majoritairement ON NE PEUT PAS SAVOIR, la tendance étant encore accentuée pour celles et ceux qui sont à l'aise en mathématiques, alors que les auteur-e-s considèrent que la bonne réponse est la réponse FAUSSE. Durand-Guerrier (1999) montre que cet écart peut s'analyser comme le produit d'une divergence d'interprétation de la phrase 6. Il est en effet possible de lire cette phrase comme une instance d'une implication ouverte d'une part (la lettre  $X$  désignant un individu singulier), ou comme une implication universellement quantifiée (sur l'ensemble des parcours par exemple) d'autre part. Dans le premier cas, il est raisonnable de dire que l'on ne peut pas savoir si la phrase est vraie ou non (satisfaite ou non par le parcours de  $X$ ) alors que la phrase est fausse selon la deuxième lecture. Les deux réponses sont tout aussi rationnelles l'une que l'autre du point de vue strictement logique. Notons cependant que dans la plupart des cas, celles ou ceux qui répondent que la phrase 6 est fausse proposent la réponse ON NE PEUT PAS SAVOIR pour la phrase n° 3, ce qui conduit à changer le statut logique de la lettre  $X$  entre la phrase n° 3 et la phrase n° 6, ce qui ne peut se comprendre que d'un point de vue pragmatique (Durand-Guerrier, 2005). Cette observation, renouvelée par ailleurs dans d'autres contextes depuis lors, atteste de divergences importantes dans l'interprétation des énoncés donnés sous forme d'implication. La pratique de la quantification implicite des implications n'est pas partagée par de nombreux élèves du lycée, alors qu'elle semble assez largement l'être au sein de la communauté mathématique. D'autres exemples sont présentés dans Durand-Guerrier *et al.* (2000).

Venons-en maintenant au point de vue déductif sur l'implication. Cela nous servira de transition vers l'analyse logique de la validation qui sera l'objet de la troisième et dernière partie de ce texte. Deux règles de raisonnement sont directement liées à l'implication. Le *Modus Ponens* permet de déduire la proposition  $B$  à partir des données  $A$  et

$(A \Rightarrow B)$ . Cette règle est au cœur de l'élaboration de très nombreuses démonstrations mathématiques, celles qui utilisent des théorèmes formulés sous forme d'implication. Si l'on souhaite démontrer une implication  $(A \Rightarrow B)$ , la démarche consiste souvent à construire une preuve de  $B$  sous l'hypothèse  $A$ . Nous ne détaillerons pas plus avant le fonctionnement de ces règles. Néanmoins, il nous semble intéressant de relever le fait que, pour chacun de ces objectifs (utiliser ou démontrer une implication), la démarche déductive est élaborée dans un contexte où  $A$  est très souvent l'objet d'une énonciation de celle ou celui qui engage la démarche déductive (en tant que donnée ou hypothèse). Du point de vue de la déduction logique, tout se passe donc le plus souvent comme si l'antécédent était vrai puisque cet antécédent est énoncé. Ce constat peut être rapproché d'autres (cf. Mesnil, 2014). Tout d'abord, de nombreux élèves et étudiant-e-s (y compris avancé-e-s) sont en difficulté lorsqu'il s'agit d'évaluer la vérité d'une implication à prémisse fausse. Par ailleurs, la conception selon laquelle lorsqu'une implication est en jeu, son antécédent est nécessairement vrai peut mener à des difficultés lorsqu'il s'agit par exemple d'utiliser un *Modus Tollens* (déduction de  $(\text{non } A)$  à partir de  $(A \Rightarrow B)$  et  $(\text{non } B)$ ) (Deloustal-Jorrand, 2001 ; Durand-Guerrier, 2005). Par ailleurs le fait que la démonstration d'une implication  $(A \Rightarrow B)$  consiste le plus souvent en l'élaboration d'une démonstration de  $B$  sous l'hypothèse  $A$  contribue à expliquer pourquoi un-e mathématicien-ne ne dirait pas « si racine de 2 est irrationnel, alors 6 est un nombre parfait » quand bien même l'énoncé est vrai. Ce serait une curiosité pragmatique (mais pas une erreur de logique) que d'énoncer  $(A \Rightarrow B)$  si la preuve de  $B$  pouvait être produite indépendamment de  $A$ . Ces usages contribuent à une lecture des implications en termes de dépendance entre antécédent et conclusion.

Ce paragraphe avait pour objectif de défendre l'idée selon laquelle la manière dont nous interprétons les énoncés, ce qu'ils nous disent de l'état de choses qu'ils décrivent, n'est pas indépendante de la manière dont nous les utilisons, notamment dans les contextes déductifs. En mathématiques, les énoncés ne sont pas seulement utilisés pour décrire les objets dont ils parlent (propriétés, relations, etc.) mais aussi pour élaborer des preuves. Il s'agit d'une dimension essentielle de leur signification sur laquelle nous nous penchons dans la suite de l'article.

## ANALYSE LOGIQUE DE LA VALIDATION

## Une approche complémentaire pour saisir la signification des énoncés

Nous reprenons ici certaines analyses de Hache (2015), conduites dans le paradigme de l'analyse logique des énoncés présenté dans la partie précédente, pour montrer en quoi le point de vue que nous adoptons dans cette partie est complémentaire. Hache s'intéresse notamment à l'énoncé « quel que soit l'entier naturel  $n$ , si  $n$  s'écrit sous la forme  $n = 2k+1$  avec  $k$  entier, alors  $n$  est un entier impair », implication qui est une conséquence de la définition de « être impair ». Conformément à la méthode décrite précédemment, il s'appuie sur l'identification des possibilités de reformulation de l'énoncé en question au sein de la logique des prédicats. Une première reformulation dans le registre symbolique est la suivante «  $\forall n \in \mathbb{N} [(\exists k \in \mathbb{N} n = 2k+1) \Rightarrow I(n)]$  » ( $I$  symbolisant le prédicat « être impair »). Mais il est également possible d'entendre le caractère quelconque de la variable  $k$  dans l'expression « avec  $k$  entier » : n'importe quel entier  $k$  vérifiant  $n = 2k+1$  (quand bien même il n'en existe qu'un) permet de conclure que  $n$  est impair. Cette lecture amène à la reformulation «  $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} (n = 2k+1 \Rightarrow I(n))$  », différente de la première par la quantification portant sur  $k$ . Ce constat conduit alors l'auteur à souligner le caractère non univoque de la reformulation qui peut être faite de l'expression « avec  $k$  entier », même si, comme il le rappelle, ces deux reformulations syntaxiquement différentes sont en fait logiquement équivalentes puisque la variable  $k$  n'apparaît pas dans la conclusion de l'implication.

Nous proposons ici d'opérer un changement de perspective pour nous intéresser à l'usage qui peut être fait de l'énoncé. Imaginons par exemple que l'on souhaite utiliser l'énoncé pour montrer que le nombre 17 est un nombre impair. Bien que deux reformulations dans le registre symbolique soient envisageables, la stratégie d'usage de l'énoncé est bien univoque, y compris pour ce qui est en rapport avec la manipulation de la variable  $k$  : c'est à celle ou celui qui utilise l'énoncé d'être en mesure de trouver un entier  $k$  qui vérifie la relation  $17 = 2k+1$ . Nous proposerons plus loin un cadre logique qui nous permettra de préciser cette remarque. Ce point de vue pragmatique vient renforcer le point de vue sémantique qui montrait déjà l'équivalence des deux formulations,

malgré une différence syntaxique. L'ensemble du traitement de cet exemple met au jour la complémentarité des trois regards dans l'analyse d'un tel énoncé.

Nous poursuivons l'argument en montrant cette fois que deux formulations proches peuvent jouer des rôles différents, avoir des significations pragmatiques différentes. Nous empruntons à nouveau un exemple aux travaux de Hache (2015). Il s'agit d'un extrait d'une preuve du fait qu'un nombre entier et son carré ont même parité par un étudiant de première année de Licence.

Figure 6

The image shows a handwritten mathematical derivation on a grid background. The text is written in black ink and reads:
   
Line 1:  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ 
  
Line 2:  $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$  avec  $k' \in \mathbb{Z}$ 
  
Line 3:  $n^2$  s'écrit sous la forme  $2k'$ , donc il est pair

Les deux énoncés «  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  » et «  $n^2 = \dots = 2k'$  avec  $k' \in \mathbb{Z}$  » écrits sur deux lignes consécutives ont des formes syntaxiques très proches. L'utilisation de la variable  $k$  (ou  $k'$ ) semble dans les deux cas pouvoir être rapprochée d'une quantification existentielle. Pour autant, si l'on s'intéresse à la signification pragmatique de ces énoncés, on peut remarquer que les fonctions des expressions « avec  $k \in \mathbb{Z}$  » et « avec  $k' \in \mathbb{Z}$  » sont différentes. On pourra s'en convaincre en essayant de substituer « or » à « avec » dans chacune des deux phrases. Ceci ne semble acceptable que pour la deuxième occurrence de « avec ». Le mode d'analyse présenté dans la partie précédente échoue à rendre compte de cette distinction. Nous préciserons cette analyse par la suite. L'enjeu de cette partie va maintenant être de présenter (succinctement) des outils logiques qui puissent contribuer à l'analyse didactique de la dynamique du discours de validation, notamment en rendant disponible un cadre théorique pour appréhender la manipulation des lettres et des objets dans la pratique mathématique.

## Quels outils ? La déduction naturelle

Un premier outil logique susceptible de contribuer à l'analyse didactique du processus de validation est la déduction naturelle. Durand-Guerrier et Arzac (2003) utilisent la formalisation proposée par Copi (1954), Hache et Mesnil (2017) celle due à Gentzen (1955) et dont la version de Copi est une reprise articulant

les points de vue syntaxique (règle de déduction) et sémantique (introduction d'un domaine générique d'interprétation pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs). La déduction naturelle propose un ensemble de règles formant un système dans lequel formaliser les démonstrations mathématiques<sup>8</sup>. Elle se donne par ailleurs la contrainte que les formalisations produites restent aussi proches que possible des pratiques effectives des mathématicien-ne-s. Pour chaque connecteur et quantificateur, la déduction naturelle propose deux règles codifiant la manière dont le connecteur (ou le quantificateur) peut être introduit ou éliminé au cours d'une démonstration. Nous allons décrire succinctement et à la manière de Copi (1954) les règles relatives aux quantificateurs de manière à être en mesure de proposer une analyse de l'extrait précédent (figure 6).

- Règle d'élimination du quantificateur universel : depuis  $\forall x f(x)$  on peut déduire  $f(a)$
- Commentaires :  $a$  est une lettre de constante d'objet et  $f(a)$  résulte de  $f(x)$  par la substitution de  $a$  à  $x$  dans toutes les occurrences libres de  $x$  dans  $f(x)$ .
- Règle d'introduction du quantificateur universel : depuis  $f(a)$  on peut déduire  $\forall x f(x)$
- Commentaires :  $a$  dénote un élément sélectionné de manière arbitraire, sans aucune hypothèse autre que son appartenance au domaine considéré.
- Règle d'introduction du quantificateur existentiel : depuis  $f(a)$  on peut déduire  $\exists x f(x)$
- Commentaires :  $a$  est n'importe quelle constante d'objet.
- Règle d'élimination du quantificateur existentiel : depuis  $\exists x f(x)$  on peut déduire  $f(w)$
- Commentaires :  $w$  est n'importe quelle constante d'objet qui n'a pas d'occurrence préalable dans ce contexte. Elle est utilisée pour dénoter l'individu ou un des individus dont l'existence est affirmée par la quantification existentielle.

Nous sommes maintenant en mesure de rendre compte plus précisément de l'extrait précédent concernant les expressions « avec  $k \in \mathbb{Z}$  » et « avec  $k' \in \mathbb{Z}$  » (figure 6). La formulation de la première ligne correspond à un usage de la règle d'élimination du quantificateur existentiel à partir de l'hypothèse «  $\exists k \in \mathbb{Z} n = 2k$  ». L'expression « avec  $k \in \mathbb{Z}$  » rend compte du fait qu'il faut interpréter  $k$  comme une constante d'objet représentant un entier relatif. Moyennant quelques manipulations algébriques (que

l'on pourrait formaliser en introduisant les hypothèses ad hoc dans la preuve si l'on voulait produire une modélisation complète), l'auteur parvient à la relation  $n^2 = 2k'$ . L'expression « avec  $k' \in \mathbb{Z}$  » a cette fois une fonction différente. Du point de vue de la déduction naturelle, il s'agit de signaler que  $k' = 2k^2$  est bien une constante d'objet (un terme) représentant un entier relatif, et qu'il est en conséquence possible d'utiliser la règle d'introduction du quantificateur existentiel en substituant une variable à ce terme qui soit sous la portée du quantificateur. En somme, bien que les expressions considérées soient syntaxiquement identiques, et toutes deux en relation avec une quantification existentielle, leurs fonctions divergent : « avec  $k \in \mathbb{Z}$  » résulte de l'utilisation de la règle d'élimination du quantificateur existentiel portant sur un énoncé précédant son utilisation dans l'ordre de la démonstration. L'expression « avec  $k' \in \mathbb{Z}$  » exprime une condition pour l'utilisation de la règle d'introduction du quantificateur existentiel, l'énoncé existentiel (implicitement) produit succède à l'utilisation de cette règle dans la dynamique de la démonstration. La déduction naturelle procure donc un cadre théorique pour interpréter le fait que seule la deuxième occurrence de « avec » puisse être remplacée par un « or » dans l'extrait analysé. Ce « avec/or » a une fonction similaire à celle d'un « or » dans le schéma de déduction mieux connu qu'est le *Modus Ponens* (« je sais que  $(A \Rightarrow B)$  ; or  $A$  ; donc  $B$  ») : il s'agit de montrer que l'on est bien dans les conditions d'application d'une règle d'inférence.

Le type d'analyse proposé ici n'est envisageable que si l'on se donne les moyens de penser que l'activité mathématique déductive repose de manière très importante sur le recours à des énoncés qui ne sont pas des formules closes, des propositions au sens fort utilisé dans cet article. Il faut également signaler que, le plus souvent, seuls les énoncés sont explicitement écrits, les règles qui permettent de progresser dans le processus de démonstration ne faisant l'objet que de peu de verbalisations explicites, y compris dans l'enseignement, mis à part peut-être dans certaines situations pour les utilisations du *Modus Ponens*. Dans ce contexte, la charge de reconstruire la dynamique logique de l'argument produit, l'identification des raisons pour lesquelles une collection ordonnée d'énoncés constitue ou non une démonstration est implicitement confiée aux élèves (et étudiant-e-s), sans que les connaissances en jeu ne fassent le plus souvent l'objet d'un enseignement organisé.

La complexité de la tâche de reconstruction de la dynamique logique des preuves augmente avec la complexité logique des énoncés. Les recherches portant sur cette question se sont notamment focalisées sur la transition entre l'enseignement secondaire et supérieur, et sur le cas des énoncés, de la forme « Pour tout  $x$ , il existe  $y$   $f(x, y)$  ». Dans ce cas, une nouvelle précision doit être apportée concernant l'utilisation des quatre règles décrites ci-dessus. En effet, dans le cas d'une instantiation existentielle suivant une instantiation universelle, la lettre introduite en éliminant le quantificateur existentiel « dépend » de celle introduite en éliminant le quantificateur universel. Il faut donc s'assurer avant l'introduction d'un quantificateur universel que  $f(a)$  ne contient aucune lettre de constante préalablement introduite par la règle d'élimination du quantificateur existentiel. L'oubli de cette règle de dépendance est une source d'erreur que l'on retrouve tant dans l'histoire que dans les preuves produites par les élèves et les étudiant-e-s (Durand-Guerrier et Arzac, 2003). Nous donnons en annexe un exemple décrit et analysé dans Barrier et Durand-Guerrier (2013).

Les difficultés rencontrées par les étudiant-e-s pour gérer les énoncés comportant une alternance de quantificateurs universels et existentiels sont attestées dans la littérature (Dubinsky et Yparaki, 2000 ; Chellougui, 2003 ; Durand-Guerrier et Arzac, 2003). Elles sont renforcées par les pratiques de quantification implicites des énoncés universels discutées plus haut dans le cas de la tâche du Labyrinthe. La déduction naturelle contribue à donner des outils aux enseignant-e-s pour penser et analyser la gestion de la dynamique des démonstrations et notamment la thématique de la réintroduction des quantificateurs, cet aspect ne faisant que très rarement l'objet d'un travail explicite (la quantification des propositions démontrées reste souvent implicite).

### Quels outils ? La logique dialogique

Dans ce paragraphe, nous présentons un autre outil susceptible de contribuer à l'analyse logique de la validation, la logique dialogique. Une présentation plus complète est disponible dans Redmond et Fontaine (2011). Nous mobiliserons ce cadre logique pour préciser l'analyse déjà esquissée à propos de l'énoncé portant sur les nombres impairs. Dans les approches dialogiques, la validation d'une

proposition prend la forme d'un dialogue opposant deux joueuses selon un ensemble de règles du jeu. La joueuse qui propose l'énoncé à valider est appelée Proposante, son adversaire est l'Opposante. Certaines règles, associées aux constantes logiques, régissent le déroulement pas à pas du dialogue dans le respect d'autres règles plus globales qui sont appelées règles structurelles. Dans le contexte des jeux de validation formelle, chaque joueuse réalise chacune à son tour une action : une assertion, une question, un choix de lettre ou d'objet d'une structure d'interprétation. Le jeu commence par l'assertion de la thèse, il se termine après un nombre fini de coups par la victoire de l'une ou l'autre des deux joueuses. Une proposition sera dite formellement valide s'il existe une stratégie gagnante pour la Proposante dans le jeu face à l'Opposante.

### Règles pour les constantes logiques

R-ET : Lorsqu'un énoncé de la forme  $A \text{ ET } B$  est en jeu, une attaque consiste à choisir l'un des deux membres de la conjonction, une défense consiste à faire l'assertion du membre choisi.

R-OU : Lorsqu'un énoncé de la forme  $A \text{ OU } B$  est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir l'un des deux membres de la disjonction, une défense consiste à choisir ce membre et à en faire l'assertion.

R-IMPLIQUE : Lorsqu'un énoncé de la forme  $A \Rightarrow B$  est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion  $A$ , une défense à faire l'assertion  $B$ .

R-NON : Lorsqu'un énoncé de la forme  $\text{non } A$  est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion de  $A$ , et il n'y a pas de défense possible.

R-UNIV : Lorsqu'un énoncé de la forme  $\forall xP(x)$  est en jeu, une attaque consiste à choisir un nom d'objet  $a$ , une défense consiste à faire l'assertion  $P(a)$ .

R-EXIST : Lorsqu'un énoncé de la forme  $\exists xP(x)$  est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir un nom d'objet, une défense consiste à réaliser ce choix d'un certain  $a$  et à faire l'assertion de  $P(a)$ .

### Règles structurelles

R-Lancement du jeu : Le jeu commence par l'assertion par la Proposante de la proposition qui fait

l'objet de la validation. Les joueuses jouent ensuite chacune à leur tour.

**R-Fin de partie** : Le jeu se termine lorsqu'une joueuse ne peut plus produire de coup. L'autre joueuse a alors gagné la partie.

**R-Jeu formel** : La Proposante ne peut pas faire l'assertion d'une proposition atomique<sup>9</sup>, à moins que la proposition ait été préalablement avancée par l'Opposante<sup>10</sup>.

**R-Classique** : Chaque joueuse peut soit attaquer toute assertion (non atomique) faite par son adversaire, soit se défendre contre toute attaque de son adversaire.

Nous retournons ici à l'exemple introduit plus haut concernant les nombres impairs. Il s'agit à la fois d'illustrer l'utilisation des règles précédentes et de montrer en quoi l'analyse dialogique permet de préciser les questions de quantifications relatives à l'énoncé « quel que soit l'entier naturel  $n$ , si  $n$  s'écrit sous la forme  $n = 2k+1$  avec  $k$  entier, alors  $n$  est un entier impair » ( $\alpha$ ). Imaginons que pour valider (formellement) un énoncé donné (noté ci-dessous  $E$ ), la Proposante ait besoin de recourir à l'énoncé « 17 est impair » sous les hypothèses ( $\alpha$ ) et «  $17=2*8+1$  ». Le jeu de validation prendrait alors l'une des deux formes suivantes, selon l'interprétation formelle qui est faite de ( $\alpha$ ) :

Figure 7 : Cas n° 1 – interprétation de ( $\alpha$ ) comme  $\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} (n = 2k+1 \Rightarrow I(n))$

	Opposante			Proposante	
-2	$\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} (n = 2k+1 \Rightarrow I(n))$				
-1	$17 = 2*8+1$				
				$E$	0
	[...]			[...]	
$p+1$	$\forall n \in \mathbb{N} (17 = 2k+1 \Rightarrow I(17))$	-2	$?-\forall [17]$	$p$	
$p+3$	$17 = 2*8+1 \Rightarrow I(17)$	$p+1$	$?-\forall [8]$	$p+2$	
$p+5$	$I(17)$	$p+3$	$17 = 2*8+1$	$p+4$	
	[...]		[...]		

Commentaires de lecture : Les coups -1 et -2 sont des concessions initiales de l'Opposante. Ils représentent les hypothèses à partir desquelles la Proposante va pouvoir travailler en utilisant les règles pour les constantes logiques dans le cadre des règles structurelles. Nous les notons de manière négative pour signifier que ces coups représentent ce qui est disponible au moment où le dialogue de validation démarre véritablement, c'est-à-dire au moment de l'assertion par la Proposante de la thèse qui fait l'ob-

jet du jeu (coup n° 0, R-Lancement de jeu). D'une manière générale, les nombres figurant dans les colonnes extérieures du tableau servent à repérer l'ordre dans lequel les coups sont joués. Ils définissent donc un ordre possible de lecture. Une attaque fait avancer d'une ligne alors qu'une défense est représentée sur la même ligne que l'attaque correspondante. Le cas échéant, les numéros des assertions qui sont attaquées sont mentionnés dans les colonnes centrales. Certaines défenses étant parfois laissées « en attente », les nombres figurant dans les colonnes extérieures ne sont pas nécessairement rangés par ordre croissant : la lecture n'est pas linéaire.

Après avoir avancé sa thèse ( $E$ ) et après un début de dialogue portant sur cette thèse ([...]), la Proposante souhaite pouvoir utiliser l'assertion  $I(17)$ , c'est-à-dire « 17 est impair ». Elle commence alors par attaquer l'hypothèse -2 lors de son  $p$ -ième coup en faisant le choix du nom d'objet 17 (R-UNIV). L'Opposante se défend par le coup  $p+1$  (R-UNIV). La Proposante poursuit en attaquant cette défense  $p+1$  au coup  $p+2$  avec le nom d'objet 8 (R-UNIV) et l'Opposante se défend (coup  $p+3$ , R-UNIV). La Proposante attaque à nouveau la défense de l'Opposante (coup  $p+4$ , R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). Le coup  $p+5$  est une défense de l'Opposante face à cette nouvelle attaque. Celle-ci concède l'énoncé  $I(17)$  qui est dorénavant susceptible d'être utilisé par le ou la Proposante (R-Jeu formel). L'argumentation peut alors se poursuivre ([...]).

Figure 8 : Cas n° 2 – Interprétation de ( $\alpha$ ) comme  $\forall n \in \mathbb{N} [(\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1) \rightarrow I(n)]$

	Opposante			Proposante	
-2	$\forall n \in \mathbb{N} [(\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k+1) \Rightarrow I(n)]$				
-1	$17 = 2*8+1$				
				$E$	0
	[...]			[...]	
$p+1$	$(\exists k \in \mathbb{N} / 17 = 2k+1) \Rightarrow I(17)$	-2	$?-\forall [17]$	$p$	
$p+5$	$I(17)$	$p+1$	$\exists k \in \mathbb{N} / 17 = 2k+1$	$p+2$	
$p+3$	$?-\exists$	$p+2$	$17 = 2*8+1 [8]$	$p+4$	
	[...]		[...]		

Commentaires de lecture : Le début du jeu est identique au précédent moyennant une variation dans la concession initiale -2. Le  $n$ -ième coup est une attaque par la Proposante de la concession initiale -2. C'est la Proposante qui choisit le nom d'objet 17

(R-UNIV). L'Opposante se défend en  $p+1$  (R-UNIV). En  $p+2$ , la Proposante attaque le coup  $p+1$  de l'Opposante (R-IMPLIQUE). Plutôt que de répondre tout de suite et de concéder l'énoncé  $I(17)$  soit « 17 est impair », l'Opposante (contre-)attaque le coup  $p+2$  en sollicitant le choix d'un nom d'objet (coup  $p+3$ , R-EXIST, R-Classique). La Proposante se défend : elle choisit le nom d'objet 8 (coup  $p+4$ , R-EXIST, R-Jeu formel). Au coup suivant, l'Opposante n'a plus d'autre choix que de se défendre de l'attaque de la Proposante qui était restée en suspens (coup  $p+2$ ), elle concède l'énoncé  $I(17)$  (coup  $p+5$ , R-IMPLIQUE) qui pourra alors être utilisé par son adversaire (R-Jeu formel).

Nous allons maintenant nous intéresser à la dimension stratégique des choix opérés par les joueuses pour chacune des deux modélisations, notamment ceux relatifs à la lettre  $k$ . Cette dimension s'analyse en observant quels noms d'objets ont été choisis, par qui et dans quel ordre. En l'occurrence, dans chacun des deux cas, ce sont les mêmes objets qui sont choisis, et par la même joueuse (la Proposante). Du point de vue de la dimension stratégique du jeu, le fait qu'il y ait trois coups intercalés ( $p+1$ ,  $p+2$  et  $p+3$ ) entre ces choix dans le deuxième tableau alors qu'il n'y en a qu'un seul ( $p+1$ ) dans le premier n'est pas significatif puisque le choix du nom d'objet 8 est avant tout lié à l'hypothèse  $-1$  (R-Jeu formel), et non à d'éventuelles informations portées par ces coups intermédiaires. Les modélisations prenant appui sur la logique dialogique permettent ainsi de préciser en quoi la dimension stratégique de la signification de  $(\alpha)$  n'est pas affectée par l'existence de deux reformulations de cet énoncé dans les registres formel ou symbolique.

Les approches dialogiques de la logique ont jusqu'ici été utilisées pour essentiellement deux raisons. D'une part, celles-ci offrent un cadre théorique pour approcher la dimension stratégique des preuves, et ainsi contribuer notamment à l'analyse des situations de validation (Barrier, 2011 ; Barrier et Durand-Guerrier, 2013). La notion de stratégie est en effet au cœur des modélisations que proposent ces approches (la validité se définit comme l'existence d'une stratégie gagnante dans un jeu). Un aspect essentiel de la communication d'un discours déductif est d'en saisir la dynamique, l'organisation stratégique. Comprendre chacun des énoncés d'une démonstration ne garantit en rien d'en percevoir le fonctionnement pas plus qu'être en mesure de suivre pas à pas une partie d'échecs ne peut s'identifier à en comprendre la

dynamique. La distinction entre le niveau de la partie et celui de la stratégie permet de rendre compte de ces aspects. D'autre part, certaines variations sur les règles du jeu de validation permettent de se doter d'un cadre théorique pour aborder la notion sémantique de satisfaction d'un énoncé par un élément d'un domaine d'interprétation, et plus généralement celle de vérité d'un énoncé relativement à un domaine d'interprétation (Durand-Guerrier, 2005). Les approches dialogiques de la logique constituent ainsi un cadre englobant permettant d'aborder conjointement les dimensions sémantique (actions sur les objets, recherches d'exemples) et syntaxique (manipulation des énoncés) dans le processus d'élaboration des démonstrations (Barrier, 2008 ; Barrier, 2016).

## CONCLUSION

Dans un ouvrage destiné aux futur·e·s enseignant·e·s de mathématiques, Glaeser (1973) considère que la formalisation de la grammaire du calcul des prédicats est trop complexe pour être entreprise dans son ouvrage. Il ne la traite donc pas, se concentrant sur le calcul propositionnel. Néanmoins, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, il nous semble illusoire de vouloir faire l'économie des questions de quantification pour une analyse logique de la conceptualisation, des énoncés et des preuves mathématiques, ce qui justifie le recours au calcul des prédicats comme théorie de référence explicite pour une étude didactique de l'activité mathématique.

Nous avons tout d'abord illustré, sur le cas de la symétrie, le point de vue défendu par Gérard Vergnaud de la pertinence des catégories explicites de la connaissance, modélisées dans le calcul des prédicats, pour étudier les processus de conceptualisation. Nous avons ensuite mis en valeur la complexité et la subtilité des usages de la quantification tant dans l'interprétation des énoncés verbalisés que dans les situations de validation. En somme, dans cet article, nous avons cherché à structurer et mettre en cohérence différents travaux conduits dans la communauté francophone de recherche en didactique des mathématiques et qui s'intéressent aux apports de la logique pour les analyses didactiques. Selon les aspects de l'activité mathématique auxquels les chercheur·e·s s'intéressent – conceptualisation, verbalisation et/ou validation – les analyses logiques prennent des formes adaptées et selon nous complé-

mentaires les unes des autres. Il existe néanmoins une régularité dans les divers travaux mentionnés, chacun à leur manière entre à l'intérieur des propositions et mobilise des catégories logiques plus fines comme celles de relation, de variable, d'objet, de quantificateur. Ces analyses permettent de reconsidérer l'illusion de transparence des énoncés mathématiques en considérant les interrelations entre les aspects syntaxique, sémantique et pragmatique qui sont au cœur de l'activité mathématique.

À l'heure actuelle, la maîtrise du langage et du raisonnement mathématiques est un objectif d'enseignement et d'apprentissage, que ce soit dans les programmes du lycée ou au début du supérieur à travers quelques heures de cours spécifiquement dédiées. Les notions de logique mathématique mobilisées dans cet article ne sont pas toutes connues de l'ensemble des mathématicien-ne-s et enseignant-e-s de mathématiques, notamment ce qui relève de la théorie de la démonstration (notion de preuve formelle, déduction naturelle, logique dialogique). En soumettant à des enseignant-e-s une démonstration de topologie produite par un étudiant et comportant une erreur, Durand-Guerrier et Arzac (2003) ont montré comment dans ce cas particulier « le professeur communique des règles de raisonnement contextualisées qui remplacent l'appel explicite à la logique. » (p. 331). La question devient alors plus largement d'identifier ce qui fait référence pour les enseignant-e-s dans le discours sur le langage et le raisonnement qu'ils proposent à leurs élèves ou étudiant-e-s. L'ensemble des analyses et des exemples présentés soutiennent selon nous la nécessité d'introduire dans la formation des enseignant-e-s des connaissances minimales en logique des prédicats du premier ordre permettant de conduire les analyses didactiques des énoncés et des preuves qui vivent dans la classe de mathématiques tout au long de l'enseignement secondaire et à l'université.

## NOTES

1. Ce texte s'appuie pour partie sur un texte publié dans les actes électroniques du 22<sup>e</sup> colloque de la CORFEM, Nîmes, Juin 2015 (Barrier et Durand-Guerrier, 2017).
2. cf. Durand-Guerrier (2013) pour des développements complémentaires.
3. Mangiante et Perrin-Glorian font ici référence à la « géométrie naturelle » (G1) et à la « géométrie axiomatique naturelle » (G2) au sens de Houdement et Kuzniak (2006).

4. Sensevy fait implicitement référence à la formule de Vergnaud : « au fond de l'action, la conceptualisation ».
5. Ce n'est bien sûr pas une nécessité impérative mais ces interrogations montrent l'embarras des élèves quant à la prise en charge de cet objet.
6. À l'inverse de la flèche  $\Rightarrow$ , qui est le symbole du connecteur permettant de construire une implication, les symboles  $\wedge$  et  $\vee$  utilisés en logique mathématique pour construire une conjonction ou une disjonction sont peu utilisés par les mathématicien-ne-s. Nous préférons alors l'utilisation des majuscules pour noter ces connecteurs.
7. Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques
8. Elle peut également être utilisée dans d'autres domaines tels que la linguistique, la philosophie, la psychologie ou l'informatique (voir par exemple Desclés, Djoual et Le Priol, 2010).
9. Les propositions atomiques sont les propositions les plus simples sur le plan logique : elles sont indécomposables car elles ne comportent plus de constantes logiques (ET, OU, IL EXISTE, etc.).
10. Cette règle dit que soutenir un énoncé élémentaire n'est possible que si cet énoncé est une hypothèse (on peut voir les assertions de l'Opposante comme des hypothèses pour la Proposante).

## RÉFÉRENCES

- Bodin, A. (dir.) (1992). Évaluation du programme de mathématiques Seconde 1991, EVAPM 2 91. Paris, France : édition APMEP.
- Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation & Didactique*, 2(3), 35-58.
- Barrier, T. (2011). Les pratiques langagières des étudiants en analyse réelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(3), 259-290.
- Barrier, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Éducation*, 27, 94-117.
- Barrier, T., Chesnais A., et Hache C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale – Revue de recherches en éducation*, 54, 175-193.
- Barrier, T., et Durand-Guerrier, V. (2013). Modélisations logiques en situation de validation. Dans A. Bronner et al. (Eds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Barrier, T., et Durand-Guerrier, V. (2017). *La quantification au cœur des relations entre langage, raisonnement et apprentissages mathématiques*. Dans Actes du 22<sup>e</sup> colloque de la CORFEM, Nîmes, France.

- Barrier, T., Mathé, A.-C., et Mithalal, J. (2016). Formation initiale des enseignants du premier degré en géométrie : quels savoirs ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 317-342.
- Barrier, T., Mathé, A.-C., et de Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x*, 81, 5-33.
- Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, 61, 11-34.
- Copi, I. M. (1954). *Symbolic Logic* (2nd ed., 1965). New York, USA : Macmillan Company.
- Deloustal-Jorrand, V. (2001). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves professeurs. *Petit x*, 55, 35-70.
- Desclés, J. P., Djoual, B., et Le Priol, F. (2010). *Logique et langage : Déduction naturelle*. Paris, France : Hermann.
- Dubinsky, E., et Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. Dans E. Dubinsky, A. Schoenfeld et J. Kaput (Eds), *Research in Collegiate Mathematics IV, CBMS Issues in Mathematics Education 8* (p. 239–289). Providence, USA : American Mathematical Society.
- Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 50, 57-79.
- Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53(1), 5-34.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* (Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les recherches, Université Lyon I, Lyon, France).
- Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. Dans A. Bronner et al. (Eds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Durand-Guerrier, V., et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.
- Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M.C., et Feurly-Reynaud, J. (2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématique. Éléments d'analyse pour les enseignants*. Villeurbanne, France : IREM de Lyon.
- Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, 31, 37-61.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern, Suisse : Peter Lang.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Gentzen, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique* (traduit de l'allemand par R. Freys et J. Ladriere). Paris, France : Presses Universitaires de France.
- Glaeser, G. (1973). *Mathématiques pour l'élève professeur*. Paris, France : Hermann.
- Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.
- Hache, C., et Mesnil, Z. (2017). *Pratiques langagières et preuves en mathématiques*. In Actes du 22<sup>e</sup> colloque de la CORFEM, Nîmes, France. [En ligne : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique442>].
- Houdement, C., et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique* (Thèse d'état, Université de Grenoble, Grenoble, France).
- Mangiante, C., et Perrin-Glorian, M.-J. (2018). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes – Denain. In T. Barrier et C. Chambris (Eds), *Actes du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques de l'année 2016* (p. 35- 69). Paris, France : IREM de Paris.
- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement vers un objet d'enseignement* (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris, France).
- Perrin-Glorian, M.-J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? Les mathématiques en marche au long de la scolarité obligatoire : L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin Vert de l'APMEP*, 499, 325-332.
- Perrin-Glorian, M.-J. et Godin, M. (à paraître). *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège*. [Prépublication en ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document>].
- Redmond, J., et Fontaine, M. (2011). *How to play dialogues. An introduction to dialogical logic*. Londres, UK : College Publications.
- Selden, A., et Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123–151.
- Sensevy, G. (2007). Vergnaud, un pragmatiste ? In M. Merry (Ed.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (p. 23-30). Toulouse, France : Presses Universitaires du Mirail.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vergnaud, G. (2002). Forme opératoire et forme prédictive de la connaissance. In J. Portugais (Ed.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation* (p. 6-27). Montréal, Canada : Université de Montréal.

## ANNEXE

## UN EXEMPLE D'ANALYSE DE PREUVE À L'AIDE DE LA DÉDUCTION NATURELLE

Barrier et Durand-Guerrier (2013) présentent un exemple d'exercice d'algèbre linéaire proposé à des étudiant·e·s de première année du premier cycle d'une école ingénieur·e·s recrutant à la sortie de l'enseignement secondaire (INSA de Lyon) :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  et  $f \in L(E)$  telle que  $\forall x \in E, (x, f(x))$  est lié. Montrer que  $\exists \lambda \in \mathbf{R} \forall x \in E f(x) = \lambda x$ .

Cet exercice est un « classique » du début de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Les étudiant·e·s produisent fréquemment un argument que l'on peut résumer de la manière suivante :

Puisque pour tout  $x, (x, f(x))$  est lié on a alors deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  non tous deux nuls tels que  $\alpha x + \beta f(x) = 0$ . Si  $\beta \neq 0$ , on peut écrire  $f(x) = -\alpha/\beta x$ . Si  $\beta = 0$ , on a  $\alpha x = 0$ , donc  $x = 0$  ( $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas tous les deux nuls) et finalement  $f(x) = 0 = x$ . Dans les deux cas, il existe un  $\lambda$  tel que  $f(x) = \lambda x$ .

Ils et elles s'arrêtent alors là, convaincu·e·s d'être parvenu·e·s à construire la démonstration attendue. Nous proposons maintenant une rapide analyse de cet argument à l'aide de la déduction naturelle. La démonstration avancée repose sur l'hypothèse  $\forall x \in E \exists \alpha \in \mathbf{R} \exists \beta \in \mathbf{R} (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \text{ ET } \alpha x + \beta f(x) = 0$ . La première étape consiste en une élimination du quantificateur universel portant sur la lettre  $x$ , la seconde consiste à éliminer les existentiels portant sur les lettres  $\alpha$  et  $\beta$ . Moyennant quelques manipulations algébriques que nous ne détaillons pas, ceci aboutit à écrire une relation de la forme  $f(x) = \lambda x$ . Il reste alors à réintroduire la quantification sur les lettres  $x$  et  $\lambda$  afin d'obtenir un énoncé clos (sans variable libre) dans la conclusion de l'argument. Le texte de la preuve (reconstruction fictive) permet de supposer qu'une

introduction d'un quantificateur existentiel est faite en rapport avec  $\lambda$ . La situation est moins explicite concernant la lettre  $x$ . Il semble raisonnable de faire l'hypothèse que celle-ci va être liée par l'introduction d'un quantificateur universel. Par contre, l'ordre d'introduction entre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel n'est pas clair. Démontrer l'énoncé  $\exists \lambda \in \mathbf{R} \forall x \in E f(x) = \lambda x$  supposerait que l'introduction du quantificateur universel soit première par rapport celle de l'existentiel, mais cette pratique contreviendrait à la restriction formulée ci-dessus dans l'usage des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs. Les difficultés récurrentes rencontrées par les étudiant·e·s dans l'élaboration de la preuve de l'énoncé considéré peuvent donc s'interpréter comme des difficultés dans la gestion de la réintroduction des quantificateurs. Plus précisément, le fait de ne pas réintroduire les quantificateurs à la fin de la preuve cache le fait que ce qui a été démontré est un énoncé de la forme « Pour tout  $x$ , il existe  $\lambda P(x, \lambda)$  », alors que l'énoncé visé est de la forme « Il existe  $\lambda$  tel que pour tout  $x, P(x, \lambda)$  ». La déduction naturelle avec ses règles de restriction pour la réintroduction des quantificateurs permet d'identifier le fait que la preuve est incomplète ; elle oriente également vers ce qu'il faut faire pour poursuivre la preuve, à savoir montrer que le réel  $\lambda$  dont l'existence est établie « ne dépend pas de  $x$  ». Les difficultés rencontrées par les étudiants pour gérer les énoncés comportant une alternance de quantificateurs universels et existentiels sont attestées dans la littérature et sont renforcées par les pratiques de quantification implicites des énoncés universels discutées plus haut dans le cas de la tâche du Labyrinthe (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 ; Chellougui, 2003).