HAL open science

Identification de sources mécaniques par régularisation multiplicative

Mathieu Aucejo, Olivier de Smet

To cite this version:

Mathieu Aucejo, Olivier de Smet. Identification de sources mécaniques par régularisation multiplicative. 22ème Congrès Français de Mecanique, Aug 2015, Lyon, France. hal-02068558

HAL Id: hal-02068558

https://hal.science/hal-02068558v1

Submitted on 15 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification de sources mécaniques par régularisation multiplicative

M. AUCEJO[a], O. DE SMET[a]

a. *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris*

Résumé :

Pour identifier les sources mécaniques excitant une structure, les méthodes de régularisation de type Tikhonov sont généralement utilisées. Ces approches, dites additives, reposent sur la détermination d'un paramètre de régularisation à partir de procédures adaptées comme la méthode de la courbe en L. Cependant, ces dernières nécessitent en général un nombre important de calculs pour balayer l'espace des valeurs possibles du paramètre de régularisation. Dans ce papier, on se propose d'utiliser une régularisation multiplicative, qui ne nécessite pas le calcul préalable du paramètre de régularisation. Par construction, le calcul de la solution régularisée ne peut se faire que de manière itérative, ce qui permet d'adapter l'importance du terme de régularisation tout au long du processus de résolution. La validité de l'approche est illustrée via une expérience numérique.

Abstract :

To identify mechanical sources acting on a structure, Tikhonov-like regularizations are generally used. These approaches, referred to as additive regularizations, require the calculation of a regularization parameter from adapted selection procedures such as the L-curve method. However, such selection procedures can be computationally intensive. In the present paper, a multiplicative regularization is introduced. The proposed strategy has the merit of avoiding the need for the determination of a regularization parameter beforehand. By construction, the regularized solution is computed in an iterative manner, which allows adapting the importance of the regularization term all along the resolution process. The validity of the proposed approach is illustrated numerically.

Mots clefs : Problème inverse ; Régularisation multiplicative

1 Introduction

L'identification de sources mécaniques à partir de la mesure du champ vibratoire de la structure repose généralement sur l'utilisation de méthodes de régularisation additive de type Tikhonov. D'un point de vue formel, ces approches s'écrivent sous la forme d'un problème de minimisation non contraint. Par suite, si l'on note $\mathbf{F}$ le champ excitateur, $\mathbf{X}$ le champ vibratoire mesuré et $\mathbf{H}$ la matrice des fonctions de transfert de la structure considérée, alors le problème d'identification s'écrit classiquement sous la forme additive suivante :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{F}(\mathbf{X} - \mathbf{HF}) + \lambda\,\mathcal{R}(\mathbf{F}), \tag{1}$$

où $\mathcal{F}(\mathbf{X} - \mathbf{HF})$ est le terme de fidélité aux données contrôlant l'a priori sur le bruit (erreurs de mesure et de modèle), $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ est le terme de régularisation traduisant l'information disponible a priori sur le champ excitateur et λ est le paramètre de régularisation qui règle le compromis entre les termes de fidélité et de régularisation.

Comme en atteste la littérature dédiée aux problèmes d'identification de sources, les approches additives ont prouvé leur efficacité [1, 2]. Cependant, elles reposent sur la détermination de la valeur optimale du paramètre de régularisation λ. Pour cela, différentes procédures de sélection automatique ont été développées, comme le

principe de décroissance de Morozov, la validation croisée généralisée ou la méthode de la courbe en L. Il faut toutefois noté que toutes ces approches nécessitent un grand nombre de calculs, puisqu'elles sont basées soit sur le calcul de la racine d'une certaine équation, soit sur la minimisation d'une fonctionnelle ou encore sur la détermination de la courbure maximale d'une certaine courbe. De ce fait, il peut être intéressant de développer une méthode permettant de s'affranchir du calcul préalable du paramètre de régularisation. Ce prérequis est rempli par les approches dites multiplicatives, pour lesquelles le terme de régularisation $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ est introduit sous la forme d'une contrainte multiplicative. Concrètement, cela signifie que le problème d'identification s'écrit alors :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{F}(\mathbf{X} - \mathbf{HF})\mathcal{R}(\mathbf{F}). \tag{2}$$

La régularisation multiplicative a déjà été appliquée dans un certain nombre de domaines au cours de la dernière décennie, comme le traitement d'images [3] ou la géophysique [4]. À notre connaissance, ce type de régularisation a reçu peu d'attention dans le domaine de l'identification de sources mécaniques. C'est pourquoi, elle fait l'objet du présent papier. La principale originalité de notre contribution repose sur la définition d'un terme de régularisation traduisant notre connaissance a priori de la nature (localisée ou répartie) et de la localisation des sources d'excitation. Par construction, le calcul de la solution régularisée ne peut se faire que de manière itérative, ce qui permet d'adapter l'importance du terme de régularisation tout au long du processus de résolution. Pour démontrer la validité de l'approche proposée, une expérience numérique est présentée. Les résultats obtenus montrent que la régularisation multiplicative constitue une alternative crédible aux approches additives.

2 Formulation multiplicative du problème d'identification

D'une manière générale, une structure peut être excitée simultanément dans différentes zones par des sources de nature différente. Cependant, on peut noter qu'en pratique l'information relative à la nature et à la localisation des sources est généralement grossièrement connue. Par conséquent, pour aider le processus d'identification, il est pertinent d'introduire cette information dans le terme de régularisation. Pour cela, on suppose que la structure est excitée en N zones par des champs excitateurs locaux $\mathbf{F_i}$ non corrélés et de nature différente. Cette hypothèse permet alors d'écrire le terme de régularisation $\mathcal{R}(\mathbf{F})$ comme la somme de termes de régularisation locaux $\mathcal{R}(\mathbf{F_i})$, soit :

$$\mathcal{R}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}(\mathbf{F_i}). \tag{3}$$

Pour rendre la formulation du problème suffisamment flexible, il faut que les termes de régularisation locaux puissent traduire différents a priori sur la nature des sources dans une zone particulière. C'est pourquoi, les termes de régularisation locaux s'écrivent ici :

$$\mathcal{R}(\mathbf{F_i}) = \frac{1}{q_i}\|\mathbf{F_i}\|_{q_i}^{q_i}, \tag{4}$$

où $\| \bullet \|_{q_i}$ est la norme ou quasi-norme ℓ_{q_i} (pour tout $q_i \in]0, +\infty[$).

Avant d'aller plus loin, il est intéressant de s'attarder sur le choix des valeurs des paramètres q_i, pour lequel on peut utiliser quelques règles simples. En choisissant $q_i \geq 2$, on privilégiera des solutions réparties, alors qu'en choisissant $q_i \leq 1$, on privilégiera des solutions parcimonieuses (i.e. possédant très peu de valeurs non nulles).

Pour compléter la formulation multiplicative du problème d'identification, il reste à définir le terme de fidélité aux données. Il est définit ici de manière classique, en supposant que le champ vibratoire est corrompu par un bruit additive gaussien. Mathématiquement, le terme de fidélité peut ainsi s'écrire :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X} - \mathbf{HF}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2. \tag{5}$$

Au final, la régularisation multiplicative proposée peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \ \frac{1}{2}\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i}\|\mathbf{F_i}\|_{q_i}^{q_i}. \tag{6}$$

3 Résolution du problème d'identification

La résolution du problème de minimisation, défini dans la section précédente, ne peut se faire que de manière itérative, dans la mesure où la solution de l'équation (6) ne possède pas de forme explicite. Dans ce qui suit, le calcul de la solution régularisée est réalisé grâce à une forme généralisée de l'algorithme des moindres carrés repondérés itérativement [5].

3.1 Principe

L'idée de base consiste à remplacer le problème de minimisation (6) par un processus itératif équivalent possédant une solution explicite et unique à chaque itération. Pour cela, la norme ℓ_{q_i} est réécrite sous la forme d'une norme ℓ_2 pondérée. Pour cela, on part du fait que :

$$\forall x_i, \forall q, \ \|x\|_q^q = \sum_i |x_i|^q = \frac{1}{2}\sum_i w_i |x_i|^2, \tag{7}$$

où $w_i(x_i) = \frac{2}{q}|x_i|^{q-2}$ est appelée coefficient de pondération.

Dans le cadre d'un processus itératif, si l'on dispose de la solution $x^{(k)}$ à l'itération k, on va fixer la valeur du coefficient de pondération $w_i(x_i)$ à $w_i(x_i^{(k)})$ et l'on va chercher à déterminer la solution $x^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$, de manière à retrouver l'égalité (7) lorsque le processus a convergé. Ici, cela signifie que l'on va remplacer le problème de minimisation (6) par un processus itératif équivalent dont le champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$ est solution du problème de minimisation suivant :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \ \frac{1}{4}\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2 \cdot \left\| \overline{\mathbf{W}}^{(k)\,1/2}\mathbf{F} \right\|_2^2, \tag{8}$$

où $\overline{\mathbf{W}}^{(k)} = \operatorname{diag}\left(\mathbf{W_1}^{(k)}, \ldots, \mathbf{W_N}^{(k)}\right)$ est une matrice de pondération définie positive par bloc, dont chacune des sous-matrices $\mathbf{W_i}^{(k)}$ est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{W}_i^{(k)} = \operatorname{diag}\left[\frac{2}{q} T_\epsilon\left(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}^{(k)}\right)\right], \tag{9}$$

avec :

$$T_\epsilon(x^{(k)}) = \begin{cases} |x^{(k)}|^{q_i-2} & \text{si } x^{(k)} > \epsilon \\ |\epsilon|^{q_i-2} & \text{si } x^{(k)} \leq \epsilon \end{cases}, \tag{10}$$

où ϵ est un nombre réel positif agissant comme un paramètre d'amortissement, dans la mesure où il évite d'avoir des pondérations infinies lorsque $|x^{(k)}| \to 0$ et $q_i < 2$. Pratiquement, le paramètre d'amortissement est calculé durant la phase d'initialisation de manière à ce que 5% des valeurs de $\left|\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(0)}\right|$ soient inférieures ou égales à ϵ.

À ce stade, il est utile de donner la forme explicite de l'équation (8), afin de mettre clairement en évidence le caractère adaptatif de la régularisation multiplicative. Après quelques manipulations, la solution à l'itération k+1 s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k+1)} = \left(\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \alpha\left(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)}\right)\overline{\mathbf{W}}^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{X}, \tag{11}$$

où $\alpha\left(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)}\right)$ est le paramètre de régularisation adaptatif défini tel que :

$$\alpha\left(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)}\right) = \frac{\left\|\mathbf{X} - \mathbf{H}\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)}\right\|_2^2}{\left\|\overline{\mathbf{W}}^{(k)^{1/2}}\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)}\right\|_2^2}. \tag{12}$$

La relation (11) montre clairement que les régularisations additive et multiplicative sont en fait étroitement liées, dans la mesure où les solutions correspondantes $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$ et $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ coïncident exactement s'il existe un paramètre de régularisation λ tel que $\lambda := \alpha(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}})$.

3.2 Choix de la solution initiale et du critère d'arrêt

Il est clair que la régularisation multiplicative proposée dans ce papier est généralement non-convexe. De fait, l'existence d'un minimiseur unique n'est pas garantie. Dans ces conditions, le choix de la solution initiale s'avère crucial. La question qui se pose alors est : Comment définit-on une bonne solution initiale ? Pour répondre à cette question, il faut avoir à l'esprit qu'une bonne solution initiale est une solution du problème, éventuellement grossière, mais suffisamment proche de la solution finale pour assurer la convergence du processus itératif. Ces conditions sont remplies par la solution calculée à partir d'une régularisation de type Tikhonov, c'est-à-dire :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(0)} = \left(\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \alpha_0\,\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{X}, \tag{13}$$

où α_0 est la valeur initiale du paramètre de régularisation adaptatif.

Dans le cadre de cette étude, le paramètre α_0 est choisi égal à un estimateur ponctuel de la variance du bruit σ^2, à savoir :

$$\alpha_0 = \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{M+2}\|\mathbf{X}\|_2^2. \tag{14}$$

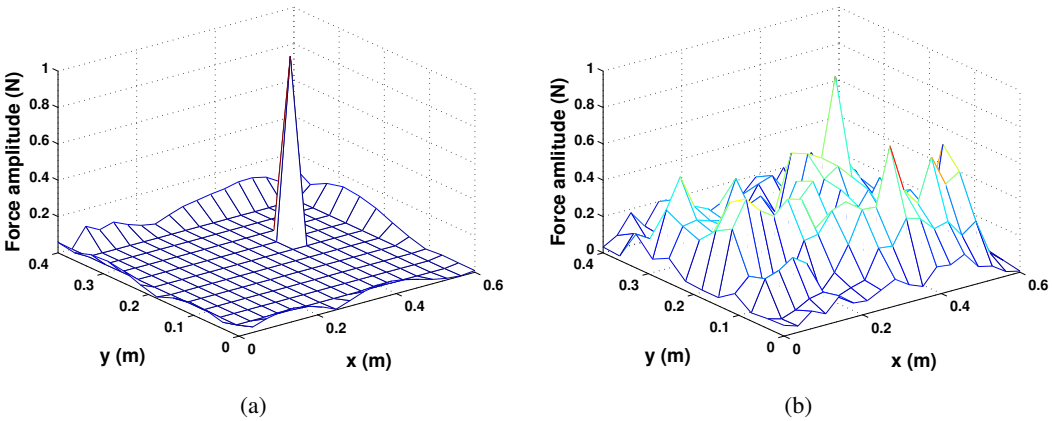
Concernant maintenant le choix du critère d'arrêt, le processus itératif est arrêté lorsque la variation relative du paramètre de régularisation adaptatif $\alpha(\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}^{(k)})$ entre deux itérations successives atteint une certaine tolérance, fixée ici à 10^{-8}.

4 Validation numérique

On cherche ici à identifier une force ponctuelle harmonique, d'amplitude F_0 unitaire, excitant en flexion une plaque d'acier de dimensions $0.6 \times 0.4 \times 0.005$ m^3 simplement appuyée sur ces quatre bords à une fréquence de 500 Hz. Les coordonnées de la force ponctuelle, mesurées par rapport au coin inférieur gauche de la plaque, sont $(x, y) = (0.42\text{ m}, 0.25\text{ m})$. De plus, pour simuler le champ vibratoire mesuré $\mathbf{X}$ (ici le champ de déplacement transverse), un modèle éléments finis de la plaque comprenant 187 éléments coques à 4 nœuds a été utilisé. Pour simuler le bruit de mesure, un bruit additif gaussien a été ajouté au champ vibratoire. Le bruit de mesure a été calculé de manière à avoir un rapport signal-à-bruit de 30 dB. Enfin, pour réaliser l'identification, le modèle éléments finis décrit précédemment a été utilisé pour calculer la fonction de transfert $\mathbf{H}$ de la plaque à bords libre. De cette manière, il devient possible d'identifier non seulement la force ponctuelle, mais aussi les réactions aux limites.

La Figure 1 présente une comparaison du champ excitateur $\mathbf{F}$ à identifier [cf. Figure 1a] et du champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}$ identifié à partir d'une approche naïve (i.e. $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}$). Cette comparaison montre, sans surprise, qu'il n'est pas possible d'identifier correctement le champ excitateur en inversant brutalement la matrice des fonctions de transfert.

Pour améliorer le résultat obtenu, il faut utiliser l'information dont on dispose a priori sur la nature et la répartition des sources, à savoir un champ excitateur parcimonieux, sauf aux limites de la structure où celui-ci est réparti. Par conséquent, la structure est divisée en deux zones d'identification, une zone centrale contenant



(a) (b)

FIGURE 1 – Validation numérique - (a) Champ excitateur **F** à identifier et (b) Identification naïve

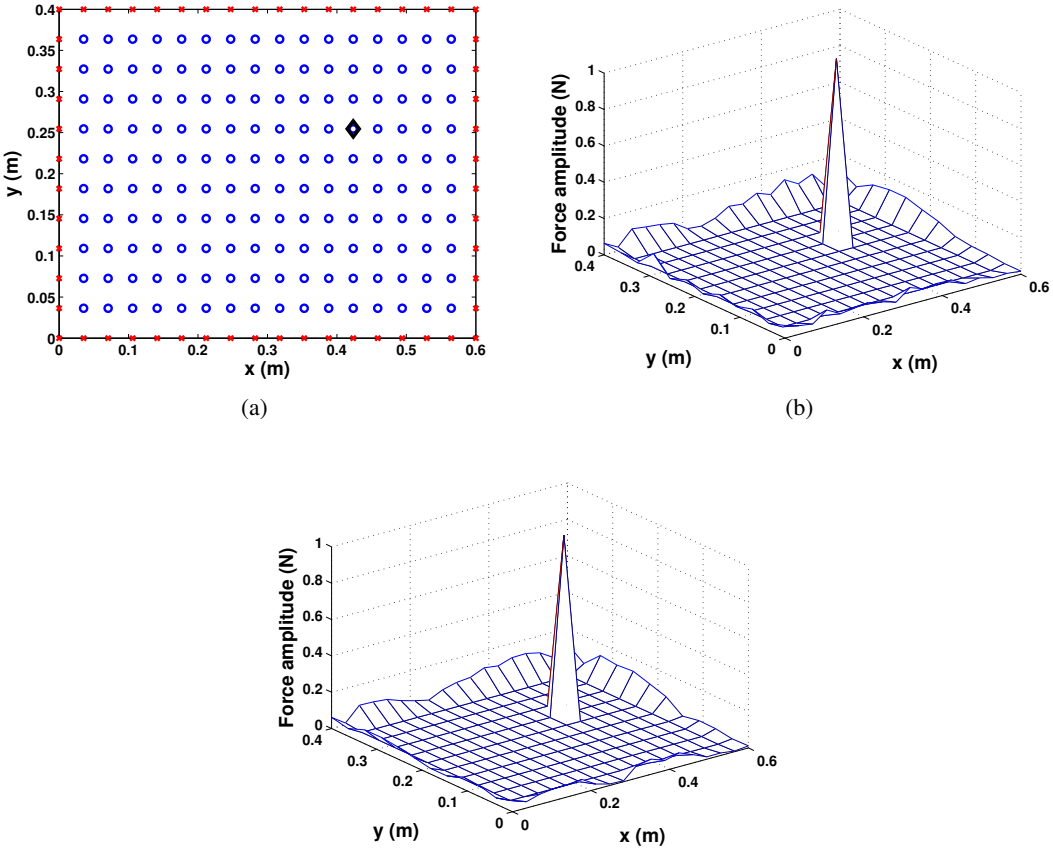
la force ponctuelle, dans laquelle la solution est supposée parcimonieuse ($q_1 = 0.5$), et une zone correspondant aux limites de la structure, dans laquelle la solution est supposée répartie ($q_2 = 2$) [cf. Figure 2a]. Par ailleurs, pour démontrer la pertinence de la stratégie de régularisation présentée dans ce papier, on se propose de comparer le résultat obtenue par l'approche multiplicative [cf. Figure 2b] avec celui calculé à partir de la version additive correspondante [cf. Figure 2c], à savoir [2] :

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i}\|\mathbf{F_i}\|_{q_i}^{q_i}. \tag{15}$$

La comparaison des champs excitateurs $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ et $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$ avec le champ de référence montre clairement que l'approche proposée permet d'identifier correctement non seulement la position et l'amplitude de la force ponctuelle ($\widehat{F}_{m0} = 0.998$ et $\widehat{F_{a0}} = 0.996$), mais également les réactions aux appuis. La principale différence entre les deux stratégies se situe au niveau du temps de calcul de la solution régularisée. Comme attendu, la régularisation multiplicative s'avère plus rapide que la régularisation additive correspondante, dans la mesure où les solutions régularisée $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}}$ et $\widehat{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$ sont respectivement calculées en 0.11 s et 1 s. Sur cet exemple, la régularisation multiplicative est donc 10 fois plus rapide que sa version additive. Sur une fréquence, cette différence peut sembler dérisoire. Cependant, lors du calcul du spectre de la force ponctuelle, l'écart entre les deux stratégies peut devenir significatif.
Au bilan, cette expérience numérique montre clairement que la régularisation multiplicative constitue une alternative crédible à la régularisation additive.

5 Conclusion

En général, l'identification des sources mécaniques agissant sur une structure est basée sur l'utilisation de méthodes de régularisation additive de type Tikhonov. Ces approches reposent toutefois sur la détermination préalable de la valeur optimale du paramètre de régularisation λ, ce qui nécessite souvent un grand nombre de calculs. Pour éviter ces calculs, nous avons proposé une régularisation multiplicative, dont le principal avantage est d'adapter itérativement l'importance accordée au terme de régularisation. Cette approche ne nécessite donc pas le calcul d'un quelconque paramètre de régularisation. Un autre aspect intéressante de la stratégie développée ici est la définition d'un terme de régularisation permettant d'exploiter finement l'information spatiale disponible a priori sur la nature et la localisation des sources. La combinaison de ces deux caractéristiques fait de la régularisation multiplicative, détaillée dans ce papier, un outil pertinent pour l'identification de sources mécaniques.



(a) (b)

(c)

FIGURE 2 – Validation numérique - (a) Définition des zones sélectionnées (○) zone 1 (solution parcimonieuse, $q_1 = 0.5$), (×) zone 2 (solution répartie, $q_2 = 2$) and (◊) position de la force, (b) Champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}_\mathbf{m}$ identifié par régularisation multiplicative et (c) Champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}_\mathbf{a}$ identifié par régularisation additive

Références

[1] A. N. Thite, D. J. Thompson, The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 2 : Use of regularization techniques, J. Sound Vib. (2003), 264 :433-451

[2] M. Aucejo, O. De Smet, Identification de sources vibratoires par approche bayésienne : apport des a priori locaux suivant une loi normale généralisée, in Proceedings of 21ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2013), Bordeaux, France, 2013

[3] A. Abubakar, P. M. van den Berg, T. M. Habashy, and H. Braunish. A multiplicative regularization approach for deblurring problems. IEEE Transactions on Image Processing (2004), 13 :1524-1532

[4] L. L. Li and B. Jafarpour, Effective solution of nonlinear subsurface flow inverse problems in sparse bases. Inverse Problems (2010), 26 :105016 (1-24), 2010

[5] Rodriguez, P., Wohlberg, B. 2006 An Iteratively Weighted Norm Algorithm for Total Variation Regularization. *In Proceedings of the 2006 Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, USA.