Approche géométrique pour l'analyse et la commande des systèmes de dimension infinie

Françoise Couenne, Valérie dos Santos Martins, Laurent Lefèvre, Yann Le Gorrec, Bernhard Maschke

▶ **To cite this version:**

Françoise Couenne, Valérie dos Santos Martins, Laurent Lefèvre, Yann Le Gorrec, Bernhard Maschke. Approche géométrique pour l'analyse et la commande des systèmes de dimension infinie. Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2008), Sep 2008, Bucarest, Roumanie. hal-02025513

HAL Id: hal-02025513
https://hal.science/hal-02025513

Submitted on 19 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche géométrique pour l'analyse et la commande des systèmes de dimension infinie

Résumé étendu

Françoise Couenne[1], Valérie Dos Santos [1], Laurent Lefevre[1],
Yann Le Gorrec[1], Bernhard Maschke[1]

[1] LAGEP, Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; université Lyon 1, CNRS, UMR 5007, LAGEP, Villeurbanne, F-69622, France ; ESCPE, Villeurbanne, F-69622

[3]{nom}@lagep.cpe.fr

Résumé— **Dans cet article nous proposons un tour d'horizon de résultats récents obtenus dans le cadre de l'approche géométrique pour les systèmes de dimension infinie. On montrera qu'une modélisation adéquate, permettant de mettre en relief les propriétés énergétiques intrinsèques des systèmes, est une atout majeur pour l'analyse dynamique et la synthèse de lois de commande pour les systèmes complexes de dimension infinie. On s'attachera à montrer ici l'impact d'une telle approche du point de vue des résultats théoriques et de leur application sur des exemples concrets tels que les systèmes de poutres, d'équation d'onde, des canaux d'irrigation, des réacteurs tubulaires, etc ...**

Mots-clés— **Systèmes hamiltoniens, systèmes de contôle frontière, rèduction des EDPs**

I. Introduction

La modélisation des systèmes physiques joue un rôle important dans l'analyse dynamique et la synthèse de lois de commande. En effet les techniques traditionnelles issues de l'automatique se confrontent à de nombreux écueils lorsqu' elles sont appliquées à des modèles inadéquats. Cette tendance s'accentue lorsque la complexité des phénomènes mis en jeux, tels que les non linéarités et l'aspect distribué des phénomènes, augmente. De plus dans ces derniers cas, les outils mathématiques développés deviennent de plus en plus sophistiqués et aboutissent majoritairement à des impasses numériques (complexité, temps de calcul). Une alternative à ces problèmes est la prise en compte de la modélisation dès le début du processus de synthèse des lois de commande. Une approche couramment utilisée pour la modélisation des systèmes physiques non dissipatifs, en particulier pour les systèmes mécatroniques, est la modélisation Hamiltonienne [24]. Cette approche repose sur l'expression de la relation entre l'énergie,les forces génératrices et la dynamique du système. Plus précisément, la modélisation Hamiltonienne repose sur l'existence d'une fonction Hamiltonienne et d'une structure géométrique permettant d'exprimer les flux de puissance au sein du système. Un des avantages de ce formalisme est l'existence d'un outil graphique associé, le langage Bond Graph [10], permettant de traiter de manière efficace les systèmes interconnectés complexes. De nombreux travaux portent sur l'étude théorique et applicative des systèmes Hamiltoniens de dimension finie, ainsi que sur les techniques de synthèse de correcteur qui y sont associés [17], [18], [19], [14], [3].

Dans cet article nous proposons une synthèse des résultats récents sur la modélisation et l'utilisation de ce formalisme dans le cas des systèmes à paramètres distribués.

II. Modélisation sous forme Hamiltonienne à ports

D'un point de vue formel, la généralisation géometrique des systèmes Hamiltoniens aux systèmes de dimension infinie a été effectuée dans le cadre de la géométrie différentielle dans [16]. Elle consiste, pour des systèmes conservatifs de puissance, à généraliser la notion de structure simplectique ou structure de Dirac afin de prendre en compte les flux de puissance à la frontière du domaine spatial. Afin d'illustrer cette structure fondamentale, prenons l'exemple classique 1-D et linéaire de la corde élastique vibrante. La représentation traditionnelle de ce système dynamique repose sur l'équation d'onde et aboutit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z,t), \text{ avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{1}$$

où $u(z,t)$ est le déplacement de la corde, T le module élastique et ρ la masse linéique. Habituellement les solutions de cette équation sont déterminées pour un jeu de conditions frontières *a priori* fixées. Considérons maintenant l'énergie totale du système (énergie cinétique plus potentielle) : $H = \frac{1}{2}\int_0^1 T\,\epsilon^2 + \frac{1}{\mu}\,p^2$. A partir de cette énergie totale et de l'expression des lois de conservation il est possible de réécrire le système (1) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \epsilon \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T\,\epsilon \\ \frac{1}{\mu}\,p \end{pmatrix}. \tag{2}$$

L'intérêt de cette formulation est la mise en évidence de l'opérateur différentiel antisymétrique $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}$ reliant l'espace co-tangent à l'espace des flux. En notant $f = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \epsilon \\ p \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$(espace des flux) et $e = \begin{pmatrix} T\,\epsilon \\ \frac{1}{\mu}\,p \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$(espace

des efforts) on obtient :

$$f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} e = \mathcal{J} e$$

Si les variables d'effort sont des fonctions définies sur un support compact fermé, l'opérateur $\mathcal{J}$ est antisymétrique respectivement au produit symétrique de puissance défini sur les variables d'effort et de flux. Les variables d'effort et de flux appartiennent alors à une structure symplectique $\mathcal{D}$ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ appelée structure de Dirac [6]. Cela signifie que le système est conservatif de puissance et que l'énergie est conservée. Dans le cas où les conditions frontières sont non nulles, les variables d'effort et de flux sont étendues à la frontière et notées respectivement $(e, e_\partial), (f, f_\partial)$. Le produit de puissance est lui aussi modifié afin de tenir compte de cette extension. Dans ce cas, la structure de Dirac est définie sur les espaces augmentés et symbolise le fait que la variation de l'énergie interne du systèmes est égale au flux de puissance à la frontière. Il est à noter que cette analyse est purement géométrique : les variables de port sont définies à partir de l'opérateur différentiel et aucune causalité ni trajectoire n'est encore définie. Ce type de formalisme, traditionnellement associé aux systèmes électromécaniques, a été appliqué aux systèmes de lois de conservation de masse et d'énergie liés au systèmes physico chimiques issus des lois de la thermodynamique irréversible [5].

III. Existence de solution, stabilité et stabilisation : cas 1D

Dans le cas des systèmes à une dimension spatiale, cette structure a été définie précisément sur des espaces de Hilbert. Dans [11] le produit de puissance et la paramétrisation des variables de ports en fonction de l'opérateur sont définis afin de caractériser toutes les structures de Dirac associées à un opérateur antisymétrique différentiel linéaire d'ordre N. On définit ensuite l'ensemble des systèmes dynamiques associés à cette structure. Cette modélisation physique permet d'obtenir de manière élégante et systématique des résultats forts sur l'existence de solution et sur leur nature, de type unitaire ou de contraction [29]. Elle permet en particulier de paramétrer l'ensemble des conditions limites permettant de définir un système de contrôle frontière et d'aboutir à un semigroupe de contraction. Cette paramétrisation est très simple et se ramène à la satisfaction d'un critère purement matriciel. Ces travaux ont été généralisés à l'étude de stabilité en fonction du choix des variables de port et plus généralement au contrôle et à la stabilisation à la frontière [27]. Il apparaît que ce type d'approche est beaucoup plus simple que l'utilisation de la théorie des systèmes abstraits [28], [25] pour lesquels les espaces de définition des opérateurs peuvent être difficiles à manipuler [26]. Lorsque le système contient une terme dissipatif, il ne peut plus être représenté sous forme purement Hamiltonienne. Par exemple l'équation de diffusion linéarisée s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_l \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Et la structure géométrique s'écrit : $f = \mathcal{R} e$ avec $\mathcal{R}$ symétrique. Cependant, il existe une structure géométrique sympléctique $\mathcal{J}_e$ étendue contrainte sur laquelle évolues les solutions du système. En effet l'équation précédente peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}_e} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ avec } f_2 = D_l e_2$$

On peut donc généraliser les preuves d'existence et les caractéristiques principales des solutions lorsque l'on considère des opérateur dissipatifs (symétriques). Une application aux systèmes d'adsorption et aux réacteurs tubulaires est proposée dans [12].

IV. Réduction des systèmes EDP

De part son caractère énergétique, la modélisation Hamiltonnienne à port est tout à fait adaptée pour la modélisation modulaire et l'interconnection des modèles. Il est donc naturel de penser à cette structure pour la réduction spatiale des systèmes à paramètres répartis. Une telle approche est proposée dans [7] pour les systèmes conservatifs de puissance. Elle repose sur une approche de type élements finis mixtes, où chaque élément est représenté par une structure de Dirac de dimension finie. Les fonction support permettant d'interpoler les variables de flux et d'effort sont choisies de telle sorte qu'elle permettent de conserver la structure géométrique du modèle réduit. Il est possible de généraliser cette approche aux systèmes dissipatifs en conservant la nature énergétique de chaque élément du système (accumulation, dissipation, structure d'interconection). Cette approche a été appliquée avec succès à un système multiéchelle d'adsorption par modulation de pression [2] ainsi qu'à la discrétisation des équations d'écoulement dans un canal [8], [20], [21]. Une étude plus fine des propriétés spectrales de cette méthode de réduction est en cours. De premiers résultats permettant de comparer cette approche avec des approches plus classiques de réduction sont proposés dans [23] pour les systèmes dissipatifs et dans [9] pour les systèmes conservatifs de puissance.

V. Commande avancée en dimension infinie

Enfin, en dimension finie, la structure Hamiltonienne est utilisée à des fins de commande par des approches de type Lyapunov ou de type "Energy Shaping". Une généralisation de ces travaux est en cours. Elle consiste dans un premier temps à définir les invariants de la structure simplectique, nommés fonction de Casimir[13]. Ces invariants sont traditionnellement utilisés dans les approches de type immersion réduction afin d'exprimer l'état du correcteur comme une fonction de l'état du système [14], [15]. Ce type d'approche aboutit à la synthèse de retour d'état stabilisant.

VI. Conclusion et perspectives

Dans cet article sont répertoriés des résultats récents sur la modélisation structurée et son application dans le cadre des systèmes à paramètres distribués. Bien que les résultats obtenus soient nombreux dans les différents domaines de l'automatique, c'est à dire la modélisation, l'analyse et la

synthèse de lois de commande, beaucoup de pistes de recherche restent ouvertes. On pourra citer par exemple la généralisation des travaux élaborés dans le cadre linéaire 1-D au cas linéaire 2-D et 3-D. On s'intéressera aussi à la prise en compte de certaines classes de non linéarités dans l'analyse de l'existence et de la nature des solutions du système dynamique. Enfin de nombreux travaux sont en cours sur l'analyse des méthodes de réduction et de leur impact sur les techniques de commande mises en oeuvre par le biais de ces approches.

Références

[1] A. Baaiu, F. Couenne, Y .Le Gorrec, L. Lefevre et M. Tayakout, « Bond graph modeling of an adsorption column », In *Preprint 5th International Conference on Mathematical Modelling MATHMOD*, Vienna, Austria, 2006.

[2] A. Baaiu, F. Couenne, L. Lefevre, Y. Legorrec et M. Tayakout. « Energy based discretization of a multi-scale process : application to an adsorption column », In *Preprint ADCHEM 2006*, Gramado, Brazil, 2006.

[3] A.J. van der Schaft, J. Cervera *Composition of Dirac Structures and Control of Port-Hamiltonian Systems.*

[4] A.J. van der Schaft, B.M. Maschke, *Hamiltonian Formulation of Distributed-Parameter Systems with Boundary Energy Flow*, Journal of Geometry and Physics 42 (2002) 166-194.

[5] F. Couenne, C. Jallut, B. Maschke, P. Breedveld, and M. Tayakout. « Bond graph modelling for chemical reactors », *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 12, n°2/3, pp. 159–174, 2006.

[6] T.J. Courant, « Dirac manifolds », *Trans. American Mathematical Society*, vol. 319, n°2, pp. 631-661, 1990.

[7] G. Golo, V. Talasila, A.VanDerSchaft et B. Maschke, « Hamiltonian disctrization of boundary control systems », *Automatica*, vol. 40, pp.757–771, 2004.

[8] B. Hamroun, *Simulation des systèmes dynamiques à paramètres distribués mis sous forme hamiltonienne à ports*, Master's thesis, LCIS-INPG Grenoble 2006.

[9] B. Hamroun, L. Lefèvre et E. Mendes, « Port based modelling and geometric reduction for open channel irrigation systems », *46th IEEE Conference on Decision and Control*, December 12-14, at the Hilton New Orleans Riverside in New Orleans, Louisiana USA, 2007.

[10] D. Karnopp, D. Margolis et R. Rosenberg, *Systems Dynamics : a Unified Approach.* John Wiley and Sons, New York, 2000.

[11] Y. Le Gorrec, H. Zwart et B. Maschke,« Dirac structures and boundary control systems associated with skew-symmetric differential operators », *SIAM J. Control and Optim.*, 2005, 44, 2, 1864–1892.

[12] Y. Le Gorrec and J. A. Villegas and H. Zwart and B. Maschke, « Dissipative Boundary Control Systems with Application to Distributed Parameters Reactors », *Joint CCA, ISIC and CACSD*, 2006, October 4-6, Munich, Germany.

[13] Y. Le Gorrec, B. Maschke, H. Zwart et J. Villegas « Casimir functions and interconnection of boundary port Hamiltonian systems », *CDPS* July, 2007.

[14] A. Macchelli, C. Melchiuri *Control by Interconnection and Energy Shaping of the Timoshenko Beam.* SIAM. 2003.

[15] B.M. Maschke, R. Ortega, A.J. van der Schaft, *Energy-Based Lyapunov Functions for Forced Hamiltonian Systems with Dissipation*, IEEE Conf. Dec. and Control Tampa, FL, Dec. (1998)

[16] B. Maschke and A.J. van der Schaft, « Port controlled Hamiltonian representation of distributed parameter systems », *Proc. IFAC workshop on Lagrangian and Hamiltonian methods for Nonlinear Control*, N.E. Leonard and R. Ortega eds., pp. 28-38, Princeton University, Princeton USA, 2000.

[17] R. Ortega, A.J. van der Schaft, B.M. Maschke et G. Escobar, *Energy-Shaping of Port-Controlled Hamiltonian Systems by Interconnection*, IEEE Conf. Dec. and Control, Phoenix, AZ, Dec. (1999).

[18] R. Ortega, A.J. van der Schaft, B.M. Maschke, G. Escobar, *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Port Controlled Hamiltonian Systems*, automatica 38 (2002) 585-596.

[19] R. Ortega, A.J. van der Schaft, I. Mareels, B.M. Maschke, *Putting Energy Back in Control*, IEEE Control Systems Magazine, 21(2), 18-33, (2000)

[20] R. Pasumarthy, A.J. van der Schaft, *A port-Hamiltonian approach to modeling and interconnections of canal systems*, Geoplex, 2001.

[21] R. Pasumarthy, A.J. van der Schaft, *On Interconnections of Infinitedimensional Port-Hamiltonian Systems*, Geoplex, 2001.

[22] H. Peng, A. Baiiu, F. Couenne et Y. Le Gorrec, « Energy based discretization of a class of distributed parameters processes - comparison with classical approach », *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Hilton New Orleans Riverside in New Orleans, Louisiana USA, 2007.

[23] H. Peng, A. Baiiu, F. Couenne et Y. Le Gorrec, « Energy based discretization of a class of distributed parameters processes - comparison with classical approach », *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Hilton New Orleans Riverside in New Orleans, Louisiana USA, 2007.

[24] A.J. van der Schaft, *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Berlin : Springer,(2000)

[25] O.J. Staffans, « Well-Posed Linear Systems », *Cambridge University Pres, 2005*

[26] J.A. Villegas, H. Zwart et Y. Le Gorrec, « Boundary control systems and the system node », *IFAC World Congress 2005.*

[27] J. A. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke et A.J. van der Schaft, « Stability and Stabilization of a Class of Boundary Control Systems », *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005.*

[28] G. Weiss, « The representation of regular linear systems on Hilbert spaces », *Control and estimation of distributed parameter systems (Vorau, 1988)* Internat. Ser. Numer. Math.,91,401–416, Birkhäuser, Basel, 1989, 93B28 (47D03 47N70 93B15 93C25), MR1033074 (91d :93026), Kathryn E. Lenz,

[29] H. Zwart, Y. Le Gorrec, B.Maschke et J.A. Villegas, « Well-Posedness and Regularity for a Class of Hyperbolic Control Systems », 17*th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, July 2006.