



HAL
open science

Structure de jonction pour les systèmes à paramètres distribués : cas des systèmes réversibles et irréversibles

Françoise Couenne, Valérie dos Santos Martins, Yann Le Gorrec, Bernhard Maschke

► To cite this version:

Françoise Couenne, Valérie dos Santos Martins, Yann Le Gorrec, Bernhard Maschke. Structure de jonction pour les systèmes à paramètres distribués : cas des systèmes réversibles et irréversibles. CIFA (conférence internationale francophone d'automatique) 2008, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. hal-02025500

HAL Id: hal-02025500

<https://hal.science/hal-02025500>

Submitted on 19 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

shapes,plot

Structure de jonction pour les systèmes à paramètres distribués : cas des systèmes réversibles et irréversibles

Françoise COUENNE¹, Valérie DOS SANTOS¹, Yann LE GORREC¹, Bernhard MASCHKE¹

¹Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés
UMR C.N.R.S. 5007 , Université Lyon 1, Université de Lyon, Bat 308G, 43 Bd du 11 novembre 1918
Villeurbanne, France

couenne@lagep.univ-lyon1.fr

Résumé— Dans cet article nous proposons la formulation Bond Graph unifiée des structures de jonction pour des systèmes réversibles et irréversibles dans le cas des systèmes à paramètres distribués. Cette présentation généralise le *gyrateur symplectique*, élément de couplage interdomaine ainsi que l'élément *transformateur* proposé dans le formalisme Bond Graph pour les systèmes à paramètres localisés. A cette fin, nous utilisons le formalisme des formes différentielles extérieures d'ordre k sur des espaces euclidiens pour représenter les variables conjuguées de puissance ainsi que les variables d'état et d'énergie. La structure proposée appelée structure de Dirac est un élément 3-ports continu de puissance qui représente le couplage canonique entre les flux de puissance présents au sein du système et ceux traversant les frontières du domaine spatial. La présentation s'appuie sur deux exemples monodimensionnels : la ligne de transmission sans perte dans le cas réversible et la diffusion pour le transfert de matière dans le cas irréversible.

Mots-clés— Systèmes hamiltoniens, structure de Dirac, systèmes dissipatifs

I. INTRODUCTION

La modélisation Bond Graph des systèmes à paramètres distribués est classiquement traitée selon deux optiques différentes. La première consiste à approcher le système de dimension infinie par un problème de dimension finie en utilisant une technique de discrétisation spatiale, par exemple les éléments finis. Dans ce cas les variables conjuguées de puissance associées au système obtenu sont des vecteurs [4], [17], [20]. Une seconde approche consiste à représenter les modèles en dimension infinie avec des variables conjuguées appartenant à des espaces de Hilbert [7], [10], [16].

Nous proposons dans cet article une formulation unifiée des éléments de structure de jonction intervenant dans la représentation Bond Graph des systèmes à paramètres distribués [22], [14], [12], [1]. Dans le cadre des systèmes à paramètres répartis, il est nécessaire de comprendre comment relier les flux de puissance qui s'échangent à l'intérieur du domaine spatial avec ceux qui s'échangent à la frontière du domaine. Cette relation est donnée au moyen d'une structure géométrique, appelée structure de Dirac, associée à la dérivée extérieure et basée sur le théorème de Stokes. Cette structure d'interconnexion est une généralisation des lois de Kirchhoff. Elle permet donc de relier la variation d'énergie totale du système aux échanges à la frontière. La dynamique du système est décrite en fonction des flux de

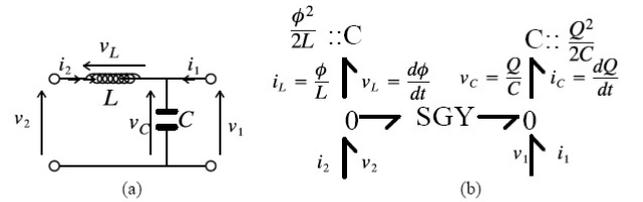


Fig. 1. L'oscillateur harmonique LC

puissance à l'intérieur des différentes parties du système. Nous verrons que cette structure, bien que traditionnellement utilisée pour les systèmes conservatifs de puissance, permet de traiter les systèmes hamiltoniens à port avec dissipation.

II. DEUX EXEMPLES INTRODUCTIFS

A. La ligne de transmission sans perte

Cet exemple permet de montrer la généralisation en dimension infinie du générateur symplectique représentant le couplage canonique interdomaine. Considérons tout d'abord l'exemple de l'oscillateur harmonique LC (avec des lois constitutives linéaires) représenté en figure 1(a) et le Bond Graph associé figure 1(b). L'énergie totale du système est $H(Q, \Phi) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$. Le Bond Graph représente les échanges d'énergie entre deux éléments d'accumulation \mathbf{C} interconnectés par le gyrateur symplectique dont les équations constitutives donnent :

$$\begin{pmatrix} i_C \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \Phi} \end{pmatrix} \quad (1)$$

On obtient finalement le système hamiltonien à port :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q \\ \Phi \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \Phi} \end{pmatrix} + g_1 i_1 + g_2 v_2 \quad (2)$$

avec

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

et avec les variables de port suivantes

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cet oscillateur harmonique dont le Bond Graph est représenté en figure 1 peut être considéré comme un des éléments de discrétisation de la ligne de transmission sans perte. En effet dans ce cas, les variables sont des fonctions du temps et de la variable spatiale $z \in [0, L]$. Les variables d'énergie Q et ϕ deviennent des densités linéiques et les variables de co-énergie v_C et i_L sont elles aussi distribuées le long de la ligne. L'énergie totale s'écrit :

$$\mathfrak{H} = \int_0^L H(Q, \phi) dz \quad (5)$$

La dynamique de la ligne de transmission s'écrit en terme d'effort et flux comme :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q(z, t) \\ \phi(z, t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

La matrice symplectique de l'équation (1) est remplacée par un opérateur matriciel. Maintenant si l'on réécrit le bilan de puissance sur le domaine en fonction des couples de variables conjuguées, on voit que par une simple intégration par partie, on peut le calculer facilement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{H} &= \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} & \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\ &= v_C(L, t) i_L(L, t) - v_C(0, t) i_L(0, t) \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (8) montre que l'opérateur matriciel représente une interconnexion continue en puissance si et seulement si les conditions aux limites sont telles que le flux de puissance traversant la frontière de la ligne de transmission soit nul. Cela montre aussi que l'équation représentant le gyrateur symplectique doit être augmentée de façon à tenir compte du flux aux frontières. Du point de vue Bond Graph, le gyrateur symplectique qui est un élément 2-ports devient un élément 3-ports pour les systèmes distribués. Le port supplémentaire correspond au flux de puissance à la frontière ($z = 0, L$). On donne en figure 2 la représentation suivante du bond graph en dimension infinie où l'élément *SDGY* représente l'extension en dimension infinie du gyrateur symplectique. Dans ce bond graph en dimension infinie, nous utilisons par convenance une notation multi-lien. La notation ∞, i signifie que les vecteurs effort et flux sont de dimension i et distribués en la variable d'espace. Pour les variables au frontière qui dans notre cas ne sont pas distribuées, on retrouve uniquement la dimension des vecteurs effort et flux.

Notons que dans cet exemple nous nous sommes restreints à un système commandé par les bords du domaine. Des sollicitations dans le domaine nécessiteraient une autre notation.

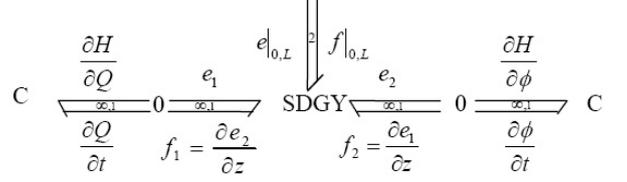


Fig. 2. Bond graph de la ligne de transmission

B. Le transfert de matière par diffusion

Un modèle détaillé de transfert de matière par diffusion dans un colonne d'adsorption est donné dans [1]. Dans cette section, nous considérons l'exemple académique de transfert de matière en phase gazeuse par diffusion longitudinale dans un domaine cylindrique dans des conditions isothermes et isobares. Le domaine se réduit alors à l'intervalle $[0, R]$. Nous considérons le cas de 2 espèces et nous supposons le mélange idéal. Au bord du domaine, un transfert de matière a lieu avec le milieu extérieur. Nous choisissons une loi constitutive pour la diffusion qui est cohérente avec les variables de la thermodynamique. Ainsi le flux de diffusion ϕ s'exprimera en fonction du gradient de potentiel chimique μ et non de la concentration [6], [26], [2].

On obtient l'équation de bilan suivante :

$$\text{Modèle} \quad \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial r} = D \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \right. \quad (9)$$

où c est la concentration ($mol.m^{-3}$) et D le coefficient de diffusivité [13].

En thermodynamique, traditionnellement les variables d'état d'un système sont classées en variables extensives et variables intensives. L'énergie interne d'un système s'exprime en fonction du produit de couples de variables conjuguées telles que le volume V et la pression P , l'entropie S et la température T et le potentiel chimique μ_i et le nombre de moles n_i (pour une espèce i dans un mélange de n_c espèces) de la manière suivante :

$$U = TS - PV + \sum_{i=1}^{n_c} \mu_i n_i \quad (10)$$

Dans le cas où les systèmes considérés sont isothermes et isobares, il est plus aisé de travailler avec l'énergie libre de Gibbs $G = U - TS + PV$. G est une transformée de Legendre de U , et du point de vue thermodynamique présente exactement la même information que U . Cependant cette quantité n'est pas conservative contrairement à l'énergie interne U . L'avantage principal d'utiliser ce potentiel est de réduire le nombre des variables d'état en éliminant directement les variations concernant la température et la pression dans le système.

Considérons un système ouvert en dimension infinie avec une seule phase et 2 espèces. Les variables extensives deviennent alors des quantités spécifiques. La variation de la densité d'énergie de Gibbs g ($J mole^{-1}$) de ce système

s'exprime simplement par :

$$dg = -sdT + vdP + \sum^2 \mu_i dx_i \quad (11)$$

En multipliant l'équation (11) par la concentration totale (constante grâce aux hypothèses d'idéalité du mélange et des conditions isothermes et isobares), l'énergie libre de Gibbs sur le domaine spatial est donnée par :

$$G = \int_0^R \mathcal{G} dr = \int_0^R \sum^2 \mu_i c_i dr$$

où \mathcal{G} ($J.m^{-3}$) est la densité de l'énergie libre de Gibbs, c_i est la densité molaire de l'espèce i ($mol.m^{-3}$) et μ_i est le potentiel chimique ($J.mol^{-1}$). Les variables c_i et μ_i sont conjuguées du point de vue énergétique car leur produit correspond à la densité d'énergie sur l'ensemble du domaine spatial.

La variation temporelle de l'énergie libre de Gibbs sur l'ensemble du domaine spatial s'écrit comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \mathcal{G} dr = \int_0^R \sum^2 (\delta_{c_i} \mathcal{G}) \dot{c}_i dr \quad (12)$$

où $\delta_{c_i} \mathcal{G}$ dénote la dérivée variationnelle de \mathcal{G} [21] par rapport à c_i . Par définition $\delta_{c_i} \mathcal{G}$ représente le potentiel chimique μ_i [2]. La variation totale de l'énergie libre de Gibbs dans le domaine se décompose en utilisant une intégration par partie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \mathcal{G} dr &= \int_0^R \sum^2 -\mu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} dr \\ &= -[\mu_i \phi_i]_0^R + \int_0^R \sum^2 \frac{\partial \mu_i}{\partial r} \phi_i dr \end{aligned} \quad (13)$$

En écrivant l'égalité des seconds termes de l'équation (13) il vient :

$$\int_0^R \sum^2 \mu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} dr + \int_0^R \sum^2 \frac{\partial \mu_i}{\partial r} \phi_i dr = \int_{\partial[0,R]} \sum^2 \mu_i \phi_i \quad (14)$$

Cette équation représente le théorème de Stokes et met en relation les flux de puissance à l'intérieur du domaine spatial et à la frontière. En effet cette équation fait apparaître deux couples de variables conjuguées dans le domaine ainsi qu'un couple de variables conjuguées à la frontière :

$$\begin{aligned} (e_{i1}, f_{i1}) &:= (\mu_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial r}) \\ (e_{i2}, f_{i2}) &:= (\frac{\partial \mu_i}{\partial r}, \phi_i) \\ (e_{i\partial}, f_{i\partial}) &:= (\mu_i|_{\partial[0,R]}, \phi_i|_{\partial[0,R]}) \end{aligned} \quad (15)$$

En considérant ces variables, l'équation (9) s'écrit pour l'espèce i :

$$\begin{pmatrix} f_{i1} \\ e_{i2} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} e_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

avec les équations de fermeture suivante :

- $\frac{\partial c_i}{\partial t} = -f_{i1}$. Cette équation de conservation caractérise un terme un élément d'accumulation **C**. L'effort

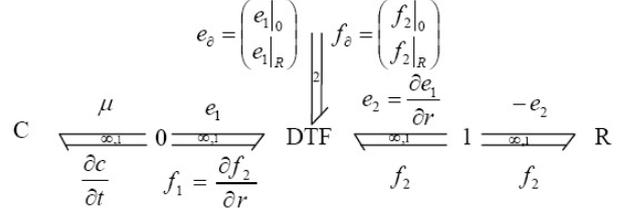


Fig. 3. Bond graph du système diffusif

$\mu_i = e_{i1}$ est calculé à partir des relations thermodynamiques. C'est une fonction de la variable d'énergie c_i .

- $f_{i2} = -De_{i2}$. Cette équation phénoménologique caractérise la diffusion. C'est un terme de dissipation **R**.

On peut donc remarquer que l'on fait apparaître un opérateur \mathcal{A} représentant une relation intrinsèque entre les différentes variables définies. Cet opérateur \mathcal{A} est formellement antisymétrique (cas de conditions aux frontières nulles). Bien que formellement nous savons que la diffusion est associée à un opérateur symétrique, nous l'avons formulé ici par le biais d'un opérateur étendu formellement antisymétrique et un retour d'état. Nous allons montrer que cet opérateur associé à un choix adéquat des conditions frontières est antisymétrique et que les vecteurs définis dans les deux exemples précédents évoluent dans une structure géométrique appelée structure de Dirac. Cette structure est associée à l'élément Bond Graph **DTF** dont les relations constitutives sont données par (15) et qui est conservatif de puissance. Par souci de simplicité, nous donnons en figure 3 le bond graph pour l'espèce i uniquement. L'indice d'espèce a été omis dans ce bond graph.

III. UNE REPRÉSENTATION UNIFIÉE DE LA STRUCTURE D'INTERCONNEXION

Formellement, cette approche de modélisation se situe dans la lignée des travaux sur les systèmes hamiltoniens et les systèmes hamiltoniens à ports [21], [23], [27]. Dans [23], les auteurs soulignent comment la modélisation de type réseau des systèmes physiques à paramètres localisés mène naturellement à la classe de systèmes appelés *Systèmes Hamiltoniens à Ports*. La structure géométrique sous-jacente à ces systèmes, la structure de Dirac, représente la conservation et la conversion de l'énergie. L'énergie totale est, quant à elle, représentée par l'hamiltonien qui traduit aussi la conservation de l'énergie totale dans le système.

L'exemple II-B en tant que système dynamique n'est pas hamiltonien. Néanmoins on a montré qu'il existe une structure de Dirac sous-jacente avec deux équations adjointes (16) liées l'une à une équation de conservation et l'autre à la définition de la force motrice de la diffusion. Ce système est un cas particulier des systèmes hamiltoniens dissipatifs [27], [25]. L'énergie associée à l'élément **C** n'est pas conservée puisqu'elle correspond à l'énergie libre et non à l'énergie interne. Pour représenter la conservation de l'énergie interne, il faut augmenter l'élément **R** en un élément **RS** [3] et l'élément **C** avec un port thermique de façon à écrire

le bilan d'entropie. Dans ce cas le système dynamique associé n'est plus hamiltonien mais un système de contact à port [9].

Dans [23], un cadre général pour la modélisation des systèmes à paramètres repartis est présenté en introduisant la notion de structure de Stokes-Dirac. C'est une structure de Dirac de dimension infinie définie sur l'espace des formes différentielles sur le domaine spatial du système et de ses frontières, et se base sur le théorème de Stokes. Cette structure est une structure géométrique d'interconnexion qui représente les conversions, les transferts et la conservation d'énergie sur l'ensemble du domaine spatial du système. Elle traduit le couplage canonique entre les phénomènes énergétiques sur le domaine spatial d'un système donné. Ce type de modélisation a été appliqué à plusieurs domaines physiques réversibles [15], [14].

A. La structure de Dirac : DTF

La notion de structure de Dirac a été initialement introduite par Courant et Dorfman [5], [8] en tant que structure géométrique généralisant les structures symplectiques et les structures de Poisson [27]. Cette notion a été présentée d'une manière plus générale dans [23].

Nous allons présenter en détail l'élément **DTF** qui apparaît dans la section II-B. Il est ensuite facile de montrer que l'élément de la section II-A peut s'exprimer en fonction d'un élément **DTF** et d'un gyrateur.

Dans les deux exemples traités précédemment apparaissent des efforts et des flux. Afin de simplifier les notations nous allons utiliser la notion de dérivée extérieure qui est indépendante des coordonnées [11]. Cette dérivée extérieure étend le concept de dérivée d'une fonction à des formes différentielles d'ordre élevé. L'équation (6) devient :

$$\begin{pmatrix} f_{i1} \\ e_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

En fonction des dimensions du domaine spatial, la dérivée extérieure peut représenter la divergence ou le gradient. Dans le contexte d'un domaine à trois dimensions, nous ferons la distinction entre une fonction, une 1-forme, une 2-forme et une 3-forme. Les fonctions, par exemple la tension au bornes de la capacité ou les potentiels chimiques, peuvent être évaluées en tout point du domaine spatial, les 1-formes peuvent être intégrées sur toute courbe du domaine spatial, les 2-formes peuvent être intégrées sur toute surface du domaine, et les 3-formes peuvent être intégrées sur tout volume. Nous donnons ici une formulation générale de la structure de Dirac. Cette formulation s'applique pour le cas 1D présenté dans l'exemple du transfert de matière.

Notons par Ω le domaine spatial de dimension n , par Λ^k ($k = 0$ à n) l'espace des k -formes différentielles sur Ω . En outre, il existe un produit dual naturel non dégénéré¹ entre $\Lambda^0(\Omega)$ et $\Lambda^1(\Omega)$ donné par :

$$\langle \beta | \alpha \rangle := \int_{\Omega} \beta \wedge \alpha, \quad (\in \mathbb{R}) \quad (18)$$

où $\alpha \in \Lambda^k(\Omega)$, $\beta \in \Lambda^{n-k}(\Omega)$ et \wedge est le produit extérieur de deux formes différentielles donnant la n -forme $\beta \wedge \alpha$. Ce

¹Si $\langle \alpha | \beta \rangle = 0 \forall \alpha \in \Lambda^k(\Omega)$ cela implique que $\beta = 0$, et si $\langle \alpha | \beta \rangle = 0 \forall \beta \in \Lambda^k(\Omega)$ cela implique que $\alpha = 0$.

produit (18) correspond au produit naturel entre effort et flux (cf. équation (13)).

De la même manière, il existe aussi un produit dual entre $\Lambda^k(\partial\Omega)$ et $\Lambda^{n-1-k}(\partial\Omega)$ donné par :

$$\langle \beta | \alpha \rangle := \int_{\partial\Omega} \beta \wedge \alpha \quad (19)$$

où $\alpha \in \Lambda^k(\partial\Omega)$, $\beta \in \Lambda^{n-1-k}(\partial\Omega)$ et \wedge est le produit extérieur de deux formes différentielles donnant la $(n-1)$ -forme $\beta \wedge \alpha$. Dans le cas de l'exemple, la frontière se réduisant à 2 points ce produit correspond au terme frontière $\mu_i(0)\phi_i(0)$ ou $\mu_i(R)\phi_i(R)$ présenté dans l'équation (14).

Définissons maintenant l'espace vectoriel "augmenté" qui correspond à l'espace des flux (internes et à la frontière) :

$$\mathcal{F}_{p,q} := \Lambda^p(\Omega) \times \Lambda^q(\Omega) \times \Lambda^{n-p}(\partial\Omega) \quad (20)$$

pour toute paire p et q de nombres entiers positifs satisfaisant la relation :

$$p + q = n + 1 \quad (21)$$

Définissons également l'espace vectoriel "augmenté" dual, l'espace des efforts :

$$\mathcal{E}_{p,q} := \Lambda^{n-p}(\Omega) \times \Lambda^{n-q}(\Omega) \times \Lambda^{n-q}(\partial\Omega) \quad (22)$$

Les produits définis par les équations (18) et (19) engendrent un produit non-dégénéré entre $\mathcal{F}_{p,q}$ et $\mathcal{E}_{p,q}$ dans le cas de notre exemple, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (f_{i1}, f_{i2}, f_{i\partial}) &\in \Lambda^1([0, R]) \times \Lambda^0([0, R]) \times \Lambda^0(\partial[0, R]) \\ (e_{i1}, e_{i2}, e_{i\partial}) &\in \Lambda^0([0, R]) \times \Lambda^1([0, R]) \times \Lambda^0(\partial[0, R]) \end{aligned} \quad (23)$$

Le produit naturel défini peut être symétrisé sur l'espace des liens $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{p,q} \times \mathcal{E}_{p,q}$ (les ports de puissance multidimensionnel). Nous obtenons un produit à valeurs dans \mathbb{R} . Cette forme symétrique bilinéaire est définie par :

$$\begin{aligned} \langle\langle (f_p^1, f_q^1, f_b^1, e_p^1, e_q^1, e_b^1), (f_p^2, f_q^2, f_b^2, e_p^2, e_q^2, e_b^2) \rangle\rangle := \\ \int_{\Omega} [e_p^1 \wedge f_p^2 + e_q^1 \wedge f_q^2 + e_p^2 \wedge f_p^1 + e_q^2 \wedge f_q^1] \\ + \int_{\partial\Omega} [e_b^1 \wedge f_b^2 + e_b^2 \wedge f_b^1] \end{aligned} \quad (24)$$

où, pour $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} f_p^j &\in \Lambda^p(\Omega) & f_q^j &\in \Lambda^q(\Omega) \\ e_p^j &\in \Lambda^{n-p}(\Omega) & e_q^j &\in \Lambda^{n-q}(\Omega) \\ f_b^j &\in \Lambda^{n-p}(\partial\Omega) & e_b^j &\in \Lambda^{n-q}(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (25)$$

Le produit linéaire étant défini, la structure de Stokes-Dirac est alors déterminée par la définition III.1.

Définition III.1: Une structure de Dirac \mathcal{D} sur l'espace des liens $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{p,q} \times \mathcal{E}_{p,q}$ est un sous espace de \mathcal{B} tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ par rapport au produit symétrique canonique (24) où \perp dénotant le complément orthogonal par rapport à la forme symétrique bilinéaire $\langle\langle . \rangle\rangle$ du produit scalaire.

La structure de Dirac est définie à partir des flux, des efforts et des variables de port et implique que le produit instantané de puissance est nul au sens du produit (24).

Rappelons que les espaces vectoriels $\Lambda^p(\Omega)$ et $\Lambda^q(\Omega)$, dont les éléments sont des formes différentielles, représentent les variables d'énergie (appelées aussi les variables

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} e_\circ = \begin{pmatrix} -e_1|_0 \\ -e_1|_L \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{SDGY}} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 = de_2 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} f_\circ = \begin{pmatrix} e_2|_0 \\ e_2|_L \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{SDGY}} \\ \begin{array}{c} e_2 \\ f_2 = de_1 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} e_\circ = \begin{pmatrix} -e_1|_0 \\ -e_1|_L \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{DTF}} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 = f_3 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} f_\circ = \begin{pmatrix} e_2|_0 \\ e_2|_L \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{SGY}} \\ \begin{array}{c} e_3 = de_1 \\ f_3 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} e_2 = f_3 \\ f_2 = e_3 \end{array}
\end{array}$$

Fig. 4. Représentation de l'élément **SDGY** à partir du **DTF**

conjuguées de puissance) de deux domaines physiques (énergétiques) différents agissant l'un avec l'autre sur l'ensemble du domaine spatial Ω du système. Tandis que $\Lambda^{n-p}(\partial\Omega)$ et $\Lambda^{n-q}(\partial\Omega)$ dénotent les variables définies sur la frontière $\partial\Omega$ du système, dont le produit représente le flux d'énergie à travers la frontière du système.

B. Variables de port associé au **DTF**

Dans le cas du **DTF** de l'exemple donné dans la sous-section (II-B), il est possible de définir de manière systématique des variables de port de telle sorte que ces variables, associées aux flux et aux efforts satisfaisant (15) et au produit (14) définissent une structure de Dirac. Ces variables de port sont obtenues à partir du théorème de Stokes associé à (12).

Considérons l'espace vectoriel \mathcal{B} et la forme bilinéaire symétrique $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ (24). Nous définissons \mathcal{D} comme le sous-espace vectoriel de \mathcal{B} par

$$\begin{aligned}
D &= \{(f_p, f_q, f_b, e_p, e_q, e_b) \in \mathcal{B}\} \\
\begin{bmatrix} f_p \\ e_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ f_q \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} f_b \\ e_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(-1)^{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p|_{\partial\Omega} \\ f_q|_{\partial\Omega} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (26)$$

où $r = pq + 1$.

Les équations (26) définissent les relations constitutives du **DTF**.

Les variables de port pour l'exemple sur la diffusion (notées $e|_{0,R}$ et $f|_{0,R}$ dans le bond graph de la figure 3) sont donc donnés par :

$$\begin{aligned}
e_b &= -e_1|_{\partial[0,R]} \\
f_b &= f_2|_{\partial[0,R]}
\end{aligned} \quad (27)$$

On peut aussi facilement déduire les variables de port pour la ligne de transmission. L'élément **SDGY** peut s'exprimer en fonction de l'élément **DTF**. Sa représentation en fonction de l'élément **DTF** est présenté ci dessus (cf. figure 4). On en déduit facilement les variables de port pour cet exemple (notées également $e|_{0,L}$ et $f|_{0,L}$ dans le bond graph de la figure 3) :

$$\begin{aligned}
e_b &= -e_1|_{\partial[0,L]} \\
f_b &= e_2|_{\partial[0,L]}
\end{aligned} \quad (28)$$

C. Systèmes Hamiltoniens associés

La définition des systèmes Hamiltoniens à port, dans le cas non dissipatif (exemple (II-A)) est basée sur la structure de Dirac précédemment définie et sur la fonction Hamiltonienne (énergie totale du système).

Définition III.2: Soient $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{p,q} \times \mathcal{E}_{p,q}$ l'espace des liens défini plus haut, \mathcal{D} la structure de Dirac et $\mathcal{H}(x)$ la fonction Hamiltonienne avec x le vecteur des variables d'énergie. On définit les variables de flux, $f \in \mathcal{F}$ comme les dérivées temporelles des variables d'énergie et les variables d'effort $e \in \mathcal{E}$ comme les dérivées variationnelles de $\mathcal{H}(x)$. Le système

$$(f, e) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \right) \in \mathcal{D}$$

est un système Hamiltonien à Ports dont l'énergie totale est $\mathcal{H}(x)$

Dans ce cas le bilan de puissance s'écrit

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\| = e_b f_b$$

Finalement nous soulignons le fait que ces modèles présentés sont acausaux. La causalité du **DTF** est multiple et peut même se généraliser à des choix de variables d'entrée et de sortie, combinaison linéaire d'effort et de flux au bord, et à des opérateurs différentiels d'ordre plus élevés [19]. On peut aussi lier la causalité à des méthodes de discrétisation [14], [1]. Lorsque l'on considère les problèmes de contrôle à la frontière il est possible de définir comme variables de commandes un sous espace vectoriel des variables de port associées à la structure de Dirac. Dans [19] on montre que selon le choix effectué, la solution du problème EDP associé existe et a certaines propriétés telles que la contraction. La généralisation de cette étude aux problèmes de stabilité est donnée dans [29]. Une jonction avec les problèmes d'automatique associés aux systèmes abstraits est donnée dans [28].

Dans le cas dissipatif, cas de l'exemple (II-B), le système n'est plus formellement Hamiltonien, car par définition dissipatif. Cependant on peut noter d'après la représentation Bond Graph du système, qu'il existe une structure géométrique sous jacente à ce type d'équation. L'équation dynamique du système s'écrit :

$$\frac{\partial x(t, r)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}(t, r)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{D \frac{\partial \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}}{\partial r}}_{e_q} \right) = D \mathcal{R} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \quad (29)$$

où \mathcal{R} est un opérateur symétrique. Dans ce cas on a :

$$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \right) \right) \in \mathcal{D}$$

On voit donc que le système augmenté évolue au sein de la structure de Dirac. Cette propriété dans le cas linéarisé ($\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = kx$) permet de caractériser les solutions associées au problème (29) en fonction du choix des conditions frontières [18]. Cette généralisation n'est possible que pour prouver l'existence et la nature des solutions mais pas pour les propriétés de stabilité. Une application de ces résultats au cas des réacteurs tubulaires est donnée dans [18].

IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous proposons une représentation unifiée des structures de jonction qui apparaissent dans la modélisation bond graph des systèmes à paramètres distribués. Pour ce faire, nous utilisons les outils de la géométrie

différentielle : les variables d'énergie, efforts et flux sont définis comme des formes différentiels. La structure de jonction s'exprime uniquement grâce à la dérivée extérieure. Ce choix permet une représentation indépendante du système de coordonnées. Une telle formulation permet donc d'interconnecter facilement les modèles décrits par des systèmes à paramètres distribués [1]. Ces modèles ont été ensuite utilisés pour développer une méthode de discrétisation par éléments finis mixtes qui préservent la nature géométrique (les formes différentielles) des variables [24], [14].

RÉFÉRENCES

- [1] A. Baaiu, F. Couenne, Y. Le Gorrec, L. Lefevre, and M. Taya-kout. Port based modeling of a multiscale adsorption column. *accepté à Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2007.
- [2] R.B. Bird, W.E. Stewart et E.N. Lightfoot, *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York, second edition, 2002.
- [3] P.C. Breedveld, *Physical systems theory in terms of bond graphs*, Ph.D. thesis, University of Twente, the Netherlands, 1984.
- [4] F. Couenne, C. Jallut, B. Maschke, P. Breedveld, and M. Taya-kout. « Bond graph modelling for chemical reactors », *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 12, n°2/3, pp. 159–174, 2006.
- [5] T.J. Courant, « Dirac manifolds », *Trans. American Mathematical Society*, vol. 319, n°2, pp. 631–661, 1990.
- [6] S. de Groot et P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics*, Dover Publ, 1984.
- [7] M. Doblaré Castellano, L. Gracia Villa et J.L. Pelegay, « Bond graph representation of continuous boundary value problems formulated in terms of the second Green identity and its boundary element counterpart », *Int. Conf. on Bond Graph Modeling and Simulation*, Las Vegas, USA, SCS Publ., Simulation Series, vol. 27, No. 1, pp. 160–166, 1995.
- [8] I. Dorfman I., 1993, *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations*, John Wiley, Chichester, 1993.
- [9] D. Eberard, B.M. Maschke et A.J. van der Schaft. « An extension of Hamiltonian systems to the thermodynamic phase space : Towards a geometry of nonreversible processes », In *Reports on Mathematical Physics*, vol. 60, No. 2, pp. 175–198, 2007.
- [10] E.P. Fahrenthold and J. D. Wargo, « Vector and tensor based bond graphs for physical systems modeling », *J. of The Franklin Institute*, vol.328, No. 5/6, pp. 833–853, 1991.
- [11] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, New York, 1989.
- [12] A.A. Franco, P. Schott, C. Jallut et B.M. Maschke, « Multi-Scale Bond Graph Model Of The Electrochemical Dynamics In A Fuel Cell », In *Preprint 5th International Conference on Mathematical Modelling MATHMOD*, Vienna, Austria, 2006.
- [13] R. Krishna et J.A. Wesselingh, « The Maxwell-Stafan approach to mass transfer », *Chemical Engineering Sciences*, vol. 52, n°6, pp.861–911, 1996.
- [14] G. Golo, V. Talasila, A.VanDerSchaft et B. Maschke, « Hamiltonian discretization of boundary control systems », *Automatica*, vol. 40, pp.757–771, 2004.
- [15] G. Golo, V. Talasila et V. J. VanDerSchaft, « A Hamiltonian formulation of the Timoshenko beam », *Mechatronic*, pp. 838–847, 2002.
- [16] M.E. Ingram et G.Y. Masada, « Reticulation equivalency in the extended bond graph notation », *J. of The Franklin Institute*, vol.328, No. 5/6, pp. 741–752, 1991.
- [17] M. Lebrun, « The use of modal analysis concepts in the simulation of pipeline transients », *J. of The Franklin Institute*, vol.319, No. 1/2, pp. 15–40, 1985.
- [18] Y. Le Gorrec, J. A. Villegas, H. Zwart and B. Maschke, « Dissipative Boundary Control Systems with Application to Distributed Parameters Reactors », *Joint CCA, ISIC and CACSD*, Munich, Germany, 2006.
- [19] Y. Le Gorrec and H. Zwart and B. Maschke, « Dirac structures and boundary control systems associated with skew-symmetric differential operators », *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 44, no. 2, pp. 1864–1892, 2005.
- [20] D.L.Margolis D.L., « A survey of bond graph modeling for interacting lumped and distributed systems », *J. of The Franklin Institute*, Vol.319, No. 1/2, pp. 125–135, 1985.
- [21] B.M. Maschke, A.J. van der Schaft et P.C. Breedveld, « An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics : non standard Poisson structures and gyrators », *Journal of the Franklin Institute*, vol. 329, No. 5, pp. 923–966, 1992.
- [22] B.M. Maschke et A.J. van der Schaft, « Canonical interdomain coupling in distributed parameter systems : an extension of the symplectic gyrator », *Proc. of the ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York, USA, 2001.
- [23] B. Maschke and A. J. van der Schaft, *Advanced Topics in Control Systems Theory, chapter : Compositional modelling of distributed-parameter systems*, Lecture Notes on Control and Information Sciences. Springer, pp 115–154, 2005.
- [24] H. Peng, A. Baiiu, F. Couenne et Y. Le Gorrec, « Energy based discretization of a class of distributed parameters processes - comparison with classical approach », *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Hilton New Orleans Riverside in New Orleans, Louisiana USA, 2007.
- [25] Ramkrishna Pasumathy, « On Analysis and Control of Interconnected Finite- and Infinite-dimensional Physical Systems », *PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherland*, 2006.
- [26] D. Ruthven, *Principles of Adsorption and Adsorption Processes*. John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [27] A.J. van der Schaft et B.M.Maschke, « Hamiltonian formulation of distributed parameter systems with boundary energy flows », *Journal of Geometry and Physics* vol. 42, no. 1/2, pp. 166–194, 2002.
- [28] J. A. Villegas, H. Zwart and Y. Le Gorrec, « Boundary control systems and the system node », *IFAC World Congress*, 2005.
- [29] J. A. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke and A.J. van der Schaft, « Stability and Stabilization of a Class of Boundary Control Systems », *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC*, 2005.