



HAL
open science

Une nouvelle démonstration du théorème d'André sur les E-fonctions au sens large

Gabriel Lepetit

► **To cite this version:**

Gabriel Lepetit. Une nouvelle démonstration du théorème d'André sur les E-fonctions au sens large. 2019. hal-02024884v1

HAL Id: hal-02024884

<https://hal.science/hal-02024884v1>

Preprint submitted on 19 Feb 2019 (v1), last revised 27 May 2021 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une nouvelle démonstration du théorème d'André sur les E -fonctions au sens large

Gabriel Lepetit

19 février 2019

Résumé

Nous donnons une nouvelle preuve d'un théorème d'André (2014) affirmant que toute relation polynomiale sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre des valeurs d'une famille de E -fonctions au sens large (f_1, \dots, f_n) provient d'une relation polynomiale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les $f_i(z)$. Pour cela, nous prouvons un théorème de structure sur les G -opérateurs au sens large : nous commençons par démontrer un analogue du théorème des Chudnovsky (1984) pour les G -fonctions au sens large, puis nous en déduisons que l'opérateur minimal d'une G -fonction au sens large est fuchsien. Ceci nous permet d'adapter au cas des E -fonctions au sens large une preuve d'un théorème de Beukers (2006), qui est un analogue du théorème d'André dans le cas des E -fonctions au sens strict.

Le but de cet article est d'étudier la structure des G -opérateurs au sens large et d'en déduire une nouvelle preuve d'un résultat d'Y. André sur les E -fonctions (théorème 3) généralisant le théorème de Siegel-Shidlovskii. Nous commençons par donner quelques éléments de contexte. Les notions de E et de G -fonctions ont été introduites par Siegel dans SIEGEL 1929 pour généraliser le théorème de Lindemann-Weierstrass sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle.

Définition 1

Une E -fonction au sens large est une série $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

- a) f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
- b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1(\varepsilon), \overline{a_n} \leq (n!)^\varepsilon$, où $\overline{a_n}$ est la maison de a_n , c'est-à-dire le maximum des modules des conjugués (au sens de Galois) de a_n ;
- c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2(\varepsilon), \text{den}(a_0, \dots, a_n) \leq (n!)^\varepsilon$, où $\text{den}(a_0, \dots, a_n)$ est le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que da_0, \dots, da_n sont des entiers algébriques.

Leur étude a ensuite été développée, entre autres, par Shidlovskii, qui a démontré le théorème fondamental suivant (voir SHIDLOVSKII 1989, p. 139).

Théorème 1 (Siegel-Shidlovskii, 1929/1956)

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de E -fonctions au sens large. Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_n)$, supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $\mathbf{f}' = A\mathbf{f}$. Prenons $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, où $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est tel que $T(z)A(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$.

Alors le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.

Ce théorème généralise le théorème de Lindemann-Weierstrass. En effet, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ est une famille libre sur \mathbb{Q} , alors $(e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_n z})$ est une famille de E -fonctions *au sens large* vérifiant les hypothèses du théorème dont les composantes sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, de sorte qu'en évaluant en 1, le théorème 1 nous assure que $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

L'étude des E et G -fonctions a ensuite été poursuivie par Nesterenko et Shidlovskii (NESTERENKO et SHIDLOVSKII 1996), André (ANDRÉ 2000a et ANDRÉ 2000b) et Beukers (BEUKERS 2006).

On dispose d'une notion « moderne », plus restrictive que la définition 1, de E -fonction *au sens strict*.

Définition 2

Une E -fonction au sens strict est une série $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

- a)** f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
- b)** Il existe $C_1 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C_1^{n+1}$;
- c)** Il existe $C_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{den}(a_0, \dots, a_n) \leq C_2^{n+1}$.

On définit de la même manière les G -fonctions *au sens strict* (resp. *au sens large*) qui sont les séries $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ vérifiant la condition **a)** de la définition 2 (resp. 1) et telles que les a_n vérifient les conditions **b)** et **c)** de la définition 2 (resp. 1).

Siegel a étudié les E -fonctions *au sens large*, mais n'a fait qu'évoquer les G -fonctions *au sens large*. Il est conjecturé que les définitions large et stricte sont équivalentes pour les E et G -fonctions, mais cela n'a pas été prouvé à ce jour. Précisément, on sait que la condition **b)** de la définition 1 implique, sous la condition **a)**, la condition **b)** de la définition 2, car on peut appliquer des estimation « Gevrey » dues à Perron (cf PERRON 1911, voir aussi RAMIS 1984, pp. 85–86) ; en revanche, on ne sait pas si la condition **c)** de la définition 1 implique la condition **c)** de la définition 2 (cf ANDRÉ 2000a, p. 715).

Un théorème fondamental de D. et G. Chudnovsky (voir D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY 1984) affirme que l'équation différentielle minimale satisfaite par une G -fonction *au sens strict* vérifie une condition de croissance modérée appelée *condition de Galochkin*. Ceci implique, entre autres, qu'elle est fuchsienne. Par ailleurs, la condition de Galochkin est équivalente à une condition introduite par Bombieri, qui implique par un théorème de Katz (DWORK, GEROTTO et SULLIVAN 1994, p. 98) que l'équation différentielle minimale en question est à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (théorème d'André-Chudnovsky-Katz).

Via la transformée de Fourier-Laplace des opérateurs différentiels (voir preuve du corollaire 1), André (cf ANDRÉ 2000a et ANDRÉ 2000b) en a déduit que toute E -fonction *au sens strict* était solution d'une équation différentielle dont les seules singularités sont 0 et ∞ , la première étant régulière. Pour prouver cela, seule une partie du théorème d'André-Chudnovsky-Katz est nécessaire.

C'est ce résultat qui a permis à Beukers de prouver le théorème suivant dans BEUKERS 2006. Il constitue un raffinement du théorème 1 dans le cas strict. En effet, le théorème 1 est vrai quant à lui pour les E -fonctions *au sens large*.

Théorème 2 (Beukers, 2006)

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de E -fonctions au sens strict vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors pour tout polynôme homogène $P \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[Z, X_1, \dots, X_n]$ homogène en les variables X_1, \dots, X_n tel que

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0.$$

Le théorème suivant a ensuite été prouvé par André dans l'article ANDRÉ 2014 dans lequel il développe une généralisation de la correspondance de Galois différentielle. C'est une conséquence du corollaire 1.7.1 p. 6, qui s'applique non seulement, sous certaines hypothèses, à une famille de fonctions de la forme $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ quand y est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, mais plus généralement à tout vecteur de fonctions (f_1, \dots, f_n) solution d'un système différentiel $y' = Ay$, $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, comme Y. André nous l'a confirmé dans une communication privée. Les hypothèses du corollaire 1.7.1 sont satisfaites si (f_1, \dots, f_n) est un vecteur de E -fonctions au sens large car, d'une part, toute E -fonction au sens large non polynomiale est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ puisque c'est une fonction entière, et d'autre part, le théorème 1 nous assure que le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\xi), \dots, f_n(\xi))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.

Théorème 3 (André, ANDRÉ 2014)

Le théorème 2 est vrai si l'on suppose que (f_1, \dots, f_n) est une famille de E -fonctions au sens large.

Notre but est de fournir une nouvelle preuve du théorème 3 plus proche de l'esprit initial de la preuve de Beukers. Pour cela, nous allons dans un premier temps définir la condition de Galochkin pour les G -fonctions *au sens large* et montrer l'existence d'un analogue du théorème des Chudnovsky pour ce type de fonctions. Dans une seconde partie, nous verrons que la condition de Galochkin *au sens large* implique que l'équation différentielle minimale à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par une G -fonction *au sens large* est fuchsienne, ce qui suffira pour démontrer le théorème 3 dans la troisième partie.

Remerciements. Je tiens à remercier B. Adamczewski, Y. André, S. Fischler, J. Roques et T. Rivoal pour leurs remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer ce texte.

1 Un analogue « large » du théorème des Chudnovsky

Soit $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Soit $G_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ la matrice telle que $\mathbf{f}^{(s)} = G_s\mathbf{f}$. On montre par récurrence que les G_s , $s \in \mathbb{N}$, sont liées par la relation

$$G_{s+1} = G_s G + G'_s \tag{1}$$

où G'_s désigne la matrice G_s dérivée coefficient par coefficient. On prend $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun de tous les coefficients de la matrice $G(z)$. On montre également par récurrence sur s que

$$\forall s \in \mathbb{N}, T^s G_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z]). \tag{2}$$

1.1 Condition de Galochkin au sens large

Rappelons tout d'abord la définition de la condition de Galochkin *au sens strict*.

Définition 3 (*Galochkin, GALOCHKIN 1974*)

On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 de tous les coefficients des coefficients des matrices $T(z)^m \frac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$. On dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin au sens strict si

$$\exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leq C^{s+1}.$$

On a alors le théorème fondamental suivant (cf D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY 1984, p. 17).

Théorème 4 (*Chudnovsky, D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY 1984*)

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(z)$ est une G -fonction au sens strict et $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ est une famille libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors G vérifie la condition de Galochkin au sens strict.

Dans ANDRÉ 2000b, p. 747, André a introduit, en la formulant différemment, la condition suivante, qui est adaptée à notre situation.

Définition 4 (*André, ANDRÉ 2000b*)

Avec les notations de la définition précédente, on dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin au sens large si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists s_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall s \geq s_0(\varepsilon), \quad q_s \leq (s!)^\varepsilon.$$

Le but de cette partie est de prouver un analogue au sens large du théorème 4.

Théorème 5

Le théorème 4 est vrai si l'on remplace « strict » par « large ».

1.2 Démonstration du théorème 5

La preuve que nous allons présenter est une adaptation de la preuve originale du théorème 4 (D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY 1984, pp. 38–50) au cas des G -fonctions *au sens large*. Les six premières étapes de la démonstration sont identiques dans les cas strict et large puisque les conditions **b**) et **c**) de la définition d'une G -fonction (définition 1 ou 2) n'y sont pas utilisées, y compris dans le lemme de Shidlovskii évoqué dans l'étape 3. Dans BEUKERS 2008, pp. 21–22, Beukers a reformulé les idées des Chudnovsky en une trame condensée; à des fins de clarification, nous suivrons cette trame dans les étapes 1 à 6, en la détaillant. La nouveauté de cette démonstration est l'étape 7, dans laquelle les conditions **b**) et **c**) de la définition 1, spécifiques aux G -fonctions au sens large, seront utilisées.

Remarquons tout d'abord que si \mathbb{K} est un corps de nombres contenant les coefficients des coefficients de $G(z)$ et les $f_i(0)$, $1 \leq i \leq n$, alors $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ et $f \in \mathbb{K}[[z]]^n$. En effet, cela découle de l'équation $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ en écrivant G comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}((z)))$ et identifiant les coefficients du développement en série de Laurent de part et d'autre.

Notations et hypothèses :

On a $T(z) \in \mathbb{K}[z]$, mais quitte à multiplier par un entier adapté, on peut supposer que $T(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ et $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

On note $D = \frac{d}{dz}$ la dérivation usuelle sur $\mathbb{K}[[z]]$.

Si $A \in \mathbb{K}[[z]]$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on note $A = O(z^\ell)$ s'il existe $B \in \mathbb{K}[[z]]$ tel que $A = z^\ell B$.

On note $\delta = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ le degré du corps de nombres \mathbb{K} .

Étape 1 : Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On introduit des approximants de Padé (Q, \mathbf{P}) de type II de paramètres (N, M) associés à \mathbf{f} dont on laisse les paramètres libres pour l'instant, c'est-à-dire des polynômes $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(Q) \leq N$, $\max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_i) \leq M$ et si $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$, alors

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O(z^{N+M}).$$

On ne discutera des conditions d'existence de tels approximants de Padé que dans l'étape 7.

On a pour tout $m < N + M$, $\frac{T^m}{m!}(D - G)^m \mathbf{P} \in \mathbb{K}[z]$, ce qui est immédiat en utilisant la formule de Leibniz. De plus, on va montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{T^m}{m!} Q^{(m)} \mathbf{f} - \frac{T^m}{m!} (D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-m}). \quad (3)$$

Pour $m = 1$, c'est la définition.

Supposons la relation vraie au rang m . Alors en dérivant (3) et en multipliant par T , on a

$$\begin{aligned} (mT'T^m Q^{(m)} + T^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} + T^{m+1} Q^{(m)} \mathbf{f}' \\ - mT'T^m (D - G)^m \mathbf{P} - T^{m+1} D(D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-(m+1)}). \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ donc en multipliant (3) par la matrice polynomiale TG et en retranchant à l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} (mT'T^m Q^{(m)} + T^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} - mT'T^m (D - G)^m \mathbf{P} \\ - T^{m+1} (D - G)^{m+1} \mathbf{P} = O(z^{N+M-(m+1)}). \end{aligned}$$

Finalement, comme $T^m Q^{(m)} \mathbf{f} - T^m (D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-m})$, on a le résultat voulu.

Étape 2 : Montrons que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{G_s}{s!} \mathbf{P} = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)! j!} D^{s-j} (D - G)^j \mathbf{P}. \quad (4)$$

On procède par récurrence :

- pour $s = 1$, $G_s = G$ et $G\mathbf{P} = D(\mathbf{P}) - (D - G)\mathbf{P}$.
- Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons la formule (4) vraie pour s .

Alors $G_{s+1} = G_s G + G'_s$ donc $\frac{G_{s+1}}{(s+1)!} = \frac{1}{s+1} \left(\frac{G_s}{s!} G + \frac{G'_s}{s!} \right)$.

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence au vecteur $G\mathbf{P}$, on a

$$\frac{G_{s+1}}{(s+1)!} \mathbf{P} = \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)! j!} D^{s-j} (D - G)^j (G\mathbf{P}) + \frac{G'_s}{s!} \mathbf{P} \right).$$

Or,

$$\frac{G'_s}{s!} \mathbf{P} = \left(\frac{G_s}{s!} \mathbf{P} \right)' - \frac{G_s}{s!} \mathbf{P}' = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)! j!} D^{s+1-j} (D - G)^j \mathbf{P} - \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)! j!} D^{s-j} (D - G)^j D \mathbf{P}.$$

Donc, en remarquant que $\forall j \in \{0, \dots, s\}$, $(D - G)^j D = (D - G)^{j+1} + (D - G)^j G$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G_{s+1}}{(s+1)!} \mathbf{P} &= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} - \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D-G)^{j+1} \mathbf{P} \right) \\
&= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k} (D-G)^k \mathbf{P} \right) \\
&= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=1}^s \frac{(-1)^j (s+1-j) + j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k} (D-G)^k \mathbf{P} + \frac{D^{s+1}}{s!} \mathbf{P} + \frac{(-1)^{s+1}}{s!} (D-G)^{s+1} \mathbf{P} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{s+1} \frac{(-1)^j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Cela conclut la récurrence.

Étape 3 : Utilisation du lemme de Shidlovskii.

On note pour $h \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_h = \frac{1}{h!} (D-G)^h \mathbf{P}$ et $R_{(h)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ la matrice dont la j -ième colonne est $\binom{h+j-1}{j-1} \mathbf{P}_{h+j-1}$. Alors la formule (4) implique immédiatement que

$$\frac{G_s}{s!} R_{(0)} = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)}.$$

Selon le lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II (voir ANDRÉ 1989, p. 115), la matrice $R_{(0)}$ est inversible pourvu que M soit assez grand ce qui sera réalisé quand on spécifiera M et N dans l'étape 7. Donc

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \sum_{j=0}^s (-1)^j T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} (T^{n-1} R_{(0)})^{-1}. \quad (5)$$

Étape 4 : Soit d le dénominateur commun des coefficients d'ordres inférieurs à $N+M$ du développement en série entière de \mathbf{f} . On suppose trouvés des approximants de Padé $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{K}[X]$ de $d\mathbf{f}$, c'est à dire des polynômes tels que $\deg(Q) \leq N$, $\max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_i) \leq N$ et

$$Q(d\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O(z^{N+M})$$

avec $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$. On fait l'hypothèse supplémentaire que Q est un polynôme à coefficients entiers algébriques. On peut alors appliquer les résultats des trois étapes précédentes, dont on conservera les notations, à Q et \mathbf{P} puisque $d\mathbf{f}$ est encore solution du système différentiel $y' = Gy$.

Selon (3), on a

$$\forall m \leq N+M, \quad \frac{T^m}{m!} Q^{(m)}(d\mathbf{f}) - T^m \mathbf{P}_m = O(z^{N+M-m}). \quad (6)$$

En remarquant que $\frac{Q^{(m)}}{m!} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ puisque Q est à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, on voit que si $N+M-m > \max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_{i,m})$, les coefficients de $T^m \mathbf{P}_m$ sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Montrons par récurrence sur m que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \deg(T^m \mathbf{P}_{i,m}) \leq N + tm. \quad (7)$$

- Pour $m = 0$, il s'agit simplement du fait que les composantes de \mathbf{P} sont de degrés inférieurs à N .
- Pour $m = 1$, $T\mathbf{P}' - T\mathbf{G}\mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $N + t$ car les coefficients de $T(z)G$ sont de degrés bornés par t .
- Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai au rang m . Alors

$$\begin{aligned} (D - G)(T^m(D - G)^m\mathbf{P}) &= mT'T^{m-1}(D - G)^m\mathbf{P} + T^mD(D - G)^m\mathbf{P} - T^mG(D - G)^m\mathbf{P} \\ &= mT'T^{m-1}(D - G)^m\mathbf{P} + T^m(D - G)^{m+1}\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Donc

$$T^{m+1}(D - G)^{m+1}\mathbf{P} = (D - G)(T^m(D - G)^m\mathbf{P}) - mT'T^m(D - G)^m\mathbf{P}.$$

Or, en utilisant à la fois l'hypothèse de récurrence et le cas $m = 1$, on voit que $T(D - G)(T^m(D - G)^m\mathbf{P})$ a ses composantes de degrés bornés par $N + mt + t = N + (m + 1)t$; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence nous assure que $mT'T^m(D - G)^m\mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $t + N + mt = N + (m + 1)t$. On en déduit le résultat souhaité (7).

Donc à condition que $N + M - m \geq N + tm$, c'est-à-dire

$$m \leq \frac{M}{t+1}, \quad (8)$$

alors $T^m\mathbf{P}_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]^n$. Ceci implique immédiatement que si j est un entier naturel tel que $j + n - 1 \leq \frac{M}{t+1}$, alors $T^{j+n-1}R_{(j)}$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. En particulier, $T^{n-1}R_{(0)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

Montrons à présent que

$$\forall s \in \mathbb{N}, s + n - 1 \leq \frac{M}{t+1}, \forall j \in \{0, \dots, s\}, \frac{T^{s+n-1}}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]). \quad (9)$$

Rappelons la formule de Leibniz généralisée : si $\ell \in \mathbb{N}^*$ et f_1, \dots, f_ℓ sont l fonctions dérivables k fois, alors

$$(f_1 \dots f_\ell)^{(k)} = \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = k} \binom{k}{i_1, \dots, i_\ell} \prod_{1 \leq t \leq \ell} f_t^{(i_t)}.$$

En particulier, si $W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, alors

$$\frac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} = \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = k} \prod_{1 \leq t \leq \ell} \frac{W^{(i_t)}}{i_t!}.$$

Si $k < \ell$, pour tout (i_1, \dots, i_ℓ) intervenant dans la somme, chaque terme $\prod_{1 \leq t \leq \ell} \frac{W^{(i_t)}}{i_t!}$ contient

au moins $\ell - k$ indices de dérivation nuls. Ainsi, comme pour tout entier s , $\frac{W^{(s)}}{s!} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, on

$$a \frac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} \in W^{\ell-k} \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z].$$

Déduisons de cela par récurrence le résultat (9). Pour $s = 0$, c'est évident.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons (9) vrai pour $s' \in \{0, \dots, s-1\}$. Par la formule de Leibniz, on a, pour $j \in \{0, \dots, s\}$,

$$\begin{aligned} \frac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} &= \sum_{k=0}^{s-j} \binom{s-j}{k} \times \frac{1}{(s-j)!} (T^{s+n-1})^{(k)} D^{s-j-k} R_{(j)} \\ &= T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j} \frac{(T^{s+n-1})^{(k)} D^{s-j-k} R_{(j)}}{k! (s-j-k)!} \\ &= T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j} U_k T^{s+n-1-k} \frac{D^{s-k-j} R_{(j)}}{(s-k-j)!}, \end{aligned}$$

avec $U_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, en utilisant la remarque précédente.

Or, d'une part, $\frac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$ puisque $T^{s+n-1} = T^{s-j}T^{j+n-1}R_{(j)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$,

et d'autre part, par hypothèse de récurrence, pour $k \in \{1, \dots, s-j\}$, $T^{s-k+n-1} \frac{D^{s-k-j}R_{(j)}}{(s-k-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$. Par conséquent,

$$T^{s+n-1} \frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 5 : Lien entre q_s et taille des coefficients de $\det(T^{n-1}R_{(0)})$.

Prenons pour $s \in \mathbb{N}$, q_s comme dans la définition 4. Selon (5), on a pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \frac{1}{V} \sum_{j=0}^s (-1)^j T^{s+n-1} \frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} (\text{com}(T^{n-1}R_{(0)}))^T \quad (10)$$

où $V = \det(T^{n-1}R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, et selon (9), tous les termes de la somme sont à coefficients entiers algébriques à condition que $s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}$.

Pour estimer q_s sous cette condition, il suffit donc d'obtenir une estimation de la maison des coefficients de V . C'est ce que permet de faire ce lemme :

Lemme 1

Soient $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $V \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $W \in \mathbb{K}[z]$ tels que $U = VW$. Notons $V = \sum_{i=0}^{\ell} v_i z^i$, alors $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_0)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Démonstration. Introduisons la valuation de Gauss associée à un premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$:

$$v_{\mathfrak{p}} \left(\sum_{i=0}^q a_i z^i \right) = \min_{0 \leq i \leq q} (v_{\mathfrak{p}}(a_i))$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation \mathfrak{p} -adique associée à l'idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En utilisant les propriétés de valuation, on a $v_{\mathfrak{p}}(U) = v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W)$ donc $v_{\mathfrak{p}}(W) \geq -v_{\mathfrak{p}}(V)$ car, comme U est à coefficients entiers algébriques, $v_{\mathfrak{p}}(U) \geq 0$.

Notons S l'ensemble fini des premiers divisant tous les coefficients de V . Alors si $W = \sum_{i=0}^d w_i z^i$, pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$ et $\mathfrak{p} \in S$, on a $v_{\mathfrak{p}}(w_i) + v_{\mathfrak{p}}(V) \geq v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W) \geq 0$, donc $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)}(w_i) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En particulier, comme $v_0 \in \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)} = \text{pgcd}((v_0), \dots, (v_d))$, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, d\}, \quad (v_0)(w_i) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

D'où comme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_0) \in (v_0) \cap \mathbb{Z}$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_0)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. □

Pour $W = \sum_{i=0}^{\ell} w_i z^i \in \mathbb{K}[z]$, on définit $\sigma(W) = \max_{0 \leq i \leq \ell} \overline{|w_i|}$, la maison de W . On a donc ici selon le lemme 1 appliqué à la formule (10),

$$\forall s \in \mathbb{N}, s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}, \quad q_s \leq \sigma(V)^{\delta}. \quad (11)$$

Étape 6 : Majoration de la taille des coefficients de $\det(T^{n-1}R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ en fonction de la maison de Q .

Par commodité, on s'intéresse à

$$\tilde{V} = \det(\mathbf{P}, T\mathbf{P}_1, \dots, T^{n-1}\mathbf{P}_{n-1}) = T^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(R_{(0)}) = T^{-\frac{n(n-1)}{2}} V.$$

Le lemme suivant nous assure que ce changement n'introduit qu'une constante multiplicative dépendant seulement de G dans la majoration recherchée.

Lemme 2

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $C = AB$, alors $\sigma(C) \leq (\deg(A) + \deg(B) + 1)\sigma(A)\sigma(B)$.

Démonstration. On écrit $A = \sum_{i=0}^p a_i z^i$ et $B = \sum_{i=0}^q b_i z^i$, de sorte que $C = \sum_{j=0}^{p+q} c_j z^j$ avec, pour

tout $j \in \{0, \dots, p+q\}$, $c_j = \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i}$.

Soit $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ un plongement. Alors

$$|\tau(c_j)| \leq \sum_{i=0}^j |\tau(a_i)| |\tau(b_{j-i})| \leq (j+1)\sigma(A)\sigma(B) \leq (p+q+1)\sigma(A)\sigma(B),$$

si bien qu'en prenant le maximum sur j et sur τ , on obtient l'inégalité voulue. \square

Soit $m \in \{0, \dots, n-1\}$. Si $Q = \sum_{i=0}^N q_i z^i$, alors

$$\frac{Q^{(m)}}{m!} = \sum_{i=0}^{N-m} \frac{(i+1)\dots(i+m)}{m!} q_{m+i} z^m = \sum_{i=0}^{N-m} \binom{m+i}{i} q_{m+i} z^m.$$

De la majoration $\binom{m+i}{i} \leq 2^{m+i} \leq 2^N$, il s'ensuit que $\sigma\left(\frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leq 2^N \sigma(Q)$. Selon le lemme 2,

$$\begin{aligned} \sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) &\leq 2^N \sigma(Q) \sigma(T^m) (mt + N - m + 1) \\ &\leq 2^N \sigma(Q) \sigma(T^m) ((n-1)(t-1) + N + 1) \leq c_1^N \sigma(Q) \sigma(T^m), \end{aligned}$$

avec c_1 constante dépendant seulement de G pour N suffisamment grand.

En tirant du lemme 2 une estimation de $\sigma(T^m)$ en fonction de $\sigma(T)^m$, on obtient pour N suffisamment grand,

$$\sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leq c_2^N \sigma(Q) \sigma(T)^m \leq c_3^N \sigma(Q)$$

avec c_2, c_3 constantes.

Soit θ_{N+M} le maximum des maisons des $N+M$ premiers coefficients du développement en série entière des f_i , et d_{N+M} leur dénominateur commun. En répétant le raisonnement de la preuve du lemme 2, on voit que la maison de la partie polynomiale tronquée à l'ordre $N+tm$ de $T^m \frac{Q^{(m)}}{m!} (d_{N+M} f_i)$ est majorée par

$$c_3^N \sigma(Q) (d_{N+M} \theta_{N+M}) (N+tm+1) \leq c_4^N \sigma(Q) (d_{N+M} \theta_{N+M}).$$

Or, si $N+M - (n-1) \geq N+tm$, selon (6), cette partie polynomiale est $T^m \mathbf{P}_m$, donc avec une extension de la notation σ aux vecteurs colonnes,

$$\forall m \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \sigma(T^m \mathbf{P}_m) \leq c_4^N \sigma(Q) d_{N+M} \theta_{N+M}.$$

On a $\tilde{V} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$ et pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma \left(\prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j} \right) \leq s(\mathbf{P}_{\tau(0),0}) \sigma \left(\prod_{j=1}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j} \right) (n(N + t(n-1) + 1))$$

en utilisant (7). En itérant le procédé, on obtient une constante c_5 telle que

$$\sigma \left(\prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j} \right) \leq c_4^{nN} \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n c_5^N \leq c_6^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n.$$

Donc

$$\sigma(\tilde{V}) \leq c_6^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n \leq c_7^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n,$$

si bien que $\sigma(V) \leq c_8^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n$. D'où selon (11),

$$\forall s \in \mathbb{N}, s + n - 1 \leq \frac{M}{t+1}, \quad q_s \leq \sigma(V)^\delta \leq c_9^N \sigma(Q)^{n\delta} d_{N+M}^{n\delta} \theta_{N+M}^{n\delta}. \quad (12)$$

Étape 7 : Conclusion à l'aide d'un lemme diophantien.

Rappelons le lemme classique suivant dont une preuve peut être trouvée dans SIEGEL 1949, p. 37.

Lemme 3 (Lemme de Siegel)

Soit \mathbb{K} un corps de nombres. Considérons un système de m équations linéaires

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \forall 1 \leq i \leq m \quad (13)$$

où $\forall i, j, a_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On note $A = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Alors si $n > m$, (13) a une solution non nulle $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ vérifiant

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq c_1 (c_1 n A)^{\frac{m}{n-m}},$$

où $c_1 > 0$ est une constante dépendant uniquement de \mathbb{K} .

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = 2n(t+1)(s+n-1)$ et $M = N/(2n)$. Alors l'équation de Padé $Q(d_{N+M}\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O(z^{N+M})$ se traduit par un système linéaire de $\frac{nN}{2n} = \frac{N}{2}$ équations à $N+1$ inconnues (les coefficients de Q). Selon le lemme 3, il existe une solution $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ telle que

$$\sigma(Q) \leq c_{10} (c_{10} (N+1) \theta_{N+M})^{\frac{N/2}{N+1-N/2}} \leq c_{11}^N \theta_{N+M}$$

car $\frac{N}{2} \leq N+1 - \frac{N}{2}$.

C'est à partir de maintenant que l'on va se servir des propriétés **b)** et **c)** de la définition 1, qui sont propres aux G -fonctions *au sens large*.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les composantes de \mathbf{f} sont des G -fonctions *au sens large*, on peut trouver une constante $c_{12}(\varepsilon)$ telles que $\theta_k \leq (k!)^\varepsilon$ et $d_k \leq (k!)^\varepsilon$ pour $k \geq c_{12}(\varepsilon)$.

On a $s = \left\lfloor \frac{N}{2n(t+1)} \right\rfloor - (n-1)$, d'où $\frac{M}{t+1} \geq s+n-1$ donc selon (12),

$$q_s \leq c_9^N (c_{11}^N \theta_{N+M})^{n\delta} d_{N+M}^{n\delta} \theta_{N+M}^{n\delta}. \quad (14)$$

D'une part, les termes géométriques c_i^N peuvent être dominés à partir d'un certain rang qui dépend de ε par $(N!)^\varepsilon$. D'autre part, on a $(N+M) \leq 2N$. Or, si $\alpha > 1$, selon la formule de

Stirling,

$$\frac{(\alpha k)!}{(k!)^\alpha} \sim \frac{\sqrt{2\pi\alpha k} \left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k}}{(\sqrt{2\pi k})^\alpha \left(\frac{k}{e}\right)^{\alpha k}} = r_k \alpha^{\alpha k} \quad (15)$$

avec $(r_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite tendant vers 0. Ainsi, si k est assez grand, $(\alpha k)! \leq (k!)^{\alpha+1}$.

Par conséquent, en reprenant l'équation (14), on obtient que $q_s \leq (N!)^{c_{13} \times \varepsilon}$ pour s plus grand qu'un certain rang dépendant de ε et de la constante c_{13} .

Mais $N \leq 2n(t+1)(s+n-1) \leq 4n(t+1)s$ pour s assez grand, donc à partir d'un certain rang, selon (15), $N! \leq (s!)^{4n(t+1)+1}$. Finalement, pour s assez grand (relativement à ε), on a

$$\forall s \geq s_0(\varepsilon), \quad q_s \leq (s!)^{c_{14}\varepsilon}. \quad (16)$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c_{14}}$ pour obtenir la majoration désirée.

2 Singularités d'un G -opérateur au sens large

Le but de cette section est de prouver, à l'aide du théorème des Chudnovsky au sens large, le résultat suivant. Pour une G -fonction *au sens strict*, le résultat connu est plus fort : l'équation différentielle d'ordre minimal qu'elle satisfait est fuchsienne avec des exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (voir ANDRÉ 2000a, p. 719). On ne sait pas si cette affirmation est vraie également au sens large ; toutefois, la proposition suivante est suffisante pour obtenir l'application diophantienne voulue.

Théorème 6

Soit f une G -fonction au sens large. Alors l'opérateur différentiel d'ordre minimal $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right] \setminus \{0\}$ tel que $L(f(z)) = 0$ est fuchsien, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point singulier régulier de L .

Dans toute la suite, on appellera « opérateur minimal de f sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ », ou « opérateur minimal » quand il n'y a pas d'ambiguïté, tout opérateur différentiel $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right] \setminus \{0\}$ tel que $L(f(z)) = 0$, et d'ordre minimal pour f . De même, l'équation $L(y(z)) = 0$ sera simplement appelée « équation différentielle minimale de f ». Par abus de langage, on parlera souvent de « l' » opérateur minimal de f au singulier, car, à multiplication à gauche par un élément de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ près, il n'y a qu'un seul opérateur minimal associé à f .

Remarques. i) Dans ANDRÉ 2000b, p. 747, André a esquissé une preuve permettant de déduire, à partir de la condition de Galochkin *au sens large*, que l'opérateur minimal L de f est globalement nilpotent et donc, selon le théorème de Katz (voir DWORK, GEROTTO et SULLIVAN 1994, p. 98), est fuchsien à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dans le cas des G -fonctions *au sens strict*, le passage de la condition de Galochkin à la nilpotence globale se fait par le théorème d'André-Bombieri (DWORK, GEROTTO et SULLIVAN 1994, p. 228). André indique que ce théorème s'adapte au sens large, mais nous ne voyons pas comment le faire à l'aide de l'esquisse proposée.

ii) Pour prouver le corollaire 1 ci-dessous, qui est à la base de la démonstration du théorème 3, on n'a en réalité besoin que du fait que L admet 0 pour singularité régulière.

Rappelons la notion d'équivalence de systèmes différentiels (cf SAULOY 2016, p. 120).

Définition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}((z)))$. On dit que les systèmes différentiels $y' = Ay$ et $y' = By$ sont équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ s'il existe $P \in \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $B = P[A]$, où $P[A] = PAP^{-1} + P'P^{-1}$. Ceci est équivalent à dire que $y \mapsto Py$ réalise une bijection de l'ensemble des solutions de $y' = Ay$ sur l'ensemble des solutions de $y' = By$.

Le lemme suivant sera utile dans le point **b**) de la deuxième étape de la démonstration du théorème 6.

Lemme 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ définissant deux systèmes différentiels équivalents $y' = Ay$ et $y' = By$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors A satisfait la condition de Galochkin au sens strict (resp. large) si et seulement si B satisfait la condition de Galochkin au sens strict (resp. large).

Démonstration. Soit $P \in \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $y \mapsto Py$ induit une bijection de l'ensemble des solutions de $y' = Ay$ sur l'ensemble des solutions de $y' = By$.

Si $y' = Ay$ et $s \in \mathbb{N}$, avec les notations de (1), $y^{(s)} = A_s y$ et $(Py)^{(s)} = B_s Py$. Or,

$$B_s Py = (Py)^{(s)} = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} P^{(s-k)} y^{(k)} = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} P^{(s-k)} A_k y.$$

L'égalité étant valable pour toute solution y de $y' = Ay$, on en déduit

$$B_s = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} P^{(s-k)} A_k P^{-1}.$$

Soit $T(z) \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]$ tel que $T(z)A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $T(z)P(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$ et $T(z)P^{-1}(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$. On montre par récurrence sur ℓ que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad T^{\ell+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]). \quad (17)$$

En effet, c'est clair pour $\ell = 0$ et si (17) est vraie au rang $\ell - 1$ pour un certain $\ell \geq 1$, alors par la formule de Leibniz,

$$T^\ell \frac{(TP)^{(\ell)}}{\ell!} = T^{\ell+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!} + \sum_{k=0}^{\ell-1} T^{\ell-(k+1)} \frac{T^{(\ell-k)}}{(\ell-k)!} T^{k+1} \frac{P^{(k)}}{k!}.$$

Le membre de gauche est à coefficients dans $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]$ par le cas $\ell = 0$ et les termes d'ordre $k \leq \ell - 1$ du membre de droite le sont également par hypothèse de récurrence. On obtient donc $T^{\ell+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, si q_s est le dénominateur des coefficients des coefficients de $TA, \frac{T^2 A_2}{2!}, \dots, T^s \frac{A_s}{s!}$, et $\tilde{T} = T^3$, on a

$$\forall 1 \leq \ell \leq s, \quad q_s \frac{\tilde{T}^\ell B_\ell}{s!} = \sum_{k=0}^{\ell} T^{2\ell-2} \frac{T^{\ell-k+1} P^{(\ell-k)}}{(\ell-k)!} \left(q_\ell \frac{T^k A_k}{k!} \right) TP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]).$$

Donc, en notant \tilde{q}_s le dénominateur des coefficients des coefficients de $\tilde{T}B, \tilde{T}^2 \frac{B_2}{2!}, \dots, \tilde{T}^s \frac{B_s}{s!}$, on obtient que \tilde{q}_s divise q_s pour tout entier s .

On en déduit que si A vérifie la condition de Galochkin *au sens strict* (resp. *large*), il en va de même de B . Par symétrie de la relation d'équivalence des systèmes différentiels, on obtient l'implication réciproque, ce qui achève la preuve. \square

Démonstration du théorème 6. Selon le théorème 5, l'équation différentielle minimale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par une G -fonction *au sens large* $f(z)$ vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, il suffit donc de montrer que cette condition implique que tout point est un point singulier régulier de l'équation différentielle en question.

Étape 1 : montrons que si $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, alors 0 est un point singulier régulier de L .

Nous adaptons dans cette étape la preuve donnée par Beukers dans le cas des G -fonctions *au sens strict* (BEUKERS 2008, pp. 23-24). Ce qui précède l'équation (21) n'est pas spécifique aux G -fonctions *au sens large*, nous reproduisons la démonstration complète ici par souci de clarté.

Quitte à diviser par un élément de $\mathbb{K}(z)$ adapté, on peut supposer que

$$L = z^n y^{(n)}(z) - z^{n-1} B_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) - \dots - z B_1(z) y'(z) - B_0(z) y(z),$$

avec $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $B_k(z) \in \mathbb{K}(z)$, où \mathbb{K} est un corps de nombres.

Par le théorème de Fuchs, 0 est un point singulier régulier de L si et seulement si pour tout k , $\frac{B_{n-k}(z) z^{n-k}}{z^n}$ admet un pôle d'ordre au plus k en 0, c'est-à-dire si $B_{n-k}(z)$ admet un pôle d'ordre au plus 0 en 0. Ainsi, en notant $\nu(B_{n-k})$ l'ordre du pôle de $B_{n-k}(z)$ en 0 et

$$\lambda := \max \left(\nu(B_{n-1}), \frac{1}{2} \nu(B_{n-2}), \dots, \frac{1}{n} \nu(B_0) \right),$$

on voit que L est régulier singulier en 0 si et seulement si $\lambda \leq 0$.

Supposons donc que 0 est un point irrégulier de L et montrons qu'alors la condition de Galochkin *au sens large* ne peut être satisfaite.

On considère $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun des fractions rationnelles $B_k(z) z^{k-n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On peut supposer, quitte à le multiplier par un entier adapté que $T(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Pour $m \geq n$, considérons les fractions rationnelles $A_{m,0}(z), \dots, A_{m,n-1}(z)$ définies par

$$z^m y^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^{n-1} z^r A_{m,r}(z) y^{(r)}(z). \quad (18)$$

Les $z^{r-m} A_{m,r}(z)$ sont les coefficients de la matrice itérée $A_{L,m}$ de la matrice compagnon A_L associée à L . Par conséquent, selon (2), pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, $T(z)^{m-n+1} z^{m-r} A_{m,r}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \geq n, \forall r \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \tilde{A}_{m,r}(z) := z^{(m-r)\lambda} A_{m-r}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z].$$

On en déduira des relations entre les $\tilde{A}_{m,r}(0)$.

Pour $m = n$, par définition de λ , pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, $B_r(z)$ a un pôle d'ordre au plus $(n-r)\lambda$ en 0 donc $\tilde{B}_r(z) := z^{(n-r)\lambda} B_r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Notons que $\beta_r := \tilde{B}_r(0)$ est non nul pour au moins un r .

Soit $m \geq n$. Dérivons (18) et multiplions-la par z :

$$\begin{aligned} z(mz^{m-1} y^{(m)}(z) + z^m y^{(m+1)}(z)) &= \sum_{r=0}^{n-1} (zA'_{m,r} + rA_{m,r}) z^r y^{(r)}(z) + \sum_{r=0}^{n-1} A_{m,r} z^{r+1} y^{(r+1)}(z) \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (zA'_{m,r} + rA_{m,r}) z^r y^{(r)}(z) + A_{m,n-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} B_r z^r y^{(r)}(z) \right) + \sum_{r=1}^{n-1} A_{m,r-1} z^r y^{(r)}(z) \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (zA'_{m,r} + rA_{m,r} + A_{m,n-1} B_r + A_{m,r-1}) z^r y^{(r)}(z) \end{aligned}$$

en posant $A_{m,-1} = 0$. Donc

$$z^{m+1}y^{(m+1)}(z) = \sum_{r=0}^{n-1} (zA'_{m,r} + (r-m)A_{m,r} + A_{m,n-1}B_r + A_{m,r-1})z^r y^{(r)}(z)$$

de sorte que

$$A_{m+1,r} = zA'_{m,r} + (r-m)A_{m,r} + A_{m,n-1}B_r + A_{m,r-1},$$

si bien qu'en posant $\tilde{B}_r = z^{(n-r)\lambda}B_r$, on a

$$\tilde{A}_{m+1,r} = z^{\lambda+1}\tilde{A}'_{m,r} + (r-m)(\lambda+1)z^\lambda\tilde{A}_{m,r} + \tilde{A}_{m,n-1}\tilde{B}_r + \tilde{A}_{m,r-1}. \quad (19)$$

En effet, $(\tilde{A}_{m,r})' = z^{(m-r)\lambda}A'_{m,r} + (m-r)\lambda z^{(m-r)\lambda-1}A_{m,r}$, d'où

$$z^{(m+1-r)\lambda}A_{m+1,r} = z^{\lambda+1}(\tilde{A}'_{m,r} - \frac{(m-r)\lambda}{z}\tilde{A}_{m,r} + (r-m)z^\lambda\tilde{A}_{m,r} + \tilde{A}_{m,n-1}\tilde{B}_r + \tilde{A}_{m,r-1},$$

ce qui donne après simplification la formule (19). L'hypothèse de récurrence et (19) impliquent alors que $\tilde{A}_{m+1,r} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, ce qui achève la récurrence.

De plus, la formule (19) nous assure que si $m \geq n$, en posant $\alpha_{m,r} := \tilde{A}_{m,r}(0)$ et $\beta_r = \tilde{B}_r(0)$, on a

$$\alpha_{m+1,r} = \beta_r \alpha_{m,n-1} + \alpha_{m,r-1},$$

si bien que

$$\alpha_{m+1} := \begin{pmatrix} \alpha_{m+1,n-1} \\ \vdots \\ \alpha_{m+1,0} \end{pmatrix} = B \alpha_m, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{n-1} & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_1 & (0) & & 1 \\ \beta_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où finalement

$$\forall m \in \mathbb{N}, \alpha_m = B^m \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = {}^t(0, \dots, 0, 1). \quad (20)$$

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_m = 0$. Alors on aurait pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, $B^m(B^r \mathbf{e}) = 0$. Mais $(\mathbf{e}, \dots, B^{n-1} \mathbf{e})$ est la base canonique de \mathbb{C}^n donc $B^m = 0$. En particulier, B est nilpotente. Le théorème de Cayley-Hamilton permet alors d'affirmer que son indice de nilpotence est au plus n , d'où $B^n = 0$. Ainsi, en vertu de (20), $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) = 0$, ce qui est faux par définition de λ . Donc les α_m sont tous non nuls.

Pour $N \geq n$, notons q_N le dénominateur commun des coefficients des polynômes

$$\frac{T(z)^{m-n+1}}{m!} z^{r-m} A_{m,r}(z), \quad 0 \leq r \leq n-1, \quad n \leq m \leq N.$$

Si $T(z) = z^u T_1(z)$ avec $z \nmid T_1(z)$ et $T_1(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, on constate que q_N est également le dénominateur commun des coefficients des $\frac{T_1(z)^{m-n+1}}{m!} \tilde{A}_{m,r}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, puisque q_N est invariant par multiplication des polynômes considérés par une puissance de z .

Donc, en évaluant en 0, on obtient $\frac{q_N \gamma^{N-n+1} \alpha_{N,r}}{N!} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, avec $\gamma := T_1(0) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$. Comme les α_N sont tous non nuls, il existe r tel que $(\alpha_{N,r})_{N \geq n}$ soit non nulle pour une infinité de N ; de plus, selon (20), cette suite est bornée par une suite géométrique en valeur absolue. Donc si la condition de Galochkin *au sens large* était vérifiée, on aurait pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et N suffisamment grand,

$$\left| \frac{q_N \gamma^{N-n+1} \alpha_{N,r}}{N!} \right| \leq \frac{N!^\varepsilon}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \quad (21)$$

ce qui est impossible puisqu'une suite d'entiers algébriques tendant vers 0 est nulle à partir d'un certain rang.

Par contraposée, on obtient le résultat annoncé.

Étape 2 : Montrons, en se ramenant au cas précédent, que tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une singularité régulière.

L'opérateur L étant à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, c'est un point ordinaire de L , on s'intéressera donc uniquement aux points de $\overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$.

On note $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun des coefficients de L , on peut supposer sans perte de généralité que $T(z) \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]$ et $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$. Considérons $G(z) = A_L(z)$ la matrice compagnon de l'opérateur L . On pose $t = \max(\deg(T), \deg(TG))$ et pour $s \in \mathbb{N}^*$, on définit q_s le dénominateur des coefficients des matrices $TG, \frac{T^2 G_2}{2}, \dots, \frac{T^s G_s}{s!}$, qui sont polynomiales.

- a) Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, α est un point singulier régulier du système $y'(z) = G(z)y(z)$ si et seulement si 0 est un point singulier régulier du système $y'(u) = G_\alpha(u)y(u)$ où $G_\alpha(u) = A(u + \alpha)$. Donc avec les notations de l'équation (1), $\forall s \in \mathbb{N}, G_{\alpha,s}(u) = G_s(u + \alpha)$. De plus, le polynôme $T_\alpha(u) := d_\alpha^t T(u + \alpha) \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]$, où $d_\alpha \alpha \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, vérifie $T_\alpha(u)G_\alpha(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[u]$.

On voit que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq s$,

$$q_s \frac{T_\alpha(u)^p G_{\alpha,p}(u)}{p!} = d_\alpha^{pt} \left(\frac{q_s T^p G_p}{p!} \right) (u + \alpha) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u])$$

puisque $\frac{q_s T(z)^p G_p(z)}{p!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$ et on montre par récurrence que les coefficients de $T^p G_p$ sont de degrés au plus pt .

Donc si G satisfait la condition de Galochkin *au sens large*, G_α également. Comme G_α est la matrice compagnon d'un opérateur différentiel, on obtient par l'étape 1 que 0 est un point singulier régulier du système $y' = G_\alpha y$, c'est-à-dire que α est une singularité régulière de L .

- b) L'étude au point à l'infini est moins directe. Posons, pour y vérifiant $y' = Gy$, $\tilde{y}(u) := y(u^{-1})$. Alors $\tilde{y}'(u) = \tilde{G}(u)\tilde{y}(u)$ avec $\tilde{G}(u) = -u^{-2}G(u^{-1})$. Montrons dans un premier temps que si G vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, alors \tilde{G} également.

Remarquons que $\tilde{T}(u) := u^{t+2}T(u^{-1}) \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]$ vérifie $\tilde{T}(u)\tilde{G}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}(u))$, de sorte que, selon (2), $\tilde{T}(u)^s \tilde{G}_s(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[u]$ pour tout entier s .

Nous allons montrer par récurrence sur s que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{G}_s(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k \left(\frac{1}{u} \right) \quad (22)$$

où $c_{1,1} = 1$ et

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall 1 \leq k \leq s+1, \quad c_{s+1,k} = \begin{cases} (s+1)c_{s,1} & \text{si } k = 1 \\ c_{s,k-1} + (s+k)c_{s,k} & \text{si } 2 \leq k \leq s. \\ c_{s,s} & \text{si } k = s+1 \end{cases} \quad (23)$$

Pour $s = 1$, c'est la définition de \tilde{G} . Supposons que (22) est vérifiée pour un certain $s \in \mathbb{N}^*$; alors selon (1),

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{s+1}(u) &= \tilde{G}_s(u)\tilde{G}(u) + \tilde{G}'_s(u) = -\frac{1}{u^2}\tilde{G}_s(u)G\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G_k\left(\frac{1}{u}\right)G\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G'_k\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}\left(G_k\left(\frac{1}{u}\right)G\left(\frac{1}{u}\right) + A'_k\left(\frac{1}{u}\right)\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G_{k+1}\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s \frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s+1} \frac{c_{s+1,k}}{u^{s+1+k}}G_k\left(\frac{1}{u}\right)
\end{aligned}$$

où les coefficients $c_{s+1,k}$ vérifient la relation (23). Ceci conclut la récurrence.

Il reste à expliciter les coefficients $c_{s,k}$. Montrons par récurrence que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \forall 1 \leq \ell \leq s, \quad c_{s,\ell} = \binom{s-1}{s-\ell} \frac{s!}{\ell!} \quad (24)$$

Pour $s = 1$, on a selon (23), $c_{1,1} = 1 = \binom{0}{0} \frac{1!}{1!}$. Supposons que (24) est vraie au rang s pour un entier s donné. Soit $k \in \{1, \dots, s-2\}$. Selon (22),

$$\begin{aligned}
c_{s+1,s+1-(k+1)} &= (s+s-k)c_{s,s-k} + c_{s,s-(k+1)} = (2s-k) \binom{s-1}{k} \frac{s!}{(s-k)!} + \binom{s-1}{k+1} \frac{s!}{(s-k-1)!} \\
&\stackrel{\text{triangle de Pascal}}{=} (2s-k) \binom{s}{k+1} \frac{s!}{(s-k)!} + \binom{s-1}{k+1} \left[\frac{s!}{(s-k-1)!} - (2s-k) \frac{s!}{(s-k)!} \right] \\
&= (2s-k) \binom{s}{k+1} \frac{s!}{(s-k)!} - \binom{s-1}{k+1} s \frac{s!}{(s-k)!} \\
&= \frac{s!}{(s-k)!} \left[(2s-k) \binom{s}{k+1} - \frac{s!}{(k+1)!(s-k-2)!} \right] \\
&= \frac{s!}{(k+1)!} \frac{s!}{(s-k)!} \left[\frac{2s-k}{(s-k-1)!} - \frac{1}{(s-k-2)!} \right] \\
&= \frac{s!}{(k+1)!} \frac{s!}{(s-k)!} \frac{s+1}{(s-k-1)!} = \binom{s+1}{k+1} \frac{(s+1)!}{(s+1-(k+1))!}
\end{aligned}$$

donc, comme $c_{s+1,1} = (s+1)!$ et $c_{s+1,s+1} = 1$, la formule (24) est vérifiée au rang $s+1$, ce qui achève la preuve par récurrence.

Ainsi, si $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq s$, on a, selon (22),

$$\begin{aligned}
q_s \frac{\tilde{T}(u)^p \tilde{G}_p(u)}{p!} &= (-1)^p \sum_{\ell=1}^p \frac{c_{p,\ell}}{p!} u^{-(p+\ell)} \left(u^2 u^t T\left(\frac{1}{u}\right) \right)^p q_s G_\ell\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^p \sum_{\ell=1}^p \binom{p-1}{p-\ell} u^{p-\ell} u^{(p-\ell)t} T\left(\frac{1}{u}\right)^{p-\ell} q_s u^{\ell t} \left(\frac{T^\ell G_\ell}{\ell!} \right)\left(\frac{1}{u}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}[u])
\end{aligned}$$

de sorte qu'en notant \tilde{q}_s le dénominateur des coefficients des coefficients de $\tilde{T}\tilde{G}$, $\frac{\tilde{T}^2\tilde{G}_2}{2!}, \dots, \frac{\tilde{T}^s\tilde{G}_s}{s!}$, on a $\forall s \in \mathbb{N}^*, \tilde{q}_s \leq q_s$. Donc si la condition de Galochkin *au sens large* est vérifiée par G , elle l'est également par \tilde{G} .

Soit \tilde{L} l'opérateur différentiel sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ tel que, pour tout f , $L(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \tilde{L}(g(u)) = 0$ où $g(u) = f(u^{-1})$. Montrons à présent que le système $h' = \tilde{G}h$ est équivalent au système $h' = A_{\tilde{L}}h$, où $A_{\tilde{L}}$ désigne la matrice compagnon de \tilde{L} . Cela permettra, à l'aide du lemme 4, de conclure en utilisant la première étape qui n'est valable que pour des opérateurs différentiels.

Soit μ l'ordre de L . Notons, pour toute solution f de $L(f(z)) = 0$,

$$y(z) = {}^t(f(z), f'(z), \dots, f^{\mu-1}(z)) \quad \text{et} \quad w(u) = {}^t(g(u), g'(u), \dots, g^{\mu-1}(u)),$$

ainsi que $\tilde{y}(u) = y(u^{-1})$. Les solutions de $h' = \tilde{G}h$ (resp. $h' = A_{\tilde{L}}h$) sont les vecteurs $\tilde{y}(u)$ (resp. $w(u)$) quand $L(f(z)) = 0$.

Selon (22), pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\tilde{y}^{(s)}(u) = \tilde{G}_s(u)\tilde{y}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k \left(\frac{1}{u} \right) y \left(\frac{1}{u} \right) = (-1)^s \sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} y^{(k)} \left(\frac{1}{u} \right),$$

de sorte qu'en prenant la première composante des vecteurs de droite et de gauche, on obtient

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(s)}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^s \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} f^{(k)} \left(\frac{1}{u} \right).$$

Par conséquent, $w(u) = P(u)\tilde{y}(u)$ avec $P(u)$ une matrice triangulaire inférieure de diagonale sans termes nuls, donc élément de $\text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Ainsi, $\tilde{y} \mapsto P\tilde{y}$ réalise une bijection de l'ensemble des solutions de $h' = \tilde{G}h$ sur l'ensemble des solutions de $h' = A_{\tilde{L}}(u)h$. Ces deux systèmes différentiels sont donc équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Selon le lemme 4, comme \tilde{G} vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, il en va de même de $A_{\tilde{L}}$, c'est-à-dire de \tilde{L} . Selon l'étape 1, \tilde{L} admet 0 pour point singulier régulier, ce qui signifie par changement de variable que ∞ est une singularité régulière de L . \square

Remarques. **i)** Dans l'étape 1, si l'on suppose que $q_N = \mathcal{O}(N!^\rho)$ pour un certain $\rho \in]0, 1[$ fixé, alors l'inégalité (21) permet encore d'obtenir une contradiction. Cependant, l'étape 7 de la preuve du théorème 5 ne s'adapte pas. En effet, définissons une notion de E et G -fonction au sens « très large » en remplaçant dans la définition 2 les conditions **b)** et **c)** par : il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que $|\overline{a_n}| = \mathcal{O}(n!^\rho)$ et $\text{den}(a_0, \dots, a_n) = \mathcal{O}(n!^\rho)$, et considérons une condition de Galochkin associée en remplaçant dans la définition 3 « $\exists C > 0 : q_s \leq C^{s+1}$ » par « $\exists \rho \in]0, 1[: q_s = \mathcal{O}(s!^\rho)$ ». L'obstruction à l'adaptation de l'étape 7 à ce cas provient de la constante c_{14} dans l'inégalité (16), qui n'est pas *a priori* dans $]0, 1[$.

ii) Comme nous l'avons mentionné au cours de la preuve, Beukers avait déjà montré par l'argument de l'étape 1 que 0 est un point singulier régulier de l'équation différentielle minimale d'une certaine G -fonction *au sens strict*, sans passer par le théorème d'André-Bombieri. Une légère adaptation de la démonstration du théorème 6 permet de prouver un énoncé plus fort : la condition de Galochkin *au sens strict* implique que cette équation différentielle est fuchsienne.

La théorie d'André des E -opérateurs (voir ANDRÉ 2000a, pp. 715–724) permet de déduire le corollaire suivant.

Corollaire 1

Toute E -fonction au sens large est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dont les seules singularités sont 0, qui est un point singulier régulier, et l'infini.

Démonstration. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est une E -fonction *au sens large*, alors on définit sa transformée de Fourier-Laplace

$$\mathcal{F}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xz} f(z) dz = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une G -fonction *au sens large*. Cette transformation est bien définie, car, comme mentionné dans l'introduction, la suite $(|a_n|)_n$ est en réalité majorée par une suite géométrique $(C^{n+1})_n$ à partir d'un certain rang.

Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^* : \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \frac{d}{dz}\right] & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \frac{d}{dz}\right] \\ z & \longmapsto & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dz} & \longmapsto & -z, \end{array}$$

la transformée de Fourier-Laplace des opérateurs différentiels. Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \frac{d}{dz}\right]$ un opérateur minimal de $u^{-1}g(u^{-1})$. Comme $zg(z)$ est une G -fonction *au sens large*, par changement de variable $u = z^{-1}$, selon le théorème 6, L admet une singularité régulière en ∞ .

Or, $\mathcal{F}^*(L)$ est un opérateur différentiel annulant f , et les calculs menés dans BEUKERS 2008, p. 25, montrent que ses seules singularités sont 0 et ∞ , la première étant régulière. \square

Remarque. Si $f(z)$ est une E -fonction *au sens strict*, le résultat connu est beaucoup plus fort (cf ANDRÉ 2000a, pp. 721–722) avec notamment davantage d'informations sur la structure des solutions de l'opérateur différentiel $\mathcal{F}^*(L)$ en 0 et ∞ , qui proviennent du théorème d'André-Chudnovsky-Katz. Cependant, on n'a pas cherché à savoir si ces précisions sont encore vraies au sens large car elles ne seraient de toute manière pas nécessaires pour la suite de cet article. C'est un problème qu'il pourra être intéressant de considérer.

3 Preuve du théorème 3

Le point crucial de la preuve est la proposition suivante, conséquence du corollaire 1. Beukers en a prouvé l'analogie au sens strict dans BEUKERS 2006, p. 372.

Proposition 1

Soit f une E -fonction au sens large à coefficients rationnels. Alors si $f(1) = 0$, l'équation différentielle minimale de f admet 1 pour singularité, et elle est apparente.

Démonstration. Écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n}{n!} z^n = (1-z)g(z)$ où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_n}{n!} z^n$. Alors, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{g_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{k!} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f_k}{k!}$, puisque $f(1) = 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0(\varepsilon), |f_n| \leq (n!)^\varepsilon$. Alors, par une majoration du reste de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n!)^{1-\varepsilon}}$, on a

$$\forall n \geq n_0(\varepsilon), |g_n| \leq n! \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^{1-\varepsilon}} \right| \leq \frac{n!}{(n!)^{1-\varepsilon}} \leq (n!)^\varepsilon,$$

et de plus si $d_n = \text{den}(f_0, \dots, f_n)$, on a $\forall k \leq n, d_n g_k \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, donc $\text{den}(g_0, \dots, g_n) \leq d_n \leq (n!)^\varepsilon$ pour n suffisamment grand. Ainsi, comme g est solution de $L((1-z)g(z)) = 0$ si f vérifie $L(f(z)) = 0$, $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$, on en conclut que g est une E -fonction *au sens large*.

Selon le corollaire 1, si $M(y(z)) = 0$ est une équation différentielle minimale de g , alors elle a une base de solutions holomorphes autour de 1, notée $(g_1(z), \dots, g_\mu(z))$. Donc si $L = M \circ (1-z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$, $L(y(z)) = 0$ est une équation différentielle d'ordre minimal μ pour f possédant une base de solutions $((1-z)g_1(z), \dots, (1-z)g_\mu(z))$ holomorphes s'annulant en 1. Donc elle possède une singularité en 1, mais elle est apparente. \square

En répétant *mutatis mutandis* la preuve, basée sur des arguments de théorie de Galois différentielle, de BEUKERS 2006, pp. 373–374, on en déduit le théorème suivant. Les points clefs qui permettent de généraliser sa démonstration au cas large sont le fait qu'une E -fonction *au sens large* est une fonction entière et la proposition 1, le reste relève d'arguments généraux sur les groupes algébriques.

Théorème 7

Soit $f(z)$ une E -fonction au sens large d'équation différentielle minimale $L(y(z)) = 0$. Soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tel que $f(\xi) = 0$. Alors L a une singularité en ξ , qui est apparente.

Le théorème 3 s'ensuit par une preuve identique à celle de BEUKERS 2006, pp. 375–377.

4 Compléments

Le théorème suivant a été aussi démontré dans BEUKERS 2006. Nous allons en prouver un analogue au sens large.

Théorème 8 (Beukers)

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de E -fonctions au sens strict libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ telle que

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z)).$$

Alors il existe des E -fonctions au sens large e_1, \dots, e_n et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$ telles que

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

et (e_1, \dots, e_n) est solution d'un système de n équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}} \left[z, \frac{1}{z} \right]$.

Théorème 9

Le théorème 8 est vrai si (f_1, \dots, f_n) est une famille de E -fonctions au sens large.

La preuve est une conséquence du théorème 7, elle consiste à décrire un algorithme de désingularisation d'un système différentiel du premier ordre, en montrant qu'à chaque étape les fonctions obtenues restent des E -fonctions *au sens large*. C'est ce que la proposition suivante permet de prouver :

Proposition 2

Soient $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une E -fonction au sens large et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tel que $f(\xi) = 0$. Alors $\frac{f(z)}{z-\xi}$ est une E -fonction au sens large.

Démonstration. Quitte à remplacer $f(z)$ par $f(\xi z)$, qui est une E -fonction *au sens large*, on peut supposer que $\xi = 1$. En effet, si $h(z) = f(\xi z)$, on a $\frac{f(z)}{z-\xi} = \frac{1}{\xi} \frac{h(\xi^{-1}z)}{\xi^{-1}z-1}$.

Selon le théorème 7, comme $f(1) = 0$, toutes les solutions de l'équation différentielle minimale $L(y) = 0$ de f sont holomorphes et s'annulent en 1. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si $L = \sum_{k=0}^{\mu} a_k(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^k$, $a_k(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, on définit $L^\sigma = \sum_{k=0}^{\mu} a_k^\sigma(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^k$ en étendant σ à $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ par l'action coefficient par coefficient.

Alors on voit que $L^\sigma(y^\sigma) = L(y)^\sigma$ pour tout $y \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, donc l'espace des solutions de $L^\sigma(y) = 0$ est l'image par σ des solutions de $L(y) = 0$. En particulier, L^σ a une base de solutions holomorphes s'annulant en $1 = \sigma(1)$. D'où $f^\sigma(1) = 0$. En répétant l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 1, on obtient que si $g(z) := \frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_n}{n!} z^n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $|\sigma(g_n)| \leq (n!)^\varepsilon$ pour $n \geq n_0(\sigma, \varepsilon)$. Comme $g(z)$ est à coefficients dans un corps de nombres, il n'y a qu'un nombre fini de σ à considérer, si bien que $|\overline{g_n}| \leq (n!)^\varepsilon$ pour $n \geq n_1(\varepsilon)$.

La condition sur les dénominateurs étant vérifiée de la même manière que dans la preuve de la proposition 1, on en déduit que g est une E -fonction *au sens large*. \square

Une fois cette proposition prouvée, on obtient le théorème 9 en répétant *mutatis mutandis* la preuve de BEUKERS 2006, p. 378, à l'aide également du corollaire 1 et du théorème 7.

Dans ADAMCZEWSKI et RIVOAL 2018, Adamczewski et Rivoal ont construit, à partir de l'algorithme de la preuve du théorème 8, un algorithme permettant de déterminer les points auxquels une E -fonction donnée prend des valeurs algébriques.

Théorème 10 (Adamczewski, Rivoal)

Il existe un algorithme qui, étant donnée une E -fonction au sens strict $f(z)$, indique si $f(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou non et, si elle est transcendante, fournit la liste finie des nombres algébriques α tels que $f(\alpha)$ est algébrique, ainsi que la liste des valeurs $f(\alpha)$ correspondantes.

Proposition 3

L'algorithme du théorème précédent fonctionne si $f(z)$ est une E -fonction au sens large.

En effet, l'algorithme en question est décomposé en trois étapes, les deux premières n'étant pas particulières aux E -fonctions.

- D'abord, il détermine une équation différentielle homogène minimale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par $f(z)$. La preuve de la terminaison de cette étape vient essentiellement d'un théorème de

- Grigoriev (GRIGORIEV 1990, p. 8) et d'un lemme de zéros de Bertrand et Beukers (BERTRAND et BEUKERS 1985, p. 182), qui sont valables sur les opérateurs différentiels en général.
- Puis il détermine, à partir de l'équation de l'étape précédente, une équation différentielle minimale inhomogène sur $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, $u_0(z)y^{(s)}(z) + \cdots + u_s(z)y(z) + u_{s+1}(z) = 0$, avec $u_0 \neq 0$, dont $f(z)$ est solution. Là encore, cette procédure est valable pour n'importe quel opérateur différentiel.
 - La troisième étape détermine, quels éléments α parmi les racines du polynôme $u_0(z)$ vérifient $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Le fait que les autres nombres algébriques sont exclus est une conséquence du théorème 2, qui est vrai au sens large selon le théorème 3. Cette étape consiste principalement à appliquer l'algorithme de désingularisation décrit dans la preuve du théorème 8, qui est valable au sens large selon le théorème 9.

Références

- ADAMCZEWSKI, B. et T. RIVOAL (2018). « Exceptional values of E -functions at algebraic points ». In : *Bull. London Math. Soc.* 50.4, p. 697–708.
- ANDRÉ, Y. (1989). *G-Functions and Geometry : A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn*. 1^{re} éd. Aspects of Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag.
- (2000a). « Séries Gevrey de type arithmétique, I. Théorèmes de pureté et de dualité ». In : *Annals of Mathematics* 151, p. 705–740.
- (2000b). « Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance ». In : *Annals of Mathematics* 151, p. 741–756.
- (2014). « Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence ». In : *Annales scientifiques de l'ENS* 47 (2), p. 449–467.
- BERTRAND, D. et F. BEUKERS (1985). « Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités ». In : *Annales scientifiques ENS* 18.1, p. 191–192.
- BEUKERS, F. (2006). « A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem ». In : *Annals of Math.* 163, p. 369–379.
- (2008). *E-functions and G-functions*. notes disponibles sur `swc.math.arizona.edu/aws/2008/08BeukersNotesDraft.pdf`.
- CHUDNOVSKY, D. et G. CHUDNOVSKY (1984). « Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G -functions ». In : *Number Theory*. Lecture Notes in Mathematics 1135. Springer Berlin, p. 9–51.
- DWORK, B., G. GEROTTO et F. J. SULLIVAN (1994). *Introduction to G-functions*. AM 133. Princeton University Press.
- GALOCHKIN, A. I. (1974). « Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class ». In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 24, p. 385–407.
- GRIGORIEV, Yu. (1990). « Complexity of factoring and calculating the GCD of linear ordinary differential operators ». In : *J. Symb. Comput.* 10, p. 7–37.
- NESTERENKO, Yu. V. et A. B. SHIDLOVSKII (1996). « On the linear independence of values of E -functions ». In : *Math Sb.* 187. traduit en anglais dans *Sb. Math* 187 (1996), 1197–1211, p. 93–108.
- PERRON, O. (1911). « Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten ». In : *Acta Mathematica* 34, p. 139–163.
- RAMIS, J.-P. (1984). « Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires ». In : *Memoirs A.M.S.* 48.296.
- SAULOY, J. (2016). *Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondence : An Elementary Introduction*. T. 177. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

- SHIDLOVSKII, A. B. (1989). *Transcendental Numbers*. T. 12. Degruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter.
- SIEGEL, C. L. (1929). « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen ». In : *Abh. Preuss. Akad. Wiss.* P. 41–69.
- (1949). *Transcendental Numbers*. Princeton University Press.

G. Lepetit, Université Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, 38000 Grenoble, France.
gabriel.lepetit@univ-grenoble-alpes.fr.

Mots clefs : E et G -fonctions, E et G -opérateurs, théorème de Chudnovsky.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 11J91, Secondary 34M03, 34M35.