



HAL
open science

Favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves engagés dans une activité de modélisation

Sonia Yvain-Prébiski

► **To cite this version:**

Sonia Yvain-Prébiski. Favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves engagés dans une activité de modélisation. CIEAEM 69, Jul 2017, Berlin, Allemagne. hal-02052892

HAL Id: hal-02052892

<https://hal.science/hal-02052892>

Submitted on 28 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commission internationale pour l'étude et
l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.
www.cieaem.org

International commission for the study and
improvement of mathematics education
www.cieaem.org



Proceedings / Actes

CIEAEM 69
Berlin (Germany)
July, 15 - 19 2017

Editor: Benedetto Di Paola, Uwe Gellert
Editor of the Journal : Benedetto Di Paola

International Program Committee / Comité International de Programme:

Uwe Gellert (Germany, Chair), Gilles Aldon (France), Peter Appelbaum (USA), Javier Díez-Palomar (Spain), Gail FitzSimons (Australia), Michaela Kaslová (Czech Republic), Pedro Palhares (Portugal), Lambrecht Spijkerboer (Netherlands), Charoula Stathopoulou (Greece).

Local Organizing Committee / Comité Organisateur Local:

Uwe Gellert (Chair), Birgit Abel, Lisa Björklund Boistrup, Nina Bohlmann, Daria Fischer, Eva Jablonka, Brigitte LutzWestphal, Hauke Straehler-Pohl, Birte Zoega

Favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves engagés dans une activité de modélisation

Sonia Yvain

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS, Univ. Montpellier E-mail:
sonia.yvain1@umontpellier.fr

Résumé. Dans nos travaux, nous étudions les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation. Notre objectif est d'aider les élèves à comprendre la nécessité de faire des choix pour envisager un traitement mathématique d'un problème posé dans un domaine non mathématique. Nous présentons dans cette communication les éléments d'analyse *a priori* d'un problème posé dans un contexte relevant des sciences du vivant, expérimenté en 2016 dans une cinquantaine de classes de l'enseignement secondaire français, ainsi que les tous premiers éléments de notre analyse *a posteriori*. Les premières analyses des travaux d'élèves, en appui sur nos indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale, montrent la faisabilité et la fécondité potentielles d'une telle activité mathématique.

Abstract. In our research, we study the conditions and constraints to favor the devolution of horizontal mathematization to secondary school pupils engaged in a modeling activity. Our goal is to help students understand the need to make choices to consider mathematical treatment of a problem in a non-mathematical field. We present in this paper the elements of *a priori* analysis of a problem posed in a life sciences context, experimented in 2016 in fifty classes of French secondary education, as well as the very first elements of our analysis *a posteriori*. The first analyzes of student work, based on our indicators of devolution of horizontal mathematization, show the potential feasibility and fertility of such a mathematical activity.

1. Introduction

Nous présentons dans cette communication des éléments d'une recherche en cours sur la possibilité de faire la dévolution (au sens de Brousseau 1998) aux élèves du secondaire de la mathématisation *horizontale*. Nous suivons en cela Treffers (1978) qui distingue deux types de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation en mathématiques : la mathématisation *horizontale* qui relève de la modélisation mathématique d'un fragment de réalité non mathématique et la mathématisation *verticale* qui relève du traitement mathématique d'un problème mathématique.

Dans ce texte, nous nous intéressons à la mathématisation horizontale la première étape de la modélisation qui consiste à opérer des choix permettant d'envisager un traitement mathématique du problème. Cette étape du processus de modélisation n'est généralement peu voire pas travaillée dans les classes, alors qu'elle est essentielle dans le travail de modélisation des chercheurs travaillant dans le domaine des mathématiques appliquées aux sciences du vivant.

La question didactique que nous mettons à l'étude est celle de la possibilité d'implémenter en classe des situations didactiques permettant de faire vivre cette étape aux élèves tout en prenant en compte les conditions et les contraintes qui pèsent sur les enseignants. Ce questionnement est né des observations conduites depuis plus de dix ans au sein du groupe ResCo (Résolution Collaborative de problèmes) de l'IREM de Montpellier, qui vise à mettre les élèves en position de chercheur (Yvain et Gardes, 2014)

Pour conduire cette étude, nous nous sommes placée dans le cadre de situations de résolution de problèmes posés dans un contexte relevant des sciences du vivant et pouvant se résoudre via une modélisation mathématique.

L'objectif de notre recherche est le développement d'une ingénierie didactique permettant de favoriser ce processus de dévolution. Pour cela, conformément à la méthodologie générale de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988), nous conduisons une étude épistémologique visant à identifier précisément ce que l'on va transposer des savoirs savants d'une part, des pratiques de références des experts du domaine d'autre part. Cette étape de notre recherche est en cours : plusieurs entretiens avec des chercheurs en mathématiques appliquées aux sciences du vivant et des chercheurs en biologie utilisant des mathématiques dans leurs travaux sont en cours d'analyse (Yvain, à paraître). Dans ce qui suit, nous décrivons tout d'abord brièvement les modalités de travail du groupe Resco. Nous présentons ensuite les critères de choix, l'énoncé et l'analyse *a priori* d'une situation mathématique propice à permettre le développement d'une situation didactique pouvant être utilisée dans le cadre du dispositif ResCo. Pour finir, nous présentons les premiers éléments de notre analyse *a posteriori*.

2. Un dispositif et des situations pour favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale

Le groupe ResCo existe depuis le début des années 2000. La résolution collaborative repose sur des échanges entre des classes, par groupe de trois, qui travaillent sur le même problème de recherche, pendant cinq semaines. Toutes les classes du secondaire de la 6^{ème} à la Terminale¹ sont concernées.

Ce dispositif comporte l'élaboration chaque année d'une nouvelle situation, un stage de formation de deux jours pour former et accompagner les enseignants qui souhaitent engager leurs classes, et la mise en œuvre dans les classes engagées pendant cinq semaines consécutives.

Les problèmes élaborés par le groupe puis proposés pour une session de résolution collaborative sont posés en dehors du cadre mathématique ; ils sont choisis de sorte que plusieurs modèles mathématiques sont envisageables. Néanmoins, étant donné que la mathématisation de problèmes réels (tels que l'on peut les rencontrer au niveau de la recherche) est généralement beaucoup trop complexe pour être prise en charge au niveau de l'enseignement secondaire, les situations proposées ne sont pas directement issues de la réalité mais relèvent ou évoquent de façon réaliste des situations du monde réel. C'est la raison pour laquelle elles sont qualifiées de «fictions réalistes» (Aldon et al., 2014). Nous renvoyons à l'atelier de S. Modeste pour plus de détails quant aux spécificités de ce dispositif didactique.

Lors de la première séance, les élèves découvrent le problème et préparent des questions qu'ils adresseront aux deux classes avec lesquelles leur classe est associée. L'objectif est de faire émerger un questionnement sur les différents choix possibles permettant un traitement mathématique du problème. La place de cette phase de questions dans le dispositif vise à déclencher le processus de mathématisation horizontale. Lors de la phase des questions, les élèves commencent à choisir des fragments de la réalité fictionnelle sur lesquels ils se questionnent. Dans la phase des réponses, ils commencent à faire des choix de mathématisation horizontale.

Nous illustrons ce qui précède dans le cas de la situation mise en œuvre 2016.

3. Un exemple de mise en œuvre: la croissance des arbres

3.1 La situation choisie – motivations – éléments d'analyse *a priori*

Pour favoriser un travail de mathématisation horizontale, nous avons élaboré une situation permettant:

- d'amener les élèves à se questionner sur le système à modéliser - C₀ De faire prendre conscience aux élèves:
- de la nécessité de recourir à une modélisation pour répondre au problème - C₁ :
- de la nécessité de faire des choix lors de la modélisation - C₂
- de l'importance de la question posée dans la construction du modèle - C₃
- que le travail de modélisation nécessite un travail mathématique au sein du modèle choisi pour apporter des réponses aux questions posées - C₄

La situation proposée aux élèves est la suivante : il s'agit de prédire la croissance d'un arbre à partir d'informations sur ses premières années de croissance données par des schémas avec une échelle donnée. En voici l'énoncé.

¹ (De 11 à 18 ans)

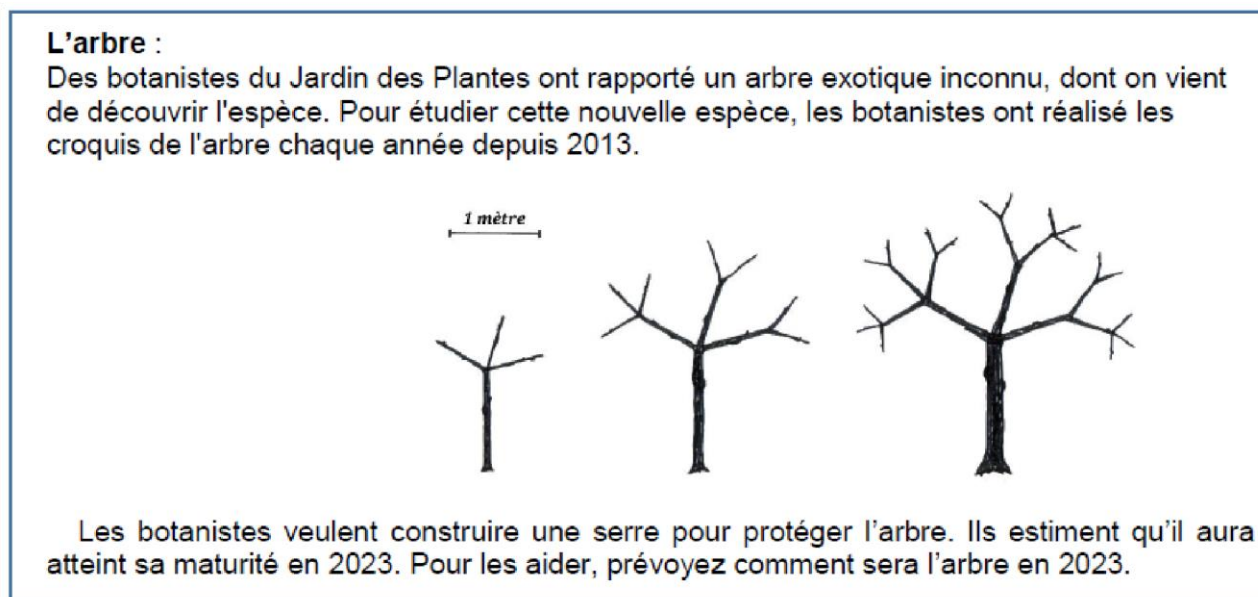


Figure 1. *Énoncé de la fiction réaliste « l'arbre » (échelle modifiée)*

Cette proposition, conçue comme une transposition d'un problème de modélisation de la croissance des végétaux en sciences de la vie (Varenne, 2007) répond à nos critères dans la mesure où

- L'échelle de temps lent de croissance de l'arbre et la trop grande complexité du système motivent le besoin de prévision et la nécessité de produire un modèle.
- Plusieurs hypothèses sur la croissance de l'arbre peuvent être faites ce qui donne lieu à différentes modélisations. Il est donc nécessaire de faire des choix lors du processus de modélisation.
- Les choix dépendront des données du problème (schémas de l'arbre) et des outils mathématiques à disposition des élèves (ou la conception qu'ils en ont).

Pour favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, les valeurs des variables didactiques choisies et leur motivation sont les suivantes :

- Des schémas en 2D (et non pas en 3D) pour proposer un cadre suffisamment réaliste tout en permettant une activité de modélisation de la 6ème à la terminale.
- Le nombre de schémas : nous en avons proposé trois.
- La forme de l'arbre (symétrique versus asymétrique): nous avons choisi une croissance asymétrique pour favoriser le questionnement des élèves autour de la prévision de la croissance de l'arbre.
- Le nombre de nouvelles branches apparaissant chaque année : nous avons choisi de faire apparaître deux ou trois nouvelles branches pour amener rapidement les élèves à faire des choix au niveau de la croissance de l'arbre.
- Les longueurs des troncs et branches : elles ont été choisies pour questionner un éventuel choix d'un modèle de croissance régulière.
- La donnée d'une échelle : afin de permettre des mesures et une prise d'information instrumentée sur les dessins

Pour la phase de l'élaboration des questions, nous avons défini les trois indicateurs de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale suivants :

La question

- porte sur l'identification de grandeurs pertinentes pour permettre un traitement mathématique (Q_{C0})
- montre la recherche d'un modèle permettant de traiter la situation proposée (Q_{C1})

- porte sur la pertinence d'éléments de contexte à prendre en compte (Q_{C2})
- Pour la phase de l'élaboration des réponses, nous avons défini les cinq indicateurs de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale suivants :
- La réponse montre :
- la recherche d'un modèle permettant de traiter la situation proposée (R_{C0})
 - des choix de grandeurs pertinentes pour permettre un traitement mathématique (R_{C1}) - des choix d'éléments de contexte (R_{C2})
 - l'analyse par les élèves de la pertinence de question reçue au regard de la question posée (R_{C3})
 - un premier travail mathématique pour répondre à la question reçue. (R_{C4})

3.2 Premiers éléments d'analyse a posteriori

Les données recueillies lors de l'observation de l'intégralité du dispositif dans certaines classes engagées dans la résolution collaborative en 2016 sont en cours d'analyse à la lumière du questionnement sur la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Nous donnons ici des exemples (issus des travaux d'élèves recueillis sur la plateforme d'échanges du dispositif ResCo) qui permettent d'illustrer la manière dont on va utiliser les indicateurs de la dévolution de la mathématisation aux élèves.

Questions type Q_{C0} la question porte sur l'identification de grandeurs pertinentes pour permettre un traitement mathématique	Réponses associées	Indicateurs
Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?	on mesure le diamètre sur le dessin, et on trouve 1mm la 1ère année, on convertit en grandeur réelle grâce à l'échelle : 1 m est représenté par 2,8 cm, donc 1 mm représente 3,57 cm. On multiplie par pi pour obtenir la circonférence, ce qui donne : en 2013 : 11,21 cm en 2014 : 22,43 cm en 2015 : 33,64 cm	R_{C4}
Le nombre de branches augmente-t-il chaque année?	2 ou 3 branches de plus par branche, mais on n'a pas trouvé de modèle qui définisse le nombre de branches supplémentaires à chaque fois.	R_{C0}
Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?	Les angles ont l'air de varier entre 60 et 80°	R_{C4} R_{C1}
Quand on compte les branches, doit-on compter toutes les branches (avec celles du milieu) ou seulement les nouvelles branches ?	On pense qu'il ne faut que les nouvelles branches.	R_{C1}
Combien d'étapes d'évolution jusqu'en 2023 ?	2015-2016 2016-2017 2017-2018 2018-2019 2019-2020 2020-2021 2021-2022 2022-2023 On a compté qu'il y avait 8 étapes	R_{C4}

Figure 2. Exemples de questions recueillies relevant de l'indicateur Q_{C0} , réponses et indicateurs associés.

Questions type Q _{C1}	Réponses associées	Indicateurs
La question montre la recherche d'un modèle pour traiter la situation		
Est-ce que l'arbre grandit proportionnellement ?	Non, l'arbre ne grandit pas proportionnellement car nous avons fait des mesures : Années Hauteur max. de l'arbre (en cm, sur le schéma) 2013 : 4,7 2014 : 7,1	R _{C4}
	2015 : 8,6 De 2013 à 2014, il a grandi de 2,4 cm (sur le schéma) et seulement de 1,5 ensuite de 2014 à 2015.	
Doit-on travailler en 2D ? ou en 3D ?	Plutôt en 3d pour plus de réalisme	R _{C0}
Les branches grandissent au cours du temps ainsi que le tronc, peut-on estimer la pousse de chaque branche ?	Toutes les branches d'une même génération grandissent de la même façon/même proportion. Et les anciennes générations poussent moins vite que les nouvelles	R _{C0}
Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?	Non il suffit de regarder le nombre de branches sur les trois premiers dessins pour se rendre compte que le nombre de branches à une année n'est pas la somme du nombre de branche des deux précédentes.	R _{C4}

Figure 3. Exemples de questions recueillies relevant de l'indicateur Q_{C1}, réponses et indicateurs associées.

Question type Q _{C2}	Réponses associées	Indicateurs
La question porte sur la pertinence d'éléments de contexte		
Taille-t-on l'arbre?	Il faut supposer que non pour se simplifier la tâche	R _{C0} - R _{C2}
La présence de la serre va-t-elle avoir une influence sur la croissance?	Nous ne pensons pas que la serre influencera la croissance.	R _{C1}
Quels sont les apports d'eau dont requiert l'arbre afin d'optimiser sa croissance?	Nous pensons que cela n'a pas d'importance.	R _{C3}
Le matériau de la serre ou sa couleur influencent-ils la pousse de l'arbre (favorisation de la photosynthèse, maintien d'une température optimale,...).	La couleur n'aura pas d'influence si elle laisse passer la lumière naturelle, pareil pour le matériau tant que la température intérieure correspond à celle du milieu d'origine.	R _{C2}
L'environnement du Jardin des Plantes est-il semblable à l'environnement initial de l'arbre ?	Nous ne pouvons pas savoir.	R _{C3}

Figure 4. Exemples de questions recueillies relevant de l'indicateur Q_{C2} réponses et indicateurs associées

Nous donnons également quelques exemples ci-dessous de questions-réponses ne relevant pas de nos indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale :

Questions	Réponses
Qu'est-ce qu'un botaniste ?	C'est un spécialiste des végétaux.
Que veut dire le mot serre ?	C'est un abri pour arbres en verre
Est-ce qu'il y a des animaux sur l'arbre ? Si oui, vont-ils faire des nids ?	Dans la serre il n'y aura pas d'animaux ni d'insecte.

Figure 5. Exemples de questions - réponses ne relevant pas de nos indicateurs de dévolution

Nos premières analyses confortent notre hypothèse selon laquelle le dispositif de questions-réponses est de nature à favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

4. Conclusions et perspectives

En nous appuyant sur les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale, nos premiers résultats montrent qu'il est possible de laisser les élèves prendre en charge la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation sous deux conditions au moins :

- L'élaboration d'une situation spécifique nécessitant de faire des choix pour engager un processus de modélisation ;
- La mise en place d'un dispositif didactique proposant un temps de travail dédié à la mathématisation horizontale

Ces conditions sont en relation étroite avec notre objectif de transposition de pratiques des chercheurs dont le travail relève de la modélisation. Les indicateurs de la dévolution que nous avons retenus s'appuient en effet sur les premiers résultats des analyses en cours d'entretiens effectués auprès de chercheurs engagés dans des recherches en mathématiques appliquées aux sciences du vivant en vue de mieux cerner leurs pratiques dans un processus de modélisation (Yvain, à paraître).

Comme de nombreux travaux le montrent le rôle de l'enseignant est essentiel pour que la richesse potentielle d'un dispositif didactique soit actualisée dans la classe. Aussi, parallèlement à notre étude présentée dans cette communication, nous nous questionnons sur les conditions et les contraintes prendre en compte pour envisager la dévolution aux enseignants (via la formation) de l'enjeu de dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.

References

- Aldon, G. et al. (2014). Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation. Un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste. In Aldon G. (ed.), *Mathematics and realities, Actes de la 66e CIEAEM*, 361-366, 21-25 Juillet 2014 Lyon.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, p.281-308
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht*. Utrecht : IOWO.
- Varenne, F. (2007). *Du modèle à la simulation informatique*. Vrin.
- Yvain, S. & Gardes, M. L. (2014). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon G. (ed.), *Mathematics and realities. Actes de la 66e CIEAEM*, 361-366, 21-25 Juillet 2014 Lyon.
- Yvain, S. Étude de la dévolution du processus de mathématisation aux élèves. Étude épistémologique et didactique. *Actes de la troisième journée épistémologie de l'Université Montpellier 2*. Presses Universitaires de Franche-Comté (à paraître en 2017)

Faire entrer les élèves dans la mathématisation horizontale. Des « fictions réalistes » et un dispositif de « résolution collaborative »

Simon MODESTE, Sonia YVAIN

IMAG UMR CNRS 5149, IREM de Montpellier, LéA CheRPAM, Université de Montpellier

E-mail: simon.modeste@umontpellier.fr

Résumé. Cet atelier présente un travail développé au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier autour de l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique. Notre objectif est de faire travailler les élèves sur la mathématisation horizontale et de leur faire prendre conscience que cette phase nécessite de faire des choix. Pour atteindre cet objectif, nous proposons des situations spécifiques appelées « fictions réalistes » et un dispositif adapté de résolution collaborative de problèmes basé sur des échanges entre pairs. L'atelier proposera aux participants de vivre notre dispositif en accéléré et d'étudier des productions d'élèves pour illustrer notre propos.

Abstract. This workshop introduces a work developed within the group ResCo of IREM of Montpellier around education and training of mathematical modelling. Our objective is to make work the pupils on the horizontal mathématisation and to make them become aware that this stage requires to make choices. To attain this objective, we offer specific situations called "realistic inventions" and a device adapted by collaborative resolution of problems based on exchanges between peers. The workshop will offer our device to the participants in a fast version and to study pupils' productions to illustrate our purpose

1. Faire entrer les élèves dans la mathématisation horizontale

La modélisation est un enjeu majeur en mathématiques et la modélisation mathématique est de plus en plus mise en avant dans les curriculums. En France par exemple, les nouveaux programmes mentionnent six compétences mathématiques présentes du primaire au lycée (de 6 à 18 ans) : Chercher, Raisonner, Calculer, Modéliser, Représenter, Communiquer. Dans cet atelier, nous nous intéressons à la possibilité de faire entrer les élèves dans une activité de modélisation qui produisent des apprentissages autour de la compétence Modéliser.

Pour préciser notre objectif, nous nous appuyons sur les travaux de Treffers (1978) qui distingue mathématisations horizontale et verticale. « La mathématisation horizontale qui part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles et la mathématisation verticale qui se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles. » (IREM Paris 7, 2011).

Le but principal du travail présenté ici est d'amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de faire des choix dans la phase de mathématisation horizontale en les confrontant à des situations non mathématisées (que nous appelons fictions réalistes) et en abordant ces situations au travers d'un dispositif de résolution collaborative de problèmes entre classes dans lequel la confrontation des choix possibles, entre pairs, contribue à ce que les élèves cernent et comprennent mieux les enjeux de l'activité de modélisation. Nous entendons par modélisation mathématique la démarche de construction d'un modèle mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier (Yvain, 2016).

Le travail présenté ici est issu d'une collaboration entre enseignants et chercheurs développée au sein de l'IREM de Montpellier, dans le groupe de travail ResCo² (ResCo, 2014) et le LéA CheRPAM³. L'atelier

² Résolution Collaborative de problèmes (<http://www.irem.univ-montp2.fr/>).

³ Chercher et Résoudre des Problèmes pour Apprendre des Mathématiques, Lieu d'Éducation Associé à l'Institut

propose de présenter des fictions réalistes, de vivre le dispositif en accéléré et d'étudier des productions d'élèves. Les données proposées porteront sur le dispositif mis en place en 2017 en cours d'expérimentation. Cet atelier est associé à une communication de S. Yvain qui apportera un éclairage complémentaire, du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques.

2. Des situations spécifiques : les fictions réalistes

Selon Israël (1996), la modélisation mathématique est un « fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité ». Il ajoute que « non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents » (p.11).

Ainsi, notre choix s'est porté sur la construction de situations qui décrivent des fragments de réalité et posent une question sur ce fragment de réalité. Les figures 1 et 2 présentent deux exemples, sur lesquels nous reviendrons plus loin (les énoncés sont tels qu'ils ont été donnés aux élèves).

L'arbre

Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ? **Figure 1.**

Énoncé de la fiction réaliste « l'arbre » (échelle modifiée)

En voie d'extinction ?

Sur une petite île du Pacifique vivent deux espèces animales étudiées par les scientifiques depuis le 1er septembre 2012. Il s'agit d'un rongeur et d'un petit carnivore, prédateur du rongeur. Les scientifiques ont effectué des relevés de populations sur l'île qui leur permettent de faire les estimations suivantes :

Date	Rongeurs	Carnivores
1 ^{er} septembre 2012	2000	30
1 ^{er} septembre 2013	25000	25
1 ^{er} septembre 2014	101000	50
1 ^{er} septembre 2015	3500	70
1 ^{er} septembre 2016	950	18

Populations de rongeurs et de carnivores sur l'île.

Les scientifiques craignent la disparition de ces deux espèces. Pour savoir si leur crainte est fondée, prévoyez l'évolution des effectifs des deux espèces pour les 10 années à venir.

Figure 2. Énoncé de la fiction réaliste « En voie d'extinction ? »

Ces situations sont des fictions réalistes au sens de Ray (2013). Selon lui, une fiction réaliste est « une situation a priori on mathématique, le contexte de cette situation est fictif mais réaliste, une prise en charge efficace de cette situation demande une phase de modélisation, la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs

problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits » (p. 29). Nous ajoutons à cela deux autres caractéristiques :

-la fiction réaliste est conçue comme une transposition d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles (travail du modélisateur) ;

-les variables didactiques (Brousseau, 1998) de la fiction réaliste sont choisies de manière à favoriser l'entrée dans la mathématisation horizontale.

Pour permettre un travail de la mathématisation horizontale, ces situations sont placées dans un contexte (un fragment de réalité) qui soulève une question nécessitant la construction d'un modèle. Dans les deux cas présentés, l'enjeu de modélisation est porté par une question de prévision : c'est l'inaccessibilité (dans le temps) qui motive la construction d'un modèle.

3. Un dispositif de résolution collaborative entre classes

Pour faire vivre l'enjeu de modélisation, nous proposons ces situations au sein d'un dispositif de résolution collaborative de problèmes. Ce dispositif, proposé de la Sixième (grade 6) à la Terminale (grade 12), repose sur des échanges entre des classes (via une plate-forme), regroupées par trois, qui travaillent sur la même fiction réaliste, pendant cinq semaines, à raison d'une séance d'une heure par semaine. La résolution collaborative s'organise en différentes phases :

- *Phase 1* (semaine 1) : Chaque classe découvre le sujet. Les élèves entrent dans la résolution du problème en rédigeant les questions qu'ils se posent, qui sont ensuite envoyées aux deux autres classes.
- *Phase 2* (semaine 2) : Chaque classe poursuit ses recherches en construisant des réponses aux questions reçues, qui sont communiquées aux autres classes.
- *Phase 3* (semaine 3) : Chaque classe prend connaissance des réponses des deux autres classes à ses questions.

Toutes les classes reçoivent la fiction réaliste relancée (Yvain & Gardes, 2014) : un énoncé dans lequel des choix de mathématisation horizontale ont été effectués par le groupe ResCo, en tenant compte des échanges entre les classes.

- *Phase 4* (semaines 3 et 4) : En s'appuyant sur les choix fixés par la fiction réaliste relancée, chaque classe poursuit la résolution du problème initial et confrontent leur démarches et leurs résultats sur la plate-forme (mathématisation verticale).
- *Phase 5* (semaine 5 ou plus) : Le groupe ResCo envoie aux enseignants une « clôture » : une résolution possible du problème ainsi modélisé en précisant des éléments de mathématiques travaillés et des informations sur la modélisation mathématique dans le contexte concerné afin que chaque enseignant puisse faire une synthèse et une institutionnalisation dans sa classe.

La phase de questions-réponses vise à déclencher le processus de mathématisation horizontale. Le fait de laisser vivre les questions permet de rendre visible les interrogations des élèves, et de les traiter collectivement (Aldon et al., 2014). C'est dans la phase des réponses que, d'une part, les questions pertinentes pour la mathématisation horizontale vont se dégager et que, d'autre part, vont apparaître différents choix pour modéliser le fragment de réalité considéré. Les élèves expriment d'autant plus librement leur questionnement qu'il est à destination d'autres élèves. À leur tour, ils vont recevoir des questions émanant d'autres classes,

parfois communes aux leurs. Formuler des réponses à ces questions leur permet souvent de mieux identifier les grandeurs pertinentes.

Dans la partie suivante nous illustrons nos propos en montrant comment les élèves entrent dans l'activité de mathématisation horizontale lors du travail sur la fiction réaliste « L'arbre », dans laquelle était engagée une soixantaine de classes en 2016.

4. Retour sur les expérimentations de l'IREM de Montpellier : l'arbre

La fiction réaliste « l'arbre » décrite en figure 1, a été conçue comme une transposition d'un problème de modélisation historiquement et épistémologiquement important en sciences de la vie qui est la modélisation de la croissance des végétaux (Varenne, 2007).

Dans l'atelier, nous revenons sur certaines phases de la résolution collaborative mise en œuvre en 2016 pour illustrer l'activité des élèves relativement à la mathématisation horizontale.

Lors de la première phase, les élèves se posent des questions que l'on peut classer selon différentes catégories : question pour préciser l'énoncé (« De quelle espèce est l'arbre ? »), questions autour des choix mathématiques (« Est-ce que l'arbre grandit proportionnellement ? »), questions autour de données (« Peut-on faire des mesures sur le dessin pour faire nos calculs ? »). L'analyse des questions posées montre que les élèves entrent déjà dans la mathématisation horizontale. Les réponses produites par les élèves montrent qu'ils s'approprient l'enjeu de mathématisation horizontale en faisant des choix et en émettant des hypothèses :

- « Comment et de quelle manière pousse l'arbre chaque année ? », « Nous avons mesuré la plus grande longueur et la plus grande largeur en mettant l'arbre dans un rectangle. Ce rectangle ne grandit pas régulièrement. On pense que l'arbre pousse de manière irrégulière. » (classe de 6^e).
- « Est-ce que le tronc et les branches poussent toujours à la même vitesse. Si oui, de combien chaque année ? », « Nous avons mesuré la largeur du tronc [...] et on a vu que ça grandit de 2 mm la première année, puis 3 mm la seconde. On prévoit que ce sera de 4 puis 5 puis 6 mm de plus chaque année » (classe de 6^e).

La fiction réaliste relancée apporte elle aussi des témoignages dans ce sens : Dans la figure 3, des élèves questionnent les choix de la fiction réaliste relancée. Ils ont besoin de trouver une justification à ces choix avant d'entrer dans la mathématisation verticale.

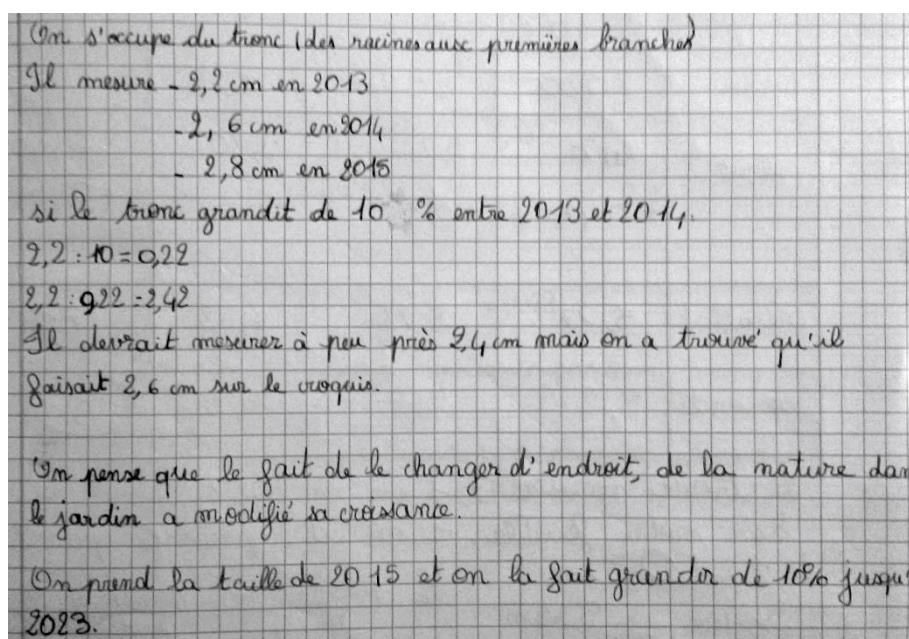


Figure 3. Extrait d'un compte-rendu d'élèves, phase 4 (classe de 6^e).

5. Conclusions et perspectives

Des fictions réalistes inspirées de problèmes de modélisation issus des pratiques scientifiques professionnelles peuvent permettre de faire vivre en classe la mathématisation horizontale, à condition de les mettre en œuvre dans un dispositif adapté. La fiction réaliste « En voie d'extinction ? » est celle qui a été proposée en 2017 par le groupe ResCo. Les données et leur analyse seront présentées dans l'atelier.

References

- Aldon, G., Durand-Guerrier, V. et Ray, B. (2014). Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation : un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste, in Aldon, G. (éd.) *Mathematics and realities, Actes de la 66e CIEAEM* (p. 148-150)
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.
- IREM Paris 7 (2011) La modélisation dans l'enseignement mathématique - mise en perspective, in Kuzniak, A. et Vivier, L. (éd.) *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, n°3.
- Israël, G. (1996) *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*, Paris, Seuil.
- Ray, B. (2013). Les fictions réalistes : un outil pour favoriser la dévolution du processus de modélisation mathématique ? Mémoire de master de l'université de Montpellier.
- ResCo, IREM de Montpellier (2014). La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. *Repères IREM 96*, p. 73-96.
- Varenne, F. (2007). *Du modèle à la simulation informatique*. Vrin.
- Yvain, S. et Gardes M-L. (2014). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème, in Aldon, G. (éd.) *Mathematics and realities, Actes de la 66e CIEAEM*.
- Yvain, S. (2016). Étude de la dévolution du processus de mathématisation aux élèves. Étude épistémologique et didactique. *Actes de la troisième journée épistémologie de l'Université Montpellier 2*. Presses Universitaires de Franche-Comté