



HAL
open science

Méthodes exactes de démixtion spectrale en norme L_0 et contraintes de parcimonie structurée à l'aide de MIP

Ramzi Ben Mhenni, Sébastien Bourguignon, Jordan Ninin, Frédéric Schmidt

► To cite this version:

Ramzi Ben Mhenni, Sébastien Bourguignon, Jordan Ninin, Frédéric Schmidt. Méthodes exactes de démixtion spectrale en norme L_0 et contraintes de parcimonie structurée à l'aide de MIP. 19ème congrès de la ROADEF (2018), Feb 2018, Lorient, France. hal-02051460

HAL Id: hal-02051460

<https://hal.science/hal-02051460>

Submitted on 27 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes exactes de démélange spectral en norme ℓ_0 et contraintes de parcimonie structurée à l'aide de MIP

Ramzi Ben Mhenni¹, Sébastien Bourguignon¹, Jordan Ninin², Frédéric Schmidt³

¹ École Centrale de Nantes, LS2N , 1 rue de la Noë, F-44321 Nantes, France
{ramzi.ben-mhenni,sebastien.bourguignon}@ec-nantes.fr

² ENSTA-Bretagne, Lab-STICC , 2 rue François Verny, F-29806 Brest cedex 9, France
jordan.ninin@ensta-bretagne.fr

³ Université Paris-Sud, GEOPS, 1 rue du Belvédère, F-91405 Orsay, France
frederic.schmidt@u-psud.fr

Mots-clés : *Démélange spectral parcimonieux, optimisation en norme ℓ_0 , parcimonie structurée, Programmation Mixte en Nombres Entiers.*

1 Introduction

Le démélange spectral est un problème inverse classique en imagerie hyperspectrale, où on cherche à décomposer un spectre mesuré en un mélange linéaire de spectres élémentaires *purs* et à estimer les abondances associées. Dans une approche supervisée, on ne s'intéresse qu'à l'estimation des abondances, les spectres de référence étant supposés connus. La corrélation élevée entre les éléments du dictionnaire rends les approches classiques inefficaces en présence de bruit, d'où l'intérêt d'incorporer des contraintes plus fortes telles que la *parcimonie* et la *parcimonie structurée* pour aider à régulariser le problème, ce qui fait l'objectif de cet article.

2 Contraintes et reformulations

Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$ le spectre observé, acquis dans L bandes spectrales, résultant du mélange de spectres élémentaires. Si on considère que le modèle de mélange est linéaire, alors on peut écrire : $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon}$, où \mathbf{S} représente le dictionnaire de spectres purs, \mathbf{a} est le vecteur d'abondances et $\boldsymbol{\epsilon}$ représente le bruit. Pour traduire des considérations physiques (les abondances représentent des pourcentages), des contraintes de positivité et de somme à un sont en général ajoutées aux inconnues a_n . Le problème, souvent dénommé FCLS pour *Fully-Constrained Least-Squares* [3], s'écrit alors : $\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{a}\|^2$ t. q. $\mathbf{a} \geq 0$, $\sum_n a_n = 1$. Bien évidemment, toutes les signatures n'étant pas systématiquement présentes dans chaque spectre observé, il peut sembler naturel de rechercher des solutions parcimonieuses, *i.e.*, pour lesquelles le nombre de coefficients non nuls (la « norme » ℓ_0) est faible. Nous nous intéressons aux reformulations en programmation mixte en nombres entiers (MIP) du problème de démélange. Elles reposent sur l'introduction de variables de décision binaires $b_n, n = 1, \dots, N$, qui modélisent la présence ou l'absence d'un spectre donné dans le mélange : $b_n = 0 \Leftrightarrow a_n = 0$. Les contraintes de positivité et de somme à un imposent naturellement des bornes sur les abondances : $0 \leq a_n \leq 1$. Par conséquent, cette contrainte logique peut être exactement traduite en $0 \leq a_n \leq b_n$. Cette formulation permet alors de prendre en compte d'autres contraintes inhabituelles en démélange spectral telles que :

Contrainte de parcimonie en norme ℓ_0 : La norme ℓ_0 rend le problème de démélange essentiellement combinatoire. Afin de limiter le coût de calcul, les approches classiques parcimonieuses reposent soit sur la relaxation de la norme ℓ_0 en norme ℓ_1 (inefficace pour ce problème car la norme ℓ_1 des abondances vaut 1) , soit sur la mise en œuvre d'algorithmes gloutons. Des travaux récents (par exemple[1]) ont montré que la résolution des problèmes en norme ℓ_0 , de taille raisonnable, est possible en se basant sur la programmation mixte en nombres entiers (MIP) : La norme ℓ_0 s'écrit linéairement : $\|\mathbf{a}\|_0 = \sum_n b_n$, et le problème peut être reformulé en MIP comme suit : (FCLS ℓ_0) $\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{b} \in \{0,1\}^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{a}\|^2$ t.q. $\{\mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}; \sum_n a_n = 1; \sum_n b_n \leq K;$

Contrainte du groupe exclusif (GE) : les mesures de laboratoire peuvent venir de différents endroits sur Terre. Dans ce cas, le dictionnaire peut contenir plusieurs variantes d'un même minéral, observé dans des conditions différentes, mais en réalité un seul minéral (au max) va être présent dans le mélange. Cette contrainte est mentionnée dans [4] mais on ne sait pas la traiter habituellement. Soit G_1, \dots, G_J tous les groupes, la contrainte peut être reformuler comme suit : $\sum_{i \in G_j} b_i \leq 1, j = 1, \dots, J$, et le problème MIP s'écrit de la façon suivante :

$$(\text{FCLS}_{\text{GE}}) \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{b} \in \{0,1\}^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{a}\|^2 \text{ t.q. } \left\{ \mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}; \sum_n a_n = 1; \sum_{i \in G_j} b_i \leq 1, j = 1, \dots, J; \right.$$

Contrainte des abondances significatives (SA) : imposer une valeur minimale sur les abondances non nulles peut également être utile en présence de bruit : on veut estimer seulement les abondances significatives. Cette contrainte s'écrit ($a_n \neq 0 \Rightarrow a_n \geq \tau$) peut être traduite par : $\tau b_n \leq a_n \leq b_n, \forall n$ et le problème peut être reformulé en MIP de la façon suivante :

$$(\text{FCLS}_{\text{SA}}) \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{b} \in \{0,1\}^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{a}\|^2 \text{ t.q. } \left\{ \mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}; \sum_n a_n = 1; \tau b_n \leq a_n \leq b_n, \forall n; \right.$$

3 Résultats et Conclusions

Pour illustrer l'intérêt des approches proposées, nous avons utilisé un dictionnaire composé de spectres en réflectance de minéraux de la base de données de l'USGS.

La figure 1 présente des résultats quantitatifs, moyennés sur 30 réalisations aléatoires des données et avec un rapport signal sur bruit (SNR) égale à 50 dB, sur l'erreurs quadratique $E_Q = \|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_2^2$, en notant respectivement $\hat{\mathbf{a}}$ et \mathbf{a} les abondances estimées et vraies. Nous considérons les abondances estimées $\hat{\mathbf{a}}$ fournies par FCLS, FCLS_{GE}, FCLS_{ℓ₀}, FCLS en norme ℓ₀ avec contraintes GE (FCLS_{ℓ₀+GE}), FCLS avec contraintes SA et GE (FCLS_{SA+GE}), et la solution d'une méthode gloutonne [2]. Le seuil τ utilisé pour les contraintes SA est fixé à 0.1. Les approches proposées fournissent toujours de meilleurs résultats que FCLS jusqu'à $K = 6$ composantes. Cette différence est d'autant plus marquée quand le RSB est élevé. Par contre, le temps de calcul moyen augmente fortement avec le nombre de composantes recherchées K_{max} et le niveau de bruit (voir tableau 1). On remarque aussi que le fait d'ajouter les contraintes GE au FCLS_{ℓ₀} améliore le temps de calcul.

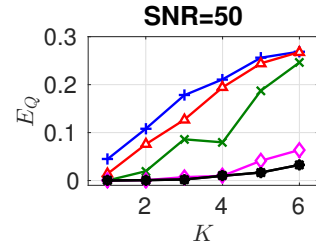


FIG. 1 – Performances d'estimation de FCLS (+), FCLS_{GE} (△), FCLS_{ℓ₀} (○), FCLS_{ℓ₀+GE} + SA (◇), et glouton [2] (x).

En conclusion, l'utilisation des formulations MIP permet d'intégrer des contraintes logiques qui améliorent les performances de détection par rapport à la solution classique FCLS. Même si l'optimisation globale requiert un temps de calcul bien plus élevé que les méthodes sous-optimales, elle reste cependant faisable pour des problèmes de démixage, de complexité raisonnable, limitée par le nombre de composantes recherchées et le niveau de bruit.

| | | K | | |
|-------|----------|-----|--------------------|--------------------|
| | | 2 | 4 | 6 |
| FCLS | SNR=50dB | 1.1 | 5.89 | 251 ⁽¹⁾ |
| ℓ₀ | SNR=45dB | 1.3 | 17 | 581 ⁽⁴⁾ |
| FCLS | SNR=50dB | 1.2 | 4.25 | 123 |
| ℓ₀+GE | SNR=45dB | 1.4 | 11.1 | 547 ⁽⁴⁾ |
| FCLS | SNR=50dB | 6.9 | 16.7 | 212 ⁽¹⁾ |
| SA+GE | SNR=45dB | 3.3 | 204 ⁽¹⁾ | 681 ⁽⁵⁾ |

TAB. 1 – Temps de calcul (s) moyen. Entre parenthèses : nombre de réalisations n'ayant par fourni la solution optimale en 1000 (s).

Références

- [1] S. Bourguignon, J. Ninin, H. Carfantan, and M. Mongeau. Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming : Formulations and computational performance. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(6), March 2016.
- [2] J. B. Greer. Sparse demixing of hyperspectral images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(1) :219–228, Jan 2012.
- [3] D.C. Heinz and Chein-I-Chang. Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(3), Mar 2001.
- [4] M. D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza. Collaborative sparse regression for hyperspectral unmixing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(1) :341–354, Jan 2014.